



INSTITUTO FEDERAL, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
***CAMPUS* PARNAÍBA**
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

ANTÔNIO PETRÚCIO LIMA OLIVEIRA

HIDRODINÂMICA CIRCUNSTELAR E SUAS IMPLICAÇÕES NA
FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS NO MEIO INTERESTELAR

PARNAÍBA
2021

ANTÔNIO PETRÚCIO LIMA OLIVEIRA

HIDRODINÂMICA CIRCUNSTELAR E SUAS IMPLICAÇÕES NA FORMAÇÃO DE
ESTRUTURAS NO MEIO INTERESTELAR

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para a obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí *Campus* Parnaíba.

Orientador: Prof. Me. Marcos Antônio Matos Souza

PARNAÍBA
2021

ANTÔNIO PETRÚCIO LIMA OLIVEIRA

**HIDRODINÂMICA CIRCUNSTELAR E SUAS IMPLICAÇÕES NA
FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS NO MEIO INTERESTELAR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência parcial para obtenção do di-
ploma do Curso de Licenciatura em Física
do Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí/Campus Parnaíba.

Aprovado em: __/__/____.

BANCA AVALIADORA

Prof. Me. Marcos A. M. Souza
Orientador

Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento
Convidado 1

Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos
Convidado 2

PARNAÍBA

2021

A minha querida avó Maria Madalena Sousa Lima (in memoriam), cuja presença foi essencial em minha vida.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de ter ingressado no curso apesar de todas as dificuldades durante minha trajetória. Acredito fortemente que Ele me permitiu manter o foco e a força de vontade dia após dia, conservando o sentimento de continuidade através da perseverança, ao enxergar que esta conclusão é o início de um sonho.

Aos meus pais, irmãos e tios, por entenderem minhas ausências, e por me apoiarem nessa jornada árdua e gratificante. Por dedicarem seus esforços para me proporcionar uma educação de qualidade e acreditarem que o estudo é uma oportunidade única e invejável de descobrir o mundo; por fomentar um espírito livre, generoso e fiel a seus ideais e principalmente por moldar um indivíduo imperfeito, falho, mas acima de tudo humano.

Ao meu orientador Marcos Antônio Matos Souza, pelas correções e sugestões na construção desse trabalho, pelo apoio e dedicação, e sobretudo por estar sempre disposto a ajudar.

Ao IFPI, direção e administração pelo suporte, pelo comprometimento a todo o público acadêmico. Aos docentes pelos ensinamentos, aperfeiçoamentos e fundamentalmente pelo incentivo para que cada um evolua e molde-se da melhor forma possível.

A Srta. Vilar, que me faz recordar Perseu, o herói grego que salvou Andrômeda.

A Zulima Vilar a quem tenho como uma segunda mãe.

Aos meus amigos de estudos e agora irmãos, a quem tenho grande respeito e admiração.

“Demore o tempo que for para decidir o que
você quer da vida, e depois que decidir não
recue ante nenhum pretexto, porque o mundo
tentará te dissuadir”.

Friedrich Nietzsche (1844-1900)
Filósofo Alemão.

Resumo

Os conhecimentos adquiridos acerca do universo e seus mecanismos são fundamentais no estudo da astrofísica, eles são o caminho para compreender uma ampla gama de fenômenos astronômicos. Este trabalho foi desenvolvido de forma bibliográfica e tem como objetivo definir conceitos acerca da hidrodinâmica que tem aplicação direta no estudo do meio interestelar e suas estruturas; apresentamos a descrição de um fluido e o conceito de campo para descrever as propriedades do escoamento em função do espaço e do tempo, com o propósito de fornecer aporte para a compreensão dos fenômenos hidrodinâmicos do meio estelar; também foi abordado de forma superficial a equação de Navier-Stokes para fluidos viscosos afim de examinar as alterações na equação de Euler, já que a viscosidade é uma manifestação dos processos irreversíveis da dissipação de energia. Por fim, apresentamos algumas evidências observacionais dos ventos estelares, a taxa de perda de massa e sua influência sobre o meio interestelar.

Palavras-chaves: Astrofísica, hidrodinâmica, meio interestelar, ventos estelares.

Abstract

The knowledge acquired about the universe and its mechanisms are fundamental in the study of astrophysics, they are the way to understand a wide range of astronomical phenomena. This work was developed in a bibliographic way and aims to define concepts about hydrodynamics that have direct application in the study of the interstellar medium and its structures; we present the description of a fluid and the concept of field to describe the flow properties as a function of space and time, with the purpose of providing input for the understanding of the hydrodynamic phenomena of the stellar medium; the Navier-Stokes equation for viscous fluids was also superficially addressed in order to examine changes in the Euler equation, since viscosity is a manifestation of irreversible energy dissipation processes. Finally, we present some observational evidence of stellar winds, the rate of mass loss and its influence on the interstellar medium.

Keywords: Astrophysics, hydrodynamics, interstellar medium, stellar winds.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Nebulosa da Roseta ou NGC 2237.	7
2	Elemento de Fluido.	13
3	Filete de corrente	16
4	Localização da partícula com o vetor posição.	19
5	O conceito de tensão em um meio contínuo	22
6	Componentes da força e tensão sobre o elemento de área δA_x	23
7	Perfil P Cygni na estrela HD93204, com os valores de comprimento de onda indicados entre parênteses.	41
8	Representação de um diagrama HR, mostrando a localização de algumas estrelas conhecidas	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	6
2	CAPÍTULO I - HIDRODINÂMICA.....	10
2.1	FLUIDO IDEAL.....	11
2.2	EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	12
2.3	EQUAÇÃO DE BERNOULLI.....	15
3	CAPÍTULO II - CAMPO DE ESCOAMENTO.....	18
3.1	CAMPO DE VELOCIDADES	18
3.2	CAMPO DE ACELERAÇÃO	19
3.3	CAMPO DE TENSÃO.....	21
3.4	DESCRIÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER	23
3.5	TERMODINÂMICA	26
3.5.1	PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA	27
3.5.2	EQUAÇÃO DE ESTADO	29
3.6	CONSERVAÇÃO DE ENERGIA EM UM FLUIDO	30
4	CAPÍTULO III - INTRODUÇÃO A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES E AOS VENTOS ESTELARES	33
4.1	EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES.....	33
4.2	VENTOS ESTELARES.....	37
4.3	EVIDÊNCIAS OBSERVACIONAIS	39
4.3.1	PERFIS P CYGNI.....	40
4.3.2	A LINHA $H\alpha$ EM EMISSÃO.....	41
4.3.3	EXCESSO INFRATERMELHO E RÁDIO	41
4.3.4	EMISSÃO INFRATERMELHA.....	42
4.4	MECANISMO DE EJEÇÃO DE MASSA	42
4.4.1	O DIAGRAMA DE HERTZSPRUNG - RUSSELL.....	42
4.4.2	VENTOS CORONAIS	44
4.4.3	VENTOS IMPULSIONADOS POR ONDAS SONORAS.....	44
4.4.4	VENTOS CONDUZIDOS PELA POEIRA CIRCUNSTELAR.....	45
4.4.5	VENTOS E CAMPOS MAGNÉTICOS: ONDAS DE ALFVÉN	46

5	A INFLUÊNCIA NA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS NO MEIO INTERESTELAR	47
5.1	TAXA DE PERDA DE MASSA.....	48
5.2	INTERAÇÃO DOS VENTOS ESTELARES COM O MEIO INTERESTELAR	49
6	CAPÍTULO IV - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
	REFERÊNCIAS	52
A	APÊNDICE A.....	54
A.1	INTRODUÇÃO	54
B	ÁLGEBRA TENSORIAL	55
B.1	ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE TENSORES	55
B.2	MULTIPLICAÇÃO DE TENSORES	56
B.3	CONTRAÇÃO DE TENSORES.....	56
A	APÊNDICE B.....	56
A.1	INTRODUÇÃO.....	56
A.2	A EQUAÇÃO DE EULER SEM FORÇAS EXTERNAS.....	57

1 INTRODUÇÃO

O universo teve um início e terá um final. O mesmo acontece com as estrelas - elas nascem e morrem. Quando olhamos para o céu à noite vemos as estrelas distribuídas sem um padrão. Percebemos que a maioria faz uma faixa no céu mostrando que nossa galáxia é um disco achatado. Quanto mais longe olhamos, mais estrelas vemos em nosso campo de visão. Se olhássemos para o infinito, nosso campo estaria totalmente preenchido, mas a noite é escura e isto quer dizer que não existem estrelas até o infinito e que o universo tem uma idade (WEIGERT, 2017).

O universo sempre teve espaço reservado em nossa imaginação, é a principal fonte de inspiração de filósofos, poetas e astrônomos de todas as épocas; o mistério sobre o universo e suas leis continua a mexer com nossa concepção; ele é, e continua sendo nosso laboratório a céu aberto. Graças a ele que diversas áreas da astronomia puderam progredir em tão curto intervalo de tempo, as experiências de pensamento, que jamais seriam realizadas na terra, no céu ocorrem naturalmente. Vislumbrar o céu é uma prática que remota a milênios de anos, gregos, egípcios e astecas o fizeram, e agora, séculos depois, a prática continua, buscando entender os mecanismos da dinâmica do universo.

Provavelmente, as estrelas ocupam a maior parte do céu visível, preenchendo grande parte da nossa Via Láctea, mas não são as únicas constituintes do universo, além delas encontram-se nebulosas, gás interestelar, poeira interestelar e raios cósmicos; ao contrário do que sugere o senso comum, o meio interestelar não é completamente vazio, possui uma variedade diversificada de propriedades e objetos, sendo constituído em sua grande parte de gás e poeira. O meio interestelar é formado por restos de estrelas que terminaram suas vidas em supernovas, ejetando grande parte dos seus componentes ao espaço de onde vieram. O meio interestelar tem sua importância no estudo do universo, é nele que as estrelas tem seu alvorecer, e é para ele que todos os elementos voltam ao fim do ciclo estelar (MACIEL, 2011).

Na grande quantidade de componentes cósmicos, são as galáxias as que mais aparecem. As últimas estimativas mostram que o universo observável pode conter 100 bilhões delas. Brillhantes, bonitas e cheias de estrelas, as galáxias decoram os vazios escuros do espaço como as cidades em um país à noite, mas exatamente quão vazio é o vazio do espaço? (TYSON, 2017).

A nossa galáxia tem esse nome devido aos gregos antigos, que a viam como um caminho de leite derramado no céu, podemos observar a olho nu uma pequena porção das estrelas que constituem o disco da galáxia, as duas outras galáxias que aparecem menores no céu foram observadas em 1519, pelo navegador português Fernão de Magalhães, que durante sua famosa viagem ao redor do mundo, observou as nuvens cósmicas. Em sua homenagem, foram denominadas de Grande e Pequena Nuvem de Magalhães, elas são vistas como um par de manchas em forma de nuvem no céu, imóveis além das estrelas. Além das galáxias, outros objetos também fazem parte dos constituintes cósmicos, entre eles temos as nebulosas, que são formadas principalmente por nuvens de gás e poeira: são regiões de formação estelar, ou seja, com estrelas muito jovens, com idades de alguns milhões de anos. Um exemplo, é a nebulosa da Roseta, que pode ser vista na Figura 1.



Figura 1. Nebulosa da Roseta ou NGC 2237.

Fonte: <https://apod.nasa.gov>. Acesso: mai. 2020

A nebulosa de Roseta não é a única nuvem cósmica de gás e poeira que evoca as imagens das flores - mas é a mais famosa. À beira de uma grande nuvem molecular em Monoceros, a cerca de 5.000 anos-luz de distância, as pétalas desta rosa são na verdade um viveiro estelar cuja forma adorável e simétrica é esculpida pelos ventos estelares e pela radiação de seu aglomerado central de jovens estrelas quentes. As estrelas do aglomerado energético, catalogadas como NGC 2244, têm apenas alguns milhões de anos, enquanto a cavidade central na nebulosa de Roseta, catalogada como NGC 2237, tem cerca de 50 anos-luz de diâmetro. A nebulosa de Roseta pode ser vista em primeira mão com um pequeno telescópio em direção à constelação do unicórnio (NEMIROFF; BONNELL, 2012).

Um fenômeno muito comum nas estrelas são os ventos estelares, está presente nas anãs, como o sol, até em estrelas supergigantes quentes, pode-se dizer que todas

as estrelas perdem massa em alguma época de suas vidas, e o estudo desse fenômeno é um dos principais aspectos da astrofísica moderna. No caso de estrelas anãs, a taxa de perda de massa é pequena, com um pequeno efeito na trajetória evolutiva da estrela, ainda que outros efeitos possam ser importantes, como a influência do vento solar sobre as comunicações em nosso planeta. Os ventos estelares constituem fenômenos hidrodinâmicos de escoamento de gases circunstelares, de modo que os conceitos básicos da hidrodinâmica têm aplicação direta no estudo dos ventos e da perda de massa das estrelas (MACIEL, 2005a).

Ainda há outros dois componentes tão importantes quanto as nebulosas e as estrelas: o gás interestelar e a poeira, ambos encontram-se na forma de nuvens individuais, e também em um meio difuso. O gás interestelar ocupa todo o espaço do disco da galáxia, já a poeira interestelar ocorre em nuvens escuras, e é formada por grãos sólidos, com dimensões típicas de poucas dezenas de angstroms, até microns, ou milésimos de milímetros (MACIEL, 2011).

O objetivo desse trabalho é disseminar informações que tratem da constituição do universo, e do meio interestelar, auxiliando na construção do conhecimento humano a respeito de suas origens. Outro ponto significativo do trabalho, e que o completa, baseia-se na evolução das informações que construímos a respeito do universo e o nosso entendimento sobre diversos fenômenos, como por exemplo, os fenômenos hidrodinâmicos do meio interestelar. Visa-se a produção de material literário para suprir a necessidade de conteúdo científico de astrofísica à nível de graduação.

