



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
DIRETORIA DE ENSINO
DEPARTAMENTO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O USO DA DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS COMO FERRAMENTA
FACILITADORA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS : NO
CONTEXTO DO POTIFPI

TAMIRES DA SILVA GOMES

TERESINA-PI

Janeiro /2020

TAMIRES DA SILVA GOMES

**O USO DA DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS COMO FERRAMENTA
FACILITADORA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS : NO
CONTEXTO DO POTIFPI**

Teresina-PI
Janeiro /2020

TAMIRES DA SILVA GOMES

**O USO DA DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS COMO FERRAMENTA
FACILITADORA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS : NO
CONTEXTO DO POTIFPI**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC),
apresentado à Coordenação do curso de
Licenciatura em Matemática, como requisito
parcial para obtenção do diploma do curso de
Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí – Campus Teresina Central.

Aprovada em: __/__/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc. Domingos Ponciano (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Campus Teresina Central. (IFPI)

Prof.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Campus Teresina Central. (IFPI)

Prof.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Campus Teresina Central. (IFPI)

O USO DA DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS COMO FERRAMENTA FACILITADORA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS : NO CONTEXTO DO POTIFPI

Tamires da Silva Gomes¹
Professor Orientador: Domingos Ponciano²

RESUMO

As olimpíadas de matemática são competições que trazem questões com problemas atípicos que exigem muita criatividade, uso de fórmulas e raciocínio. Alguns problemas de olimpíadas não dispõem de ferramentas elementares para obter a solução imediata dessas questões, a desigualdade das médias surge como alternativa viável para solucionar muitos desses problemas. No presente trabalho faremos uma revisão bibliográfica sobre o conceito das médias, definindo cada uma e finalizaremos apresentando questões de olimpíadas e suas respectivas soluções

Palavras chave: Olimpíadas. Desigualdade das médias. Problemas

Tamires da Silva Gomes
Teacher divisor: Domingos Ponciano

ABSTRACT

Math Olympics are competitions that bring up issues with atypical problems that require a lot of creativity, formula, and reasoning. Some Olympics problems do not have elementary tools to solve these questions immediately, the inequality of averages is a viable alternative to solve many of these problems. In this paper we will review the concept of averages, defining each one and ending by presenting Olympics issues and their solutions.

Keywords: Olympics Inequality of averages. Problems

¹ Graduando Curso de Licenciatura em Matemática. Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI.
E-mail: tamyresgomes12@gmail.com

² Professor Mestre do IFPI – Campus Teresina Central. E-mail: domingosponciano@ifpi.edu.br

1 INTRODUÇÃO

É notório que certos problemas de matemática relacionados competições olímpicas representam grandes desafios para quem tenta resolvê-los. Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática são hoje conteúdos pouco trabalhados, porém muito significante no dia a dia bem como cobrados em diversos níveis e provas. Nesse sentido, propõe-se uma abordagem bibliográfica a fim de sugerir ferramentas que facilitem a resolução de questões.

Este trabalho visa destacar o estudo de desigualdades matemáticas como ferramenta facilitadora na resolução de problemas a nível de olimpíada.

Os primeiros problemas sobre desigualdades surgiram, por volta do século IV a.C devido a necessidade de ordenar números, de aproximar cálculos e fazer medidas. Após seu surgimento as desigualdades conseguiram espaço e tornaram-se objeto de estudo de importantes matemáticos, como Euclides, Arquimedes, Jacques Bernoulli, Cauchy, entre outros.

Diversas questões de olimpíadas de matemática, são resolvidas com ferramentas muito elaboradas das médias. As desigualdades podem contribuir para uma resolução com argumentações básicas e descomplicadas. Estudar as desigualdades matemáticas nos oportuniza passar por aplicações em problemas de olimpíadas de Matemática, demonstrar vários teoremas importantes. O presente trabalho trata de algumas desigualdades entre as médias e as aplicabilidades em problemas olímpicos. Ao enumerar alguns dos problemas a nível olimpíada neste trabalho pretende-se levar conhecimento instigar o interesse no pensamento matemático para os alunos do ensino médio e apresentar ferramentas auxiliaadoras para a resolução de alguns deles, entre essas ferramentas a desigualdade entre as médias tem destaque por resolver muitos desses problemas, muitas vezes muito complexos. Selecionamos, em meio à bibliografia pertinente, problemas que possam ser solucionados com o uso da desigualdade das médias