Dessa forma, a monografia encontra-se estruturada em quatro capítulos:

O primeiro capítulo intitulado “Hidrodinâmica” apresenta-nos os conceitos básicos da hidrodinâmica que tem aplicação direta no estudo do meio interestelar, iremos iniciar o estudo sobre a equação da continuidade que expressa a conservação da massa, além de estudarmos a equação de Bernoulli.

O segundo capítulo “Descrição do movimento de um fluido” trata da descrição da equação de Euler como método utilizado na dinâmica dos fluidos, veremos a conservação da energia em um fluido que compreendem sua energia cinética e potencial.

O terceiro capítulo “Uma introdução a equação de Navier-Stokes e aos Ventos Estelares” abrange uma introdução sobre a equação de Navier-Stokes para fluidos viscosos, e uma breve discussão sobre ventos estelares, fenômenos hidrodinâmicos que envolvem

escoamentos de gases circunstelares e da perda de massa em estrelas. No quarto capítulo são feitas as considerações finais.

Neste cenário, deseja-se que este trabalho, quando divulgado, possa trazer benefícios e reflexões acerca do estudo da astrofísica, promover o desenvolvimento do conhecimento científico, da criatividade e habilidade investigativa dos estudantes do curso de Licenciatura em Física.

2 CAPÍTULO I - HIDRODINÂMICA

Muitos fenômenos astrofísicos requerem descrição através da mecânica de fluídos, ou seja, da hidrodinâmica, os gases nos interiores das estrelas, os ventos estelares e a perda de massa, são bons exemplos de aplicabilidade dessa ferramenta no estudo da astrofísica moderna. As equações básicas da hidrodinâmica são necessárias para compreender uma ampla gama de fenômenos astronômicos, fornecendo assim, parte do instrumental teórico para a modelagem do escoamento de fluido no meio estelar.

A propriedade definidora dos fluidos, abrangendo tanto líquidos quanto gases, reside na facilidade com que podem ser deformados. Um pedaço de material sólido tem uma forma definida, e essa forma muda apenas quando há uma mudança nas condições externas. Uma parte do fluido, por outro lado, não tem uma forma preferida e diferentes elementos de um fluido homogêneo podem ser reorganizados livremente sem afetar as propriedades macroscópicas da porção de fluido. O fato de que o movimento relativo de diferentes elementos de uma porção de fluido pode, e em geral ocorre, quando forças atuam sobre o fluido que dá origem para à ciência da dinâmica dos fluidos. A distinção entre sólidos e fluidos não é nítida, uma vez que são muitos materiais que, em alguns aspectos se comportam como um sólido e em outros como um fluido. Um sólido “simples” pode ser considerado um material de qual a forma e as posições relativas dos elementos constituintes, mudar por uma pequena quantidade apenas, quando há uma pequena mudança nas forças agindo sobre ele (BATCHERLOR, 1967).

2.1 FLUIDO IDEAL

Uma visão das leis básicas do fluxo de fluidos pode ser melhor obtida a partir de um estudo do fluxo de um hipotético fluido “ideal”. Um fluido ideal ou perfeito é um fluido que se presume não ter viscosidade. Em tal fluido, portanto, não pode haver efeitos de atrito entre camadas de fluidos móveis ou entre essas camadas e paredes de fronteira, e, portanto, não há perda de energia devido ao atrito e turbulência (VENNARD, 1940). Um fluido ideal satisfaz quatro requisitos no que diz respeito ao seu escoamento, são eles:

1. O escoamento é laminar, ou seja, a velocidade do fluido em um ponto fixo qualquer não varia com o tempo, nem em módulo nem em orientação.
2. O escoamento é incompressível, supomos que a massa específica tem valor uniforme e constante.
3. O escoamento não viscoso, a viscosidade de um fluido é uma medida da resistência que o fluido oferece ao escoamento, a viscosidade dos fluidos é análoga ao atrito entre os sólidos; ambos são mecanismos através dos quais a energia cinética de objetos em movimento é transferida para energia térmica.
4. O escoamento é irrotacional, embora, isso não seja necessário, para entender essa propriedade, suponhamos que um pequeno grão de poeira se mova com um fluido, se o escoamento é irrotacional, o grão de poeira não gira em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, embora possa girar em torno de um eixo qualquer.

Para observar o escoamento de um fluido, usamos traçadores, como, por exemplo, gotas de corante em um fluido ou partículas de fumaça misturada a um gás. Cada gota ou partícula de um traçador torna visível uma linha de fluxo, que é a trajetória seguida por um pequeno elemento do fluido (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009).

A suposição de um fluido ideal permite que um fluido seja tratado como uma agregação de pequenas esferas que apoiam forças de pressão normais em suas superfícies, mas deslizarão umas sobre as outras sem resistência. Assim, o movimento dessas partículas ideais de fluido torna-se análogo ao movimento de um corpo sólido em um plano sem resistência, e leva à conclusão de que forças desequilibradas existentes em partículas de um fluido ideal resultarão na aceleração dessas partículas de acordo com a lei de Newton. Ao assumir um fluido ideal, equações simples podem ser derivadas com base em

conceitos físicos familiares. Posteriormente, essas equações devem ser modificadas para se adequarem ao fluxo de fluidos reais (VENNARD, 1940).

2.2 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Como descrever o movimento de um fluido? Uma possibilidade é imagina-lo subdividido em elementos de volume suficiente pequenos para que possamos tratar cada um deles como partícula e depois descrever o movimento de cada partícula do fluido. Para identificar uma dada partícula, basta dar sua posição r_0 no fluido num dado instante t_0 . Num instante posterior, ele ocupará uma posição $r = r(t, r_0, t_0)$. Quando t varia, o vetor r descreve a trajetória da partícula do fluido. Na prática, poderíamos individualizar a partícula colocando um pouco de corante no ponto r_0 no instante t_0 , e a trajetória seria então materializada através de uma fotografia de longa exposição do fluido.

Se soubermos calcular r em função de t para qualquer partícula, teremos uma descrição do movimento do fluido. Este método de descrição é devido a Lagrange. Entretanto, é difícil que se consiga obter uma solução tão completa, e raramente há interesse em conhecer em detalhes as trajetórias das partículas do fluido, de forma que não é um método muito empregado (NUSSENZVEIG, 2002).

Empregaremos a descrição, devido a Euler, que será apresentada no capítulo 3.

O estado de um fluido ideal em movimento pode ser descrito pela distribuição de velocidades do fluido, caracterizada pelo vetor $\vec{v}(x, y, z)$ e por duas variáveis termodinâmicas, como pressão $P(x, y, z)$ e a densidade $\rho(x, y, z, t)$. Vamos considerar um volume V do fluido. A massa total do fluido contida nesse volume é

$$\int_V \rho dV, \quad (1)$$

essa integral deve se estender a todo o volume V .

Observando a Figura 2, seja dS o elemento de superfície que delimita o volume considerado, e seja $\vec{n}$ o vetor unitário normal a dS e dirigido para fora do elemento, temos que a quantidade de matéria que atravessa dS por unidade de tempo é dada por:

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (2)$$

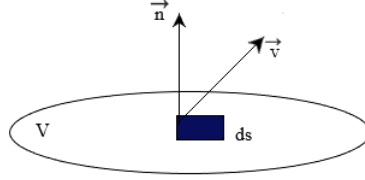


Figura 2. Elemento de Fluido.

a massa total de fluido que deixa o volume V por unidade de tempo é

$$\oint \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (3)$$

por outro lado, podemos escrever que o decréscimo da massa de fluido por unidade de tempo:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV, \quad (4)$$

para haver conservação de massa, devemos ter:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (5)$$

Utilizando o teorema da divergência, temos :

$$\oint \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV. \quad (6)$$

Combinando as equações (5) e (6) encontramos o resultado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV, \quad (7)$$

ou

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0, \quad (8)$$

a igualdade acima deve prevalecer em qualquer volume. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (9)$$

Está é a equação de conservação da massa, ou equação de continuidade (MACIEL, 2005a).

Ela estabelece a lei de conservação de massa para um fluido, a grandeza $\rho \vec{v}$ é chamada de densidade de corrente $\vec{J}$,

$$\vec{J} = \rho \vec{v}, \quad (10)$$

de modo que a equação fica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (11)$$

Se num dado ponto há um fluxo de matéria saindo desse ponto, de modo que o divergente de $\vec{J}$ é positivo, a consequência imediata é que a densidade nesse ponto diminui com o tempo, o que faz com que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ seja negativa. Por outro lado, se a massa se concentra num dado ponto, a densidade nesse local aumenta com o passar do tempo, e isso está associado com um divergente negativo de $\vec{J}$.

A equação (9) pode ser escrita de outra forma. Primeiro, considerando às operações que envolve o divergente:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v}, \quad (12)$$

onde ρ é uma função escalar e $\vec{v}$ é uma função vetorial. De modo que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (13)$$

Se o fluido tem densidade constante, ou seja, se ele é um fluido incompressível, então ocorre $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, o que faz com que ocorra :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (14)$$

e o campo de velocidades do fluido é solenoidal.¹ A grandeza,

$$D = \nabla \cdot \vec{v}, \quad (15)$$

é chamada *dilatação*, e para um fluido incompressível a dilatação D é nula.

Um escoamento estacionário é caracterizado por ser aquele em que a densidade do fluido e a velocidade em um dado ponto não são funções explícitas do tempo, apenas a posição $\vec{r}$. Nesse caso, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, e a equação da continuidade (11) fornece :

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (16)$$

Assim, um escoamento estacionário é caracterizado por ter uma densidade de corrente $\vec{J}$ solenoidal (MACHADO, 2014).

2.3 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

É uma relação aproximada entre pressão, velocidade e elevação, e é válida em regiões de escoamento incompressível e em regime permanente, onde as forças de atrito resultantes são desprezíveis. Apesar de sua simplicidade, essa provou ser uma ferramenta muito útil na mecânica de fluidos. A principal aproximação na dedução da equação de Bernoulli é que os efeitos viscosos são desprezivelmente pequenos quando comparados aos efeitos da inércia, da gravidade e da pressão. Como todos os fluidos tem viscosidade, essa aproximação não pode ser válida para o todo de um campo de escoamento de interesse prático, ou seja, não podemos aplicar a equação de Bernoulli em toda a parte em um escoamento, mesmo quando a viscosidade do fluido é pequena. Entretanto, a aproximação é razoável em determinadas regiões de muitos escoamentos de caráter prático.

Chamamos tais regiões de regiões do escoamento sem viscosidade, e enfatizamos que elas não são regiões nas quais o próprio fluido não tem viscosidade nem atrito, mas sim que elas são regiões nas quais as forças viscosas ou resultantes de atrito são desprezivelmente pequenas quando comparadas a outras forças que atuam sobre as partículas do fluido. É preciso tomar cuidado ao aplicar a equação de Bernoulli, uma vez que ela é uma aproximação que se aplica apenas às regiões não viscosas do escoamento (ÇENGEL, 2012).

¹função vetorial que possui divergência nula

Na figura 3 vemos um tubo de corrente limitado por duas seções transversais de áreas A_1 e A_2 , situadas no entorno dos pontos 1 e 2 do fluido, onde as pressões são P_1 e P_2 , as velocidades V_1 e V_2 e as alturas em relação a um plano horizontal de referência são Z_1 e Z_2 , respectivamente.

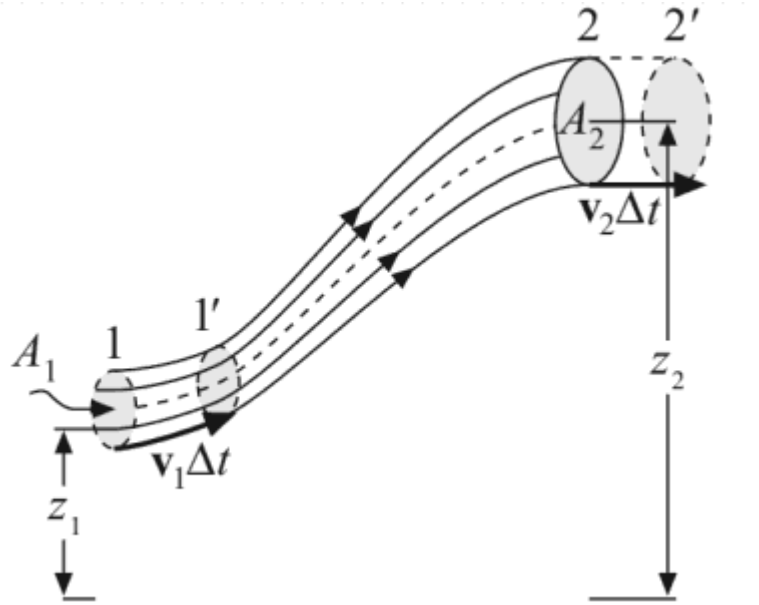


Figura 3. Filete de corrente
Fonte: Nussenzveig, 2002.