A matemática nos permite raciocinar e ter uma visão bem mais lógica em relação as coisas, estudar matemática contribui na resolução de problemas de várias áreas do conhecimento além de ajudar em situações do cotidiano como comércio, ciências, dentre outros. A matemática nos ajuda a entender e perceber o mundo ao nosso redor. Tal situação expõe grande importância que essa disciplina tem em nossas vidas. Para aprender conteúdos de matemática é necessário praticar, resolver problemas pois assim só assim é possível fixar conteúdos, ferramentas e ideias relacionadas a disciplina. Segundo Polya (1978):

Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esqui ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática.(...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas', tem que resolver problemas". (p. 65)

É muito importante incentivar o aluno a resolver o problema por conta própria, assim é possível instigar o pensamento matemático, atividades práticas são muito importantes no processo de aprendizagem pois mais interessante que saber a teoria é conseguir colocar o conhecimento em prática. Os alunos que se preparam para olimpíadas de matemática costumam ser curiosos e sentem satisfação ao resolverem questões por conta própria em Segundo Dante (2000, p.12 e 13)

“A busca da solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir. O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno por si só resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema suscita a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo.”

Trazer uma nova forma de resolver problemas de olimpíadas pode ajudar o aluno a aumentar seu campo de visão e raciocínio com relação a questões similares. Assim quando o aluno se deparar com problemas semelhantes, o mesmo já terá mais facilidade para resolvê-lo. Segundo Onuchic (1999).

“Quando os professores ensinam matemática através de resolução de problemas, eles dão a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.”

2. O PROJETO POTIFPI

Polo Olímpico de Treinamento do IFPI (POTIFPI), para olimpíadas de matemática é um projeto desenvolvido no Instituto Federal do Piauí Campus Teresina Central, com atividades propostas e aos sábados ocorrem os encontros presenciais com aulas expositivas abordando conteúdos voltados para a preparação dos discentes para as competições olímpicas, juntamente com simulados bimestrais. o objetivo do POTIFPI É despertar, nos discentes, o interesse pelas disciplinas envolvidas. As olimpíadas de matemática (OBMEP e OBM) tem revelado talentos e incentivado o interesse aos estudos. Nesse centro de treinamento são abordados conteúdos que visam despertar ou aprimorar um raciocínio lógico apurado que contribui para o bom desenvolvimento em todas as áreas da vida escolar dos discentes. As aulas preparatórias ocorrem aos sábados de 8h às 12h, sempre com um professor e seu respectivo monitor desenvolvendo aulas teóricas e práticas com exercícios e visitas aos laboratórios (Modelagem e informática). Além dos encontros presenciais aos sábados, são desenvolvidas ao longo da semana atividades como lista de questões e vídeo aulas em plataformas virtuais: Google Drive e grupos de Whatsapp. Simulados da OBMEP são realizados bimestralmente, com o intuito de preparar os alunos para as competições. Os participantes medalhistas podem pleitear bolsas de iniciação científica júnior junto ao PIC/IMPAC como um incentivo a permanência desses alunos no projeto. Os alunos interessados em participar fizeram um teste seletivo (uma prova com semelhantes às questões da OBMEP dos anos anteriores). Foram selecionados os alunos com melhor desempenho na prova.

3 MÉDIAS

3.1 O CONCEITO DE MÉDIA

Considere uma sequência finita de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma operação sobre os membros da sequência. Uma média dos elementos da sequência com respeito à operação $*$ é um número real M com a propriedade de substituir todos os elementos da sequência no que diz respeito a operação $*$, isto é:

$$x_1 * x_2 * \dots * x_n = M * M * \dots * M$$

Observação. O conceito geral de média descrito acima é abstrato, portanto, devemos especializá-lo para encontrar importantes tipos usuais de média. Nos casos que trabalharemos a média é de fato um número intermediário, isto é:

$$\min\{x_i\} \leq M \leq \max\{x_i\}.$$

3.2 MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética (simples) é a média com respeito a operação de adição, desta forma, a média aritmética simples de uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o número A tal que :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = A + A + \dots + A = n \cdot A,$$

Logo concluímos que :

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Podemos observar que a terminologia média aritmética está relacionada à progressão aritmética (PA), onde cada termo, exceto pelos extremos, é média

aritmética dos termos equidistantes. Note que podemos tomar essa afirmação acima como definição de uma PA, pois em particular teríamos:

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$$

para $i = 2, 3, \dots, n-1 \Leftrightarrow a_{i+1} - a_i = a_i - a_{i-1} = r$ para $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Onde r é constante e é denominada razão da PA.

3.3 MÉDIA PONDERADA

É a média com respeito à operação de adição com pesos. Desta forma, a média ponderada de uma sequência de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com pesos $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é o número P tal que

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = p_1 P + p_2 P + \dots + p_n P,$$

logo, concluímos que:

$$P = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Aplicação . A soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Solução: Observe que a soma dos termos equidistantes dos extremos é constante, ou seja, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$ (de fato, basta observar que $a_1 + a_n = a_1 + r - r + a_n = a_2 + a_{n-1}$ e de modo análogo para as demais igualdades). Logo, para somar os n primeiros termos de uma PA podemos agrupá-los em $(n/2)$ pares cuja soma é a $1 + a_n$. (Pense um pouco no caso de n ímpar).

3.4 MÉDIA GEOMÉTRICA

Definição 4. A média geométrica é a média com respeito à operação de multiplicação, desta forma, a média geométrica de uma sequência de números reais positivos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o número G tal que

$$x_1 x_2 \dots x_n = G G \dots G = G^n$$

Logo concluímos que:

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Podemos observar que terminologia média geométrica está relacionada à progressão geométrica (PG), onde o módulo de cada termo, exceto os extremos, é média geométrica dos termos equidistantes. De fato temos,

$$|a_i| = \sqrt{a_{i-1} a_{i+1}} \text{ para } i = 2, 3, \dots, n-1 \Leftrightarrow \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_{i+1}}{a_i} = q \text{ para } i = 2, 3, \dots, n-1,$$

onde q é uma constante denominada razão da PG.

3.5 MÉDIA HARMÔNICA

Definição 5. A média harmônica é a média com respeito a operação de soma dos inversos, desta forma, a média harmônica de uma sequência de números reais não nulos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o número H tal que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H} \cdots \frac{1}{H} = \frac{n}{H}$$

logo, concluímos que:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

A exemplo do ocorrido nas médias anteriores, podemos observar que terminologia média harmônica está relacionada com a noção de progressão harmônica, uma progressão cujos inversos multiplicativos dos termos estão em PA. Cada termo, exceto os extremos, de uma progressão harmônica é a média harmônica dos termos equidistantes.

3.6 MÉDIA QUADRÁTICA

Definição 6. A média quadrática é a média com respeito a operação de soma dos quadrados, desta forma, a média quadrática de uma sequência de números reais não nulos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o número Q tal que

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = Q^2 + Q^2 + \dots + Q^2 = n \cdot Q^2 ,$$

logo concluímos que:

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Aplicação: A maneira estatisticamente mais natural de medir o quanto uma sequência de números se dispersou da média aritmética é através do desvio padrão. O desvio padrão (que denotamos por σ) é a média quadrática dos desvios individuais. Ou seja, dados $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e denotando por $\bar{x}$ a média aritmética dos x_i 's temos

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

DESIGUALDADE DAS MÉDIAS E PROBLEMAS

Teorema : (Desigualdades das médias). Sejam $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ números reais positivos em ordem crescente e denotemos por H, G, A, Q respectivamente as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática desses números, então temos as seguintes desigualdades:

$$x_1 \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq x_n$$

Além disso, a igualdade em qualquer ponto das desigualdades acima é possível se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ e, nestas condições, teremos necessariamente a igualdade de todas as médias

Demonstração: Restringiremos a demonstração para o caso $n = 3$ e $n = 4$. Começaremos com a desigualdade $A \geq G$. Várias demonstrações desse resultado para $n = 2$ podem ser vistas em (Lima, 2006).

Faremos a demonstração para o caso $n=4$ e em seguida mostraremos que a desigualdade vale para $n=3$. Começaremos provando que $A \geq G$ vale para $n=2$. De fato, tomando x e y reais positivos, temos,

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \quad ,$$

com a igualdade só ocorrendo se, e somente se $\left(\frac{x-y}{2}\right)=0$, ou seja, $x = y$.

O resultado da desigualdade $A \geq G$ para o caso $n=4$ é obtido imediatamente aplicando o caso $n=2$ duas vezes como podemos observar abaixo. Considerando x, y, z e t reais positivos, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z+t}{4} &= \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{z+t}{2}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{z+t}{2}\right)} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{zt}} \\ &= \sqrt{\sqrt{xyzt}} \\ &= \sqrt[4]{xyzt} \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade acima, a igualdade só ocorre se, e somente se, $\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{z+t}{2}\right)$, ou seja $x + y = z + t$. Na segunda desigualdade, a igualdade ocorre se, $x = y$ e $z = t$. Juntando as duas condições, a igualdade $A = G$ para o caso $n=4$ só ocorre se, e somente se, $x = y = z = t$.