Durante o intervalo de tempo infinitésimo considerada no filete, compreendida entre as secções 1 e 2, se desloca para uma nova posição que corresponde aos pontos 1' e 2' observada na figura 3, como o escoamento é estacionário, a porção do filete compreendida entre os extremos 1' e 2' não precisa ser levada no balanço de energia, pois para esse balanço tudo se passa como se a porção entre 1 e 1' fosse transportada para a região compreendida entre 2 e 2', já que estamos tratando de um fluido incompressível essas duas porções de massa são iguais, portanto, $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{constante}$, obtemos:

$$\Delta m_1 = \rho A_1 V_1 \Delta t = \rho_2 A_2 V_2 \Delta t = \Delta m_2. \quad (17)$$

A variação de energia cinética correspondente a esse transporte é :

$$\Delta T = \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2, \quad (18)$$

esta variação é igual ao trabalho realizado pelas forças que atuam sobre o sistema, ou seja, pelas forças de pressão e pela gravidade. Analisando a figura 3 vemos que o deslocamento

$1 \rightarrow 1'$ é no mesmo sentido das forças de pressão, enquanto $2 \rightarrow 2'$ é em sentido contrário, de modo que o trabalho das forças de pressão é definido:

$$(p_1 A_1)(v_1 \Delta t) - (p_2 A_2)(v_2 \Delta t), \quad (19)$$

o trabalho realizado pelas forças gravitacionais é contrário à variação de energia potencial gravitacional, ou seja, é dado por:

$$-g(\Delta m_2 z_2 - \Delta m_1 z_1). \quad (20)$$

Somando as equações (19) e (20) e igualando a equação (18), encontramos:

$$\frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 = (p_1 A_1)(v_1 \Delta t) - (p_2 A_2)(v_2 \Delta t) - g(\Delta m_2 z_2 - \Delta m_1 z_1), \quad (21)$$

para simplificar a equação (21) iremos utilizar a equação (17) já obtida anteriormente, temos respectivamente:

$$\frac{\Delta m_1}{\rho} = A_1 V_1 \Delta t, \quad (22a)$$

$$\frac{\Delta m_2}{\rho} = A_2 V_2 \Delta t, \quad (22b)$$

e como $\Delta m_1 = \Delta m_2$ a equação (21) resulta:

$$\frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho}. \quad (23)$$

Que exprime a conservação da energia por unidade de massa ao longo do filete (NUSSENZVEIG, 2002).

3 CAPÍTULO II - CAMPO DE ESCOAMENTO

Podemos utilizar o conceito de campo para descrever as propriedades do escoamento, em função do espaço e do tempo, dentro do volume de controle. O estudo dos campos de escoamento presentes no meio interestelar ocupa um papel de destaque na astrofísica, desde o escoamento hidrodinâmico com o transporte da radiação emergente da estrela até a formação de galáxias. Portanto, é conveniente caracterizar alguns desses campos, sejam eles vetoriais, escalares ou tensoriais, aqui trataremos apenas alguns desses campos que, coletivamente definem o campo de escoamento.

3.1 CAMPO DE VELOCIDADES

Os fluidos apresentam movimentos moleculares, ou seja, as moléculas do fluido sempre estão se movimentando de um ponto para outro ponto. Uma porção típica do fluido contém tantas moléculas que ficaria totalmente inviável descrever o movimento de todas as moléculas individualmente. Em vez disso, consideramos o fluido como composto por partículas fluidas que interagem entre si e com o meio.

Cada partícula contém muitas moléculas. Assim, nós podemos descrever o escoamento de fluido em função do movimento das partículas fluidas (velocidade e aceleração) em vez do movimento das moléculas. As partículas infinitesimais de fluidos são compactas, assim, num dado instante, a descrição de qualquer propriedade do fluido (i.e. massa específica, pressão, velocidade e aceleração) pode ser formulada em função da posição da partícula.

A apresentação dos parâmetros do fluido em função das coordenadas espaciais é denominada representação do campo de escoamento. É claro que a representação do campo de escoamento pode ser diferente a cada instante e, desde modo, nós precisamos determinar os vários parâmetros em função das coordenadas espaciais e do tempo para descrever totalmente o escoamento. Uma das variáveis mais importantes dos escoamentos é o campo de velocidades,

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad (24)$$

onde v_x , v_y e v_z são as componentes do vetor velocidades nas direções x , y , z .

Por definição, a velocidade da partícula é igual a taxa de variação temporal do vetor posição dessa partícula. A figura 4 mostra que a posição da partícula A, em relação

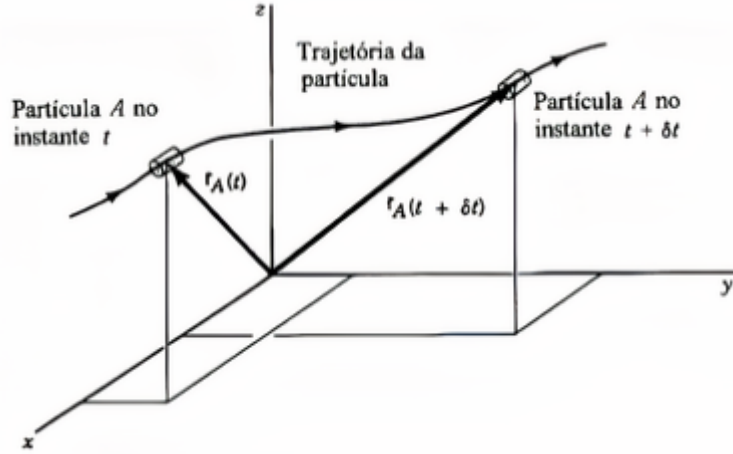


Figura 4. Localização da partícula com o vetor posição.
 Fonte: Munson; Young; Okiishi, 2004.

ao sistema de coordenadas, é dado pelo seu vetor posição $\vec{r}$, e que este vetor é uma função do tempo se a partícula está se movimentando (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

3.2 CAMPO DE ACELERAÇÃO

No estudo da termodinâmica atentamos que as leis fundamentais de conservação, como por exemplo a conservação de massa e a primeira lei da termodinâmica, são expressas para um sistema de identidade fixa, ou seja, um sistema fechado. As equações do movimento do escoamento de fluidos são escritas para um objeto de identidade fixa, tomado aqui como uma pequena porção de fluido, que chamamos de partícula de fluido ou partícula material. Se tivéssemos que seguir o movimento de determinada partícula de fluido em seu escoamento, estaríamos usando a descrição lagrangiana, e as equações do movimento seriam diretamente aplicáveis. Por exemplo, definiríamos o local da partícula no espaço em termos de um vetor posição material (x, y, z) . Entretanto, uma certa manipulação matemática seria necessária para converter as equações de movimento em formas aplicáveis à descrição Euleriana. Considere, por exemplo, a Segunda Lei de Newton aplicada a nossa partícula de fluido:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (25)$$

onde $\vec{F}$ é a força resultante que age sobre a partícula de um fluido, m é sua massa e $\vec{a}$ é sua aceleração. Por definição, temos que a aceleração da partícula é dada pela derivada

no tempo da velocidade, atentamos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (26)$$

podemos escrever a equação (26) da seguinte forma:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}(x, y, z, t). \quad (27)$$

Entretanto, em qualquer instante de tempo t , a velocidade da partícula é igual ao valor local do campo de velocidade no local da partícula, uma vez que a partícula de fluido se movimenta com o fluido. Para tomar a derivada de tempo da equação (26), devemos usar a regra da cadeia uma vez que a variável dependente v é uma função de quatro variáveis independentes, temos:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (28)$$

Considerando a equação (28), como a aceleração é obtida seguindo uma partícula de fluido, a taxa de variação da posição x da partícula com relação ao tempo é :

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad (29)$$

onde u é a componente x do vetor velocidade definido pela equação (24), da mesma forma acontece com as outras componentes, y e z . Além disso, em qualquer instante de tempo considerado, o vetor posição material (x, y, z) a partícula de fluido na descrição lagrangiana é igual ao vetor posição (x, y, z) na descrição euleriana.

A equação (28) torna-se:

$$\vec{a}_{(x,y,z,t)} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}, \quad (30)$$

por último, em qualquer instante de tempo t , o campo de aceleração da equação (27) deve ser igual à aceleração da partícula de fluido que ocupa o local (x, y, z) naquele instante t , uma vez que a partícula de fluido está, por definição, acelerando com o escoamento de fluido. Ainda podemos com o auxílio das equações (28) e (30) transformar o sistema de referência lagrangiano para o euleriano. Na forma vetorial, a equação (30) pode ser

escrita:

$$\vec{a}_{(x,y,z,t)} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (31)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (31), ou seja, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ é chamado de aceleração local e é diferente de zero para escoamentos em regime permanentes, o segundo termo $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$, é chamado de aceleração advectiva, este termo pode ser diferente de zero mesmo para escoamentos em regime permanente, ele representa o efeito de uma partícula de fluido que se move para um novo local no escoamento, onde o campo de velocidade é diferente (ÇENGEL, 2012).

3.3 CAMPO DE TENSÃO

Em nosso estudo sobre o comportamento dos fluidos, precisamos entender que tipos de força agem sobre suas partículas; cada partícula que constitui o fluido pode sofrer a ação de forças de superfície, seja ela pressão ou atrito, que são geradas pelo contato com outras partículas ou com superfícies sólidas e forças de campo, tais como forças de gravidade e eletromagnética que agem através das partículas. Forças de superfície agindo sobre uma partícula fluida gera tensões. O conceito de tensão é útil para descrever como é que forças, agindo sobre as fronteiras de um meio - fluido ou sólido - são transmitidas através do meio. A diferença entre as tensões que ocorrem em um fluido e em um sólido, é que as tensões em um fluido são majoritariamente geradas por movimento e não por deflexão como acontece nos sólidos (FOX; MCDONALD; LEYLEGIAN, 2014).

Se imaginarmos a superfície de uma partícula fluida em contato com outras partículas fluidas e considerando que há força de contato sendo gerada entre as partículas, poderemos considerar uma porção, $\delta \vec{A}$ da superfície em um ponto qualquer C, a orientação de $\delta \vec{A}$ é dada pelo vetor unitário normal a superfície $\vec{n}$ e aponta para fora dela.

Na figura 5 vemos que a força, $\delta \vec{F}$, agindo sobre $\delta \vec{A}$, pode ser decomposta em duas componentes, uma componente normal definida como σ_n e uma tensão de cisalhamento

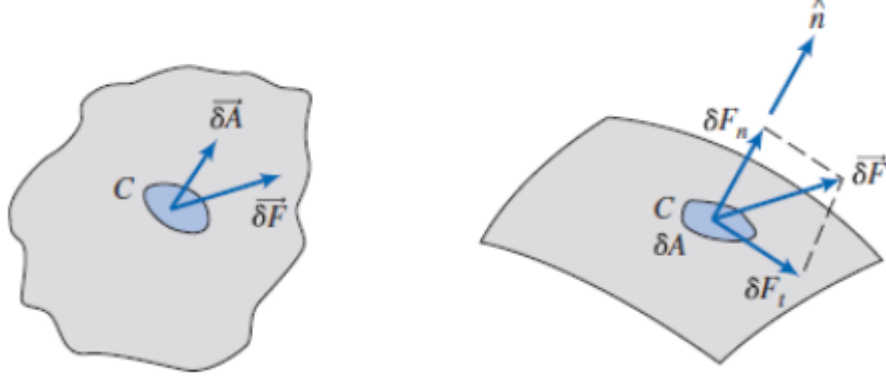


Figura 5. O conceito de tensão em um meio contínuo
 Fonte: Fox; Mcdonald; Leylegian, 2014.

tangente à área definida como τ_n , como mostra as equações a seguir:

$$\sigma_n = \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A_n}, \quad (32a)$$

$$\tau_n = \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A_n}, \quad (32b)$$

o subscrito n das equações (32a) e (32b) foi incluído para lembrar que as tensões estão associadas à superfície $\delta \vec{A}$ que passa por C, tendo uma normal com a direção e sentido de $\vec{n}$. O fluido é realmente um contínuo, de modo que podemos imaginá-lo ao redor do ponto C como composto por um determinado número de partículas delimitadas de diferentes maneiras, obtendo assim um número qualquer de diferentes tensões no ponto C.

Ao tratar com quantidades vetoriais, é de praxe considerar as componentes em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, podemos considerar as tensões atuando em planos cujas normais estão orientadas para fora em relação ao elemento fluido, considerando as direções dos eixos (x, y, z) , vemos na figura 6a, que a tensão no elemento δA_x , cuja normal está orientada para fora na direção do eixo x . A força, $\delta \vec{F}$, foi decomposta em componentes ao longo de cada eixo de coordenadas, podemos então, dividir o módulo de cada componente da força pela área δA_x , e tomando o limite quando δA_x se aproxima de zero, definimos as três componentes da tensão mostradas na figura 6b, temos:

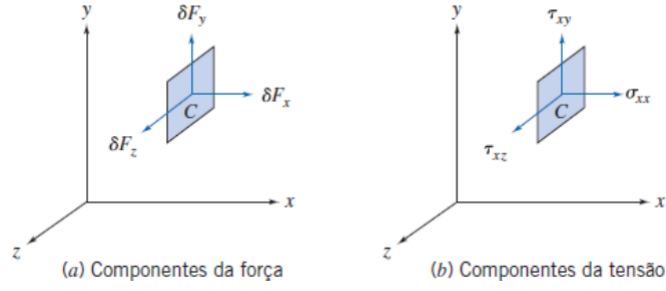


Figura 6. Componentes da força e tensão sobre o elemento de área δA_x
 Fonte: Fox; Mcdonald; Leylegian, 2014.

As componentes de força e tensão são escritas como segue:

$$\sigma_{xx} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_x}; \quad (33a)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_y}{\delta A_x}; \quad (33b)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_z}{\delta A_x}. \quad (33c)$$

As equações (33a), (33b) e (33c) utilizam índice duplo para designar as tensões em cada componente, o primeiro índice x indica o plano no qual a tensão atua, neste caso, na superfície perpendicular ao eixo x , já o segundo índice indica a direção na qual a tensão atua. Considerando agora a área elementar δA_y definiremos as tensões σ_{yy} , τ_{yx} e τ_{yz} , a utilização da área elementar δA_z levaria, de modo semelhante, à definição de σ_{zz} , τ_{zx} e τ_{zy} . Embora tenhamos descrito apenas três planos ortogonais, um infinito número de planos pode passar através do ponto C, resultando em um número infinito de tensões associadas a esses planos. Felizmente, o estado de tensão em um ponto pode ser completamente descrito pela especificação das tensões atuantes em três planos quaisquer ortogonais entre si que passam pelo ponto (FOX; MCDONALD; LEYLEGIAN, 2014).

3.4 DESCRIÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER

O método denominado Euleriano, utiliza o conceito de campo apresentado na seção anterior. Nesse caso, o movimento do fluido é descrito pela especificação completa dos parâmetros necessários (por exemplo, pressão, massa específica e velocidade) em função das coordenadas espaciais e do tempo. Neste método nós obtemos informações do escoamento em função do que acontece em pontos fixos do espaço enquanto o fluido escoa por esses pontos (MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004).

É uma equação que estabelece uma relação entre as forças que agem num elemento de fluido e a aceleração adquirida por ele. Assim, ela é uma equação de movimento. A restrição aqui fica por conta do fato de que ela é descrita para fluidos ideais, ou seja, para aqueles em que a viscosidade pode ser desprezada. Isso implica que não há dissipação de energia na forma de calor interno gerado dentro do próprio fluido (MACHADO, 2014).

Consideremos novamente um certo volume V do fluido. A força total que atua sobre este volume devido às interações com o restante do fluido é:

$$- \oint P \vec{n} dS, \quad (34)$$

onde o sinal negativo deve-se ao fato de que a força atua sobre o elemento considerado. De acordo com o teorema do gradiente aplicado a um escalar A , temos:

$$\oint A \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} A dV, \quad (35)$$

obtemos:

$$- \oint P \vec{n} dS = - \int_V \vec{\nabla} P dV. \quad (36)$$

Portanto, a força exercida pelo fluido no elemento de volume dV é $-\vec{\nabla} P dV$, e a força por unidade de volume é simplesmente $-\vec{\nabla} P$. Podemos então exprimir a conservação da quantidade de movimento por :

$$\rho \times \text{aceleração} = -\vec{\nabla} P, \quad (37)$$

onde ρ é novamente a densidade do fluido. Nesse caso de uma partícula de massa m , sob a ação de uma força $\vec{F}$ e movendo-se com velocidade $\vec{v}$, a aceleração é simplesmente:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (38)$$

Se você considerar v como função de $(x, y, z \text{ e } t)$, ou seja, $v(x, y, z, t)$, pode-se fazer a diferencial total de v , ou o dv , onde em seguida podemos identificar e separar as duas componentes, a componente da variação espacial e a componente da variação temporal

da velocidade que estão descritas nas equações (39) e (40).

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt, \quad (39)$$

que mede a variação da velocidade em um *ponto fixo do espaço*, isto é, com x , y , z constantes, num intervalo de tempo dt , e

$$d\vec{v}_2 = dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}, \quad (40)$$

que mede a variação da velocidade no *mesmo instante* entre dois pontos diferentes no espaço separados por:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}, \quad (41)$$

que é a distância percorrida no tempo dt pela partícula de fluido. Sabemos que:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \quad (42)$$

assim, temos:

$$d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} = dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z}, \quad (43)$$

que implicam, comparando com a equação (40):

$$d\vec{v}_2 = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \quad (44)$$

De posse desses resultados podemos reescrever a diferencial total de $\vec{v}$ como:

$$d\vec{v} = d\vec{v}_1 + d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \quad (45)$$

A aceleração é, portanto,

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \quad (46)$$

A derivada que ocorre na equação (46) é chamada *derivada total*, ela é um operador diferencial, que funciona como uma transformação linear, sendo representada por :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}). \quad (47)$$

A descrição do movimento considerando separadamente os dois termos, isto é, $\partial/\partial t$ em uma posição fixa de $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ em um instante fixo, correspondente à descrição euleriana. Por outro lado, a descrição do movimento em termos da derivada total D/Dt corresponde à descrição lagrangiana.

Considerando as equações (37) e (46), a equação fica:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P, \quad (48a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P. \quad (48b)$$

Substituindo a equação (47) na equação (48b), obtemos a derivada convectiva:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P. \quad (49)$$

A relação (48b) é a equação de Euler, obtida por ele em 1755.

Uma extensão importante dessa equação do movimento ocorre quando o fluido está colocado em um campo gravitacional caracterizado pela aceleração $\vec{g}$. Cada unidade de volume estará sujeita à força $\rho \vec{g}$, que é a força gravitacional atuante por unidade de volume, com isso a equação do movimento será:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g}. \quad (50)$$

Em geral, se o fluido se encontra sob a ação de um campo de forças externas $\vec{F}$ isto é, $\vec{F}$ é a força que atua em um volume unitário, obtemos a equação (51), (MACIEL, 2005a).

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F}. \quad (51)$$

3.5 TERMODINÂMICA

A ciência da termodinâmica envolve o estudo da energia associada com uma certa quantidade de material ou um volume claramente definido no espaço. A quantidade fixa de material é chamada de sistema termodinâmico, enquanto o volume no espaço é chamado de volume de controle. Inicialmente, limitaremos nossa atenção apenas ao

sistema termodinâmico.

O estudo da energia de um sistema termodinâmico é realmente bastante simples em conceito. A energia pode entrar ou sair, ser transferida de ou para um sistema em apenas duas formas, como calor ou como trabalho. Se a transferência de energia for devido a uma diferença na temperatura entre o sistema e seus arredores, a energia é transferida como calor, em qualquer outro caso, é transferida como trabalho (SCHMIDT; HENDERSON, 1996).

Um sistema termodinâmico é uma quantidade de matéria separada do ambiente por um limite flexível através do qual o sistema troca calor e trabalho, mas sem massa. Um sistema no estado de equilíbrio está livre de correntes, como as geradas por mexer um fluido ou por aquecimento repentino. Após uma mudança, as correntes morrem e o sistema volta às condições de equilíbrio, quando as propriedades do sistema (como pressão e temperatura) podem ser novamente definidas. Essa definição, no entanto, não é possível em fluxos de fluidos, e surge a questão sobre se as relações derivadas da termodinâmica clássica são aplicáveis aos fluidos em constante movimento.

As leis básicas da termodinâmica clássica são empíricas, e não podem ser provadas. Outra forma de ver isso é dizer que esses princípios são tão básicos que não podem ser derivados de nada mais básico (KUNDU, 2001).

3.5.1 PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

O princípio de Joule, ou princípio da conservação da energia, constitui a primeira lei da termodinâmica. Ela foi estabelecida por vários cientistas, mas principalmente por Mayer e Joule, que admitiram que as diversas formas de trabalho poderiam ser convertidas umas nas outras e que todas elas poderiam ser dissipadas na forma de calor. Embora pareça bastante intuitivo que o trabalho se transforme em calor, como por exemplo, por fricção, não se pode concluir que o trabalho dissipado produza sempre a mesma quantidade de calor. É necessário verificar experimentalmente tal lei, que se resume na determinação do equivalente mecânico do calor. Isso foi realizado por Mayer e de forma exaustiva por Joule através de inúmeras experiências. Admitindo, portanto, que uma determinada quantidade de trabalho sempre se transforme numa mesma quantidade de calor, adotando a conservação da energia (OLIVEIRA, 2005).

A primeira lei da termodinâmica afirma que a energia de um sistema é conservada,

ou seja, encontramos a seguinte equação:

$$\Delta U = Q + W, \quad (52)$$

onde Q é o calor adicionado ao sistema, W é o trabalho realizado no sistema e ΔU é o aumento da energia interna do sistema. Todas as quantidades na equação (52) podem ser consideradas como aqueles referentes à unidade de massa do sistema. A energia interna também chamada de - energia térmica - é uma manifestação do movimento molecular aleatório dos constituintes. Em fluxos de fluido, a energia cinética do movimento macroscópico deve ser incluída no termo U na equação (52) para que o princípio de conservação de energia seja satisfeito.

É importante perceber a diferença entre calor e energia interna. Calor e trabalho são formas de energia em transição, que aparecem na fronteira do sistema e não estão contidas na matéria. Em contraste, a energia interna reside na matéria. Se dois estados de equilíbrio 1 e 2 de um sistema são conhecidos, então Q e W dependem do processo ou caminho seguido pelo sistema ao passar do estado 1 para o estado 2. A mudança $\Delta U = \Delta_2 - \Delta_1$, em contraste, não depende no caminho. Em suma, U é uma propriedade termodinâmica e é uma função do estado termodinâmico do sistema. As propriedades termodinâmicas são chamadas de funções de estado, em contraste com calor e trabalho, que são funções de caminho.

Processos quase estáticos sem atrito, realizados a uma taxa extremamente lenta para que o sistema esteja sempre em equilíbrio com o entorno, são chamados de processos reversíveis. O tipo mais comum de trabalho reversível em fluxos de fluidos é pela expansão ou contração dos limites do elemento fluido. Em seguida, o trabalho feito pelo corpo por unidade de massa em um processo reversível infinitesimal é $-PdV$, onde dV é o aumento de volume. A primeira lei da termodinâmica (52) para um processo reversível torna-se então:

$$\Delta U = dQ - PdV. \quad (53)$$

Desde que Q também seja reversível, observe que as formas irreversíveis de trabalho, são excluídas da equação (53) (KUNDU, 2001).

3.5.2 EQUAÇÃO DE ESTADO

As substância que tem o comportamento termodinâmicos mais simples são os gases; para qualquer fluido homogêneo, um estado de equilíbrio termodinâmico fica caracterizado por qualquer par das três variáveis (P, V, T) . Isso significa que a terceira é uma função das outras duas, ou seja, que existe uma relação funcional do tipo:

$$f(P, V, T) = 0, \quad (54)$$

que se chama a equação de estado do fluido (NUSSENZVEIG, 2014).

A equação de estado de um gás, foi deduzida, pela primeira vez, em 1834 pelo físico e engenheiro francês Benoît Émile Clapeyron, considerado um dos fundadores da Termodinâmica. O estado de uma determinada quantidade de gás fica totalmente definido pelo seu volume, pressão e temperatura. A equação de estado dos gases ideais, a seguir apresentada, relaciona estas variáveis entre si:

$$PV = nRT, \quad (55)$$

considerando a equação (55), temos P representando a pressão, V o volume, na quantidade de substância, R a constante dos gases e T a temperatura absoluta. Esta equação pode assumir várias formas conforme a conveniência, de acordo com as relações existentes entre as diversas variáveis (LIMA, 2015).

n é o número de moles e pode ser representado como:

$$n = \frac{N}{N_a}, \quad (56)$$

onde N é o número de partícula do gás e N_a é o número de Avogadro. Considerando a equação (56), a equação (55) fica:

$$PV = N \frac{R}{N_a} T. \quad (57)$$

Sabendo que $R = N_a \kappa$, onde κ é a constante de Boltzmann, podemos escrever:

$$PV = N\kappa T. \quad (58)$$

Usando a densidade de partículas da equação (59), e sendo m a massa das partículas do fluido encontrada na equação (60), como segue:

$$n = \frac{N}{V}, \quad (59)$$

$$\rho = nm, \quad (60)$$

podemos obter a equação para um gás homogêneo utilizando a equação (58):

$$P = \frac{\rho \kappa T}{m}. \quad (61)$$

Um gás completamente ionizado se comporta como um gás perfeito, mesmo em temperaturas com altas densidades. Na verdade, um gás não ionizado se comporta como um gás perfeito em densidades mais baixas do que um certo valor crítico (MACIEL, 2016).

3.6 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA EM UM FLUIDO

A força gravitacional é, naturalmente, de importância central em astrofísica. Portanto, enquanto a força da gravidade desempenha apenas um pequeno papel na maioria das experiências em livros sobre mecânica, com tais fluidos sendo apenas sujeitos à aceleração gravitacional da terra, a situação astronômica é bem diferente (CLARKE; CARSWELL, 2007).

Vamos admitir que o fluido está em um campo gravitacional, de modo que a força gravitacional por unidade de volume pode ser escrita na forma:

$$\vec{F} = \rho \vec{g}, \quad (62a)$$

$$\vec{F} = -\rho \vec{\nabla} \phi. \quad (62b)$$

Onde ϕ é o potencial gravitacional do campo de força, neste caso, de (48b) e (50), obtemos a equação de Euler na forma lagrangiana:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g} = -\frac{1}{\rho} (\vec{\nabla} P + \rho \vec{\nabla} \phi). \quad (63)$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{v}$, temos:

$$\frac{1}{2} \frac{Dv^2}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} P + \rho \vec{\nabla} \phi). \quad (64)$$

Admitindo que o potencial ϕ é constante com o tempo, temos :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\phi = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\phi, \quad (65)$$

substituindo a equação (65) na equação (64) e rearranjando os termos, temos:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi \right) = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})P. \quad (66)$$

A energia cinética total do fluido é dada por:

$$E_c = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV, \quad (67)$$

onde a integral é feita em todo o volume V ocupado pelo fluido. Equivalente, a energia potencial total do fluido pode ser definida assim:

$$E_p = \int_V \rho \phi dV. \quad (68)$$

Integrando a equação (66) no volume V , e usando a (67) e (68), obtemos:

$$\frac{D}{Dt} (E_c + E_p) = - \int_V (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) P dV. \quad (69)$$

O membro esquerdo da equação (69) representa a taxa total de variação com o tempo da energia do fluido, compreendendo sua energia cinética e potencial gravitacional. Analogamente, o membro direito da (69) mede essencialmente a taxa de variação do trabalho realizado pelas forças de pressão. Isso pode ser visto mais claramente se usarmos a relação abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho, \quad (70)$$

para simplificar o membro direito da (69) vamos utilizar a equação (70) substituindo ρ

por P e fazendo uso do teorema da divergência (6), obtemos:

$$-\int_V (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) P dV = -\oint P \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_V P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV, \quad (71)$$

utilizando a expressão (71) na equação (69), podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{D}{Dt}(E_c + E_p) = -\oint P \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_V P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV. \quad (72)$$

Se tivermos um fluido incompressível em que a densidade ρ pode ser considerada constante, ou seja, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, de modo que teremos:

$$\frac{D}{Dt}(E_c + E_p) = -\oint P \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (73)$$

Uma vez que o termo $P dS$ é a força que age perpendicularmente ao elemento de área dS , o integrando é essencialmente a taxa de variação com que as forças de pressão realizam trabalho sobre o fluido que atravessa o elemento de área, de modo que a integral mede a variação do trabalho total realizado com o tempo (MACIEL, 2005a).

4 CAPÍTULO III - INTRODUÇÃO A EQUAÇÃO DE NAVIER- STOKES E AOS VENTOS ESTELARES

4.1 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

O modelo tradicional de fluidos usado na física é baseado em um conjunto de equações diferenciais parciais conhecidas como equações de Navier-Stokes. Essas equações foram derivadas originalmente na década de 1840 com base nas leis de conservação e em aproximações de primeira ordem (WOLFRAM, 2002).

O efeito da dissipação de energia, que ocorre durante o movimento de um fluido é o resultado da irreversibilidade termodinâmica do movimento. Essa irreversibilidade sempre ocorre em certa medida, devido ao atrito interno (viscosidade) e à condução térmica. A fim de obter as equações que descrevem o movimento de um fluido viscoso, temos que incluir alguns termos adicionais na equação de movimento de um fluido ideal. A equação de continuidade, como vemos por sua derivação, é igualmente válida para qualquer fluido, viscoso ou não, a equação de Euler, por outro lado, requer uma modificação. Veremos que a equação de Euler pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \quad (74)$$

Em posse da equação (74), vemos que Π_{ik} é o tensor ²de densidade de fluxo de momento. O fluxo de momento dado pela equação (74) representa uma transferência completamente reversível de momento, devido simplesmente ao transporte mecânico das diferentes partículas de fluido de um lugar para o outro e às forças de pressão que atuam no fluido (LANDAU; LIFSCHITZ, 1987).

Podemos considerar a ação da viscosidade na forma de uma força $\vec{F}$ por unidade de volume, nesse caso podemos reescrever a equação (74):

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \vec{F}_i, \quad (75)$$

onde definimos o tensor de viscosidade σ_{ik} :

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (76)$$

²Veja o Apêndice A e B, onde será abordado importantes conceitos acerca da notação tensorial cartesiana e algumas equações dos fluidos na forma tensorial.

Para compreender o significado físico do tensor σ_{ik} , considere uma massa de fluido de volume V e superfície S . A força total por unidade de massa atuando em um elemento de volume é apenas:

$$F_i^T = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik} - \sigma_{ik})dV, \quad (77)$$

de modo que, se nenhuma força externa estiver agindo no fluido, definimos a força total:

$$\int_S F_i^T dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik} - \sigma_{ik})dV, \quad (78)$$

onde encontramos a equação:

$$\int_S F_i^T dV = -\oint (\Pi_{ik} - \sigma_{ik})n_k dS, \quad (79)$$

usando o teorema da divergência chegamos ao seguinte resultado:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik} - \sigma_{ik})dV = \oint (\Pi_{ik} - \sigma_{ik})n_k dS. \quad (80)$$

O termo na equação (79)

$$-\int_S \Pi_{ik} dS_k, \quad (81)$$

pode ser interpretado como a soma das forças de pressão agindo através da superfície do fluido e o momento transportado através da superfície pelo movimento do fluido. O termo que incluímos na equação (79):

$$\int \sigma_{ik} dS_k, \quad (82)$$

tem uma interpretação semelhante, é claramente apenas a força exercida na superfície S pelas forças viscosas que atuam no fluido. Em termos microscópicos, representa o momento transferido através da superfície S por colisões inelásticas dos átomos próximos à superfície. Nós esperamos que as forças viscosas devem estar ausentes quando não houver velocidade relativa entre as diferentes partes do fluido, uma vez que não há nenhum ganho ou perda de energia por qualquer parte do fluido durante as colisões atômicas inelásticas. Esta situação pode surgir de duas maneiras:

1. O fluido está se movendo em todos os lugares com a mesma velocidade $\vec{v}$;
2. O fluido está em um estado de rotação uniforme.

Escrevemos a velocidade do fluido em rotação, onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do fluido, de modo que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (83)$$

Da ausência de viscosidade no primeiro caso, concluímos que a força viscosa, e o tensor σ_{ik} não pode depender da velocidade em si, mas deve depender da velocidade por meio de termos como $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ e $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}$ que desaparece se a velocidade é uma constante. No segundo caso, concluímos que o tensor deve desaparecer se $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, onde as únicas combinações de derivadas da velocidade que satisfazem essas duas condições são :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (84)$$

$$\delta_{ik} \frac{\partial u_r}{\partial x_r}. \quad (85)$$

E, é claro, um grande número de termos envolvendo derivadas secundárias e superiores da velocidade. Não temos motivos para esperar que tais termos não estejam presentes em σ_{ik} , mas é claro que nossa teoria seria muito mais simples se as forças viscosas dependessem apenas das primeiras derivadas da velocidade. Assumiremos que temos o direito de usar a teoria mais simples possível, para conseguir ser consistente com as condições (i) e (ii), é claro, até que sejamos forçados a fazer o contrário. De fato, descobriu-se que a teoria simples, na qual a força viscosa depende apenas das primeiras derivadas da velocidade, é uma descrição mais adequada do movimento do fluido.

Isso significa que podemos escrever o tensor mais geral na forma:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_r}{\partial x_r}, \quad (86)$$

onde os coeficientes η e ξ são chamados de coeficientes de viscosidade.

Na maior parte do trabalho que fizemos até este ponto, nossa atenção se direcionou a fluidos incompressíveis; ou seja, para fluido que são definidos de acordo com a equação abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial x_r} = 0. \quad (87)$$

Argumentamos que esta é uma boa aproximação de líquidos, mas talvez não seja tão bom para gases. Para o caso de fluidos incompressíveis, a força viscosa torna-se:

$$F_t = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}, \quad (88a)$$

$$F_t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right], \quad (88b)$$

$$F_t = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (88c)$$

De modo que a equação de Euler é:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v_r = - \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Que, em uma forma vetorial mais familiar, torna-se:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} = -\nabla P + \rho v \nabla^2 v. \quad (89a)$$

Onde $v = \frac{\eta}{\rho}$ é normalmente chamado de coeficiente de viscosidade cinemática. Esta equação (89a) é geralmente chamada de equação de Navier-Stokes, é importante lembrar que é simplesmente a segunda lei de Newton aplicado a um fluido em que se sabe que existe atrito interno, ou viscosidade. A forma acima se aplica apenas a fluidos incompressíveis (TREFIL, 1975).

4.2 VENTOS ESTELARES

Os ventos estelares são o fluxo contínuo de material das estrelas, a ejeção de material desempenha um papel importante no ciclo de vida das estrelas, no caso de estrelas massivas, os ventos removem mais da metade da massa original da estrela antes que ela exploda como uma supernova, o nome vento solar e ventos estelares foram ambos introduzidos por Eugene Parker. No entanto, as origens das ideias básicas sobre a perda de massa das estrelas surgiram muito antes disso (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

A teoria original de Parker para o vento, em 1958, dizia respeito a fluxos impulsionados por gradientes de pressão de gás, no entanto, observações de sondas no espaço interplanetário mostraram evidências de uma forte dependência do tempo das propriedades do vento solar. A primeira ideia de que os átomos poderiam ser expulsos pela absorção de radiação surgiu em um artigo, um pouco depois do desenvolvimento da teoria quântica. A radiação foi então percebida para se propagar como fótons, cada um tendo um momento.

A absorção do momento no campo de radiação pode “levitar” ou impulsionar a matéria para cima. A formulação desses modelos de vento solar impulsionado por radiação não foi cunhada através das observações solares, mas sim das observações de foguetes dos espectros UV de algumas supergigantes O e B no final dos anos 1960. O campo dos ventos estelares tornou-se muito ativo depois que observações poderiam ser feitas em essencialmente todas as regiões espectrais que não estão disponíveis no solo (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

Foguetes e satélites lançados desde meados da década de 1960 mostraram evidências de ventos estelares em bandas de comprimento de onda, incluindo raio-x, ultravioleta extremo, ultravioleta, óptica, infravermelha e na região do rádio. As descobertas observacionais e o desenvolvimento teórico no campo dos ventos estelares proporcionaram uma série de eventos que ampliaram nossa percepção a respeito desse fenômeno hidrodinâmico, são eles:

1. A primeira fase (1572-1910) é a constatação de que fenômenos semelhantes a novas indicam que as estrelas ejetam massa, e que essa ejeção pode ser detectada espectroscopicamente. Esta fase vai desde a detecção dos objetos semelhantes a nova B Cas e P Cygni por volta de 1600 até os estudos fotográficos do início do século XX.

2. A segunda fase (1913-1947) envolve o desenvolvimento de diagnósticos de perda de massa levando a uma imagem bastante boa do fluxo de estrelas quentes e compreensão básica das condições físicas na atmosfera solar externa.
3. A terceira fase (1947-1967) contém a prova de perda de massa de estrelas gigantes e o desenvolvimento do tema do vento solar.
4. A quarta fase (1967-1982) traça o rápido desenvolvimento do tema sobre os ventos estelares possibilitando novas observações.
5. A fase final (1980- presente) é a era atual que se preocupa com fenômenos dependentes do tempo. Efeitos como rotação e pulsação podem levar a não-esféricos em outras galáxias.

Demorou muitas décadas para os astrônomos perceberem que a maioria das classes de estrelas sofrem alguma forma de perda contínua de massa, no entanto, uma vez que as observações puderam ser feitas do espaço, o assunto dos ventos estelares, separados do vento solar, desenvolveu-se rapidamente. Alguns observatórios espaciais em particular o satélite Copernicus, o explorador Ultravioleta Internacional (IUE), o observatório de raio-x Einstein, o Telescópio Astronômico Infravermelho e o Observatório Espacial Infravermelho (ISO), têm sido bastante úteis para o estudo dos ventos estelares.

Atualmente, as propriedades globais dos ventos estelares e da perda de massa são razoavelmente bem compreendidas para a maioria dos tipos de estrelas, entretanto, ainda existem muitos aspectos dos ventos estelares que são incertos, não conseguimos entender realmente a variabilidade dos ventos estelares, nem os processos que levam à variabilidade. Os campos magnéticos podem desempenhar um papel importante na perda de massa e na estrutura da velocidade dos ventos, sabemos muito pouco sobre a força e a distribuição geométrica dos campos nas estrelas.

Quase todo o conhecimento que temos sobre os ventos estelares vem do estudo das estrelas em nossa galáxia. Até recentemente, havia apenas algumas observações de ventos estelares em outras galáxias, simplesmente porque é difícil obter a resolução espectral e espacial necessária para estudos detalhados. Os espectros ultravioletas obtidos com o telescópio espacial Hubble de estrelas no LMC, SMC e M31 mostram que as taxas de perda de massa dependem da metalicidade, de modo que estrelas em galáxias de menor

metalicidade têm taxas de perda de massa menores do que estrelas galácticas de mesma luminosidade, temperatura e massa.

A evolução das estrelas depende crucialmente de sua perda de massa durante várias fases de suas vidas, mudanças na taxa de perda de massa mesmo sendo pequena pode modificar drasticamente a evolução de uma estrela. Portanto, a evolução de estrelas massivas em galáxias de baixa metalicidade pode ser muito diferente daquelas situadas em nossa galáxia (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

4.3 EVIDÊNCIAS OBSERVACIONAIS

De modo mais amplo, as evidências observacionais dos ventos estelares são utilizados para determinar a taxa de perda de massa e a velocidade terminal do vento. As estrelas que possuem massa inferior a massa do Sol tem taxas de perda menores em comparação com estrelas supergigantes na sequência principal, nas fases finais da evolução estelar, essas taxas podem chegar a $10^{-6} M_{\odot} / \text{ano}$ ³ ou ainda maiores dependendo do estágio evolutivo da estrela, como no supervento que dá origem às nebulosas planetárias. Consequentemente, nas etapas finais, a evolução da estrela é significativamente afetada pela perda de massa (MACIEL, 2005a).

Nesta seção, discutimos diversas maneiras de detectar os ventos estelares e como eles contribuem em maior ou menor grau para a perda de massa das estrelas. Portanto, a melhor maneira de determinar as taxas de perda de massa das estrelas é usar os dois tipos de observações, medições contínuas de rádio combinadas com informações de velocidade dos perfis P Cygni no ultravioleta, e a emissão contínua de poeira no infravermelho combinada com as informações de velocidade das linhas de CO na região de rádio.

Vamos a seguir considerar algumas evidências observacionais dos ventos estelares.

³A notação se refere a perda de massa solar ao ano.

4.3.1 PERFIS P CYGNI

A presença de perfis P Cygni tem grande importância na identificação dos ventos estelares, em particular aplicados às linhas ultravioletas ressonantes em estrelas quentes. Essas linhas são produzidas por espalhamento ressonante, em que um átomo absorve um fóton da fotosfera, ou seja, absorve energia de forma a ocorrer uma passagem de seu elétron para um nível mais elevado de energia e em seguida o seu retorno ao nível de origem com a reemissão do fóton praticamente na mesma frequência do fóton original, desviado pelo efeito Doppler. Muitos exemplos de linha com perfis P Cygni são observados, particularmente no espectro ultravioleta de estrelas quentes (MACIEL, 2005a).

Os indicadores mais sensíveis de perda de massa de estrelas quentes são as linhas espectrais devido às transições atômicas do estado fundamental, chamadas de linhas de ressonância, de íons abundantes. Se a densidade da coluna dos íons absorventes no vento entre o observador e a fotosfera estelar for pequena, entre 10^{13} e 10^{14} íons cm^{-2} , as linhas de ressonância irão produzir um componente de absorção fraco, mas observável. Este componente de absorção é deslocado para um comprimento de onda mais curto porque é formado em uma região que se move para fora da estrela e em direção ao observador. Se a densidade da coluna dos íons de absorção for alta, digamos maior do que cerca de 10^{15} íons cm^{-2} , as linhas terão os chamados perfis P Cygni consistindo em um componente de absorção com deslocamento para o violeta e um componente de emissão com deslocamento para o vermelho (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

Um exemplo pode ser visto na figura 7 para a estrela HD93204. Nesse exemplo dizemos que o perfil está fortemente saturado, com o fluxo chegando a zero em praticamente toda a componente de absorção.

Como o maior fluxo de energia em estrelas O é na região do ultravioleta, os perfis serão formados por átomos relativamente abundantes, geralmente por linhas ressonantes com maiores forças de oscilador nessa região. Isso os tornam excelentes indicadores para taxa de perda de massa, caso as linhas não estejam saturadas. Caso haja saturação, as linhas irão servir como estimativa para um limite inferior para a perda de massa, sendo úteis nos diagnósticos para determinar a velocidade terminal do gás, já que os perfis estão diretamente ligados com o Efeito Doppler (MAIA, 2015).

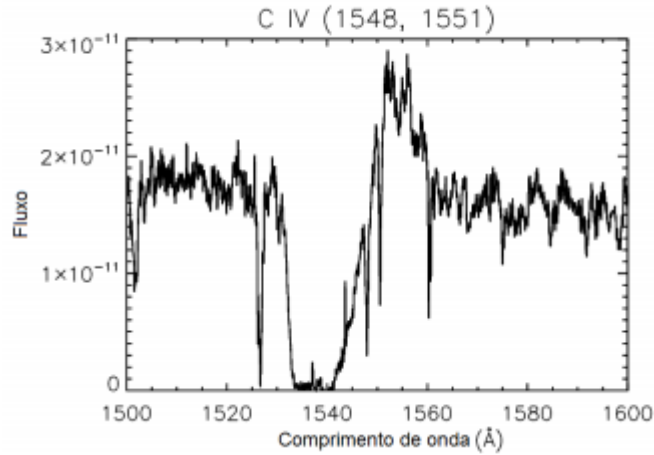


Figura 7. Perfil P Cygni na estrela HD93204, com os valores de comprimento de onda indicados entre parênteses.

Fonte: Maia, 2015.

4.3.2 A LINHA $H\alpha$ EM EMISSÃO

Em estrelas quentes com altas taxas de perda de massa $M \geq 10^{-7} M_{\odot}$ /ano podem mostrar linhas de emissão em seus espectros. O exemplo mais conhecido é a linha $H\alpha$ do hidrogênio em emissão, cujo perfil é um bom indicador da taxa de perda de massa, essas linhas são produzidas pela colisão de um íon do vento com um elétron, havendo uma recombinação a um estado excitado seguida de um processo de cascata até o estado fundamental, em que várias linhas podem ser emitidas. O estudo dos ventos estelares por meio desta linha tem a vantagem óbvia de que a linha pode ser observada do solo em comparação com os perfis ultravioleta P Cygni que requerem observações de satélites, assim como no caso dos perfis P Cygni visto anteriormente, os perfis da linha $H\alpha$ podem dar informações sobre a taxa de perda de massa e a lei da velocidade nos ventos, as linhas de emissão são aproximadamente simétricas em torno de seu comprimento de onda e a emissão estende-se até velocidades inferiores à velocidade final, tendo em vista que as linhas de emissão são formadas nas camadas inferiores dos ventos onde a densidade é alta (MACIEL, 2005a).

4.3.3 EXCESSO INFRAVERMELHO E RÁDIO

Para estrelas quentes com gás ionizado, é produzido um excesso de emissão contínua em comprimento de ondas longos, ou seja, de radiação infravermelha e rádio, causado pela emissão do vento Bremsstrahlung, produzida quando cargas elétricas sofrem desace-

lação. Neste caso, a taxa de perda de massa da estrela pode ser determinada a partir da lei de velocidades e da densidade do gás, que é obtida da distribuição de energia do excesso de radiação e da estrutura de temperatura. A luminosidade da radiação varia aproximadamente com $\nu^{0.6}$, onde ν é a frequência de radiação. Obviamente, tratamos nesse caso de radiação contínua, e não de linhas espectrais, o excesso de rádio ou infravermelho em si não fornece informações sobre a velocidade do vento porque é uma radiação contínua, de modo que não podemos obter informações sobre a velocidade de expansão do gás pelo efeito Doppler (MACIEL, 2005a).

4.3.4 EMISSÃO INFRAVERMELHA

As estrelas gigantes frias com alta taxa de perda de massa emitem um excesso de radiação infravermelha e milimétrica devido aos grãos imersos no envelope em expansão. A distribuição de energia da poeira pode ser observada na região infravermelha e milimétrica do espectro, diferenciando-se da emissão do vento Bremsstrahlung mencionada anteriormente. O aumento da emissão do infravermelho e milimétrica por grãos está relacionada à temperatura média da poeira, a distribuição de energia consiste em um componente estelar da temperatura, dependendo da densidade de colunas dos grãos. O aspecto observado poderá incluir uma componente estelar além da emissão planckiana da poeira, a análise dessa emissão inclui o estudo da distribuição espacial da temperatura dos grãos, e sua emissão livre produz uma distribuição de energia que diminui para ondas mais longas (MACIEL, 2005a).

4.4 MECANISMO DE EJEÇÃO DE MASSA

Muitos mecanismos diferentes tem sido proposto para explicar a ejeção de matéria em todas as faixas do diagrama Hertzsprung – Russell, nesta seção será apresentada uma introdução aos principais modelos que implicam na perda de massa das estrelas.

4.4.1 O DIAGRAMA DE HERTZSPRUNG - RUSSELL

O diagrama de Hertzsprung - Russell conhecido como diagrama HR, foi descoberto independentemente pelo dinamarquês Ejnar Hertzsprung, em 1911, e pelo americano Henry Norris Russell em 1913, como sendo uma relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura superficial. Hertzsprung descobriu que estrelas da mesma

cor podiam ser divididas entre luminosas, que ele chamou de gigantes, e estrelas de baixa luminosidade, que ele chamou de anãs. Assim, o Sol e a estrela Capela tem a mesma classe espectral, ou seja, possuem a mesma cor, mas Capela, uma estrela gigante, é cerca de 100 vezes mais luminosa que o Sol, Russell estendeu o estudo de Hertzsprung para as estrelas mais quentes, uma representação de um diagrama HR é mostrada na figura 8. Tanto a luminosidade (ou magnitude absoluta) como a temperatura superficial de uma estrela, são características facilmente determináveis para estrelas de distâncias conhecidas: a primeira pode ser encontrada a partir da magnitude aparente, e a segunda a partir de sua cor ou tipo espectral (FILHO; SARAIVA, 2014).

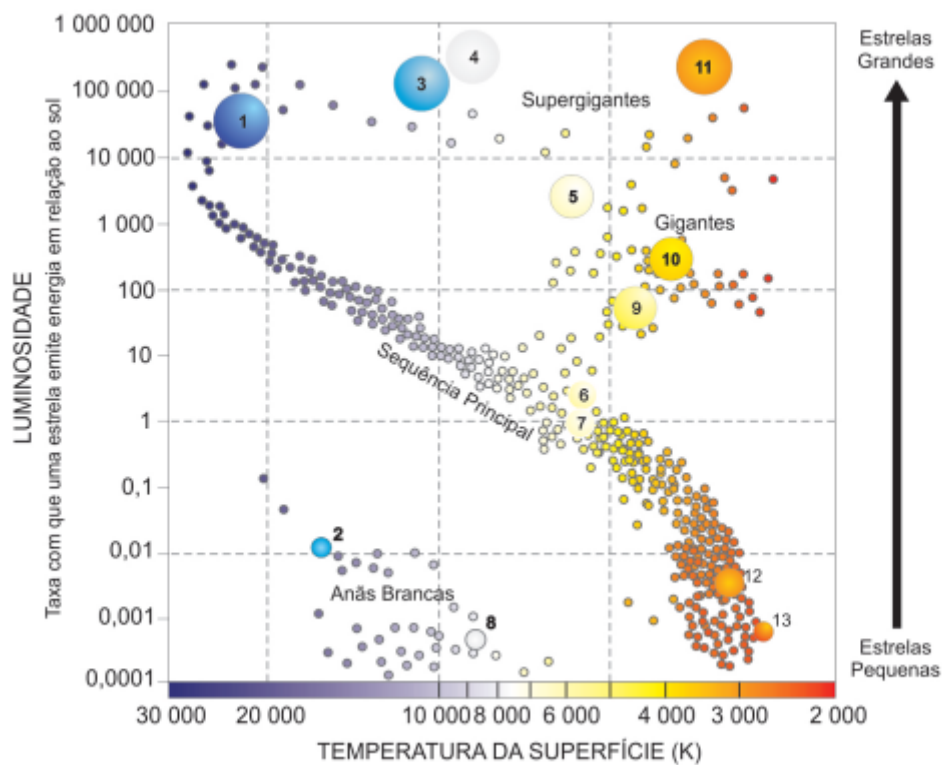


Figura 8. Representação de um diagrama HR, mostrando a localização de algumas estrelas conhecidas

Fonte: Filho; Saraiva, 2014.

A figura 8 mostra o diagrama HR para um conjunto de estrelas nas proximidades do Sol, há uma convenção adotada, de que a temperatura cresce para a esquerda, e a luminosidade para cima, no diagrama HR as estrelas não se distribuem igualmente, mas se concentram em algumas partes. A maior parte das estrelas está alinhada ao longo de uma estreita faixa na diagonal que vai do extremo superior esquerdo - estrelas quentes e muito luminosas, até o extremo inferior direito - estrelas frias e pouco luminosas. Essa

faixa é chamada sequência principal, a posição de uma estrela na sequência principal é determinada pela sua massa: estrelas mais massivas são mais quentes e mais luminosas. As estrelas da sequência principal têm, por definição, classe de luminosidade V, e são chamadas de anãs. Um número substancial de estrelas também se concentra acima da sequência principal, na região superior direita (estrelas frias e luminosas). Essas estrelas são chamadas gigantes, e pertencem à classe de luminosidade II ou III. No topo do diagrama existem algumas estrelas ainda mais luminosas: são chamadas supergigantes, com classe de luminosidade I. Finalmente, algumas estrelas se concentram no canto inferior esquerdo (estrelas quentes e pouco luminosas): são chamadas anãs brancas (FILHO; SARAIVA, 2014).

4.4.2 VENTOS CORONAIS

Os ventos coronais são ventos estelares impulsionados pela pressão do gás devido à alta temperatura do gás. No caso do sol, uma temperatura coronal de cerca de $2 \times 10^6 \text{K}$ é atingida nas camadas externas da atmosfera solar. O aumento da temperatura para as camadas superiores é devido à dissipação de energia mecânica ou a reconexão de campos magnéticos que se originam na zona de convecção abaixo da fotosfera. No entanto, nesta seção sobre ventos coronais, consideramos apenas os efeitos da pressão do gás e da condução de calor na produção de um vento estelar. No entanto, algumas estrelas frias muito luminosas também podem ter ventos impulsionados por outros mecanismos, como pressão de onda ou pressão de radiação em grãos de poeira, se essas estrelas têm uma alta taxa de perda de massa, o aquecimento não pode competir com o resfriamento causado pelo gás que sai. A condução térmica é importante em altas temperaturas, ela transporta energia das regiões de temperatura mais alta para as de temperatura mais baixa, de modo que o gradiente de temperatura tem de ser menor nas regiões onde a condução é eficiente. A solução do sistema de equações é geralmente numérica, ajustando-se às condições nas vizinhanças do ponto crítico, onde a velocidade do gás aproxima-se da velocidade do som (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

4.4.3 VENTOS IMPULSIONADOS POR ONDAS SONORAS

Em estrelas que possuem uma zona de convecção logo abaixo da fotosfera, os movimentos convectivos podem criar ondas acústicas que se propagam para fora através

da fotosfera, essas ondas sonoras produzem uma pressão na superfície da estrela que irá depender da densidade e das amplitudes de cada onda, com resultado dos movimentos convectivos, o gradiente da pressão da onda resulta em uma força que pode impulsionar um vento estelar.

Se as amplitudes de velocidade das ondas sonoras se tornarem maiores do que cerca de metade da velocidade do som, teremos como resultado à dissipação da energia acústica na forma de calor, observa-se que a dissipação é uma função acentuada da amplitude da velocidade das ondas. Para amplitudes de onda iniciais mais altas, a perda de energia por dissipação já é acentuada, isso mostra que as ondas sonoras têm um efeito insignificante nas taxas de perda de massa das estrelas, a menos que a dissipação seja levada em consideração. As ondas sonoras só afetam as taxas de perda de massa de estrelas de gravidade muito baixa se houver forte dissipação na região subsônica, nesse caso, a dissipação afeta tanto a estrutura térmica dos ventos quanto a força que os impulsiona.