Provaremos agora o caso $n=3$ supondo válido o caso $n=4$. Considere x, y e z reais positivos, e denote

$$A = \frac{x + y + z}{3}$$

Logo temos que :

$$\frac{x + y + z + A}{4} = A = \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[4]{xyzA}$$

Portanto,

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{x+y+z+A}{4} \geq \sqrt[4]{xyzA}$$

com a igualdade ocorrendo apenas se, e somente se, $x = y = z$. Elevando ambos lados da desigualdade a 4ª potência, temos:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^4 = A^4 \geq xyzA.$$

Como $A > 0$, podemos cancelá-lo de ambos lados, obtendo a desigualdade desejada

$$A^3 \geq xyz \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Para provar que $G \geq H$, basta calcular as médias aritmética e geométrica entre $(1/x)$, $(1/y)$ e $(1/z)$, e aplicar a desigualdade, $A \geq G$.

$$\begin{aligned} A \geq G &\Leftrightarrow \frac{1^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}}{3} \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \\ &\Leftrightarrow H \leq G \end{aligned}$$

Para a última desigualdade, $Q \geq A$, considere a expressão, $(x-A)^2 + (y-A)^2 + (z-A)^2 \geq 0$, que é válida para quaisquer reais x , y e z , onde a igualdade só ocorre quando $x = A$, $y = A$ e $z = A$. Logo,

$(x-A)^2 + (y-A)^2 + (z-A)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+y+z)A + 3A^2 \geq 0$. Como $(x+y+z) = 3A$, temos: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3A^2$. Donde concluímos: $Q \geq A$. Note que os argumentos utilizados para mostrar essa duas últimas desigualdades ($H \leq G$ e $A \leq Q$) podem ser utilizados para o caso geral de n natural.

QUESTÃO 1. Qual o maior valor possível para $S = \sin x + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$?

Solução: Aplicando a desigualdade $A \leq Q$ temos,

$$\frac{\sin x + \cos x}{2} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo o valor máximo para S é $\sqrt{2}$ e ocorre quando $\sin x = \cos x = \sqrt{2}/2$, ou seja, quando $x = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

QUESTÃO 2. Sejam a , b e c números reais positivos e suponha que $ax^2 + by^2 = c$, determine x e y reais positivos, tais que $P = xy$ seja máximo.

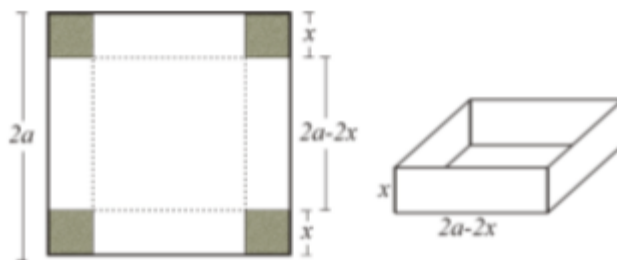
Solução: Utilizando a desigualdade $G \leq A$, temos,

$$p\sqrt{ab} = \sqrt{ax^2 + by^2} \leq \frac{ax^2 + by^2}{2} = \frac{c}{2}$$

Logo, o valor máximo para P ocorre quando $ax^2 = by^2 = \frac{c}{2}$, ou seja quando

$$x = \sqrt{\frac{c}{2a}} \text{ e } y = \sqrt{\frac{c}{2b}}$$

Questão 3. Numa folha de cartolina quadrada de lados $2a$ retiramos quadrados de lado $x < a$ de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um quadrado de lado $2a-2x$ e altura x . Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?



Solução : O volume da caixa pode ser calculado fazendo $V=(2a - 2x)^2x$. Conforme comentado anteriormente, aplicamos as desigualdades das médias escolhendo adequadamente os termos de modo a obter uma cota máxima independente de x . Para esse problema aplicamos a desigualdade $G \leq A$ para os valores de $(2a - 2x)$, $(2a - 2x)$ e $4x$,

$$\sqrt[3]{4v} = \sqrt[3]{(2a - 2x)(2a - 2x)(4x)} \leq \frac{(2a - 2x) + (2a - 2x) + (4x)}{3} = \frac{4a}{3}$$

Logo, pela desigualdade acima, o valor máximo para o volume da caixa ocorre quando $\sqrt[3]{4v}$ for igual a $\frac{4a}{3}$, e isso acontece quando $2a-2x = 4x$. Portanto, o volume máximo é

$$V = \frac{16a^3}{27} \text{ e é obtido fazendo } x = \frac{a}{3}$$

QUESTÃO 4. Qual o volume máximo de um cilindro regular inscrito em uma esfera?