Modelos com grande luminosidade de onda acústica e forte dissipação na região subsônica pode ser capazes de acelerar o vento nas camadas mais baixas, porém esses modelos não conseguem acelerar o vento além do ponto crítico. Para resolver esse problema, é necessário invocar outro mecanismo que possa elevar o material acima do ponto crítico do poço potencial. Isso poderia ser feito por pressão de radiação em grãos de poeira que se formam nos ventos de estrelas frias com altas taxas de perda de massa. Portanto, os modelos de vento impulsionados por ondas sonoras são modelos híbridos com dois mecanismos diferentes cooperando na região subcrítica e supercrítica.

A literatura sugere que ventos impulsionados por ondas sonoras com pressão de radiação na poeira podem gerar uma perda significativa de massa para as estrelas frias com uma gravidade muito baixa, como estrelas no ramo gigante assintótico. No entanto, para explicar as taxas de perda de massa e a velocidades dos ventos das estrelas no ramo assintótico, precisamos de ajustes mais refinados nos parâmetros, o que torna esses modelos implausíveis. (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

4.4.4 VENTOS CONDUZIDOS PELA POEIRA CIRCUNSTELAR

As atmosferas externas das estrelas gigantes frias, luminosas e das primeiras estrelas tipográficas podem ser expelidas pelos fortes campos de radiação das fotosferas estelares. No caso das estrelas frias, o impulso radiativo ocorre por causa da absorção de fótons

por grãos de poeira que podem formar as atmosferas externas. Os grãos podem absorver radiação em uma ampla faixa de comprimentos de onda, de modo que os fluxos de saída das estrelas frias são considerados ventos “conduzidos por um contínuo”.

No caso de estrelas quentes com estágio de evolução precoce, os ventos são impulsionados pelo espalhamento da radiação por opacidade de linha, os fluxos de saída provenientes dessas estrelas são chamados de ventos conduzidos por linhas, existe diferença entre os ventos que são conduzidos por linhas e por contínuo; o deslocamento Doppler desempenha um papel importante na análise dessa diferença, que é a parcela da quantidade extravasada de matéria e da fotosfera. Para uma estrela fria com um vento impulsionado pelo contínuo, há um desvio do comprimento de onda para o vermelho, que corresponde a alguns angstrom, é uma banda tão estreita que nem a continuidade nem o campo de radiação incidente mudam significativamente. Portanto, o deslocamento Doppler não é importante em ventos impulsionados por um contínuo.

No caso de ventos conduzidos por linha, tanto a opacidade da linha quanto o campo de radiação nas linhas mudam significativamente com os deslocamentos Doppler associados aos ventos. Em geral, o campo de velocidade em um vento impulsionado por linha aumenta mais acentuadamente com o raio. Apesar dessas diferenças, tanto o acionamento contínuo quanto o acionamento em linha podem produzir grandes taxas de perda de massa, da ordem de $10^{-6} M_{\odot}/ano$. Ventos impulsionados pela poeira são lentos com velocidades de cerca de 10 a 30 km/s^{-1} , enquanto ventos impulsionados por linhas geralmente têm velocidades maiores que $10^3 km/s^{-1}$, parte dessa diferença pode ser atribuída às diferenças nas velocidades de escape das estrelas envolvidas (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

4.4.5 VENTOS E CAMPOS MAGNÉTICOS: ONDAS DE ALFVÉN

As estrelas possuem em geral um campo magnético que é resultado da matéria remanescente da nuvem protoestrela ou desenvolvido por algum processo anterior, a estrutura desses campos, com exceção do sol, não é bem conhecida, mas é bastante provável que o campo tenha efeitos consideráveis sobre os ventos estelares, em particular para estrelas com alta rotação. A junção dos campos magnéticos com a rotação tem um papel importante na perda de quantidade de movimento angular, como ocorre nas protoestrelas, na fase de pré-sequência principal e na sequência principal inicial.

Na presença de um campo magnético, teremos que considerar seus efeitos sobre os ventos estelares, como por exemplo, se as oscilações forem induzidas no campo na base do vento, ondas transversais, ondas de Alfvén serão geradas, ou seja, ondas de baixa frequência, propagando-se na direção do campo magnético, através da oscilação de íons. Essas ondas podem levar à aceleração da atmosfera externa na forma de um - vento impulsionado pelas ondas Alfvén - as regiões de campo aberto podem surgir em uma variedade de configurações, dependendo das correntes de circulação ou propriedades do dínamo do interior da estrela. Juntamente com os processos envolvendo a pressão da radiação, as ondas de Alfvén são provavelmente os principais mecanismos de produção de ventos, ocorrendo em diversas regiões coronais extensas e com fluxos radiativos. A inclusão das ondas de Alfvén como mecanismo de produção de ventos e posteriormente responsável pela ejeção de massa em estrelas, implica na modificação da equação de conservação da quantidade de movimento, que passa a incluir um termo correspondente à força de Lorentz, que é proporcional a densidade de corrente $\vec{J}$, e a intensidade do campo magnético $\vec{B}$ (MACIEL, 2005a).

5 A INFLUÊNCIA NA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS NO MEIO INTERESTELAR

Diversos tipos de observações apresentam evidências de ventos estelares, particularmente no caso de estrelas jovens e quentes, das estrelas centrais de nebulosas planetárias e das estrelas evoluídas, o estudo da evolução de algumas estrelas é extremamente importante para explicar a origem da matéria e de estruturas do meio interestelar.

Na etapa inicial as estrelas formam-se dentro de concentrações relativamente densas de gás e pó interestelar conhecidas como nuvens interestelares. A desordem nas nuvens que envolve o processo de formação está ligada incondicionalmente a sua instabilidade, onde por meio de um processo de instabilidade gravitacional leva à contração da nuvem até que as regiões centrais atinjam densidades e temperaturas suficientes para que ocorra a ignição das reações nucleares. À medida que a nuvem colapsa, o material no centro começa a aquecer dando origem a uma bolha central conhecido como protoestrela, é este núcleo em fusão no coração da nuvem colapsada que se tornará uma estrela (MARQUES et al., 2018).

Os diversos estágios pelos quais passa uma estrela ao longo de sua vida constituem

a evolução estelar. A evolução de uma estrela depende criticamente da sua massa, desde a fase de protoestrela até os estágios finais, no caso de estrelas de massa pequena ou intermediária, como o Sol, a estrela se transforma em uma gigante vermelha, movendo-se para cima e para a direita no diagrama Hertzsprung-Russell, no final da fase de gigante vermelha, a estrela ejeta suas camadas externas, formando então uma nebulosa planetária enquanto que o objeto central - com a maior parte da massa da estrela original - transforma-se em uma estrela anã branca (MACIEL, 2005b).

As estrelas de grande massa, até cerca de 20 ou 30 massas solares, têm uma evolução mais rápida e dramática. Deixam a sequência principal em direção ao ramo das supergigantes, explodindo posteriormente como uma supernova. A evolução de uma estrela até o estágio de uma supernova é um fenômeno extremamente energético, transferindo energia e quantidade de movimento ao meio interestelar por meio de ondas de choque. No processo, pode ser formada uma estrela de nêutrons - um objeto colapsado - enquanto que a parte mais externa da estrela, ou toda ela, é ejetada ao meio interestelar (MACIEL, 2005b).

Esse gás interestelar, é constantemente renovado pelas ejeções de massa das estrelas, e estará pronto para formar novas gerações de estrelas, as quais terão uma composição química modificada graças às transformações nucleares ocorridas no interior das gerações precedentes. Os ventos estelares fazem parte desse processo, sendo uma maneira eficaz de transferência de matéria, energia e quantidade de movimento das estrelas para o meio interestelar. Entre os mais espetaculares exemplos de ventos estelares podemos associar os ventos produzidos por estrelas jovens e quentes, que estão frequentemente relacionados com as regiões de formação estelar, como por exemplo, a nebulosa de Roseta na Figura 1 (MACIEL, 2005b).

5.1 TAXA DE PERDA DE MASSA

Praticamente todas as estrelas perdem massa para o meio interestelar, embora as taxas observadas e os processos físicos responsáveis pela perda de massa podem ser bastante diferentes. Altas taxas de perda de massa para os ventos estelares reduzem consideravelmente a massa original da estrela, de modo que sua trilha evolutiva será completamente diferente. A perda de massa pode atingir velocidades que variam de 10km/s a cerca de alguns milhares de km/s , da mesma ordem ou maior que a velocidade de escape estelar. Isso significa que a condição de equilíbrio hidrostático não é mais válida,

pelo menos nas camadas externas da estrela, onde a força de pressão domina a força da gravidade. Podemos usar a equação da continuidade (9) e obter uma expressão simples para a taxa de perda de massa, que é a quantidade de matéria perdida pela estrela por unidade de tempo, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r), \quad (90)$$

onde $v(r) = \frac{dr}{dt}$, é a velocidade de expansão do gás.

Portanto, se conhecermos as dimensões, a densidade e a velocidade do gás ejetado, podemos obter diretamente a taxa de perda de massa. A velocidade do gás pode, em geral, ser determinada pelo efeito Doppler na emissão observada ou nas linhas de absorção, em particular para linhas exibindo os perfis P Cygni, em que as características de absorção e emissão são observadas. Os resultados variam de 10 a 20 km/s para os ventos frios e lentos de estrelas gigantes vermelhas, a alguns milhares de km/s para os ventos quentes e rápidos das estrelas O, B e estrelas centrais das nebulosa planetárias.

Os processos responsáveis pela perda de massa nas estrelas não são bem conhecidos, e ainda são objeto de pesquisas. Estrelas do tipo solar têm cromosferas e coronas que são aquecidos por processos não térmicos, e sua evaporação constitui o observado vento solar. No caso de gigantes luminosos frios, a ação da radiação a pressão certamente desempenha um papel importante, seja atuando diretamente no gás molecular ou nos grãos de poeira formados nas camadas estelares mais externas. Estrelas pulsantes também podem ter uma taxa de perda de massa aumentada em vista dos movimentos de suas camadas, seja pela ação das ondas de Alfvén vista anteriormente, ou através de outras interações com o campo magnético (MACIEL, 2016).

5.2 INTERAÇÃO DOS VENTOS ESTELARES COM O MEIO INTERESTELAR

As estrelas interagem com o meio interestelar circundante, tanto por meio de sua radiação ionizante quanto por meio da massa, e pelas quantidades de movimento e energia que são transferidas por meio de seus ventos. A radiação ultravioleta extrema de estrelas quentes leva a nebulosas ionizadas ou regiões de hidrogênio ionizado (HII) em torno de estrelas jovens. No caso de estrelas de baixa massa prestes a se tornarem anãs brancas, a radiação leva à ionização das nebulosas planetárias. A perda de massa nos ventos estelares leva a uma reciclagem da matéria de volta ao meio interestelar e devido

ao processamento nuclear que ocorre no interior das estrelas, a matéria que retorna é frequentemente enriquecida quimicamente.

Nos casos de gigantes O do tipo tardio e estrelas de Wolf-Rayet ricas em carbono, os grãos de poeira são produzidos nos ventos, então os fluxos podem transportar material enriquecido com grãos para o meio interestelar. Esses grãos podem desempenhar um papel na próxima geração de formação estelar. Existem também efeitos dinâmicos associados às interações vento e meio interestelar. As colisões dos ventos com seus arredores produzem “bolhas de vento” e a transferência de momento ajuda a manter as velocidades aleatórias das nuvens interestelares que, de outra forma, seriam amortecidas pelos efeitos dissipativos das colisões de nuvens.

Os ventos de estrelas massivas tendem a ter os maiores efeitos sobre o meio interestelar, porque suas taxas de perda de massa são grandes, e as estrelas massivas que são quentes também têm ventos que são muito rápidos e carregam grandes fluxos de momento. Estrelas massivas são definidas como estrelas que, mesmo na ausência de efeitos binários, terminariam com suas vidas como supernovas. Isso significa que suas massas estão na faixa de cerca de $8M_{\odot}$ a cerca de $100M_{\odot}$, essas estrelas serão capazes de inflamar a queima de carbono em seus núcleos e, em seguida, encerrar sua evolução em explosões de supernovas (LAMERS; CASSINELLI, 1997).

A interação dos ventos estelares com o meio interestelar corresponde a um processo hidrodinâmico em um fluido compressível, esse processo leva a uma reciclagem de matéria e energia do meio interestelar; a energia cinética do vento é convertida no aquecimento da região produzindo ondas de choque com altas temperaturas, essas regiões podem ter dimensões superiores às dimensões circunstelares que estão associadas à estrela em processo de perda de massa. De modo geral, os ventos associados às estrelas também são responsáveis pela propagação de choques no meio interestelar, isso pode ocorrer em estrelas evoluídas ou em explosões de supergigantes, estejam elas localizadas na sequência principal ou em estágios posteriores, nos quais frequentemente são observados jatos de matéria associados aos choques (MACIEL, 2005a).

6 CAPÍTULO IV - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo sobre o cosmo e seus mecanismos requerem uma linguagem própria e que acompanhe as nuances dos fenômenos estudados de forma sistemática. Devemos utilizar uma descrição física e matemática para conseguir compreendê-los e decifrar cada detalhe do mecanismo que forma a grande máquina que é o universo. Dessa forma, o universo é regido por leis que demonstram seu comportamento, como exposto no capítulo II, onde podemos elencar algumas equações no estudo da hidrodinâmica circunstellar; a equação de Euler (48b), por exemplo, não é a única equação necessária para descrever o vento estelar, que é essencialmente um escoamento hidrodinâmico das camadas mais externas de uma estrela; necessitamos ainda da equação de continuidade (9), que traduz a conservação da massa, e da equação de energia que, em princípio, leva em conta todos os processos de ganho e perda de energia.

Dessa forma buscamos com esse estudo demonstrar a dinâmica circunstellar com destaque para a formação e os efeitos dos ventos estelares sobre o meio interestelar, mostrando a importância das equações hidrodinâmicas como ferramenta para a descrição de fenômenos astrofísicos. Estudos sobre o universo e em particular a disseminação de informações que tratem da importância da astrofísica e da física principalmente, são essenciais para o desenvolvimento científico e para a produção de material literário para suprir a necessidade de conteúdo científico de astrofísica à nível de graduação, que auxiliem na construção do conhecimento humano a respeito de suas origens, fornecendo-nos uma nova perspectiva; a de um universo tocável, mutável e nos lembrando que somos feitos de pó de estrelas.

REFERÊNCIAS

- BATCHERLOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967.
- CLARKE, C.; CARSWELL, B. *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2007.
- FILHO, K. de S. O.; SARAIVA, M. de F. O. *Astronomia e astrofísica*. Livraria da Física, 2014. ISBN 9788578611873. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=FhDsJwEACAAJ>>.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; LEYLEGIAN, J. C. *Introdução à Mecânica dos Flúidos*. 8^a. ed. [S.l.]: LTC, 2014. ISBN 978-85-216-2583-4.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos de física vol. 2. *Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora SA*, 2009.
- KUNDU, I. M. C. P. K. *Fluid mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2001. ISBN 9780121782511,0121782514.
- LAMERS, H. J. G. L. M.; CASSINELLI, J. P. *Introduction to stellar winds*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- LANDAU, L.; LIFSCHITZ, E. *Fluid Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Elsevier, 1987.
- LIMA, L. S. Lei dos gases ideais. *Revista de Ciência Elementar*, V3(01):095, 2015.
- MACHADO, K. D. *Cálculo Vetorial e Aplicações*. [S.l.]: Editora: Toda Palavra, 2014.
- MACIEL, W. J. *Hidrodinâmica e Ventos Estelares: Uma Introdução Vol. 60*. [S.l.]: Edusp, 2005.
- MACIEL, W. J. *Ventos estelares*. [S.l.], 2005. Disponível em: <<http://www.astro.iag.usp.br/~maciel/teaching/palestras/ventos/ventos.html>>. Acesso em: 03 Fev. 2021.
- MACIEL, W. j. O céu que nos envolve: Introdução à astronomia para educadores e iniciantes. In: _____. [S.l.]: Editora: Odisseus, 2011. p. 200–228.
- MACIEL, W. J. *Introduction to Stellar Structure*. 1. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016. (Springer Praxis Books). ISBN 978-3-319-16141-9,978-3-319-16142-6.
- MAIA, D. Análise de estrelas do tipo o no infravermelho medio. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- MARQUES, J. V. d. C. et al. Evolução estelar: do colapso de uma nuvem de gás ao nascimento de uma protoestrela. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2018.
- MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da mecânica dos fluidos*. [S.l.]: Editora Blucher, 2004.
- NEMIROFF, R.; BONNELL, J. *Astronomy Picture of the Day*. [S.l.], 2012. Disponível em: <<https://apod.nasa.gov/apod/ap120214.html>>. Acesso em: 13 mai. 2020.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. [S.l.]: Editora Blucher, 2002. v. 2.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014. v. 2.

OLIVEIRA, M. J. de. *Termodinâmica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2005.

SCHMIDT, F.; HENDERSON, R. *Introdução às ciências térmicas: termodinâmica, mecânica dos fluidos e transferência de calor*. [S.l.]: Editora Edgard Blücher, 1996. ISBN 9788521200826.

TREFIL, J. S. *Introduction to the Physics of Fluids and Solids*. [S.l.]: Pergamon Press, 1975. ISBN 978-0-08-018104-2, 0-08-018104-X.

TYSON, N. d. *Astrofísica para apressados*. [S.l.]: Editora Planeta do Brasil, 2017.

VENNARD, J. K. *Elementary Fluid Mechanics*. [S.l.]: Wiley, 1940.

WEIGERT, D. *A Grandeza Do Universo*. [S.l.: s.n.], 2017.

WOLFRAM, S. *A New Kind of Science*. 1. ed. [S.l.]: Wolfram Media, 2002. ISBN 1-57955-008-8, 9781579550080.

ÇENGEL, J. M. C. Y. A. *Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações*. 1^a. ed. [S.l.]: AMGH, 2012. ISBN 978-85-8055-066-5.

A APÊNDICE A

A.1 INTRODUÇÃO

Este apêndice aborda importantes conceitos acerca da notação tensorial cartesiana, também chamada de notação de índices ou de Einstein. Nosso objetivo é apresentar os principais conceitos acerca desta notação, tendo em vista que ela apresenta nítidas vantagens sobre a vetorial, por apresentar uma forma mais elegante e compacta das equações sobre os vetores.

Antes de iniciarmos o estudo sobre tensores, veremos a definição de vetores. Um vetor é representado por um segmento orientado AB que apresenta direção, módulo e sentido, é definido como uma classe de equipolência de segmentos orientados. Definiremos um vetor genérico da seguinte forma:

$$\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (91)$$

onde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, são os vetores unitários dos eixos x, y, z . Vetores são membros de uma classe mais ampla de objetos chamadas tensores.

Um tensor pode ser definido como um operador linear, $\mathbf{C}$, que relaciona um vetor genérico (91) a um único vetor através de uma transformação, ou seja, $\vec{U} = \mathbf{C} \vec{A}$.

Considerando $\mathbf{C}$ como uma aplicação de F em F , o qual pode transformar qualquer vetor em um outro vetor, se $\vec{C}$ transforma x em y e v em w , então:

$$\mathbf{C}x = y, \quad (92)$$

$$\mathbf{C}v = w, \quad (93)$$

se $\mathbf{C}$ for capaz de satisfazer as propriedades de soma e multiplicação por um escalar, onde $\vec{u}, \vec{v} \in F$, teremos:

$$\mathbf{C}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{v}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F, \quad (94)$$

$$\mathbf{C}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{C}\mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (95)$$

Então temos que $\mathbf{C}$ corresponde a uma transformação linear, sendo chamada de tensor de segunda ordem ou simplesmente de tensor. Como foi definido anteriormente, um tensor associa o vetor $\mathbf{C}\vec{v}$ ao vetor $\vec{v}$ por uma transformação de coordenadas, isto sugere que podemos representar as componentes de um vetor na forma matricial, ou seja, a matriz das componentes do vetor $\vec{A}$ sendo representada por uma matriz coluna:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad (96)$$

e as componentes do nosso tensor $\mathbf{C}$ são representadas por uma matriz quadrada:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \quad (97)$$

podemos observar que as componentes do meu novo vetor $\vec{U}$ são obtidos a partir do

produto matricial, ou seja, da equação (98):

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Analisando a equação (98) vemos que as colunas da matriz de componentes do tensor são as componentes dos vetores $\mathbf{C}\vec{e}_1, \mathbf{C}\vec{e}_2, \mathbf{C}\vec{e}_3$, onde $\vec{e}_i = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ representa uma base ortonormal de vetores.

Ainda temos dois tensores que são bastante utilizados quando se emprega a notação dos índices: os operadores δ_{ij} e ϵ_{ijk} . Podemos definir o operador δ_{ij} , conhecido como δ_{ij} de Kronecker, assim:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{pmatrix}, \quad (99)$$

na verdade, o δ_{ij} de Kronecker representa os elementos da matriz identidade, que ao multiplicar um vetor $\vec{A}$, dá como resultado o próprio vetor, vejamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (100)$$

O operador ϵ_{ijk} , também definido como símbolo de permutação, ou símbolo anti-simétrico de Levi-Civita, é utilizado para representar o produto vetorial e o rotacional de um vetor, assim podemos encontrar o valor desse operador:

- +1, se i, j, k formam permutação na ordem cíclica: 123, 231, 312;
- - 1, se i, j, k formam uma permutação na ordem anticíclica: 132, 213, 321;
- 0 se, i, j, k não formam uma permutação, i=j, i=k, ou j=k.

B ÁLGEBRA TENSORIAL

Na seção anterior vimos uma breve introdução sobre tensores, iremos apresentar as operações que categorizam a álgebra tensorial.

B.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE TENSORES

A soma ou subtração de tensores só é válida quando estamos tratando tensores do mesmo tipo, ou seja, que possuam a mesma ordem e tenha os mesmos números de índices. Se supormos um tensor D formado pela soma de outros dois tensores B e C respectivamente, teremos a seguinte equação:

$$D = B + C, \quad (101)$$

dá mesma forma ocorre para a subtração:

$$D = B - C, \quad (102)$$

e por definição teremos que, $\mathbf{D}\vec{v} = (\mathbf{B} \pm \mathbf{C})\vec{v}$, para qualquer vetor $\vec{v}$. As suas componentes na base $\vec{e}_i$ são $D_{ij} = B_{ij} \pm C_{ij}$, a demonstração é relativamente simples como podemos ver:

$$\mathbf{D}\vec{v} = \mathbf{B}\vec{v} \pm \mathbf{C}\vec{v} = B_{ij}v_j\vec{e}_i \pm C_{ij}v_j\vec{e}_i = (B_{ij} \pm C_{ij})v_j\vec{e}_i = D_{ij}v_j\vec{e}_i. \quad (103)$$

A soma de tensores é associativa e comutativa.

B.2 MULTIPLICAÇÃO DE TENSORES

O produto de dois tensores também é chamado de produto externo, diferente da adição e subtração o produto externo pode ocorrer com qualquer tipo de tensor. O produto de B e C é definido por $(\mathbf{BC})\vec{v} = \mathbf{B}(\mathbf{C}\vec{v})$, para qualquer vetor. No processo de multiplicação teremos a soma das componentes de cada tensor, m+n, as componentes na base $\vec{e}_i$ são $(BC)_{ij} = B_{il}C_{lj}$, a demonstração é feita a seguir:

$$\mathbf{BC}\vec{v} = \mathbf{B}(\mathbf{C}\vec{v}) = \mathbf{B}(C_{lj}v_j\vec{e}_l) = C_{lj}v_j\mathbf{B}\vec{e}_l = C_{lj}v_jB_{il}\vec{e}_i = B_{il}C_{lj}v_j\vec{e}_i. \quad (104)$$

Se B_{il} e C_{lj} são tensores, então seu produto externo também é um tensor, no caso da ordem temos $(m + n = 2 + 2 = 4)$. O produto entre tensores é associativo e distributivo, mas em geral não é comutativo.

B.3 CONTRAÇÃO DE TENSORES

A contração tensorial ou produto interno, implica em uma redução na ordem do tensor e consequentemente no número de componentes, é uma soma sobre índices repetidos, ou seja, para fazer a contração de tensor igualamos um índice covariante a um índice contravariante e somamos com respeito a esse índice, a repetição do índice indica somatório segundo a convenção. Por exemplo, o produto externo entre dois tensores quaisquer B_{ij} e C_k é:

$$D_{ijk} = B_{ij}C_k, \quad (105)$$

é um tensor de terceira ordem com $3^3 = 27$ componentes no sistema cartesiano, entretanto, o produto interno entre esses mesmos tensores é:

$$D_{ij}^j = B_{ij}C_j = E_i. \quad (106)$$

Que é um tensor de primeira ordem com 3 componentes.

A APÊNDICE B

A.1 INTRODUÇÃO

Usando a notação tensorial cartesiana podemos reescrever as equações dos fluidos, por exemplo, a equação da continuidade e a equação de Euler, de uma forma particularmente compacta e elegante. Nessa forma, as equações são especialmente úteis no caso de fluidos em que a viscosidade não pode ser desprezada. No capítulo I vimos a equação da continuidade na forma vetorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (107)$$

Fazendo uso da notação tensorial cartesiana, a equação da continuidade (107) assume a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (108)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \partial_i \rho + \rho \partial_i v_i = 0, \quad (109)$$

ajustando os termos, tomamos o resultado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v_i) = 0, \quad (110)$$

podemos verificar que:

$$\partial_i(\rho v_i v_j) = \rho v_i \partial_i v_j + v_j \partial_i(\rho v_i). \quad (111)$$

Combinando as equações (110) e (111), obtemos:

$$\partial_i(\rho v_i v_j) = \rho v_i \partial_i v_j - v_j \partial_t \rho. \quad (112)$$

Que é a equação da continuidade na forma tensorial.

A.2 A EQUAÇÃO DE EULER SEM FORÇAS EXTERNAS

No capítulo II, discutimos a equação de Euler para um fluido ideal, ou seja, sem ação de forças externas, que é dada por :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P. \quad (113)$$

Usando a notação dos índices na equação (113), temos:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (114)$$

Ou ainda,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \partial_j v_i = -\partial_i P, \quad (115)$$

nota-se que:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (116)$$

Observando as equações (115) e (116) e combinando-as, temos:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\partial_i P - \rho v_j \partial_j v_i + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (117)$$

organizando os termos da equação (117), chegamos ao resultado:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\partial_i P - \left(-\rho v_j \partial_j v_i - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (118)$$

Combinando as equações (112) e a (118), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -[\partial_i P + \partial_j(\rho v_j v_i)]. \quad (119)$$

Se imaginarmos um tensor da forma $\prod_{ik}$ podemos escrever a equação (119) de uma forma mais simples, teremos:

$$\prod_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k, \quad (120)$$

podemos analisar a equação (120) e verificar que:

$$\partial_k \prod_{ik} = \partial_j(P\delta_{ik} + \rho v_i v_k) \quad (121)$$

$$\partial_k \prod_{ik} = \partial_j(P\delta_{ik}) + \partial_j(\rho v_i v_k) \quad (122)$$

$$\partial_k \prod_{ik} = \partial_i P + \partial_k(\rho v_i v_k). \quad (123)$$

Observando as equações (119) e (123) e combinando-as chegamos a equação (125):

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k \prod_{ik}. \quad (124)$$

Observe que:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (125)$$

A equação (125) é a equação de Euler sem forças externas em notação tensorial cartesiana, que é resultado da combinação das equações da continuidade e do movimento.