Solução: Utilizando as denominações fornecidas pela figura acima, o volume do cilindro pode ser calculado fazendo $\mathcal{V} = \pi r^2 2x$. Aproveitando que $R^2 = x^2 + r^2$, podemos reescrever $\mathcal{V} = 2\pi x(R^2 - x^2) = 2\pi x(R-x)(R+x)$. O artifício agora consiste em utilizar a desigualdade $G \leq A$, com os termos de $\mathcal{V}$ colocados em G e fazer A constante. Para tanto, acrescentaremos α e β de modo a não alterar o produto em G , mas com o objetivo de tornar A independente de x . Procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\mathcal{V}} &= \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta} x\alpha(R-x)\beta(R+x)} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta} x\alpha(R-x)\beta(R+x)} \\ &\leq \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta} \left(\frac{x+\alpha(R-x)+\beta(R+x)}{3} \right)}\end{aligned}$$

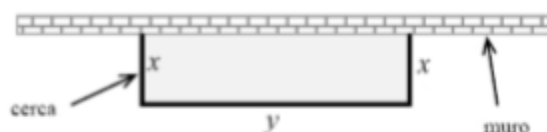
Onde a desigualdade acima temos um fator comum $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}$ e a desigualdade $G \leq A$, calculadas nos termos x , $\alpha(R-x)$ e $\beta(R+x)$. Note que em A temos no numerador $x + \alpha(R-x) + \beta(R+x) = (1 + \beta - \alpha)x + (\alpha + \beta)R$. Como queremos que A independa de x , fazemos $\alpha - \beta = 1$ (*). Porém, sabemos que a igualdade das médias só ocorre (ou seja, o máximo para $\mathcal{V}$ quando $x = \alpha(R-x) = \beta(R+x)$). Portanto

$$\begin{aligned}\frac{x}{R-x} - \frac{x}{R+x} &= 1 \\ x \left(\frac{R+x - R+x}{R^2 - x^2} \right) &= 1 \\ 2x^2 &= R^2 - x^2 \\ x &= \frac{R}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Logo o volume máximo para o cilindro inscrito numa esfera de raio R será $v = \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$

QUESTÃO 5. (ProfMat) Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído.

Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.



Solução: Conforme indicado na figura temos $2x + y = 40$. Pela desigualdade $A \geq G$ temos,

$$20 = \frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{2A},$$

logo a área será máxima, quando $\sqrt{2A} = 20 \therefore A = 200$, e acontece quando $2x = y = 20$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A desigualdade entre as médias sugere em algumas situações uma resolução de problemas olímpicos mais rápida, otimizando assim o tempo para o aluno resolver uma prova de tal nível. A proposta do trabalho também é sugerir para turmas de preparação para olimpíadas uma ferramenta facilitadora na resolução de problemas. No IFPI temos uma turma que contempla esse tipo de atividade “pólo olímpico de treinamentos para olimpíadas do IFPI” - POTIFPI que tem como objetivo principal desenvolver nos discentes o interesse pelos estudos em matemática, preparando-os para competições olímpicas. Além disso os alunos que participam desse projeto de treinamento têm apresentado bons resultados não somente nas competições, mas também no desenvolvimento acadêmico, uma vez que nesse centro de treinamento

são abordados conteúdos que visam despertar ou aprimorar um raciocínio lógico apurado que contribui para o bom desenvolvimento em todas as áreas da vida escolar dos discentes. A utilização da desigualdade das médias ajuda otimizar o tempo de resolução de alguns problemas além de ser uma ferramenta que pode ser usada em outras situações ou em outras áreas do conhecimento(na economia , na estatística , nas engenharias) Esta pesquisa é de grande valia para os alunos do ensino médio pois instiga o interesse no pensamento matemático. Além disso proporciona a nós professores colocarmos a em prática conhecimentos adquiridos em nossa formação acadêmica para a descoberta de novos talentos.

5 REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Didática da resolução de problemas de matemática. São Paulo: Ática, 2000.

PÓLYA, G. A Arte de Resolver Problemas. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

ONUICHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo, Editora Unesp. 1999. p. 199-218

LAKATOS, Eva e Marconi, Marina. Metodologia do Trabalho Científico. SP : Atlas, 1992.

CUNHA, Maria Isabel da. O bom professor e sua prática. Campinas: Papirus, 1989.

FREIRE, P. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

CARVALHO, L. M. A. C. Problemas com Desigualdades para o Ensino Secundário. Portugal: Universidade de Lisboa, 2012.

COSTA DA FONTE, André Médias, desigualdades e problemas de otimização. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013.

HARIKI, Seiji. Média Harmônica. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 32, p. 17-24, 1996.

SILVA, Luiz Eduardo Landim. Desigualdade Entre as Médias Geométrica e Aritmética e de Cauchy-Schwarz. Fortaleza, 2013. Dissertação (Mestrado apresentada ao

Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará.