



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS PARNAÍBA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

JEFFERSON WHERCULIS DA SILVA SOUZA

**MECÂNICA CELESTE: UMA ANÁLISE DINÂMICA DO PROBLEMA RESTRITO
DE TRÊS CORPOS PARA ASTROS DO SISTEMA SOLAR**

PARNAÍBA - PIAUÍ

Dezembro de 2018

JEFFERSON WHERCULIS DA SILVA SOUZA

MECÂNICA CELESTE: UMA ANÁLISE DINÂMICA DO PROBLEMA RESTRITO DE
TRÊS CORPOS PARA ASTROS DO SISTEMA SOLAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - Campus Parnaíba, como requisito para obtenção do título de licenciado em Física, sob orientação do Prof. MSc. Itamar Vieira de Sousa Júnior.

Orientador: Prof. MSc. Itamar Vieira de Sousa Júnior

PARNAÍBA - PIAUÍ

Dezembro de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Souza , Jefferson Wherculis da Silva

S729m Mecânica celeste : uma análise dinâmica do problema restrito de três corpos para astros do sistema solar / Jefferson Wherculis da Silva Souza . - 2018.
88 f.: il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Parnaíba Licenciatura em Física, 2018.

Orientador : Prof Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior .

1. Mecânica celeste. 2. Problema restrito de três corpos. 3. Método de Runge-Kutta. 4. Software MATLAB. I.Título.

CDD - 530

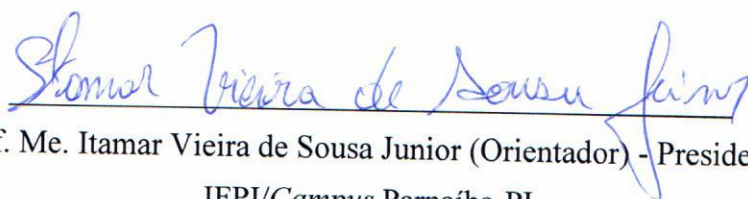
Elaborado por Micheline Angélica Aragão Gouveia CRB 3/1244

**MECÂNICA CELESTE: UMA ANÁLISE DINÂMICA DO PROBLEMA RESTRITO DE
TRÊS CORPOS PARA ASTROS DO SISTEMA SOLAR**

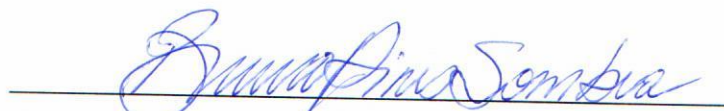
Jefferson Wherculis da Silva Souza

Aprovado em 21 / 12 / 2018

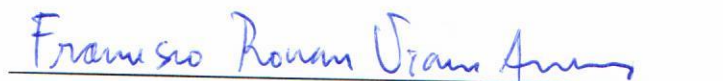
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Física do
IFPI/Campus Parnaíba, aprovado pela Banca Examinadora:



Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Junior (Orientador) - Presidente
IFPI/Campus Parnaíba-PI



Prof. Me. Bruno Pires Sombra – Examinador
IFPI/Campus Parnaíba-PI



Prof. Me. Francisco Ronan Viana Araújo – Examinador
IFPI/Campus São Raimundo Nonato

Parnaíba PI

2018

Dedico este trabalho a minha família, e a todos que sempre acreditaram nos meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Edilson Silva Souza e Maria Marlucia da Silva Souza, e meu irmão Jackson Breno da Silva Souza, por me apoiarem e me darem todas as condições necessárias por estes anos em que decidi começar esta jornada.

Agradeço ao meu professor e orientador, o Mestre Itamar Vieira, por sua essencial ajuda na busca pelos melhores caminhos para o desenvolvimento deste trabalho, com suas valiosas sugestões e pela liberdade para uma condução do trabalho da melhor maneira possível. Obrigado por todas as dicas e ensinamentos e acima de tudo paciência comigo durante este tempo, aprendi muito com você.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Física do IFPI - Campus Parnaíba, aos quais tive a oportunidade de receber seus ensinamentos, registro meus profundos agradecimentos, em especial ao professor Bruno Sombra, pela parceria e apoio durante este período, ao professor Antonio Nascimento por suas contribuições a minha formação e por ser umas das minhas maiores fontes de inspiração.

As meus amigos do curso, agradeço por acreditarem que este trabalho sairia. Tive a sorte de conviver por estes anos com pessoas maravilhosas, que sempre me apoiaram na busca pelos meus objetivos, nunca pensei que faria tantos amigos no curso, meus sinceros agradecimentos a cada um de vocês.

Não posso deixar de lembrar da minha querida turma, vocês foram importantes demais, ninguém melhor do que vocês para entender o que passamos, todas as angustias, os momentos de tensão e felicidades. O companheirismo e a convivência com vocês é algo que não tem preço, obrigado por tudo.

“ As flores nascem e depois murcham. As estrelas brilham, mas algum dia se extinguem. Comparado a isso, a vida do homem é nada mais do que um simples piscar de olhos, um breve momento. Nesse pouco tempo, as pessoas nascem, riem, choram, lutam, são feridas, sentem alegria ,tristeza, odeiam alguém, amam alguém. Tudo isso em um só momento”
(Shaka de Virgem - Cavaleiros do Zodíaco)

RESUMO

O Problema Restrito de três Corpos foi proposto como simplificação para o problema mais geral, que os físicos tentavam mais não chegavam a uma solução exata. No entanto, por mais que seja um sistema simplificado, o físico francês Henri Poincaré mostrou que ele não possui solução analítica. O estudo deste problema mecânico tem crucial importância para entender o comportamento de sistemas existentes na natureza que são modelados por suas características, como por exemplo sistemas de estrelas ligadas por seus potenciais gravitacionais. A análise dinâmica do sistema é feita pela interpretação das equações de movimento, no entanto as equações típicas do problema restrito de três corpos, possuem suas variáveis acopladas, impossibilitando uma solução direta pelos métodos usuais, para contornar este problema são empregados métodos numéricos que auxiliam na busca de soluções aproximadas. O objetivo deste trabalho é fazer uma descrição detalhada a respeito das características próprias deste sistema, buscando dar um tratamento numérico pelo método de Runge-Kutta Clássico, utilizando rotinas no software MATLAB, para encontrar soluções aproximadas das equações de movimento, de onde serão tiradas as informações da evolução dinâmica do sistema.

Palavras-chaves: Problema Restrito de três Corpos. Método de Runge-Kutta. MATLAB. Soluções Numéricas.

ABSTRACT

The Restricted Problem of Three Bodies was proposed as a simplification for the more general problem, which physicists tried most did not reach an exact solution. However, even though it is a simplified system, the French physicist Henri Poincaré has shown that he has no analytical solution. The study of this mechanical problem has crucial importance to understand the behavior of systems existing in nature that are modeled by their characteristics, such as systems of stars linked by their gravitational potential. The dynamic analysis of the system is done by the interpretation of the equations of motion, however the typical equations of the restricted problem of three bodies, have their variables coupled, making a direct solution impossible by the usual methods, to overcome this problem numerical methods are used that help in search for approximate solutions. The objective of this work is to provide a detailed description of the characteristics of this system, seeking to give a numerical treatment using the Runge-Kutta Classic method, using routines in the MATLAB software, to find approximate solutions to the equations of motion, from which the dynamic evolution of the system.

Key-words: Restricted Problem of Three Bodies. Runge-Kutta method. MATLAB. Numerical Solutions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Sistema de coordenadas referente as massas m_1 e m_2 . Em (a) o Centro de Massa está fora da origem, (b) o Centro de Massa na origem do sistema. Fonte: (THORNTON; MARION, 2011)	22
Figura 2	– Trajetórias possíveis. Fonte: (GOLDSTEIN, 1980)	24
Figura 3	– Trajetórias possíveis. Fonte: (THORNTON; MARION, 2011)	27
Figura 4	– Órbita que não se fecha após um finito numero de oscilações. Fonte: (THORNTON; MARION, 2011)	28
Figura 5	– Sistema de coordenadas referente as massas m_1 , m_2 e do corpo de massa desprezível. Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)	32
Figura 6	– Curvas de velocidade zero para diferentes valores de C_J para o caso de $\mu = \mu_2 = 0.2$. Em (a) $C_J = 3.9$ e em (b) $C_J = 3.7$. Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)	39
Figura 7	– Esquematização dos pontos de equilíbrio lagrangeanos, junto com as superfícies de velocidade zero. Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)	43
Figura 8	– Combinação dos movimentos de longo e curto período nas proximidades de L_4 . A elipse menor indica o movimento do epicentro que é o de curto período e a elipse maior indica o movimento do epiciclo para órbitas de longo período. Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)	49
Figura 9	– Solução numérica para a trajetória de um corpo librando em torno do ponto de equilíbrio L_4 . Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)	49
Figura 10	– Esquematização gráfica do método explícito de Euler, com a presença da inclinação e relação entre a solução exata e numérica. Fonte: (DUKKIPATI, 2010)	53
Figura 11	– Esquematização gráfica das inclinações K_1 , K_2 e K_3 no método de Runge - Kutta Clássico. Em (a) é especificado a constante K_1 e como a inclinação K_2 é construída por influência de K_1 na metade do intervalo de integração, em (b) é mostrado como o valor K_2 , influencia na construção da nova inclinação K_3 . Fonte: (DUKKIPATI, 2010)	55
Figura 12	– Esquematização gráfica do método de Runge-Kutta Clássico. Em (a) a inclinação K_3 é especificada e mostrada como esta influencia a construção da inclinação K_4 no final do intervalo de integração, em (b) está especificado a construção da inclinação resultante, da média ponderada de todas as outras quatro inclinações. Fonte: (DUKKIPATI, 2010)	55
Figura 13	– Gráfico do Potencial Efetivo do Sistema Terra-Lua. Fonte: Do próprio autor	58

Figura 14 – Representação dos potenciais existentes no sistema Terra-Lua em referencial não inercial. Em (a) se observa o potencial referente a Lua, em (b) o potencial da Terra e em (c) o potencial centrífugo do sistema. Fonte: Do próprio autor.	59
Figura 15 – Trajetória de uma nave espacial sujeita a gravidade do sistema Terra-Lua. Em (a) observamos o perfil da trajetória para determinadas condições iniciais, em (b) se verifica que a representação da órbita muda consideravelmente para uma pequena variação das condições iniciais. Fonte: Do próprio autor	61
Figura 16 – Trajetória de uma nave espacial sujeita a gravidade do sistema Terra-Lua, com aumento no tempo de simulação. Fonte: Do próprio autor	61
Figura 17 – Órbita do asteroide 2010TK7 no sistema Sol-Terra. Em (a) observamos sua órbita em forma de ferradura com presença de librações. Em (b) apresentamos uma ampliação de um setor da órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor	62
Figura 18 – Órbita de um asteroide troiano específico, sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Júpiter. Fonte: Do próprio autor	64
Figura 19 – Órbita de um asteroide da família Hilda, sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Júpiter. Fonte: Do próprio autor	65
Figura 20 – Órbita do asteroide 2010TK7 com variação das condições iniciais. Em (a) está apresentado o perfil da trajetória para uma ligeira diminuição de sua velocidade. Em (b) apresentamos uma ampliação da trajetória para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor	66
Figura 21 – Órbita do asteroide 2010TK7 com abrupto aumento de velocidade. Fonte: Do próprio autor	67
Figura 22 – Órbita do asteroide do tipo troiano com uma ligeira diminuição de sua velocidade. Fonte: Do próprio autor	68
Figura 23 – Órbita do asteroide do tipo troiano com um abrupto aumento de sua velocidade. Fonte: Do próprio autor	69
Figura 24 – Órbita de asteroide da família Hilda com variação em suas condições iniciais. Em (a) se observa a representação da trajetória do astro para uma ligeira diminuição de sua velocidade. Em (b) foi feita uma ampliação de um setor da órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor	70
Figura 25 – Órbita do asteroide da família Hilda com um abrupto aumento de sua velocidade. Fonte: Do próprio autor	70
Figura 26 – Órbita do asteroide 2010TK7. Em (a) se encontra a representação da trajetória do asteroide sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Júpiter. Em (b) foi feita uma ampliação de sua órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor	71

Figura 27 – Órbita do asteróide 2010TK7. Em (a) se encontra a representação da trajetória do asteróide sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Netuno. Em (b) foi feita uma ampliação de sua órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor	72
Figura 28 – Órbita do asteróide tipo Troiano no sistema Sol-Netuno. Fonte: Do próprio autor	73
Figura 29 – Órbita do asteróide da família Hilda no sistema Sol-Netuno. Fonte: Do próprio autor	73
Figura 30 – Órbitas planetárias do Sistema Solar e a órbita de Plutão. Fonte:(MACEDO; JUNIOR, 2018)	74
Figura 31 – Gráfico da libração da órbita de Plutão, no sistema Sol-Netuno. Fonte: Do próprio autor	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Condições iniciais para simulação das órbitas da Figura 15	60
Tabela 2 – Condições para a Figura 17	63
Tabela 3 – Condições para a Figura 18	64
Tabela 4 – Condições para a Figura 19	65
Tabela 5 – Variações das velocidades para simular as trajetórias do asteroide 2010TK7	66
Tabela 6 – Variações das velocidades para simular as trajetórias do asteroide do tipo troiano	68
Tabela 7 – Variações das velocidades para simular as trajetórias do asteroide da família Hilda	69
Tabela 8 – Massas reduzidas dos sistemas Sol-Terra, Sol-Júpiter e Sol-Netuno.	72

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	PROBLEMA DE DOIS CORPOS	18
2.1	Discussão sobre o Formalismo	18
2.2	Formulação do Problema	21
2.3	Equações de Movimento	23
2.4	Leis de Kepler	24
2.5	Órbitas de um Campo Central	27
3	O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS	29
3.1	Problema Restrito de Três Corpos	30
3.1.1	Sistema de Coordenadas	31
3.1.2	Equações de Movimento	33
3.1.3	A Integral de Jacobi	36
3.1.4	Pontos de Equilíbrio Lagrangeanos	40
3.1.5	Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio	43
3.1.6	Movimento Próximo de L_4 e L_5	48
4	MÉTODOS NUMÉRICOS	50
4.1	Problemas de Valor Inicial	50
4.2	Redução de Ordem de Equações Diferenciais	51
4.3	Método de Euler	52
4.4	Método de Runge-Kutta Clássico	53
4.4.1	Aplicação do Método a Equações Diferenciais de Ordem Superior	56
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
5.1	Potencial Generalizado	58
5.2	Simulações das Órbitas	60
5.2.1	Órbitas dos Asteróides	62
5.2.2	Variações de Condições Iniciais	65
5.2.3	Mudança de Sistemas	71
5.3	Libração de Plutão	74
6	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS	77

	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE NOETHER	79
	APÊNDICE B – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS	82
	APÊNDICE C – CÓDIGOS DAS SIMULAÇÕES	85
C.1	Código para os Potenciais	85
C.2	Código para as Trajetórias	86

1 INTRODUÇÃO

O estudo da evolução dinâmica dos corpos celestes, tem importância, não somente, na descoberta de como o universo que conhecemos hoje foi formado, mas também com objetivo de prever e impedir possíveis colisões de satélites artificiais de comunicação com o nosso planeta.

A lei da Gravitação Universal de Newton, associada com a segunda Lei de Newton, permite que o problema de n corpos tenha seu movimento estudado em um dado espaço de três dimensões. Para um estudo preciso da dinâmica do problema, é necessário compreender as equações de movimento, que são EDO's não lineares, onde estas são encontradas com o advento da mecânica clássica. O movimento dos corpos no Sistema Solar pode ser aproximado através da aplicação da Gravitação Universal.

A busca pela descrição da interação entre corpos sempre foi motivo de estudo pelos físicos, Kepler já havia iniciado estudos sobre o problema envolvendo dois corpos, e chegou, a partir da análise de dados observacionais coletados ao longo de décadas, a três leis empíricas que levam seu nome. A primeira que diz que a trajetória dos planetas do nosso Sistema Solar são órbitas elípticas, com o Sol estando em um dos focos. A segunda que também é conhecida como Lei das Áreas, estabelece que um raio vetor, isto é, o vetor radial que liga o planeta ao Sol, sempre descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais. A segunda lei, foi descoberta primeiro e ela é uma implicação direta de um princípio físico fundamental, que é a conservação do momento angular. Por fim a última das leis de Kepler é a terceira, ou mais precisamente lei dos períodos que afirma que os quadrados dos períodos em que os planetas dão uma volta completa em torno do Sol, são proporcionais aos cubos dos eixos maiores de suas órbitas.

Posteriormente, Isaac Newton demonstrou que as equações diferenciais que surgiam no problema de dois corpos, possuiriam solução geral, caso as condições iniciais necessárias, como as posições e velocidades iniciais, fossem fornecidas. Estas equações diferenciais são oriundas de umas das revoluções da física feitas por Newton, que foi a formulação da Lei da Gravitação Universal, cujas primeiras consequências foram as derivações das leis encontradas por Kepler. Por mais que o problema de dois corpos possua uma solução analítica, o resultado é apenas uma aproximação, pois para uma descrição da real dinâmica do sistema é preciso levar em conta forças perturbativas vindas dos outros planetas.

Com a solução do problema de dois corpos, os físicos passaram então a buscar o comportamento da dinâmica do sistema com a inserção de mais um corpo. Por volta de 1767, o alemão Euler¹ conseguiu encontrar algumas soluções particulares para o problema de três corpos, para isso ele tinha utilizado em seus cálculos uma combinação de três distintas configurações para os corpos estando em uma mesma reta. Cinco anos depois, em 1772, o físico Lagrange

¹ Físico e matemático suíço, conhecido por suas importantes descobertas nas áreas de Mecânica, Dinâmica dos Fluidos, Ótica, Astronomia e em áreas da Matemática como Cálculo e Teoria dos Grafos.

propôs outra solução para o problema. Ele fez a suposição em que os corpos se encontravam em cada um dos vértices de um triângulo equilátero. Poincaré começou então a estudar a dinâmica deste sistema, no entanto no decorrer de sua pesquisa observou que quando se considerava um número maior que dois corpos no sistema, a solução se tornava complicada (MARTINS; ZANOTELLO, 2018).

Com o objetivo de simplificar o problema de três corpos, foi proposto o Problema Restrito de Três Corpos. Este seria um caso bem particular, entretanto possui inúmeras aplicações práticas. Este sistema é descrito por duas massas grandes, chamadas de primárias, cuja descrição dinâmica se obtém por meio do problema de dois corpos. Partindo desta informação, busca-se um estudo a respeito do movimento de um terceiro corpo com massa pequena que não interfira no movimento das primárias, sujeito a interação gravitacional mútua das massas maiores.

A natureza apresenta o problema de três corpos, das mais variadas maneiras. Aplicações podem ser encontradas por exemplo, no sistema Sol-Terra-Lua, que possui certa estabilidade, no sistema Terra-Lua-Nave Espacial, que possui importância para as agências espaciais para um planejamento de suas expedições, ou até mesmo a inserção de um satélite artificial para orbitar a Terra. Este problema também pode ser encontrado em escala atômica, por exemplo na interação entre prótons e elétrons nos átomos.

O Problema Restrito de Três Corpos traz consigo uma simplificação até certo ponto, pois foi mostrado por Poincaré em uma série de trabalhos a respeito do estudo do problema de três corpos², que tais sistemas dinâmicos não possuem solução analítica, todas as soluções só podem ser expressas em termos aproximados, e que a sua evolução dinâmica tem muita sensibilidade as condições iniciais.

O presente trabalho tem por objetivo, fazer um estudo a respeito do comportamento da dinâmica de sistemas associados ao Problema Restrito de Três Corpos. Este estudo será feito através de uma revisão de bibliografia, com uma implementação numérica pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, das equações de movimento, verificando o padrão das órbitas e observando os parâmetros que levem a uma dinâmica caótica, tendo em vista a instabilidade do problema com a variação das condições iniciais.

A estrutura do trabalho está dividida em seis capítulos, Problema de 2 Corpos, Problema de 3 Corpos, Métodos Numéricos, Resultados e Discussões e a Conclusão, todos escritos de forma que fique claro entendimento das características associadas ao problema.

No segundo capítulo, é feita uma descrição a respeito do Problema de dois corpos, que foi estudado por Kepler no século XVII, onde ele encontrou as três leis que levam seu nome. Mais tarde os resultados obtidos por Kepler foram reencontrados por Isaac Newton, com a utilização da lei da Gravitação Universal e Segunda Lei, mostrando que o problema de 2 corpos

² Mais detalhes a respeito podem ser encontrados nas obras de Poincaré (POINCARÉ, 1957) e (POINCARÉ, 1905)

possui solução analítica.

No capítulo três, o Problema Restrito de 3 Corpos, é tratado de forma bem minuciosa, buscando uma exposição detalhada das características deste sistema, este capítulo apresenta a maior gama do referencial teórico. Nele é feita uma discussão histórica a respeito do problema, são encontradas suas equações de movimento, é feita uma discussão sobre uma importante integral de movimento chamada de constante de Jacobi, e além disso são encontrados e analisadas as condições de estabilidade dos pontos de equilíbrio lagrangeanos.

No quarto capítulo, são discutidos os Métodos Numéricos, já que estes terão crucial importância para a solução numérica das equações de movimento. Para resolver sistemas dinâmicos é necessário o conhecimento das condições iniciais do problema, assim, somos levados a resolução de problemas de valor inicial (PVI). O método numérico que será utilizado neste trabalho será o método de Runge-Kutta de quarta ordem, creditado aos alemães Carl David Runge e Martin Wilhelm Kutta, este método permite a resolução numérica de PVI's de primeira ordem. Como as equações de movimento do problema são de segunda ordem, será necessário a redução destas equações para sistemas de equações de primeira ordem, com isso o método de redução também é descrito no final do capítulo.

No quinto capítulo são mostrados todos os resultados obtidos, através de simulações numéricas utilizando o método de Runge-Kutta Clássico, implementadas no software *MATLAB*[®], com uma licença temporária gratuita durante um período de 30 dias. As simulações mostradas neste capítulo visam a descrição numérica de fenômenos tratados durante o decorrer dos capítulos anteriores, bem como simulação das órbitas buscando os seus padrões, plotagem do potencial efetivo característico do sistema, e verificação do padrão das trajetórias nas proximidades de pontos de equilíbrio.

Nas considerações finais é feita uma descrição geral do que foi abordado no decorrer do trabalho, mostrando os resultados obtidos. Este trabalho abre portas para o estudo de outros fenômenos associados ao problema restrito de 3 corpos.

2 PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Segundo (MURRAY; DERMOTT, 1999) na dinâmica do sistema solar o problema de dois corpos, pode ser compreendido como um problema cuja integrabilidade é possível e as soluções das equações de movimento podem ser obtidas de forma simples.

A interação gravitacional entre dois corpos em um contexto histórico, foi sem dúvida um dos grandes sucessos da teoria newtoniana para o movimento. Newton modificou a forma de ver o universo, deixando para trás a visão aristotélica do mundo supralunar e sublunar, ele conseguiu unificar a força gravitacional percebida na Terra à força capaz de produzir os movimentos observados dos planetas até então conhecidos, além disso ele também deduziu com sua mecânica os formatos observados por Kepler para as órbitas planetárias (PIRES, 2008).

Este problema diz respeito a um sistema composto de duas massas sujeitas a uma interação gravitacional proveniente de uma força central, descrita pela Lei da Gravitação Universal de Newton.

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

Isaac Newton em seu volume I do Principia (NEWTON, 1999), demonstrou que só poderiam existir dois tipos possíveis de forças centrais referentes a este problema, onde estas poderiam dar origem ao movimento elíptico planetário já observado por Johannes Kepler. Uma das formas seria a força apontando para o centro da elipse, no entanto esta abordagem não se mostrou muito útil para a verificação das leis empíricas obtidas por Kepler, a forma que se mostrou apropriada para esta verificação foi a de uma força de quadrado inverso apontando para um dos focos da elipse, com essa forma as leis de movimento planetário foram obtidas de forma imediata.

2.1 DISCUSSÃO SOBRE O FORMALISMO

A equação fundamental da dinâmica sempre nos fornece o necessário para a descrição do movimento, no entanto como esta equação tem caráter vetorial, quando se trabalha com sistemas de muitas partículas, o formalismo de Newton deixa de ser conveniente pois, teremos que trabalhar com muitos vetores de posição, para cada partícula no sistema de referência.

Para evitar este enorme trabalho existem formalismos que tem por característica principal, a utilização de grandezas apenas escalares, o que facilita enormemente o tratamento do problema, estes escalares são as energias do sistema mecânico, mais precisamente as energias cinética e potencial. Antes de discutir a respeito do formalismo que será a base deste trabalho, precisamos observar as características do formalismo que Lagrange deu para a mecânica clássica.

O formalismo Lagrangeano baseia-se na montagem de uma função de um conjunto de variáveis que descrevem o sistema, estas são ditas coordenadas generalizadas. Estas coordenadas são um conjunto de q 's genéricos, que formam o chamado espaço das configurações, estas coordenadas são definidas por $(q_1, q_2, \dots, q_n)$. No formalismo de Lagrange a função que se busca tem a forma $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, sendo chamada de Lagrangeana do sistema.

Como as energias cinética e potencial podem ser escritas em função das coordenadas generalizadas, Lagrange por meio de seus cálculos chegou a uma forma funcional da Lagrangeana em que somente as energias do sistema eram consideradas. Definindo T como energia cinética e U como energia potencial, temos a função Lagrangeana.

$$\mathcal{L} = T - U \quad (2.2)$$

Com a Lagrangeana do sistema montada é possível descrever o sistema dinâmico, através das chamadas equações de Lagrange, que diferente da segunda Lei de Newton, leva em conta somente as energias.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Na formulação de Lagrange o movimento de um sistema de n graus de liberdade é descrito por um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem no tempo. Entretanto existe outro formalismo, que será utilizado neste trabalho, que pode ser derivado se a Lagrangeana for conhecida, este formalismo é o que Hamilton introduziu, nesta nova formulação que se baseia em uma transformação de Legendre¹. Com esta transformação passamos a trabalhar, com $2n$ equações diferenciais de primeira ordem no tempo, para $2n$ variáveis independentes, que formam o espaço em que trabalharemos, que é chamado de espaço de fase (GOLDSTEIN, 1980).

Sabemos que podemos descrever a dinâmica de qualquer sistema físico, tendo conhecimento de duas variáveis importantes, a posição e o momento, e é nesta consequência que as coordenadas do espaço de fase são obtidas, via transformação de Legendre, as coordenadas deste novo espaço são os momentos generalizados e posições generalizadas (LEMOS, 2013).

A descrição Hamiltoniana envolve a substituição das variáveis $(q, \dot{q})$ por (q, p) , em todas as grandezas mecânicas, para que seja introduzida uma função característica do formalismo de Hamilton, chamada de Hamiltoniana $H(q, p, t)$, no lugar da Lagrangeana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. Com o conhecimento da função Lagrangeana a Hamiltoniana é definida por.

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (2.4)$$

¹ Mais informações a respeito desta transformação podem ser encontradas em (GOLDSTEIN, 1980)

Se diferenciarmos esta equação obtemos,

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right] \quad (2.5)$$

Caso a energia potencial do sistema, independa da velocidade, como ocorre na maioria dos sistemas físicos, as componentes do momentos lineares generalizados, são expressas por (THORNTON; MARION, 2011)

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.6)$$

Utilizando esta equação e a equação 2.3 em 2.5, obtemos:

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (2.7)$$

No entanto, como sabemos que a função Hamiltoniana tem a forma $H = H(q, p, t)$, sua diferencial total é dada por:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (2.8)$$

De onde tiramos por comparação direta entre 2.7 e 2.8, as equações canônicas de Hamilton.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Estas equações conseguem descrever a dinâmica do sistema, da mesma forma que a segunda lei de Newton, e as equações de Lagrange. A importância do formalismo Hamiltoniano está no fato de fornecer um método poderoso e geral para a investigação da estrutura dinâmica de sistemas mecânicos (LEMONS, 2013).

No tratamento de sistemas mecânicos, existe grande importância nas simetrias do problema. Neste âmbito em 1918, Emmy Noether enunciou um teorema fundamental da Física. Ela mostrou que propriedades de conservação, ou seja, a invariância das propriedades de um sistema sob uma dada transformação, estão ligadas as simetrias dos sistemas físicos em estudo. Esta notável descoberta adquiriu grande importância no decorrer do século XX (LEMONS, 2013)

Considerando duas funções conhecidas ψ e ϑ_i de variáveis reais e um parâmetro infinitesimal arbitrário ε . Seja a seguinte transformação.

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t + \varepsilon \psi(q(t), t) \\ q_i(t) &\rightarrow q'_i(t) = q_i(t) + \varepsilon \vartheta_i(q(t), t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dizemos que a ação² do sistema permanece invariante sob uma transformação se obedece a seguinte condição.

$$\Delta S = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathcal{L} \left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t \right) dt = 0 \quad (2.11)$$

Com estas informações podemos enunciar o Teorema de Noether³ da seguinte forma: *Um sistema mecânico, cuja ação é invariante sob uma transformação do tipo 2.10, apresenta o seguinte valor como uma constante de movimento:*

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \psi - \vartheta) - \mathcal{L} \psi \quad (2.12)$$

A partir deste teorema concluímos que constantes de movimento, são provenientes de leis de conservação, estas decorrentes das simetrias do sistema. Em resumo, a invariância da ação sob uma dada transformação aparecem nas equações de movimento do sistema na forma de quantidades conservadas, que facilitam o estudo de sistemas mecânicos.

2.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para a formulação geral do problema, considere dois corpos de massa m_1 e m_2 respectivamente, a descrição do sistema pode ser feita com a especificação de seis valores correspondentes as coordenadas das posições das duas massas, isto é, o sistema possui 6 graus de liberdade. Podemos simplificar um pouco o problema encontrando uma relação entre às coordenadas de cada corpo e as do Centro de Massa do sistema, definindo então a posição do Centro de Massa pelo vetor $\mathbf{R}$ e o vetor relativo às duas massas tendo a forma $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, como pode ser visto na figura 1.

A Hamiltoniana do sistema é escrita como:

$$H = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2 + V(r) \quad (2.13)$$

Esta Hamiltoniana pode ser simplificada se tomarmos o Centro de Massa na origem, com isso se obtém as seguintes relações entre as coordenadas de posição de cada corpo e a distância relativa entre elas:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (2.14)$$

² Grandeza importante em física obtida através da integral da função Lagrangeana:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

³ Uma rápida dedução do Teorema se encontra no Apêndice A

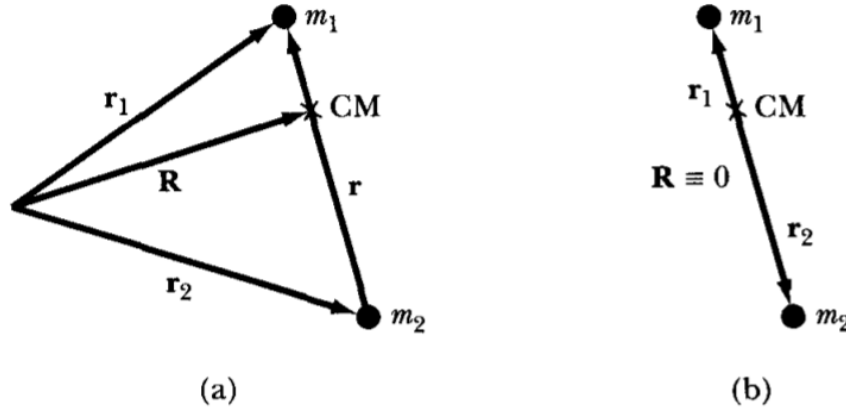


Figura 1 – Sistema de coordenadas referente as massas m_1 e m_2 . Em (a) o Centro de Massa está fora da origem, (b) o Centro de Massa na origem do sistema. Fonte: (THORNTON; MARION, 2011)

Substituindo estes valores na Hamiltoniana ela se torna mais simples:

$$H = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(r) \quad (2.15)$$

Onde foi inserida a grandeza μ denominada massa reduzida do sistema e é definida na forma:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.16)$$

A introdução destas condições segundo (GOLDSTEIN, 1980) facilitam a resolução do problema de dois corpos pois agora ele foi reduzido para a situação em que um único corpo de massa reduzida μ orbita em torno do Centro de Massa, em um campo de força central proveniente da função $V(r)$. Conforme a solução $\mathbf{r}(t)$ seja obtida é possível voltar para o caso original de forma trivial utilizando as equações 2.14.

A energia potencial para este problema é uma função que só depende da distância entre o corpo de massa reduzida μ e o centro de forças, isto garante ao sistema uma simetria esférica, no entanto podemos evitar as coordenadas esféricas. Esta simplificação é possível devido a conservação do momento angular, ou seja, isto restringe a localização do raio vetor e do vetor momento linear ao plano, então o sistema pode ser descrito por coordenadas polares, com isso a nova Hamiltoniana é então expressa da seguinte maneira:

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r) \quad (2.17)$$

Onde p_r e p_θ , são os momentos canônicos conjugados às variáveis r e θ e são descritos por:

$$p_r = \mu \dot{r} \quad \text{e} \quad p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (2.18)$$

2.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

De posse da Hamiltoniana do sistema podemos partir em busca das equações de movimento, utilizando as equações canônicas de Hamilton. A utilização deste formalismo vai expressar um sistema com $2n$ equações de movimento⁴.

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu} \quad (2.19)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \quad (2.20)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} + \frac{dV}{dr} \quad (2.21)$$

$$\dot{p}_\theta = 0 \quad (2.22)$$

Da equação 2.22 tiramos uma propriedade importante, que p_θ é constante, também chamada de primeira integral de movimento, este momento conjugado é justamente a coordenada z do momento angular do sistema, uma constante de movimento é uma grandeza física que possui natureza conservativa. São quantidades associadas a um dado sistema mecânico que não mudam com sua evolução.

Em geral, embora não conheçamos exatamente as soluções das equações de movimento, o conhecimento de determinadas integrais de movimento nos remete a extração de grandezas físicas importantes em relação a natureza do sistema. A investigação de certas condições que garantam a existência de constantes de movimento possui grande importância na física (LE MOS, 2013).

Indicando o valor da constante p_θ por l , temos substituindo na equação 2.20:

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (2.23)$$

⁴ n são os graus de liberdade do sistema.

2.4 LEIS DE KEPLER

Esta primeira integral de movimento garante um resultado ainda mais geral que é a segunda lei de Kepler que afirma que a velocidade areal é constante, a verificação é trivial, o raio vetor varre uma área infinitesimal dada por $dA = \frac{r^2 d\theta}{2}$ em um infinitésimo intervalo de tempo, isso pode ser visualizado na figura 2.

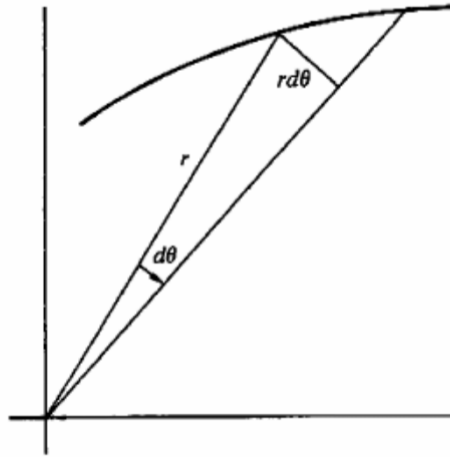


Figura 2 – Trajetórias possíveis. Fonte: (GOLDSTEIN, 1980)

Assim obtemos a velocidade areal;

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{l}{2\mu} \quad (2.24)$$

Ainda resta uma integral de movimento que remete a conservação da energia, a constante é a própria Hamiltoniana do sistema, isto é, a energia total e com a introdução das equações 2.19 e 2.23 na equação 2.17 temos:

$$H = E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (2.25)$$

A partir da relação da Hamiltoniana é possível encontrar a equação da trajetória da órbita, no entanto é bem mais conveniente expressar esta equação com a forma $\theta(r)$, para isto é necessária a eliminação do tempo da equação 2.25, consideremos o seguinte:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \quad (2.26)$$

Substituindo esta relação na equação 2.25, temos a eliminação da variável t ,

$$E = \frac{l^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (2.27)$$

Desta relação se obtém a descrição de $\theta(r)$ que é dada pela seguinte integral, cuja solução será a equação que rege a forma das órbitas:

$$\theta(r) = \int \frac{\pm l/r^2}{\sqrt{2\mu(E - V(r) - l^2/2\mu r^2)}} dr + C \quad (2.28)$$

A partir desta integral, chegamos então, se usarmos um potencial que gere uma força de quadrado inverso, ao chamado Problema de Kepler das órbitas planetárias, em resumo a resolução desta integral nos dará a equação das órbitas. Então admitindo um potencial com a forma $V(r) = -k/r$, para facilitar na resolução da integral é conveniente uma substituição de variável $u = 1/r$, assim a integral é simplificada:

$$\theta = - \int \frac{l}{\sqrt{2\mu E + 2\mu k u - l^2 u^2}} du + C \quad (2.29)$$

Para evitar a repetição de muitas constantes é conveniente substituí-las por uma forma mais simples:

$$a = l^2 \quad b = 2\mu k \quad c = 2\mu E \quad (2.30)$$

Assim escrevemos a integral em função dos novos parâmetros:

$$\theta = - \int \frac{du}{\sqrt{c/a + bu/a - u^2}} + C \quad (2.31)$$

Completando o quadrado do denominador, que é possível somando e subtraindo o termo $\frac{b^2}{4a^2}$, temos:

$$\theta = - \int \frac{du}{\sqrt{(4ac + b^2)/4a^2 - (u - b/2a)^2}} + C \quad (2.32)$$

Agora é possível fazer as substituições que de fato tornam a integral bem simples de resolver:

$$y = u - \frac{b}{2a} \quad \alpha^2 = \frac{4ac + b^2}{4a^2} \quad (2.33)$$

Agora basta resolver uma integral do tipo:

$$\theta = - \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} + C = - \int \frac{dy}{i\sqrt{y^2 - \alpha^2}} + C \quad (2.34)$$

Fazendo a substituição hiperbólica $y = \alpha \cosh i\phi$, obtemos a solução da integral:

$$\theta = - \int d\phi = -\phi + C \quad (2.35)$$

Precisamos voltar para os parâmetros originais, para isso temos da substituição hiperbólica temos que $\cosh i\phi = \cos \phi$, e como a função cosseno é par, vamos considerar ϕ positivo, com isso:

$$\theta(r) = \cos^{-1} \left(\frac{2au - b}{\sqrt{4ac + b^2}} \right) + C = \cos^{-1} \left(\frac{l/r - mk/l}{\sqrt{2\mu E + m^2 k^2 / l^2}} \right) + C \quad (2.36)$$

Fazendo algumas manipulações na equação 2.36 e definindo a origem de θ de modo que o raio mínimo da órbita ocorra em $\theta = 0$, para que a constante de integração C se anule, é possível explicitar uma grandeza importante nas órbitas dos corpos do sistema estudado:

$$\cos \theta \sqrt{\frac{2l^2 E}{\mu k^2} + 1} = \frac{1}{\mu k} \left(\frac{l^2}{r} - \mu k \right) \quad (2.37)$$

Onde então é possível definir a excentricidade da órbita,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2l^2 E}{\mu k^2} + 1} \quad (2.38)$$

Substituindo então a equação 2.38 em 2.37 encontramos a equação das órbitas em uma forma mais elegante:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (2.39)$$

Esta equação que está escrita na forma polar é chamada de equação das seções cônicas, que para determinados valores de excentricidade, a equação 2.39 define uma parábola, uma hipérbole, ou uma elipse, observar a figura 3. Estes três casos ocorrem seguindo os seguintes parâmetros:

- Se $E > 0$; $\varepsilon > 1$ a curva é uma hipérbole;
- Se $E < 0$; $\varepsilon < 1$ a curva é uma elipse;
- Se $E = 0$; $\varepsilon = 1$ a curva é uma parábola.

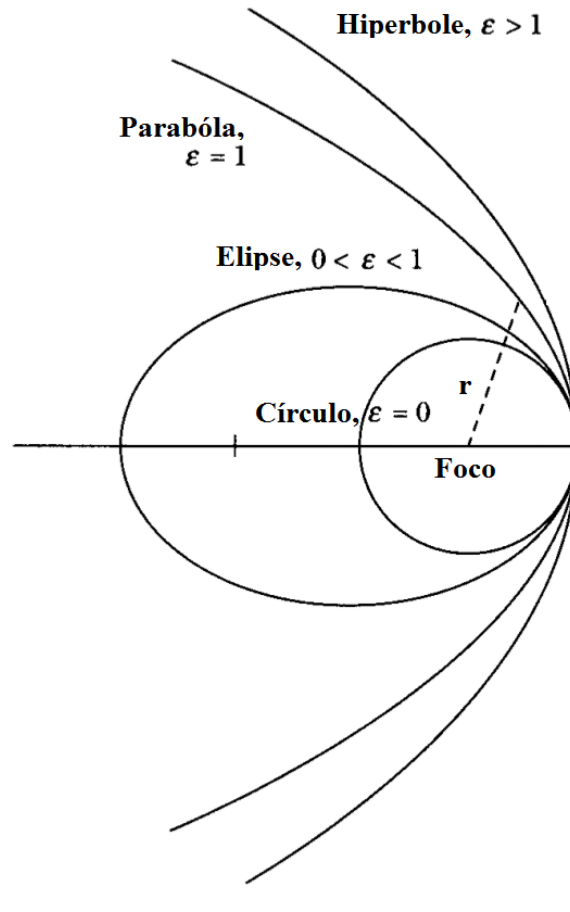


Figura 3 – Trajetórias possíveis. Fonte: (THORNTON; MARION, 2011)

As órbitas circulares também podem ocorrer neste tipo de sistema, no entanto elas são casos particulares das órbitas elípticas, quando a excentricidade é nula, isto traz para a energia um valor $E = -\frac{\mu k^2}{2l^2}$, é interessante observar que somente no caso em que $E < 0$ o movimento é limitado, isto é, as massas ficam restritas ao campo gravitacional mútuo. Estas afirmações confirmam a primeira lei de Kepler, que afirma que as trajetórias dos planetas em torno do Sol são descritas por elipses (NETO, 2004).

2.5 ÓRBITAS DE UM CAMPO CENTRAL

De uma maneira geral a equação 2.25, indica a velocidade radial do corpo se movendo em um campo central, esta equação possui duas raízes para $\dot{r} = 0$, que são os limites do raio r , r_{max} e r_{min} , assim o movimento fica confinado neste limite $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.

Caso o corpo sujeito ao potencial $V(r)$ possua um movimento periódico, sua órbita será fechada, isto é, após passagens pelos limites o movimento mostra um padrão repetitivo. Caso a

órbita não se fecha após finitas oscilações ela é dita aberta, uma ilustração disso se encontra na figura 4 (THORNTON; MARION, 2011).

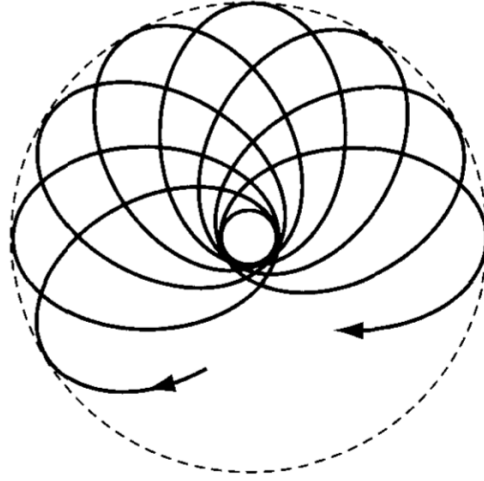


Figura 4 – Órbita que não se fecha após um finito numero de oscilações. Fonte: (THORNTON; MARION, 2011)

Para determinar estas condições podemos partir da equação 2.28, para calcular a variação do ângulo $\Delta\theta$, que mostra um contorno completo de r_{min} ate r_{max} e de volta a r_{min} . Em virtude da simetria do movimento é visível que podemos considerar que a variação angular é duas vezes da que resultaria da trajetória entre os dois limites.

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l/r^2}{\sqrt{2\mu(E - V(r) - l^2/2\mu r^2)}} dr \quad (2.40)$$

Caso o resultado desta integral seja $\Delta\theta = 2\pi$, ou então um múltiplo inteiro de 2π , a órbita será dita fechada, caso contrario ela é aberta (LEMOS, 2013).

Um resultado muito importante foi obtido por J. Bertrand em 1873, a respeito das características das órbitas. Ele enunciou na forma de um teorema que hoje leva seu nome. Segundo Bertrand os únicos potenciais para os quais as órbitas seriam fechadas seriam os de inverso de raio $V(r) = -k/r$, que produzem forças de inverso quadrado, e o potencial do oscilador harmonico, produzindo uma força que obedece a lei de Hooke (LEMOS, 2013).

3 O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Na seção 2.4 do capítulo anterior discutimos como se dá a interação gravitacional entre dois corpos e obtivemos uma série de resultados importantes que explicam muito do que é observado, por exemplo, no nosso sistema solar. No entanto, o caráter universal da lei da gravitação de Newton nos leva à situação onde sempre existirão forças atuando entre todos os corpos com massa do universo. Em uma análise tal fato tornaria o problema de encontrar a trajetória de corpos sob ação gravitacional um tarefa impossível.

Sabemos entretanto que tais forças diminuem de modo considerável com a distância (inverso quadrado) e, portanto, as contribuições mais relevantes são aquelas provenientes da interação com corpos mais próximos.

Sendo assim, poderíamos então tentar determinar tais trajetórias partindo de uma abordagem onde novos corpos seriam gradualmente adicionados ao já conhecido problema de Kepler (ou de 2 corpos) e observando sua interferência neste tipo de sistema. Como primeira tentativa vamos analisar o efeito de um terceiro corpo adicionado ao sistema e determinar as equações de movimento. Aplicando a lei da gravitação e a segunda lei de Newton à este sistema temos:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (3.3)$$

A princípio, bastaria resolver o sistema de EDO's que o problema estaria solucionado. Contudo, uma rápida olhada nos mostra que esta não é um tarefa fácil. As equações 3.1, 3.2 e 3.3 constituem um sistema de equações diferenciais acopladas e cuja a solução não pode se determinar analiticamente para o caso geral (MACEDO; JUNIOR, 2018). Durante o século XVIII diversos cientistas procuravam soluções fechadas para o problema, no entanto nomes como Lagrange, Clairaut e Euler, após fazerem uma série de investigações chegaram a conclusão de que as simples soluções analíticas só seriam encontradas sob certas condições especiais (BEUTLER, 2005).

Em 1772, Euler propôs uma reformulação deste problema que permitia sua solução sob certas condições. Nesta abordagem, estuda-se apenas o movimento de um terceiro corpo que possui massa muito menor que os outros 2. Esta abordagem foi nomeada por Henry Poincaré

como problema restrito dos 3 corpos (PRTC) pois sua solução era obtida levando em consideração as seguintes restrições (DULLIN; WORTHINGTON, 2014) (DANTAS; LLIBRE, 2009):

- A massa do terceiro corpo é considerada nula.
- As outras duas massa(denominadas Primárias) possuem órbitas circulares em torno do centro de gravidade do sistema.
- O terceiro corpo se move no plano orbital das primárias.
- O corpo mais massivo é tratado como referencial no sistema e não pode existir a interferência de fontes de perturbações externas.

Observe que quando impomos uma restrição à massa do terceiro corpo este não exerce influência gravitacional nas órbitas das primárias que podem ser determinadas como se o terceiro corpo estivesse ausente, ou seja, o problema geral de dois corpos. A segunda restrição simplifica o problema, uma vez que órbitas circulares apresentam raio e velocidade angular constantes. Por fim, a restrição quanto ao plano orbital resulta em uma considerável simplificação matemática por permitir a descrição do problema de modo bidimensional. Na próxima seção abordaremos este problema construindo suas equações de movimento e posteriormente buscaremos soluções para tais equações.

3.1 PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Uma rápida olhada no mundo a nossa volta nos mostra que, apesar das restrições impostas, o sistema descrito pelo PRTC é bastante frequente na natureza. Existem vários sistemas estelares constituídos de três estrelas, um dos mais conhecidos é o sistema ternário de *Alpha Centauri*, localizado na constelação de Centauro, outro exemplo é o sistema de *Algol* na constelação de Perseu. Também existem, embora em menor número sistemas de mais de três estrelas ligadas por suas atrações gravitacionais como é o caso do sistema de *Castor* constituído de seis estrelas na constelação de gêmeos. Nesta última situação, entretanto, é comum que estes sistemas possam ser tratados como uma sucessão de sistemas de dois corpos onde o primeiro é referente às duas estrelas ligadas firmemente (que é abordado como um problema de 2 corpos) e a terceira estrela estando a uma distância muito maior que o raio de separação das duas que orbitam seu centro de massa comum. Este tipo de fenômeno ocorre justamente por não existirem órbitas estáveis devido a corpos de massas e distâncias comparáveis (COLLINS, 2004).

A dificuldade encontrada no estudo de mais de 2 corpos está nas integrais de movimento, estas integrais são constantes que restringem o movimento do sistema e não mudam com a evolução dinâmica do sistema. Um exemplo destas integrais de movimento pode ser encontrada no estudo do próprio problema de dois corpos. Tal sistema apresenta uma Hamiltoniana, e o momento angular se conserva, ou seja, já temos 4 constantes de movimento, 3 relativas às 3

componentes do momento Angular e mais 1 referente a conservação da energia, o movimento do Centro de Massa também guarda consigo mais 6 constantes de movimento, totalizando então 10, e ainda existem mais 2, pois o problema de 2 corpos possui 12 integrais de movimento. O número de integrais de movimento está associado ao número de constantes a se determinar nas soluções das equações diferenciais que regem o sistema, no caso do Problema de Dois Corpos, cada corpo possui 3 equações de segunda ordem que descrevem seu movimento, com isso a solução para cada equação necessita da determinação de duas constantes, deste modo cada corpo precisa da determinação de 6 constantes. Juntando estas informações fica evidente o fato do Problema de Dois Corpos necessitar da determinação de 12 integrais de movimento, pois são 6 constantes para cada corpo. Para uma descrição do problema de 3 corpos são necessárias as especificações de 18 integrais de movimento que conseqüentemente o torna mais difícil de resolver (PRAZERES, 2010).

O estudo do movimento do terceiro no corpo neste problema é importante pois através dele é possível uma aproximação para o movimento de uma nave no sistema Terra - Lua, no movimento de asteróides no sistema Sol-Júpiter (COLLINS, 2004).

3.1.1 Sistema de Coordenadas

Antes de irmos em busca de descrever o movimento do sistema, é necessário a consideração de um sistema de coordenadas para o problema, onde fique evidente a posição específica dos três corpos em estudo. Então para uma descrição das órbitas é necessário, primeiramente, um sistema de referência fixo (ξ, η, ζ) , com origem no centro de massa do sistema. No tempo $t = 0$, os corpos de massas maiores se encontram na linha do eixo ξ , perpendicular a este plano e no mesmo plano do órbita temos o eixo η e por fim na mesma direção do vetor momento angular temos o eixo ζ . As coordenadas de posição das massas μ_1 e μ_2 seriam respectivamente (ξ_1, η_1, ζ_1) e (ξ_2, η_2, ζ_2) .

Para o corpo de massa desprezível, ao qual se busca a descrição do seu movimento, atribui-se as coordenadas (ξ, η, ζ) para a sua posição. Todas estas informações podem ser verificadas na Figura 5.

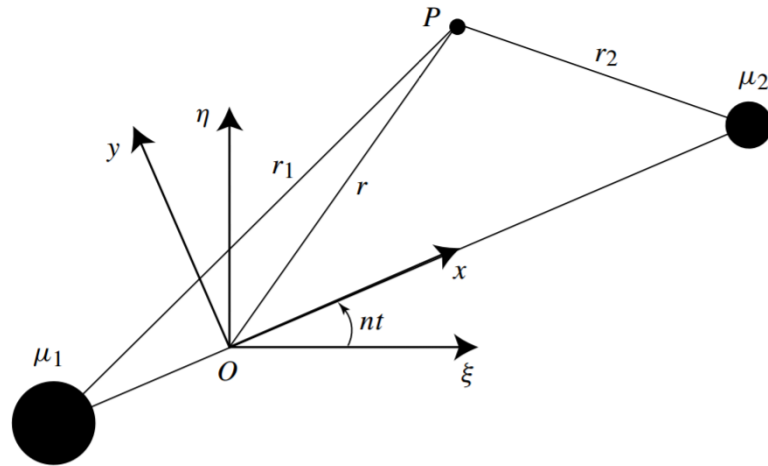


Figura 5 – Sistema de coordenadas referente as massas m_1 , m_2 e do corpo de massa desprezível.
Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)

Através deste sistema de coordenadas é possível escrever diretamente a forma da Hamiltoniana para o corpo de massa m_3 , que é o corpo no ponto P .

$$H = \frac{m_3}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{Gm_1m_3}{r_1} - \frac{Gm_2m_3}{r_2} \quad (3.4)$$

No entanto como para este problema a massa do corpo menor não interfere no movimento dos outros 2, podemos reescrever a Hamiltoniana, desconsiderando a massa m_3 .

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \quad (3.5)$$

Geralmente no estudo do Problema Restrito dos 3 Corpos, as unidades são escolhidas de maneira que as propriedades do sistema dependam apenas de um único parâmetro.

A unidade de massa é escolhida de tal forma que a massa total nos forneça um valor unitário:

$$M = m_1 + m_2 = 1 \quad (3.6)$$

Dividindo a equação 3.5 por 3.6:

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{Gm_1}{(m_1 + m_2)r_1} - \frac{Gm_2}{(m_1 + m_2)r_2} \quad (3.7)$$

Onde,

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.8)$$

Deste modo se assumirmos que a condição $m_1 > m_2$, seja verdadeira, é possível definir:

$$\mu = \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.9)$$

Para que a condição referente a equação 3.6 permaneça sendo válida, temos que:

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \mu \quad (3.10)$$

Assim com as equações 3.9 e 3.10, e com a consideração da constante gravitacional $G = 1$, temos a Hamiltoniana escrita na forma:

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (3.11)$$

As duas massas têm uma separação comum entre elas, e a mesma velocidade angular entre si e seu centro de massa. Para simplificar o sistema se adota que a distância entre as duas massas maiores é igual a 1, onde a massa maior m_1 está a uma distância μ do Centro de Massa, para a validade da condição, a massa m_2 está a uma distância $1 - \mu$ do Centro de Massa.

Verifica-se agora que o parâmetro μ engloba todas as constantes dentro da Hamiltoniana.

3.1.2 Equações de Movimento

Com a definição do sistema de referência (ξ, η, ζ) , podemos partir em busca das equações de movimento do terceiro corpo, resgatando a equação 3.11 temos a sua Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (3.12)$$

Onde é facilmente visto através da Figura 5 que:

$$r_1^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 \quad (3.13)$$

$$r_2^2 = (\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + (\zeta - \zeta_2)^2 \quad (3.14)$$

Se agora considerarmos um novo sistema de coordenadas proveniente de uma rotação nt da origem, mostrado na Figura 5,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Para que as coordenadas das massas m_1 e m_2 sejam fixas, o sistema de referência deve rotacionar junto com estas e portanto ser não inercial.

As massas relevantes continuam sobre a mesma reta, no entanto definimos suas novas coordenadas como $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu, 0, 0)$ para a massa maior e $(x_2, y_2, z_2) = (1 - \mu, 0, 0)$ para a massa menor, os raios r_1 e r_2 no novo sistema de coordenadas são:

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2 \quad (3.16)$$

$$r_2^2 = (x - (1 - \mu))^2 + y^2 + z^2 \quad (3.17)$$

Devido a mudança de variáveis, a Hamiltoniana do terceiro corpo precisa ser reescrita. A rotação do sistema representado pela matriz da equação 3.15, expressa o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos nt - y \sin nt \\ \eta &= x \sin nt + y \cos nt \\ \zeta &= z \end{aligned} \quad (3.18)$$

A rotação dos eixos, foi feita visando uma maior facilidade para encontrar as equações de movimento, este ato de rotacionar o sistema é representado por uma Transformação Canônica, que consiste em encontrar variáveis adequadas que facilitem a resolução do problema, note que a transformação já é conhecida, isto é, sabemos pela equação 3.18 que a função que gera a transformação tem a forma $F = F(p_\xi, p_\eta, p_\zeta, x, y, z, t)$, de modo que as equações que representam a transformação canônica são¹:

$$\xi = -\frac{\partial F}{\partial p_\xi} \quad \eta = -\frac{\partial F}{\partial p_\eta} \quad \zeta = -\frac{\partial F}{\partial p_\zeta} \quad (3.19)$$

$$P_x = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad P_y = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad P_z = -\frac{\partial F}{\partial z} \quad (3.20)$$

Com as novas várias inseridas no sistema a Hamiltoniana $H = H(\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, t)$, possuirá dependência nelas, assim a nova Hamiltoniana $K = K(x, y, z, P_x, P_y, P_z, t)$, é obtida através da seguinte equação:

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.21)$$

Com isso podemos utilizar as equações 3.18 em conjunto com as 3.19, se integrarmos a combinação delas é possível obter a função geradora da transformação canônica:

$$F = -(x \cos nt - y \sin nt)p_\xi - (x \sin nt + y \cos nt)p_\eta - zp_\zeta \quad (3.22)$$

¹ Estas equações foram deduzidas no Apêndice B

De posse da função geradora podemos escrever os novos momentos canônicos, então através das equações 3.20:

$$P_x = p_\xi \cos nt + p_\eta \sin nt \quad (3.23)$$

$$P_y = -p_\xi \sin nt + p_\eta \cos nt \quad (3.24)$$

$$P_z = p_\zeta \quad (3.25)$$

Elevando ao quadrado as equações 3.23, 3.24 e 3.25 e em sequência somando obtemos a relação entre os momentos canônicos novos e os antigos:

$$p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \quad (3.26)$$

Com os valores encontrados, agora temos todas as informações possíveis para escrever a nova Hamiltoniana que descreverá o corpo de massa desprezível, assim da equação 3.21:

$$K = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} + \\ + nx(p_\xi \sin nt - p_\eta \cos nt) + ny(p_\xi \cos nt + p_\eta \sin nt) \quad (3.27)$$

Utilizando as equações 3.23, 3.24 e 3.25 em 3.27, temos a Hamiltoniana:

$$K = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + nyP_x - nxP_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (3.28)$$

Podemos agora utilizar as equações canônicas de Hamilton para escrever as 6 equações diferenciais que descrevem o movimento do corpo em estudo:

$$\dot{x} = \frac{\partial K}{\partial P_x} = P_x + ny \quad (3.29)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial K}{\partial P_y} = P_y - nx \quad (3.30)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial K}{\partial P_z} = P_z \quad (3.31)$$

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) + nP_y \quad (3.32)$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - nP_x \quad (3.33)$$

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (3.34)$$

O formalismo de Hamilton da mecânica clássica, permite que cheguemos mas equações newtonianas do movimento de forma rápida através de uma simples derivação das equações 3.29, 3.30, 3.31,

$$\dot{P}_x = \ddot{x} - n\dot{y} \quad (3.35)$$

$$\dot{P}_y = \ddot{y} + n\dot{x} \quad (3.36)$$

$$\dot{P}_z = \ddot{z} \quad (3.37)$$

E então substituindo as derivadas dos momentos canônicos nas equações 3.32, 3.33, 3.34:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = n^2x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (3.38)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = n^2y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (3.39)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (3.40)$$

Este conjunto de equações pode ser escrito em uma forma mais compacta com a introdução do potencial efetivo do sistema, que leva em conta, as partes referentes ao potencial centrífugo e o gravitacional:

$$\Lambda = \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (3.41)$$

Com o potencial efetivo Λ as equações de movimento newtonianas são:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \quad (3.42)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \quad (3.43)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \quad (3.44)$$

3.1.3 A Integral de Jacobi

Através das equações de movimento já encontradas, é possível derivar uma integral de movimento importante que foi obtida por Jacobi, enquanto ele estudava o Problema Restrito dos 3 Corpos.

Multiplicando a equação 3.42 por $\dot{x}$, a 3.43 por $\dot{y}$ e 3.44 por $\dot{z}$, surgem as equações:

$$\ddot{x}x - 2ny\dot{x} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x}\dot{x} \quad (3.45)$$

$$\ddot{y}y + 2nx\dot{y} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\dot{y} \quad (3.46)$$

$$\ddot{z}z = \frac{\partial \Lambda}{\partial z}\dot{z} \quad (3.47)$$

Somando estas três equações,

$$\ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}z = \frac{\partial \Lambda}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \Lambda}{\partial z}\dot{z} \quad (3.48)$$

Note que o segundo membro desta equação, apresenta na realidade a derivada total do potencial efetivo com relação ao tempo $\frac{d\Lambda}{dt}$, reescrevendo a equação temos:

$$\ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}z = \frac{d\Lambda}{dt} \quad (3.49)$$

Por meio de uma integração verifica-se:

$$\Lambda = \int \ddot{x}x dt + \int \ddot{y}y dt + \int \ddot{z}z dt + k \quad (3.50)$$

Esta equação pode ser facilmente simplificada através de uma integral por partes, fazendo então a primeira:

$$u = \dot{x} \quad du = \ddot{x}dt \quad dv = \ddot{x}dt \quad v = \dot{x} \quad (3.51)$$

Assim,

$$\int \ddot{x}x dt = \dot{x}^2 - \int \dot{x}\ddot{x}dt \Rightarrow \int \dot{x}\ddot{x}dt = \frac{\dot{x}^2}{2} + k \quad (3.52)$$

Os resultados das outras 2 integrais são obtidos de maneira análoga, com isso a equação 3.50 resulta em:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Lambda - C_J \quad (3.53)$$

Observe que todas as contribuições das constantes de integração da equação 3.52 foram incluídas na constante C_J .

No entanto, se notarmos que $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, podemos simplificar a equação 3.53:

$$v^2 = 2\Lambda - C_J \quad (3.54)$$

Encontramos então a relação importante que traz consigo uma constante de movimento C_J que é chamada de constante ou integral de Jacobi. Note também que para evitar velocidades complexas, a relação da integral de Jacobi obedece a seguinte condição:

$$2\Lambda - C_J \geq 0 \Rightarrow \Lambda \geq \frac{C_J}{2} \quad (3.55)$$

Se utilizarmos a equação 3.41, escrevemos C_J de uma forma mais explícita, levando em conta todas as novas variáveis do sistema:

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 \quad (3.56)$$

Observe que a integral de Jacobi é menos duas vezes a energia total do sistema por unidade de massa no referencial das variáveis (x, y, z) . O primeiro termo da constante se refere à energia potencial centrífuga, o segundo representa o potencial gravitacional e o terceiro é a energia cinética. Note que, neste sistema de referência, as forças que atuam sobre o corpo de menor massa são as duas atrações gravitacionais, a força centrífuga e a força de Coriolis. No entanto, somente as três primeiras interações podem ser derivadas de potenciais e a última é perpendicular à trajetória.

Pode parecer estranho tratar a força centrífuga como originária de um potencial escalar, em vista que ela existe apenas em referenciais não inerciais. Todavia, vemos que isto é possível através do Teorema de Helmholtz. Para campos vetoriais irrotacionais é assegurado por um dos corolários deste teorema que se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, então o campo vetorial $\mathbf{F}$ pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ (GRIFFITHS, 2011).

Podemos verificar isso de forma imediata para o potencial centrífugo:

$$-\nabla \times \nabla\Phi = -\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) \right) = -n^2\nabla \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = 0 \quad (3.57)$$

Assim, se verifica que a força centrífuga pode ser escrita como gradiente de um potencial escalar. Todos estes valores de energia associados ao potencial efetivo são conservados, de modo que a energia medida neste referencial e, portanto, a integral de Jacobi C_J é uma constante de movimento.

Não é possível fazer uso de C_J para encontrar soluções exatas para o movimento no problema restrito dos 3 corpos, no entanto pode-se fazer uso dela para determinar possíveis regiões onde o corpo não estará (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Para verificar as regiões onde o corpo não pode estar, basta buscar os locais onde sua velocidade é nula, desde modo podemos obter da equações 3.56, uma família de superfícies.

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (3.58)$$

Estas superfícies, uma para cada valor específico de C_J , são chamadas de superfícies de velocidade zero ou superfícies de Hill, elas delimitam o local onde o movimento do corpo em estudo não é possível.

É conveniente uma certa análise a respeito destas curvas, primeiramente para grandes valores de x e y , levando em conta o movimento contido em um plano, os termos com $1/r_1$ e $1/r_2$ na equação 3.58 são muito pequenos, de modo que a superfície pode ser aproximada por uma circunferência (MOLTON, 1960).

Considerando C_J muito grande e r_1 bem pequeno em relação a r_2 , o termo com $1/r_2$, x^2 e y^2 são desprezíveis, assim a massa só pode estar nas proximidades de m_1 , dentro da circunferência onde m_1 se encontra, o contrário também ocorre para uma massa orbitando m_2 que ocorrerá para r_2 bem menor em comparação com r_1 .

Na Figura 6, é mostrado um exemplo das superfícies de velocidade zero, para $\mu = \mu_2 = 0.2$, em dois casos específicos, no primeiro caso, o corpo em estudo só pode estar nas áreas claras, logo ele só pode orbitar o corpo de massa μ_1 ou o corpo de massa μ_2 .

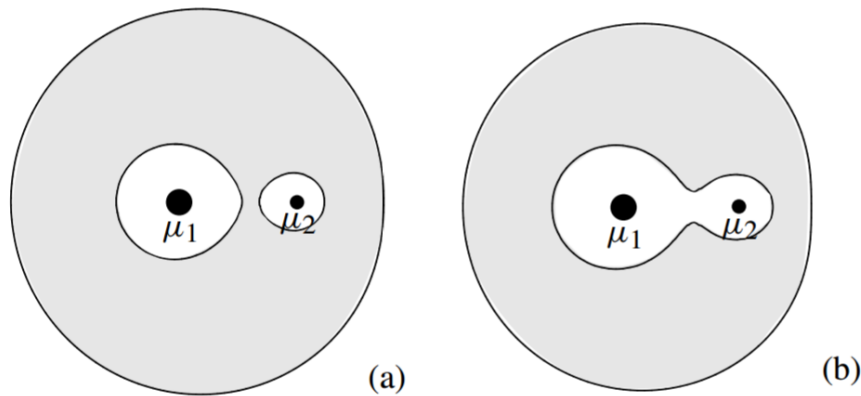


Figura 6 – Curvas de velocidade zero para diferentes valores de C_J para o caso de $\mu = \mu_2 = 0.2$. Em (a) $C_J = 3.9$ e em (b) $C_J = 3.7$. Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)

Quando C_J se torna menor, as regiões permitidas crescem, uma conexão é aberta entre as duas regiões internas (PRADO, 2001). Com isso as regiões brancas se tangenciam em um ponto denominado L_1 . Um pequeno corpo orbitando μ_1 pode então ser capturado para uma órbita ao redor de μ_2 , ou o μ_2 pode perder este pequeno corpo para uma órbita em torno de μ_1 , mas este corpo chegará no ponto L_1 com velocidade zero, de modo que é necessário que o corpo adquira mais energia para que consiga ultrapassar esta barreira. Vemos com isso que um corpo orbitando uma das massas do sistema só pode orbitar outra passando por este ponto L_1 (REN; SHAN, 2014).

Este ponto também é conhecido como ponto lagrangeano. Cabe o reforço de que o corpo menor sempre ficará restrito às regiões claras, respeitando a estabilidade de Hill (MURRAY;

DERMOTT, 1999).

Não há estabilidade deste tipo nos Problema de 3 Corpos Geral, onde o terceiro corpo sempre pode escapar da vizinhança dos outros dois. Mas, mesmo no Problema Geral, há alguns movimentos especiais para os quais o terceiro corpo pode permanecer na vizinhança dos outros dois para sempre (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005).

A medida que vamos reduzindo o valor da constante de Jacobi C_J , irão surgir mais valores que permitam o tangenciamento das regiões claras e escuras, isto é, onde o movimento é permitido e não é permitido, fazendo então com que surjam outros pontos de Lagrange até o caso em que a possibilidade de movimento possa contemplar todo o plano das órbitas (MOLTON, 1960). Na seção seguinte iremos discutir que pontos são estes e como podem ser determinados.

3.1.4 Pontos de Equilíbrio Lagrangeanos

No Problema Restrito de 3 Corpos, existem certas posições do plano da órbita do sistema em que o corpo de massa menor, possui velocidade e aceleração nulas, estas posições são os pontos de equilíbrio (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Estudando o potencial efetivo Λ , ele tem a propriedade de nos fornecer cinco pontos interessantes L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 também chamados de pontos de equilíbrio lagrangeanos do sistema (MCCUSKEY, 1963).

Precisamos encontrar suas posições, vamos então assumir que o movimento está confinado ao plano $x - y$. Por conveniência a unidade de distância é escolhida para ser a separação constante das duas massas, considerando também que $n = 1$. Observe que essas suposições não mudam em nada a dinâmica do sistema.

Para facilitar os cálculos das localizações dos pontos de equilíbrio é conveniente escrever o potencial efetivo Λ em uma forma diferente (BROUWER; CLEMENCE, 1961). Utilizando então as equações 3.18 e 3.19, temos multiplicando a primeira por $(1 - \mu)$ e a segunda por μ :

$$(1 - \mu)r_1^2 = (1 - \mu)(x + \mu)^2 + (1 - \mu)y^2 \quad (3.59)$$

$$\mu r_2^2 = \mu(x - (1 - \mu))^2 + \mu y^2 \quad (3.60)$$

Este sistema de equações pode ser simplificado de forma imediata para:

$$(1 - \mu)r_1^2 = (1 - \mu)(x + \mu)^2 + (1 - \mu)y^2 \quad (3.61)$$

$$\mu r_2^2 = \mu[(x + \mu)^2 - 2(x + \mu) + 1] + \mu y^2 \quad (3.62)$$

Somando estas duas equações obtemos:

$$(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 = (x + \mu)^2 - 2\mu(x + \mu) + \mu + y^2 \quad (3.63)$$

Assim escrevemos a soma dos raios de uma maneira que nos ajude a reescrever o potencial efetivo do sistema:

$$(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu(1 - \mu) \quad (3.64)$$

Com a consideração de $n = 1$, podemos reescrever a equação 3.41 para a forma:

$$\Lambda = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (3.65)$$

Substituindo então a equação 3.64 em 3.65, obtemos:

$$\Lambda = \frac{1}{2}(1 - \mu)r_1^2 + \frac{1}{2}\mu r_2^2 - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (3.66)$$

Esta expressão ainda pode ser simplificada. No entanto, o mais importante é que foi tirada a dependência explícita do potencial efetivo Λ , o que facilitará os cálculos seguintes.

$$\Lambda = (1 - \mu) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (3.67)$$

Observamos então que o potencial efetivo é uma função do tipo $\Lambda(r_1, r_2)$, para encontrar os locais de equilíbrio, precisamos estudar os pontos de estabilidade. Na teoria das funções as condições necessárias para a verificação de pontos singulares, são as derivadas nulas da função em estudo.

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial \Lambda}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = \frac{\partial \Lambda}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0 \quad (3.69)$$

Utilizando então, as condições podemos escrever as equações para a localização dos pontos de equilíbrio.

$$(1 - \mu) \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \left(\frac{x + \mu}{r_1} \right) + \mu \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \left(\frac{x - (1 - \mu)}{r_2} \right) = 0 \quad (3.70)$$

$$(1 - \mu) \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{y}{r_1} + \mu \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{y}{r_2} = 0 \quad (3.71)$$

Observando as equações 3.70 e 3.71, temos pelo menos a solução trivial, do sistema:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r_1} = (1 - \mu) \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) = 0 \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r_2} = \mu \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0 \quad (3.73)$$

As soluções destas equações podem ser expressas de forma imediata, com resultados importantes, elas mostram que os raios são unitários.

$$r_1 = r_2 = 1 \quad (3.74)$$

Assim podemos reescrever as equações 3.59 e 3.60:

$$(1 - \mu) = (1 - \mu)(x + \mu)^2 + (1 - \mu)y^2 \quad (3.75)$$

$$\mu = \mu(x - (1 - \mu))^2 + \mu y^2 \quad (3.76)$$

Este sistema de equações ainda pode ser simplificado para a forma:

$$(x + \mu)^2 + y^2 = 1 \quad (3.77)$$

$$(x + \mu)^2 - 2(x + \mu) + 1 + y^2 = 1 \quad (3.78)$$

Subtraindo então a equação 3.78 de 3.77, obtemos a solução em x :

$$x = \frac{1}{2} - \mu \quad (3.79)$$

Substituindo então o valor de x na equação 3.77, temos os valores de y :

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.80)$$

Note que estes pontos, como $r_1 = r_2 = 1$, formam um triângulo equilátero com as duas massas m_1 e m_2 , estes dois pontos são os L_4 e L_5 , por convenção o ponto triangular principal, que é o para y positivo, é o L_4 , e o outro é o L_5 (MURRAY; DERMOTT, 1999).

As soluções encontradas até agora foi para a consideração na equação 3.71 de $y \neq 0$, no entanto para $y = 0$, que é a solução trivial de 3.71, temos na equação 3.70, com as devidas simplificações, a equação para a localização dos demais pontos L_1 , L_2 e L_3 :

$$(1 - \mu)(x + \mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right) + \mu[x - (1 - \mu)] \left(1 - \frac{1}{r_2^3} \right) = 0 \quad (3.81)$$

Que ainda pode ser escrita de forma a deixar a variável x explícita:

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{[(x+\mu)^2]^{3/2}} - \frac{\mu[x-(1-\mu)]}{[(x-(1-\mu))^2]^{3/2}} = 0 \quad (3.82)$$

Três das soluções desta equação, são correspondentes aos pontos de equilíbrio lagrangeanos colineares L_1 , L_2 e L_3 . O ponto L_1 é localizado entre as massas maiores, o L_2 , fica além da massa m_2 na parte positiva do eixo x e o ponto L_3 está localizado além da massa m_1 na parte negativa do mesmo eixo. Na Figura 7 é possível ver uma descrição das localizações dos pontos de equilíbrio, junto às superfícies de velocidade zero.

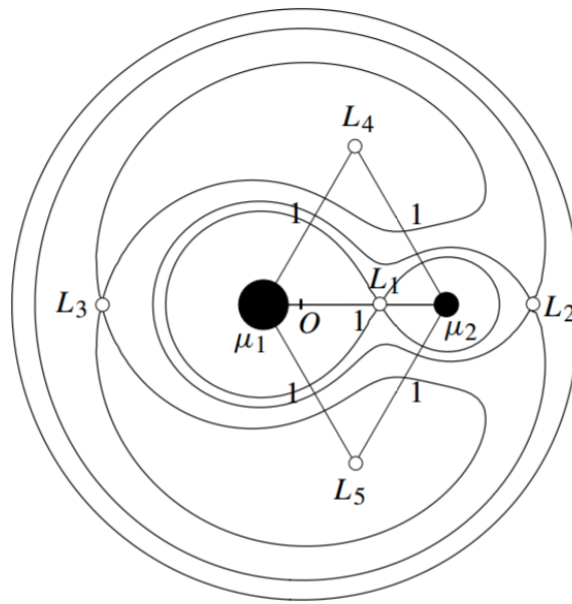


Figura 7 – Esquemática dos pontos de equilíbrio lagrangeanos, junto com as superfícies de velocidade zero. Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)

Na Figura 7, a configuração das posições dos pontos de equilíbrio lagrangeanos fica bem definida, nela está ilustrado os dois triângulos equiláteros que se formam pelo conjunto das duas massas μ_1 e μ_2 , com os pontos L_4 e L_5 . Nela também se observa que os demais pontos de L_1, L_2 e L_3 se encontram na mesma reta das massas μ_1 e μ_2 , mostrando então sua colinearidade.

3.1.5 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Encontrar os pontos de equilíbrio do nosso sistema é importante, porém não é o suficiente pois o estudo da estabilidade para pontos nas proximidades da região de equilíbrio também se mostra necessário. Assim, denotando a posição de equilíbrio por (x_0, y_0) , e levando em conta o movimento no plano, teremos para pequenos deslocamentos em torno do equilíbrio a seguinte

condição:

$$x = x_0 + X \quad y = y_0 + Y \quad (3.83)$$

Utilizando então estas relações para reescrever as equações 3.42, 3.43 e 3.44, levando em conta $n = 1$.

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \quad (3.84)$$

$$\ddot{Y} - 2\dot{X} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \quad (3.85)$$

Note no entanto que o potencial efetivo, com esse pequeno deslocamento tem a forma $\Lambda(x_0 + X, y_0 + Y)$, então é necessário fazer uma expansão em série de Taylor, para um estudo da função nas proximidades do ponto de equilíbrio, assim temos:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right]_0 + \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} \right]_0 X + \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} \right]_0 Y \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right]_0 + \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y \partial x} \right]_0 X + \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \right]_0 Y \quad (3.87)$$

O índice 0 nas expressões indicam que elas estão sendo aplicadas no ponto de equilíbrio, logo todos os termos entre colchetes são constantes, também temos das condições de equilíbrio:

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right]_0 = 0 \quad \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right]_0 = 0 \quad (3.88)$$

Para simplificar a notação iremos definir:

$$\left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} \right]_0 = \Lambda_{xx} \quad \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} \right]_0 = \Lambda_{xy} \quad (3.89)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y \partial x} \right]_0 = \Lambda_{yx} \quad \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \right]_0 = \Lambda_{yy} \quad (3.90)$$

Assim com a utilização das equações 3.88, 3.89 e 3.90 podemos reescrever as equações 3.86 e 3.87 da seguinte forma.

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \Lambda_{xx}X + \Lambda_{xy}Y \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = \Lambda_{yx}X + \Lambda_{yy}Y \quad (3.92)$$

Utilizando então as equações 3.91 e 3.92, podemos reescrever as equações 3.84 e 3.85 de modo que teremos:

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = \Lambda_{xx}X + \Lambda_{xy}Y \quad (3.93)$$

$$\ddot{Y} - 2\dot{X} = \Lambda_{yx}X + \Lambda_{yy}Y \quad (3.94)$$

É conveniente escrever este sistema de equações em uma forma matricial. Contudo, devemos observar que a matriz oriunda deste sistema de equações será de dimensão 4. Então podemos escrever este sistema da seguinte forma:

$$\dot{X} = \dot{X} \quad (3.95)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y} \quad (3.96)$$

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = \Lambda_{xx}X + \Lambda_{xy}Y \quad (3.97)$$

$$\ddot{Y} - 2\dot{X} = \Lambda_{yx}X + \Lambda_{yy}Y \quad (3.98)$$

Logo, temos para este sistema de equações a seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} & 0 & 2 \\ \Lambda_{yx} & \Lambda_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

Podemos ver então uma equação matricial na forma:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (3.100)$$

Onde as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{A}$, são definidas por:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} & 0 & 2 \\ \Lambda_{yx} & \Lambda_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

As condições de estabilidades do problema, serão extraídas de uma análise dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$, já que através destes valores, estaremos de posse das reais medidas físicas que a matriz nos oferece. Para encontrar os autovalores associados a matriz, é necessário primeiramente encontrar o polinômio característico, então partindo de:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.102)$$

Temos então:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} & -\lambda & 2 \\ \Lambda_{yx} & \Lambda_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.103)$$

O polinômio resultante deste determinante possui ordem 4, e é expresso por:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 2\lambda\Lambda_{xy} - \lambda^2\Lambda_{yy} - \lambda^2\Lambda_{xx} - 2\lambda\Lambda_{yx} + \Lambda_{xx}\Lambda_{yy} - (\Lambda_{xy})^2 = 0 \quad (3.104)$$

Para funções contínuas até a sua segunda derivada, é assegurada a igualdade entre as suas derivadas mistas. Assim no polinômio característico, é válida a igualdade $\Lambda_{xy} = \Lambda_{yx}$, usando esta afirmação, o polinômio é simplificado.

$$\lambda^4 + (4 - \Lambda_{xx} - \Lambda_{yy})\lambda^2 + \Lambda_{xx}\Lambda_{yy} - (\Lambda_{xy})^2 = 0 \quad (3.105)$$

Observe que esta é uma equação de ordem 4 e, portanto, apresenta 4 raízes, que podem ser reais ou complexas. Podemos observar que esta é uma equação biquadrada. Fazendo a substituição $\lambda^2 = \alpha$, reduzimos a equação a uma de segundo grau, e as soluções para o polinômio característico serão, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha_1}$ e $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\alpha_2}$, assim temos que:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy} - 4) + \left[(4 - \Lambda_{xx} - \Lambda_{yy})^2 - 4\Lambda_{xx}\Lambda_{yy} + 4\Lambda_{xy}^2 \right]^{1/2}} \quad (3.106)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy} - 4) - \left[(4 - \Lambda_{xx} - \Lambda_{yy})^2 - 4\Lambda_{xx}\Lambda_{yy} + 4\Lambda_{xy}^2 \right]^{1/2}} \quad (3.107)$$

Como as soluções são resultados da raiz quadrada, elas podem ser complexas, assim podemos escreve estas soluções em uma forma mais geral:

$$\lambda_{1,2} = \pm(a_1 + ib_1) \quad \lambda_{3,4} = \pm(a_2 + ib_2) \quad (3.108)$$

De posse dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$, podemos voltar para a equação 3.100, note no entanto que este sistema possui suas variáveis acopladas, isto é, $\ddot{X}$ depende de vários outros parâmetros como X , Y e $\dot{Y}$, esta particularidade torna o sistema difícil de resolver.

Esta situação pode ser contornada desacoplando as variáveis do sistema, onde por exemplo $\dot{Y}$ Seja função somente de Y . Isto pode ser alcançado por meio de uma importante

técnica chamada de Transformação de Similaridade (MURRAY; DERMOTT, 1999). Podemos então considerar uma transformação de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{Y}$, na forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X} \quad (3.109)$$

Onde $\mathbf{B}$ é uma matriz constante, isto é, todos os elementos de matriz de $\mathbf{B}$ são constantes. Com esta equação podemos reescrever 3.100:

$$\mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y} \quad (3.110)$$

Multiplicando dos dois lados $\mathbf{B}$ pela esquerda:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y} \quad (3.111)$$

Onde a equação 3.111 está desacoplada, isto é possível devido a natureza da transformação de similaridade, este tipo de transformação diagonaliza a matriz, deixando todos os autovalores na diagonal principal e tornando todos os outros elementos fora iguais a zero. Como só restaram os elementos da diagonal principal, as variáveis deixam de ter dependência explícita das outras. Denotando então, o produto $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ por Γ .

$$\dot{\mathbf{Y}} = \Gamma\mathbf{Y} \quad (3.112)$$

Caso a matriz $\mathbf{B}$ seja constituída de autovetores da matriz $\mathbf{A}$, então as entradas da diagonal principal de Γ são os autovalores de $\mathbf{A}$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

Podemos escrever a equação 3.112 em notação de somatório, da seguinte maneira:

$$\dot{Y}_j = \sum_{j=1}^n \Lambda_{jj} Y_j \quad (3.114)$$

Que pode ser simplificada, já que os elementos Λ_{jj} correspondem aos autovalores λ_j :

$$\dot{Y}_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \quad (3.115)$$

A solução desta equação é obtida de forma trivial para:

$$Y_j = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \quad (3.116)$$

Onde os c_j são oriundos das constantes de integração. Através então das soluções em Y_j podemos encontrar as soluções para as variáveis originais X_j , para isso utilizando a equação 3.109, temos:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \\ c_4 e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

De onde tiramos finalmente a forma das soluções para $X(t)$ que em uma notação de soma, fica :

$$X(t) = \sum_{j=1}^4 \beta_j e^{\lambda_j t} \quad (3.118)$$

As soluções para $Y(t)$ tem a mesma forma, da equação 3.112:

$$Y(t) = \sum_{j=1}^4 \gamma_j e^{\lambda_j t} \quad (3.119)$$

A partir destas soluções podemos discutir as condições de instabilidade através dos autovalores encontrados λ_j . Observe que, se todos os autovalores forem imaginários, as soluções serão oscilantes, respeitando a fórmula de Euler², caso pelo menos um dos autovalores seja real, teremos combinações e funções periódicas com exponenciais positivas, de modo que temos um perca no controle do sistema.

Desse modo, as condições de equilíbrio estável, ocorrerão para as soluções oscilantes, ou seja, na situação em que todos os autovalores λ_j são imaginários. Teremos equilíbrio instável, para pelo menos um autovalor real, tendo a presença de uma função exponencial, junto das oscilantes (MURRAY; DERMOTT, 1999).

3.1.6 Movimento Próximo de L_4 e L_5

Nas proximidades dos pontos de equilíbrio lagrangeanos, o movimento resultante de um corpo é dado pela composição de dois diferentes movimentos. Estes são movimentos de curto período e os de período mais longo que também são conhecido como libração sobre o ponto de equilíbrio.

² Relação muito utilizada em análise complexa: $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$

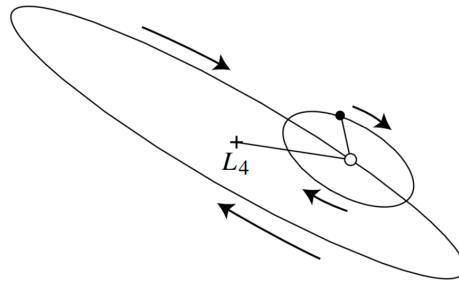


Figura 8 – Combinação dos movimentos de longo e curto período nas proximidades de L_4 . A elipse menor indica o movimento do epicentro que é o de curto período e a elipse maior indica o movimento do epiciclo para órbitas de longo período. Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)

A amplitude destes movimentos são determinadas pelos parâmetros β_j e γ_j das equações 4.2 e 4.3, por sua vez estes valores podem ser obtidos através das condições iniciais do problema. Com isso a trajetória pode ser pensada como um movimento de período longo de um epicentro em torno de um ponto de equilíbrio, enquanto o corpo apresenta de forma simultânea um movimento de curto período em torno do epicentro, uma imagem exemplificando isso pode ser observada na Figura 8.

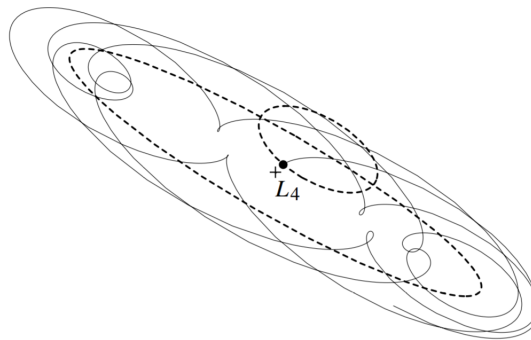


Figura 9 – Solução numérica para a trajetória de um corpo librando em torno do ponto de equilíbrio L_4 . Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 1999)

O resultado deste movimento pode ser obtido de forma numérica através das equações 4.2 e 4.3, com todos os seus parâmetros determinados. A solução numérica de um problema deste tipo se encontra na Figura 9, onde se observa o fenômeno de libração do movimento de período longo.

4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste ponto já nos deparamos com algumas equações que não podem ser resolvidas analiticamente. Por exemplo o sistema de equações 3.1, 3.2 e 3.3, do sistema de 3 corpos. Neste capítulo vamos dedicar um pouco de tempo às técnicas que permitem encontrar soluções numéricas aproximadas para estas equações.

O avanço do poder do cálculo nos computadores atuais permitem que muitos problemas em física e em ciência aplicada possam ser simulados pelo computador. Para isso é necessário primeiramente uma modelagem matemática, onde ocorra uma implementação das equações que descrevem o problema e uma análise dos resultados obtidos computacionalmente (FRANCO, 2006).

No processo de modelagem matemática muitos dos problemas encontrados na física podem ser formulados através de equações diferenciais. Por exemplo, modelagem de equações de movimento, equações de estado de sistemas termodinâmicos, circuitos elétricos, dentre outros modelos. Tais equações diferenciais as vezes não possuem solução analítica, ou suas soluções são muito complicadas de se encontrar, assim os nossos métodos usuais passam a ser inapropriados. Neste momento se faz necessário a utilização de métodos numéricos, para buscar soluções aproximadas que descrevam de forma efetiva o problema em estudo (SPERANDIO, 2003)(PANG, 2006).

Os métodos numéricos são técnicas que são utilizadas na busca de soluções de problemas matemáticos que são difíceis ou que não possuem solução analítica. As soluções destes métodos são valores aproximados, que nos permitem montar uma tabela de dados, que nos leva a um possível gráfico da solução. O fato das soluções numéricas serem aproximadas, não reduzem sua importância pois elas podem ser bastante precisas (MACHADO, 1999).

Os trabalhos iniciais em métodos numéricos são creditados a Isaac Newton e Leibniz, no entanto foi com Leonard Euler, que esses métodos tiveram uma formulação mais completa e precisa. Euler deduziu um processo que permitia obter a solução de uma problema de valor inicial num ponto de forma aproximada. Cauchy e Lipschitz também deram suas contribuições, demonstrando e melhorando o método proposto por Euler. A continuação do processo de melhoramento destes métodos veio com os trabalhos dos matemáticos alemães Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta, que chegaram a uma família de métodos iterativos aos quais é possível a solução de equações diferenciais de forma numérica (BOYCE; PRIMA, 1985).

4.1 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Problemas dinâmicos como movimento dos planetas, da Lua, de um satélite artificial, estão sujeitos a condições iniciais, isto é, fatores que indicam as características do sistema antes

de começar a análise da evolução dinâmica. Geralmente o comportamento de uma sistema deste tipo pode ser descrito por equações diferenciais de primeira ordem (PANG, 2006).

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (4.1)$$

Onde $\mathbf{y}$ é o vetor da variável dinâmica e $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ é a velocidade vetorial generalizada que pode ser expressa em termos de todas as variáveis dinâmicas $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = [f_1(\mathbf{y}, t), f_2(\mathbf{y}, t), \dots, f_l(\mathbf{y}, t)]$.

Um problema em que se obtém as equações diferenciais e as suas respectivas condições iniciais constituem o chamado Problema de Valor Inicial ou simplesmente PVI.

A ordem do PVI está associada com a ordem da sua respectiva equação diferencial, o que implica em um fornecimento de condições iniciais consistentes com a ordem da equação. Entretanto equações de alta ordem, podem ser convertidas em um sistema de equações de primeira ordem na forma 4.1, com as variáveis acopladas, preservando a ordem do PVI (ZILL; CULLEN, 2001).

Em geral nem sempre é possível encontrar a solução analítica da equação diferencial 4.1, desde que uma condição inicial seja fornecida $\mathbf{y}(t = 0) = \mathbf{y}_0$ e uma solução seja conhecida. No entanto, para contornar estes tipos de PVI's são utilizadas técnicas numéricas.

Um exemplo para estes tipos de PVI's já foi visto no decorrer deste trabalho, mais precisamente na subseção 3.1.2 do capítulo 3 onde obtivemos um sistema de equações diferenciais 3.42, 3.43 e 3.44 que regem a dinâmica do problema restrito de três corpos. Note que, para qualquer conjunto de condições iniciais fornecidas, o PVI não é solúvel analiticamente pois suas variáveis possuem dependência entre si, logo este sistema de equações só pode ser resolvido através da utilização de métodos numéricos.

4.2 REDUÇÃO DE ORDEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Considerando uma equação diferencial de ordem n em um intervalo $[a, b]$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right) \quad (4.2)$$

Com um conjunto de n condições iniciais:

$$y(a) = c_1, \left. \frac{dy}{dx} \right|_a = c_2, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_a = c_3, \dots, \left. \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right|_a = c_{n-1} \quad (4.3)$$

Equações diferenciais de n -ésima ordem podem ser reduzidas a um sistema de n equações

de primeira ordem, para isto basta inserir $n - 1$, variáveis dependentes $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, onde:

$$v_1 = \frac{dy}{dx}, \quad v_2 = \frac{dv_1}{dx} \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad v_{n-1} = \frac{dv_{n-2}}{dx} \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} \quad (4.4)$$

Levando em conta o conjunto de condições 4.3, temos um PVI constituído de um sistema com n equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = v_1 & \text{onde } y(a) = c_1 \\ \frac{dv_1}{dx} = v_2 & \text{onde } v_1(a) = c_2 \\ \vdots \\ \frac{dv_{n-2}}{dx} = v_{n-1} & \text{onde } v_{n-2}(a) = c_{n-1} \end{cases} \quad (4.5)$$

4.3 MÉTODO DE EULER

Os métodos numéricos, mais simples para a resolução numérica de equações diferenciais, consiste em métodos explícitos de passo simples, onde as condições iniciais devem ser previamente conhecidas, através destes métodos podemos encontrar novos pontos a partir de,

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (4.6)$$

$$y_{i+1} = y_i + Ih \quad (4.7)$$

Onde o par de valores (x_i, y_i) são conhecidos, I é uma inclinação, que estima o valor da derivada no intervalo em estudo, e h é o tamanho do passo de integração. Este par de equações é a característica principal de métodos explícitos de passo simples. O que difere uns dos outros é o valor atribuído a inclinação I , o método explícito mais simples é o método de Euler (GILAT; SUBRAMANIAN, 2008).

O método de Euler, consiste em uma técnica numérica bastante simples, para solucionar equações diferenciais de primeira ordem, para isso são utilizadas as equações 4.6 e 4.7, atribuindo para a constante I , a inclinação da função $y(x)$ no ponto conhecido (x_i, y_i) , observe que esta inclinação pode ser obtida da própria equação diferencial, através de:

$$I = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i) \quad (4.8)$$

Este método, assume que para pequenos deslocamentos h , da vizinhança (x_i, y_i) , a inclinação da função $y(x)$ é tida como constante e igual a inclinação no ponto (x_i, y_i) .

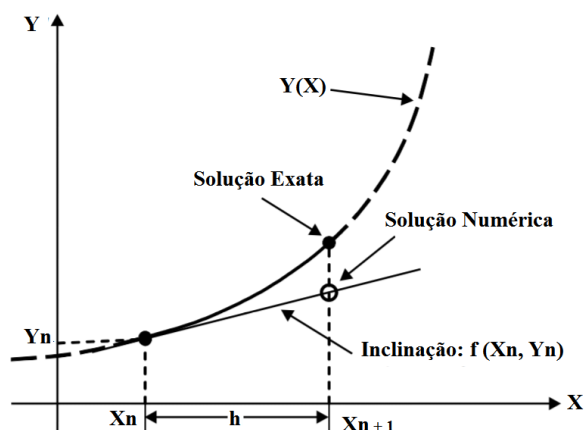


Figura 10 – Esquematização gráfica do método explícito de Euler, com a presença da inclinação e relação entre a solução exata e numérica. Fonte: (DUKKIPATI, 2010)

A partir desta idéia, os próximos pontos da solução são calculados a partir de:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (4.9)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (4.10)$$

Uma esquematização para a aplicação do método pode ser observada a partir da figura 10, onde por medida de ilustração, o passo foi tomado de forma extrapolada, e fica evidente que a solução aproximada é tida pela inclinação.

Existe uma classe mais sofisticada de métodos explícitos de passo simples, que são os métodos de Runge-Kutta, onde a inclinação I , é tomada como a média ponderada, de estimativas de inclinações da função $y(x)$, em diversos pontos dentro do intervalo, mais detalhes a respeito deste importante método serão abordados na seção seguinte.

4.4 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA CLÁSSICO

O físico e matemático alemão Carl David Runge (1856-1927), nos seus processos de análises de dados, foi levado a considerar problemas de computação numérica. O método de Runge-Kutta foi originado de seu artigo publicado em 1895 a respeito de soluções numéricas para equações diferenciais, o método utilizado por Runge foi generalizado para sistemas de equações por Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) em 1901. O método creditado aos dois consiste em um dos métodos mais utilizados para a busca de soluções aproximadas de problemas de valor inicial de equações diferenciais.

Os métodos de Runge-Kutta, formam uma família de métodos numéricos de passo simples, que são geralmente utilizados na solução de equações diferenciais de primeira ordem. Os métodos de Runge-Kutta são bem mais precisos que outros métodos, e são classificados de

acordo com o número de pontos aos quais se calcula uma certa inclinação I , dentro de um dado subintervalo, podem ser de segunda, terceira ou quarta ordem, onde este último geralmente é chamado de Runge-Kutta clássico. A ordem de precisão cresce conforme o número de pontos considerados no subintervalo aumenta, devido a isso o Runge-Kutta clássico é o mais preciso, e por isso um dos mais utilizado na busca de soluções aproximadas (GILAT; SUBRAMANIAN, 2008).

Para detalhar a forma de aplicação deste método numérico, podemos iniciar o procedimento, considerando um subintervalo (x_i, x_{i+1}) , com um passo $h = x_{i+1} - x_i$, com estes dados o valor de y_{i+1} pode ser encontrado a partir da equação 4.7, que é uma equação básica, para métodos explícitos de passo fixo.

Onde I , já sabemos ser uma inclinação, e portando é um valor constante, para obter o valor desta inclinação é necessário o cálculo de uma sequência de constantes que a compõe de forma integral. Tais constantes estão relacionadas a inclinações específicas, isto é, cada constante corresponde a uma inclinação em um ponto dentro do subintervalo selecionado. Como estamos desenvolvendo o método clássico, devemos considerar 4 pontos dentro do subintervalo, logo precisamos determinar 4 constantes. Tais constantes para o Runge-Kutta clássico, são expressas por:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (4.11)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (4.12)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (4.13)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (4.14)$$

Uma interpretação gráfica para estas constantes pode ser encontrada nas figuras 11 e 12. Na Figura 11 são especificadas as três primeiras constantes, que se referem as inclinações dentro de intervalo de integração, nesta figura fica evidente a relação que as constantes possuem entre si, pois a construção de uma inclinação depende diretamente da anterior, logo, para construir, por exemplo K_3 , antes é necessário já ter conhecimento de K_2 e também de K_1 .

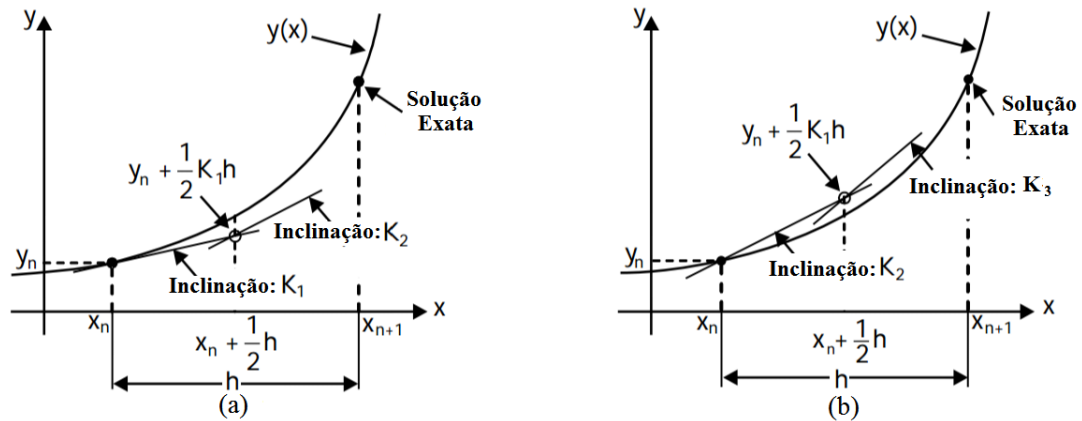


Figura 11 – Esquematização gráfica das inclinações K_1 , K_2 e K_3 no método de Runge - Kutta Clássico. Em (a) é especificado a constante K_1 e como a inclinação K_2 é construída por influência de K_1 na metade do intervalo de integração, em (b) é mostrado como o valor K_2 , influencia na construção da nova inclinação K_3 . Fonte: (DUKKIPATI, 2010)

Na Figura 12, além da representação da dependência da constante K_4 de K_3 , também é mostrado, como o processo de construção da inclinação resultante é feita, esta é encontrada por meio de uma média ponderada de todas as constantes K 's já conhecidas. A inclinação resultante se aproxima bastante da solução exata da equação diferencial.

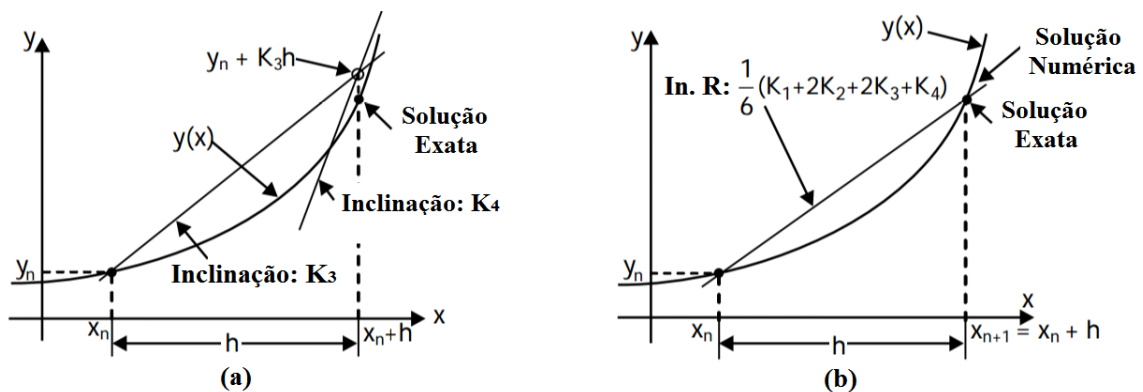


Figura 12 – Esquematização gráfica do método de Runge-Kutta Clássico. Em (a) a inclinação K_3 é especificada e mostrada como esta influencia a construção da inclinação K_4 no final do intervalo de integração, em (b) está especificado a construção da inclinação resultante, da média ponderada de todas as outras quatro inclinações. Fonte: (DUKKIPATI, 2010)

Com a utilização das constantes compondo um inclinação única o valor de y_{i+1} , é expresso pela relação:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.15)$$

Observando a equação 4.15, fica claro que a inclinação resultante do método de Runge-Kutta é feita por meio de uma média ponderada de todas as outras inclinações.

4.4.1 Aplicação do Método a Equações Diferenciais de Ordem Superior

A condição necessária de aplicação do método de Runge-Kutta, exige que as equações diferenciais em estudo sejam de primeira ordem. Entretanto na Natureza as manifestações da física, na maioria das vezes são modeladas através de equações de ordem mais elevada e com vínculos, isto é, restrições que dificultam sua solução analítica.

No Problema Restrito de Três Corpos, as equações de movimento não possuem solução analítica, elas são de segunda ordem, logo *a priori* não podem ser solúveis numericamente pelo método de Runge-Kutta Clássico. Mas para contornar esta restrição podemos utilizar um artifício já mencionado anteriormente. Quando for necessária a aplicação do método de Runge-Kutta a equações diferenciais de ordem superior, é necessário reduzi-las a um sistema de equações de primeira ordem.

Como já foi relatado na seção 4.1, o ato de reduzir a ordem da equação, faz com que suas variáveis fiquem acopladas, com isso a aplicação do método sofre uma ligeira alteração, do que foi apresentado na presente seção. Uma das condições cruciais para determinar os valores das variáveis dependentes no método de Runge-Kutta é a determinação dos valores das constantes K'_s , que para um sistema de equações acopladas, devem ser calculados de forma paralela, isto é, todos os K_1s devem ser calculados primeiro, na sequência todos os K_2s e assim sucessivamente. Por fim quando todos os valores das constantes forem conhecidos, as variáveis dependentes podem ser calculadas (GILAT; SUBRAMANIAN, 2008).

Para simplificar a forma de exemplificação do método, vamos considerar que uma dada EDO de segunda ordem, já que estamos interessados na resolução do nosso problema, e como já foi visto, as equações de movimento do Problema Restrito de 3 Corpos são de ordem 2. Inicialmente se procede a partir da seção 4.2, onde se reduz uma equação de segunda ordem, para um sistema de equações de primeira. Supondo o seguinte sistema como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \quad (4.16)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \quad (4.17)$$

Como todo método numérico precisa das condições iniciais do problema para ser aplicado, considere que as condições das 4.16 e 4.17 são, $y(a) = y_1$ e $z(a) = z_1$. Para prosseguir

com o método é necessário inicialmente os cálculos dos K_1s^1 , que são definidos como:

$$K_{y,1} = f_1(x_i, y_i, z_i) \quad (4.18)$$

$$K_{z,1} = f_2(x_i, y_i, z_i) \quad (4.19)$$

Na sequência se calcula os valores dos K_2s , para cada uma das equações:

$$K_{y,2} = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h\right) \quad (4.20)$$

$$K_{z,2} = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h\right) \quad (4.21)$$

Posteriormente se calcula as constantes K_3s :

$$K_{y,3} = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h\right) \quad (4.22)$$

$$K_{z,3} = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h\right) \quad (4.23)$$

Os últimos valores a serem calculados são os dos K_4s :

$$K_{y,4} = f_1(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h) \quad (4.24)$$

$$K_{z,4} = f_2(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h) \quad (4.25)$$

Quando todos os Ks referentes a cada uma das EDO's forem determinados, os valores das variáveis dependentes em $x = x_{i+1}$ podem ser calculados a partir de:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_{y,1} + 2K_{y,2} + 2K_{y,3} + K_{y,4})h \quad (4.26)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(K_{z,1} + 2K_{z,2} + 2K_{z,3} + K_{z,4})h \quad (4.27)$$

A aplicação do método de Runge-Kutta, requer uma rotina de cálculos das constantes Ks , e dos valores das variáveis dependentes. Fazer estes cálculos repetidas vezes, se torna cansativo, assim é interessante a utilização dos computadores para o cálculo destes resultados, para isso devemos utilizar diferentes softwares para escrever de forma que o computador possa compreender. Neste trabalho o software onde todas as rotinas serão implementados será *MATLAB*[®], onde o utilizamos com uma licença temporária gratuita durante um período de 30 dias.

¹ A notação que será empregada procede de modo que as constantes Ks , serão escritas da seguinte maneira, $K_{v,c}$, onde v indica a variável em questão e c o número da constante que se procura

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante o decorrer do texto foram tratadas de forma teórica uma gama das características associadas a problemas de potencial gravitacional, com uma ênfase no problema restrito de três corpos. Agora, neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através do método numérico de Runge-Kutta clássico, implementados no software *MATLAB*[®], para a descrição da dinâmica de sistemas do tipo que foi abordado no trabalho.

5.1 POTENCIAL GENERALIZADO

Para utilizar as soluções numéricas, começamos com a plotagem de um gráfico de potencial efetivo característico do Problema Restrito de Três Corpos, para o sistema Terra-Lua, conforme mostra a Figura 13.

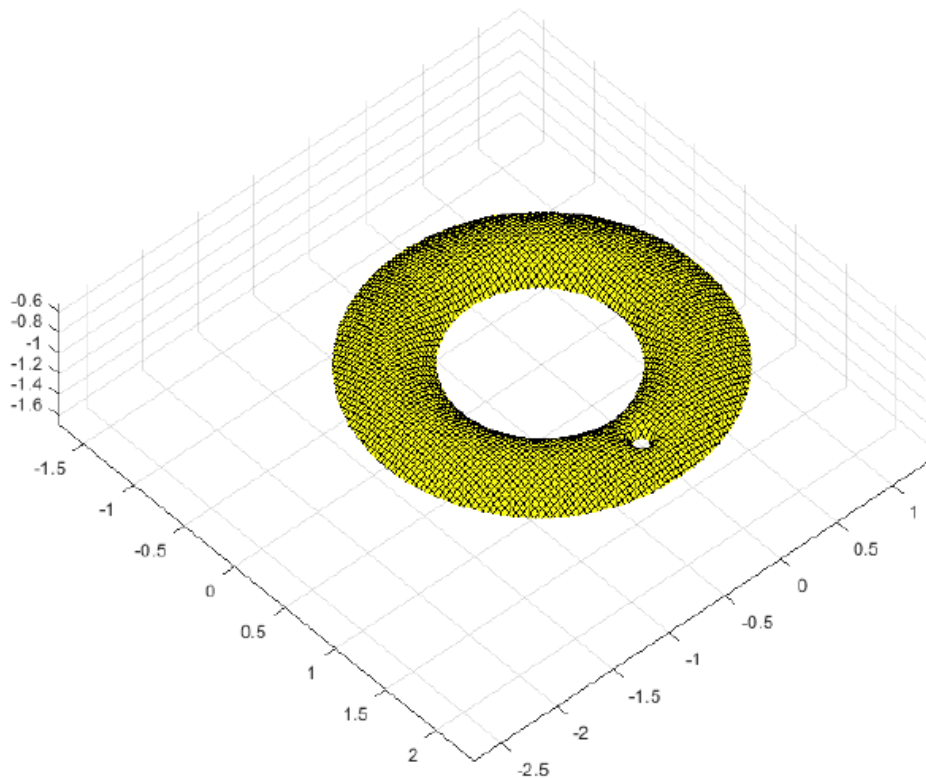


Figura 13 – Gráfico do Potencial Efetivo do Sistema Terra-Lua. Fonte: Do próprio autor

Neste sistema existe a presença de três potenciais distintos que se superpõem, que são o potencial gravitacional da Terra, o da Lua e o potencial centrífugo, já que tratamos de um sistema não inercial (as variáveis utilizadas são provenientes de uma rotação). As representações gráficas dos potenciais separados podem ser vistas respectivamente na Figura 14.

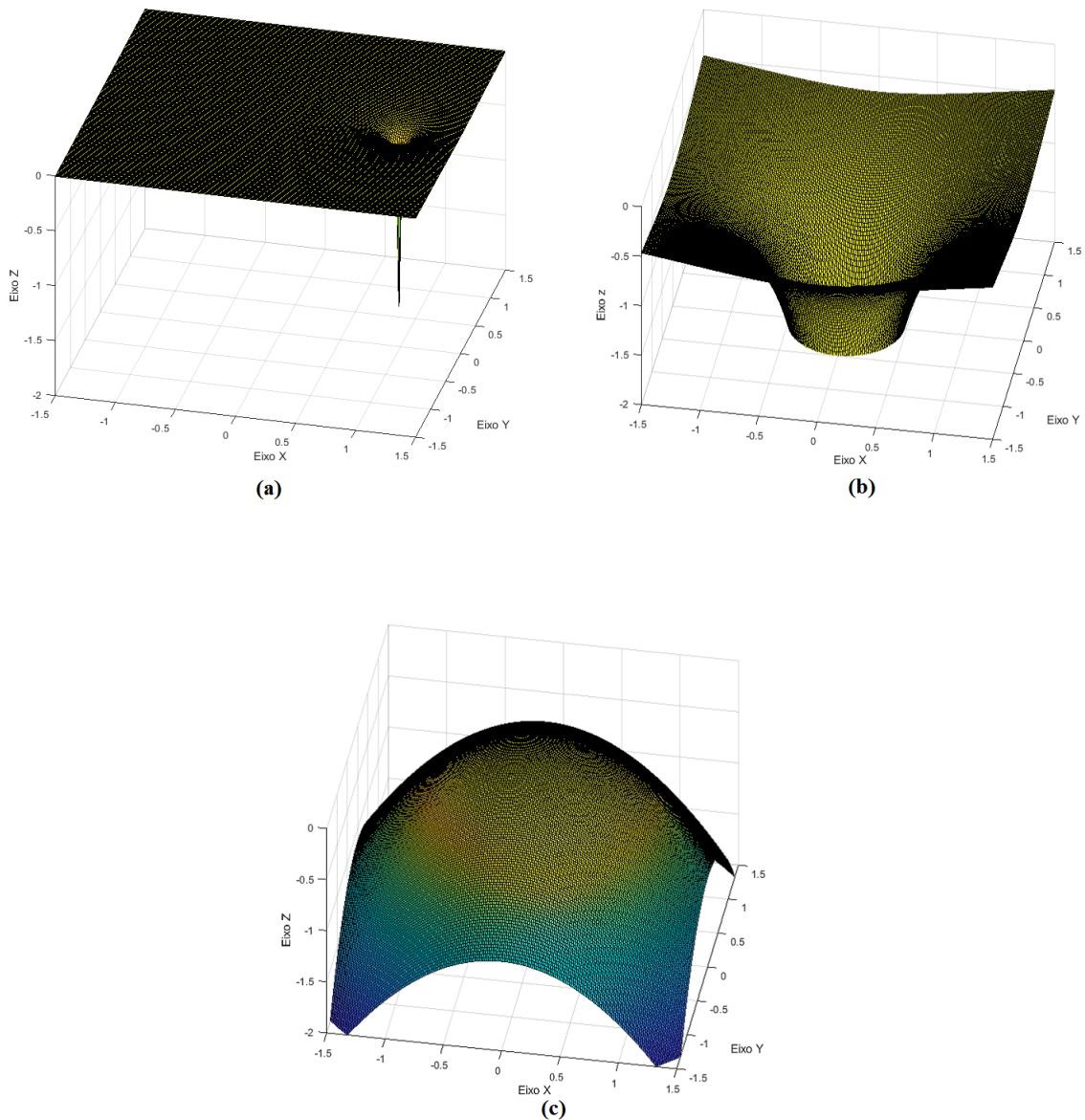


Figura 14 – Representação dos potenciais existentes no sistema Terra-Lua em referencial não inercial. Em (a) se observa o potencial referente a Lua, em (b) o potencial da Terra e em (c) o potencial centrífugo do sistema. Fonte: Do próprio autor.

Nesta figura em (a) se encontra o potencial referente a Lua, observe que ele é um tipo de potencial que gera uma força de quadrado inverso, e ele não é tão forte, pois a massa da Lua não é grande como a da Terra. O potencial referente a Terra, que se encontra em (b), apresenta o mesmo padrão do potencial da Lua, no entanto ele mais acentuado pois a massa da Terra é bem maior que a da Lua. Observe que existe semelhanças entre os gráficos (a) e (b) da Figura 14. Em (c) temos a forma do potencial centrífugo, apresentando a representação de um parabolóide.

Estes gráficos de potenciais individuais foram obtidos através da equação 3.41 que expressa o potencial efetivo como um todo, então os gráficos representados na Figura 14, são oriundos de cada uma das parcelas do potencial efetivo.

Observe que de acordo com os potenciais separados o referente a Terra é o que apresenta o formato em que a interação torna-se forte de modo que o corpo de massa desprezível deva ter uma maior interação com o planeta do que com a Lua de potencial menos acentuado.

O conhecimento do potencial efetivo, é importante para obtenção dos pontos de equilíbrio lagrangeanos, conforme já discutido previamente no trabalho, onde nas regiões de equilíbrio estável se encontrarão os pontos L_4 e L_5 , e em regiões de equilíbrio instável, se localizam os outros três pontos L_1 , L_2 e L_3 .

Observe que a partir da Figura 13, existe uma relação entre um ponto lagrangeano, e a queda de potencial, menos acentuado, isto mostra que o ponto lagrangeano pode vir a se comportar como um ponto de concentração de massa, ao qual o terceiro corpo também estará sujeito.

5.2 SIMULAÇÕES DAS ÓRBITAS

Antes de começar a discussão a respeito das simulações das órbitas, é conveniente uma abordagem esclarecedora dos gráficos. Em todas as simulações as massas maiores, isto é, as primárias serão explicitadas nos gráficos como pontos mais espessos de cores diferentes, com a massa maior sempre estando a esquerda. A trajetória descrita pelo terceiro corpo serão representadas pela linha azul, que evolui com o passar do tempo de simulação

Nesta seção serão analisadas as trajetórias do corpo de massa desprezível sujeito ao potencial dos outros dois corpos. Este estudo ocorrerá para quatro diferentes sistemas, para isto as equações 3.42 e 3.43 são resgatadas pois é através delas que podemos determinar as órbitas para o caso planar, isto é, no sistema de referência (x, y) .

Estes tipos de sistemas, como já relatado anteriormente possuem alta sensibilidade as condições iniciais adotadas, logo para pequenas variações de qualquer parâmetro a forma da trajetória é completamente alterada. Um exemplo desta afirmação se encontra na Figura 15. Para a plotagem das representações orbitais da Figura 15, foram utilizados os seguintes parâmetros apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Condições iniciais para simulação das órbitas da Figura 15

Condições Iniciais para as órbitas da figura 15 (a) e (b)					
-	μ	$x(0)$	$y(0)$	$\dot{x}(0)$	$\dot{y}(0)$
Figura 15 (a)	0.012277471	0.994	0	0	-2.00159
Figura 15 (b)	0.012277471	0.994	0	0	-2.0317

Com a utilização dos dados da Tabela 1, os gráficos obtidos para as órbitas foram os seguintes:

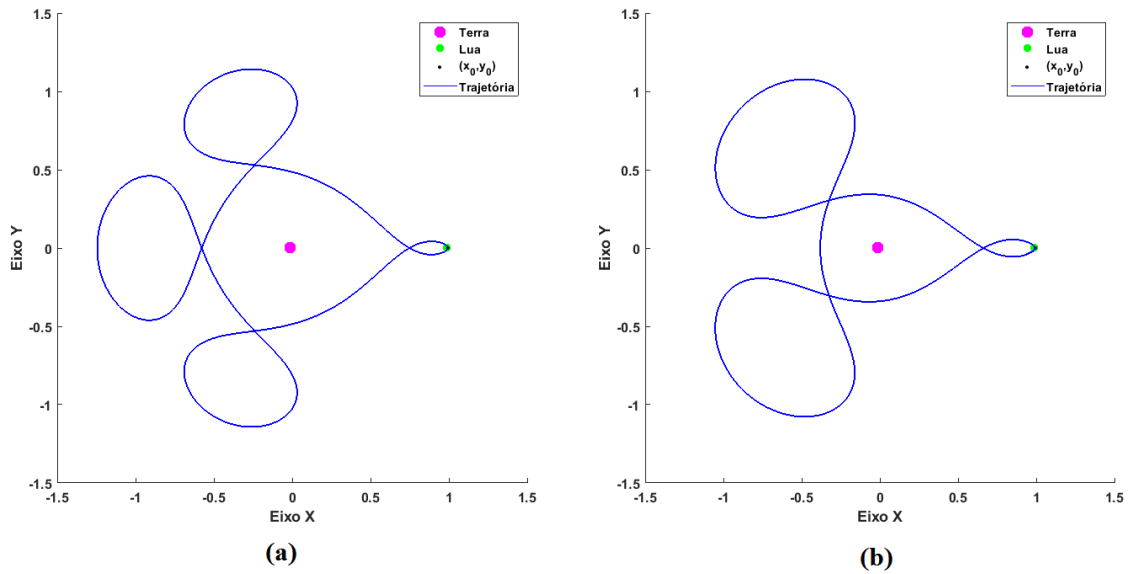


Figura 15 – Trajetória de uma nave espacial sujeita a gravidade do sistema Terra-Lua. Em (a) observamos o perfil da trajetória para determinadas condições iniciais, em (b) se verifica que a representação da órbita muda consideravelmente para uma pequena variação das condições iniciais. Fonte: Do próprio autor

Estes gráficos mostram o movimento de uma nave espacial sujeita a interação gravitacional do sistema Terra-Lua, cuja massa reduzida é $\mu = 0.012277471$. Para este sistema observa-se na Figura 15 (a), que para determinadas condições iniciais a órbita apresenta um certo padrão, no entanto para uma leve variação destes parâmetros, o comportamento se altera como fica evidente em (b).

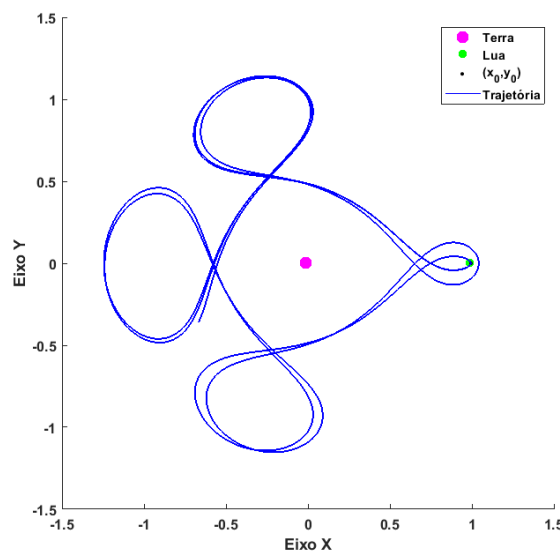


Figura 16 – Trajetória de uma nave espacial sujeita a gravidade do sistema Terra-Lua, com aumento no tempo de simulação. Fonte: Do próprio autor

As simulações da Figura 15 foram feitas de forma que a trajetória fosse obtida para um ciclo completo, por isso, se apresenta uma órbita aparentemente fechada, todavia, se aumentarmos o número de interações, isto é, aumentar o intervalo de tempo de simulação, a trajetória não será fechada, como se observa na Figura 16.

Depois desta exemplificação podemos seguir para a execução de mais simulações, e verificar as condições que alteram as formas das trajetórias. Serão considerados 3 sistemas de três corpos diferentes (Sol-Planeta-Asteróide), com diferentes condições iniciais, estamos interessados na descrição da órbita dos asteróides já que estes são os corpos de menor massa.

Dentre os asteróides que serão estudados, dois estão sob a influência do sistema Sol-Júpiter, que são um asteróide da família de Asteróides Troianos e outro da família de Asteróides Hilda. O outro asteróide é do tipo Troiano e foi descoberto em 2010, nomeado como 2010TK7, estando presente no sistema Sol-Terra (MACEDO; JUNIOR, 2018).

5.2.1 Órbitas dos Asteróides

Inicialmente estudaremos o asteróide 2010TK7, presente no sistema Sol-Terra, este é um tipo de asteróide troiano, que tem por característica librar, isto é, se aproximar ou afastar periodicamente do corpo em que tem maior interação, esta libração ocorre em torno de L_4 . Os cientistas acreditavam que este tipo de corpo celeste não existia no sistema Sol-Terra, no entanto, com utilização de imagens feitas no infravermelho, este asteróide foi descoberto.

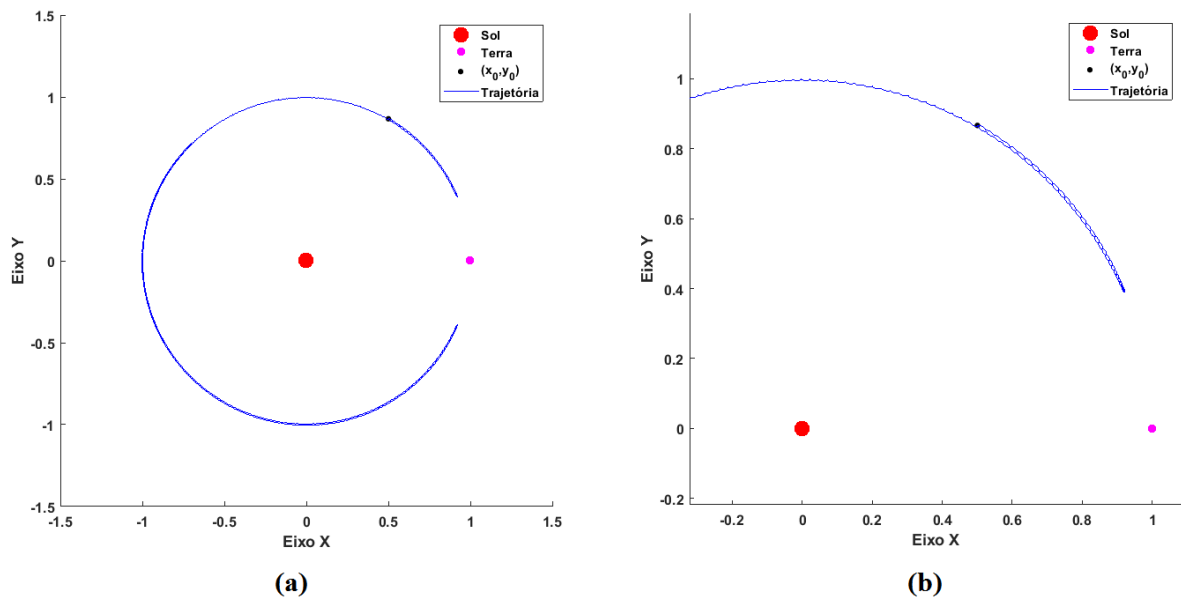


Figura 17 – Órbita do asteróide 2010TK7 no sistema Sol-Terra. Em (a) observamos sua órbita em forma de ferradura com presença de librações. Em (b) apresentamos uma ampliação de um setor da órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor

Para gerar o gráfico da órbita deste corpo, foi realizado o mesmo procedimento do exemplo da nave espacial, foram utilizadas condições iniciais em conjunto com o método de Runge-Kutta para a aproximação da trajetória. Como este asteroide se encontra no sistema Sol-Terra, a massa reduzida foi encontrada com magnitude $\mu = 0.000003002505$, de posse dos dados, a órbita observada pode ser vista em (a) na Figura 17. Em (b) na mesma figura, foi feita uma ampliação de um setor do gráfico da órbita do asteroide 2010TK7, para uma visualização mais clara do padrão da órbita apresentada por ele.

A princípio o entendimento desta órbita pode ser complicado, mais imaginá-la como sendo uma projeção do movimento real no plano da órbita do sistema Sol-Terra, fica bem mais simples de compreender, ou seja o movimento real apresentado pelo asteroide seria uma espécie de movimento helicoidal perpendicular ao plano da órbita do sistema.

As condições iniciais para a simulação da trajetória descrita na Figura 17, foram

Tabela 2 – Condições para a Figura 17

Condições Iniciais para o Gráfico da Figura 17	
μ	0.000003002505
$x(0)$	0.500446997495
$y(0)$	0.866804826648
$\dot{x}(0)$	0.000587109356
$\dot{y}(0)$	0.000338356144

Observe que a órbita tem librações, isto é, de uma forma mais simples, aproximações e afastamentos periódicos em torno de um ponto, nota-se também que o padrão da órbita é de certa forma complicado por ser do tipo ferradura, logo partindo das proximidades do ponto lagrangeano L_4 , ele vai até próximo de Júpiter, e começa a voltar até fazer todo o caminho inverso em forma de ferradura, passando pelo ponto L_5 , chegando próximo do planeta novamente, e então continua neste ciclo.

O segundo corpo celeste estudado foi um asteroide troiano específico de uma família grande de asteroides chamados Troianos que se encontram nas proximidades de L_4 do sistema Sol-Júpiter, a massa reduzida do sistema foi $\mu = 0.0009533386$, e a órbita dele é vista na Figura 18

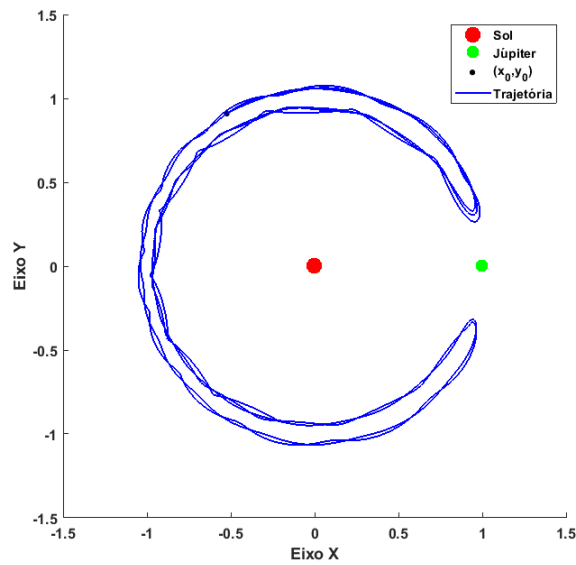


Figura 18 – Órbita de um asteroide troiano específico, sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Júpiter. Fonte: Do próprio autor

A simulação da figura 18, foi realizada levando em conta o seguinte conjunto de condições iniciais.

Tabela 3 – Condições para a Figura 18

Condições Iniciais para o Gráfico da Figura 18	
μ	0.0009533386
$x(0)$	-0.524046125
$y(0)$	0.909326674
$\dot{x}(0)$	0.0646761399
$\dot{y}(0)$	0.0367068277

Para este caso o asteroide não apresenta librações, no entanto o padrão da sua órbita é parecido com o 2010TK7, tendo o formato de ferradura, só que um pouco mais aberta, e também irregular, não apresentando padrões imprevisíveis. Note que, o potencial do Sol é bem superior ao de Júpiter, de modo que o asteroide interage mais tempo com o Sol.

O próximo e último asteroide estudado, foi outro pertencente ao sistema Sol-Júpiter, de uma família de asteroides denominada Hilda, eles estão localizados no cinturão de asteroides entre Marte e Júpiter, o gráfico simulando a trajetória dele pode ser visualizado na Figura 19.

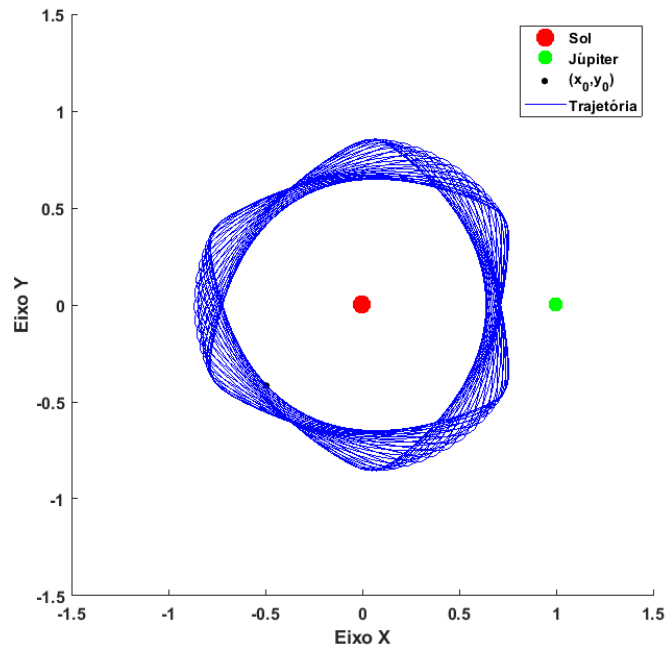


Figura 19 – Órbita de um asteroide da família Hilda, sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Júpiter. Fonte: Do próprio autor

Para a montagem do gráfico da Figura 19 as condições iniciais adotadas para o sistema foram.

Tabela 4 – Condições para a Figura 19

Condições Iniciais para o Gráfico da Figura 19	
μ	0.0009533386
$x(0)$	-0.4955265404
$y(0)$	-0.4163448036
$\dot{x}(0)$	0.4389046359
$\dot{y}(0)$	-0.5230661767

O asteroide da família Hilda, não sente de forma efetiva a interação gravitacional de Júpiter, de modo que sua órbita se restringe durante o tempo inteiro a gravidade do Sol. A órbita, apresenta o que se encontra literatura a respeito do comportamento orbital desta família de asteroides.

5.2.2 Variações de Condições Iniciais

Sistemas de três corpos são altamente sensíveis as suas condições iniciais, isto é, para qualquer pequena variação a dinâmica do sistema muda de forma considerável. Neste sentido o objetivo desta subseção é verificar e analisar o comportamento das trajetórias percorridas pelo terceiro corpo.

Serão considerados novamente os três sistemas anteriores, no entanto suas velocidades $\dot{y}(0)$, serão variadas, em dois casos específicos, uma variação sutil que poderia simular um objeto que interagisse com o nosso asteroide de forma "fraca" e outra abrupta que poderia simular o efeito de uma colisão, estas variações podem nos mostrar quais parâmetros são importantes para que ocorra um caso de uma colisão entre asteroides destes sistemas ou objetos vindos de fora do sistema solar.

Começaremos então com o asteroide 2010TK7, para isto iremos considerar uma pequena diminuição da sua velocidade na direção y, e sequencialmente um aumento abrupto dela. A relação com as diferentes velocidades podem ser observadas na tabela 5

Tabela 5 – Variações das velocidades para simular as trajetórias do asteroide 2010TK7

Diferentes Velocidades na Direção y		
-	Valor	Porcentagem
Inicial	0.000338356144	-
Variação Sutil	0.000238356144	70% $\dot{y}(0)$
Variação Abrupta	0.003338356144	980% $\dot{y}(0)$

Mantendo as outras condições e variando somente a velocidade em uma direção única, os gráficos obtidos foram.

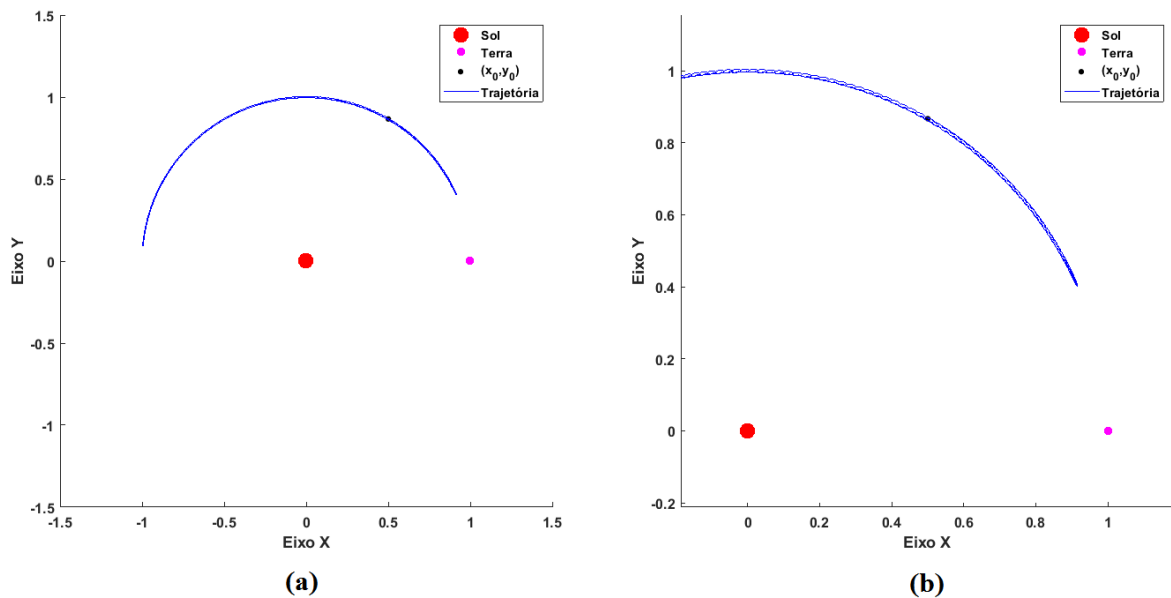


Figura 20 – Órbita do asteroide 2010TK7 com variação das condições iniciais. Em (a) está apresentado o perfil da trajetória para uma ligeira diminuição de sua velocidade. Em (b) apresentamos uma ampliação da trajetória para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor

Analisando estes gráficos, fica evidente as mudanças provocadas pelas condições iniciais.

No entanto tais trajetórias continuam com uma forma sem muitos problemas, isto é, o asteroide continua a orbitar o ponto lagrangeano. Quando ocorreu uma diminuição da velocidade na figura 20, a órbita parou de apresentar uma forma de ferradura como na figura 17, indo somente até certo ponto e ficando confinada em uma espécie de arco de círculo, no entanto continuou com as librações.

Aparentemente o que ocorreu em contraposição com a figura já obtida anteriormente, foi uma espécie de falta de energia, isto é, uma diminuição da velocidade, fez com que o asteroide não tivesse energia suficiente para continuar sua órbita, parando então nas proximidades do ponto lagrangeano L_3 , ficando contido em um movimento periódico. Já no aumento abrupto de velocidade, figura 21, as librações aumentaram de tamanho, mais a órbita continuou com o formato de ferradura, já que a sua energia ficou maior, o aumento da velocidade também provocou o pequeno aumento das librações.

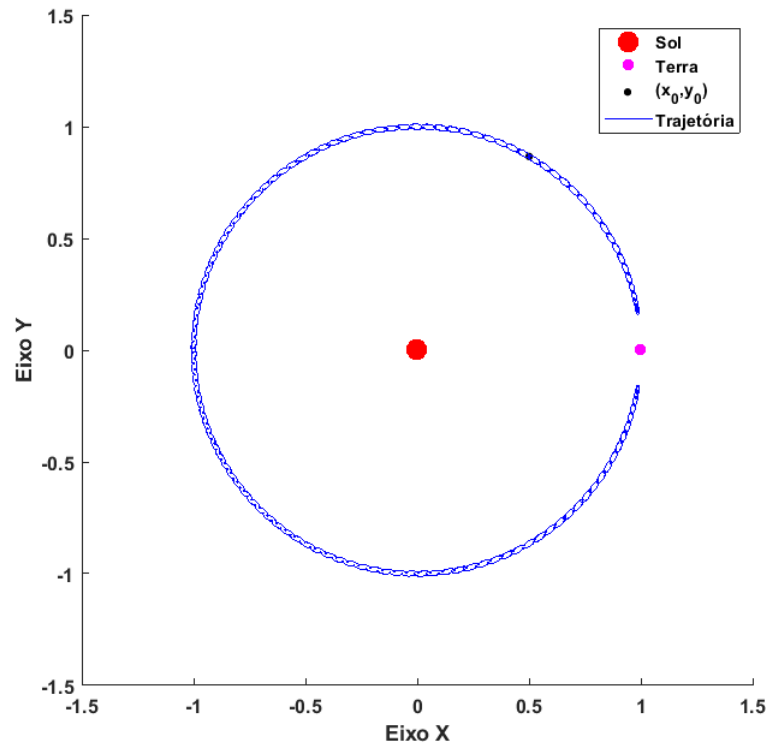


Figura 21 – Órbita do asteroide 2010TK7 com abrupto aumento de velocidade. Fonte: Do próprio autor

O mesmo procedimento adotado no asteroide 2010TK7, será empregado no estudo do asteroide da família dos troianos do sistema Sol-Júpiter, faremos variações na condição inicial da velocidade na direção y . As condições para a construção dos gráficos são listadas na Tabela 6

Tabela 6 – Variações das velocidades para simular as trajetórias do asteróide do tipo troiano

Diferentes Velocidades na Direção y		
-	Valor	Porcentagem
Inicial	0.0367068277	-
Variação Sutil	0.0267068277	73% $\dot{y}(0)$
Variação Abrupta	0.3367068277	920% $\dot{y}(0)$

Com a utilização deste conjunto de condições os gráficos gerados, localizados nas figuras 22 e 23.

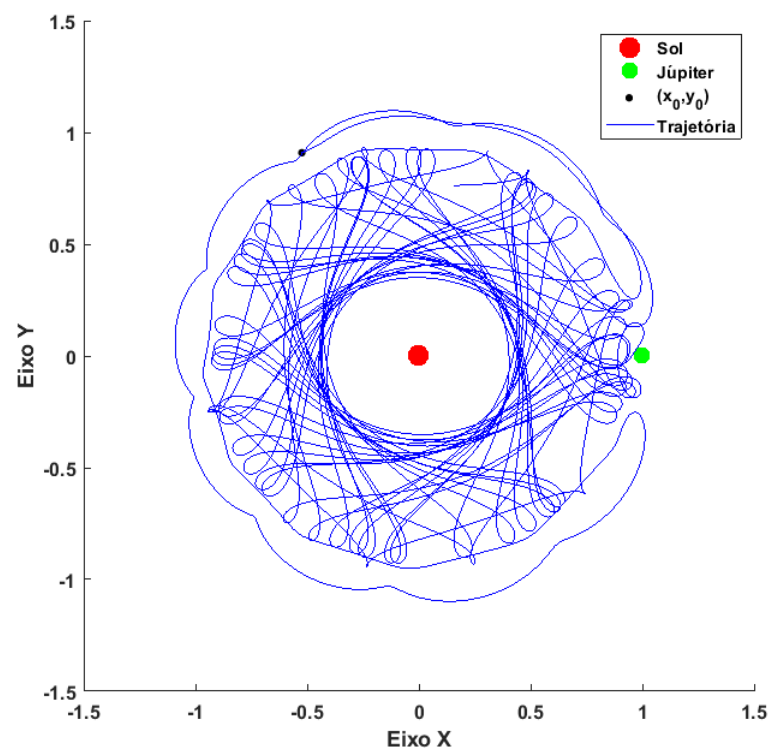


Figura 22 – Órbita do asteróide do tipo troiano com uma ligeira diminuição de sua velocidade.
Fonte: Do próprio autor

O que se observa a partir destes gráficos é que apesar de não ser possível prever a órbita (pequenas variações das condições iniciais geram trajetórias completamente distintas) podemos observar certa estabilidade no movimento do asteróide.

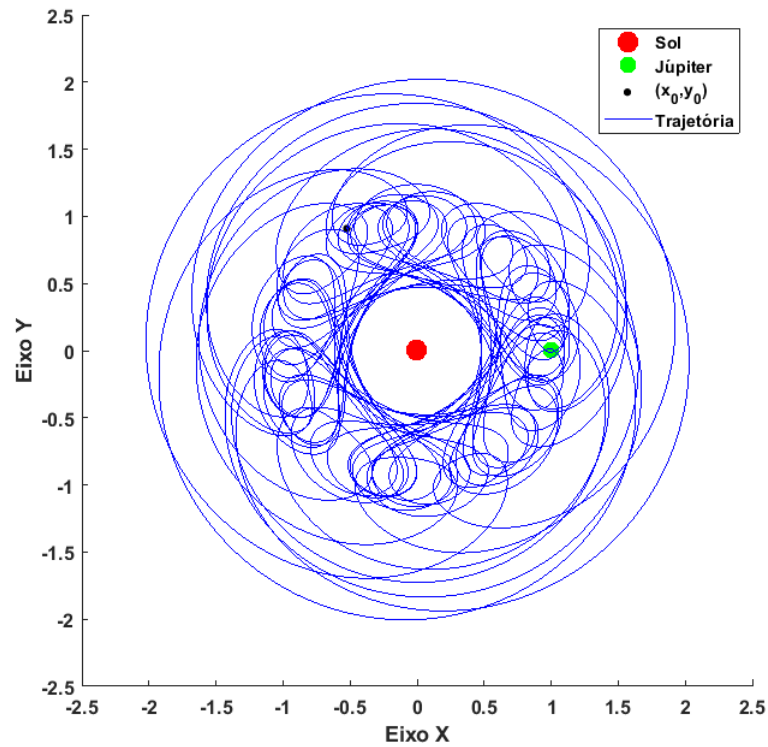


Figura 23 – Órbita do asteroide do tipo troiano com um abrupto aumento de sua velocidade.
Fonte: Do próprio autor

Analisando as figuras 22 e 23, nota-se que estas variações trouxeram fortes librações para a órbita deste asteroide, onde fica perceptível o proporcionalidade das librações com a velocidade do asteroide, na Figura 22 as librações são menores que na Figura 23.

Para concluir esta etapa de variação das condições iniciais podemos estudar a órbita do nosso último asteroide da família Hilda, para isso usaremos o mesmo procedimento, então na Tabela 7 podemos identificar a velocidade inicial, e as alterações que serão feitas.

Tabela 7 – Variações das velocidades para simular as trajetórias do asteroide da família Hilda

Diferentes Velocidades na Direção y		
-	Valor	Porcentagem
Inicial	-0.5230661767	-
Variação Sutil	-0.4230661767	80% $\dot{y}(0)$
Variação Abrupta	-0.8330661767	160% $\dot{y}(0)$

Os resultados encontrados para estes casos, estão dispostos nas figuras 24 e 25.

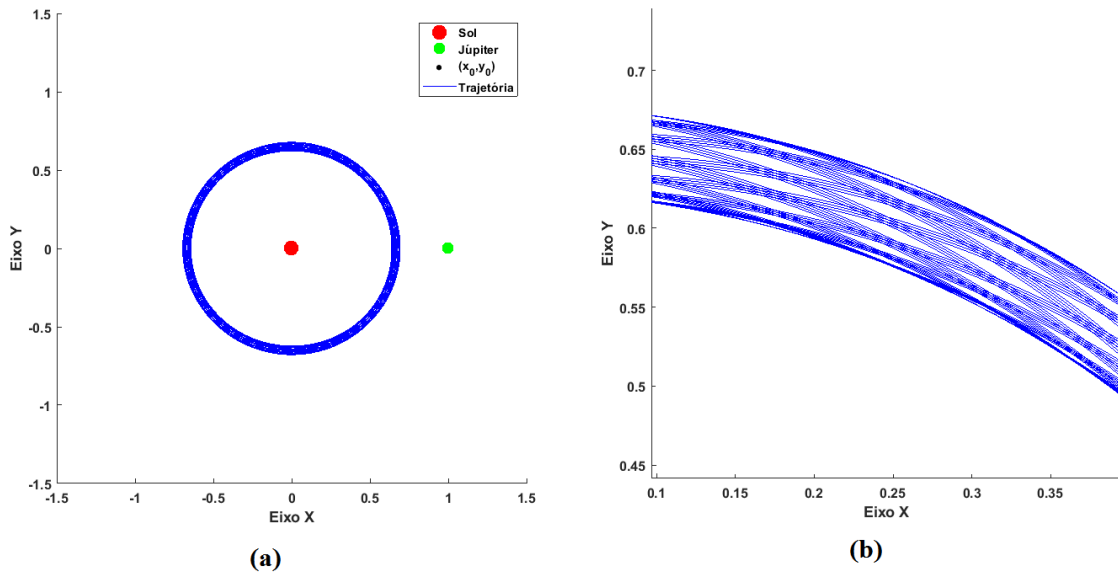


Figura 24 – Órbita de asteróide da família Hilda com variação em suas condições iniciais. Em (a) se observa a representação da trajetória do astro para uma ligeira diminuição de sua velocidade. Em (b) foi feita uma ampliação de um setor da órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor

Para a Figura 24, se observa que o padrão apresentado pela órbita do asteróide pode ser considerado como periódico em virtude do formato repetitivo dos ciclos, esta afirmação fica mais evidente após a visualização da ampliação presente na parte (b) desta mesma figura, nela se verifica um padrão que se assemelha a um periódico.

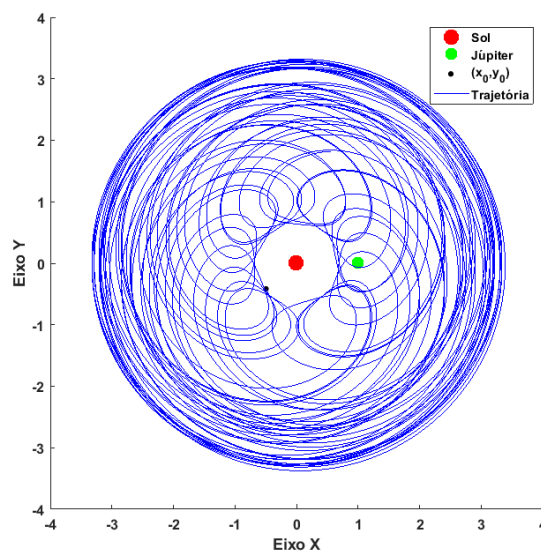


Figura 25 – Órbita do asteróide da família Hilda com um abrupto aumento de sua velocidade. Fonte: Do próprio autor

Com o aumento de velocidade a trajetória apresentada pelo asteróide da família Hilda mudou de forma considerável, com a perda do perfil periódico de seus ciclos. Com esta mudança de parâmetro a órbita do asteróide apresentou librações que podem ser visualizadas na Figura 25.

5.2.3 Mudança de Sistemas

A mudança de comportamento orbital não se restringe somente a variações das condições iniciais, determinados parâmetros quando sujeitos a certas alterações, fazem com que as trajetórias do terceiro corpo sofra mudanças consideráveis.

Nesta etapa serão considerados novamente tipos de asteróides no estudo, no entanto iremos verificar qual o seu comportamento orbital caso seja alterado o seu sistema, por exemplo, simular um asteróide semelhante ao 2010TK7 no sistema Sol-Júpiter. Para este estudo as condições iniciais serão mantidas as mesmas, o único parâmetro que sofrerá alteração é a massa reduzida do sistema, que muda dependendo dos corpos em estudo. Inicialmente considerando o Sistema Sol-Júpiter, obtemos a Figura 26.

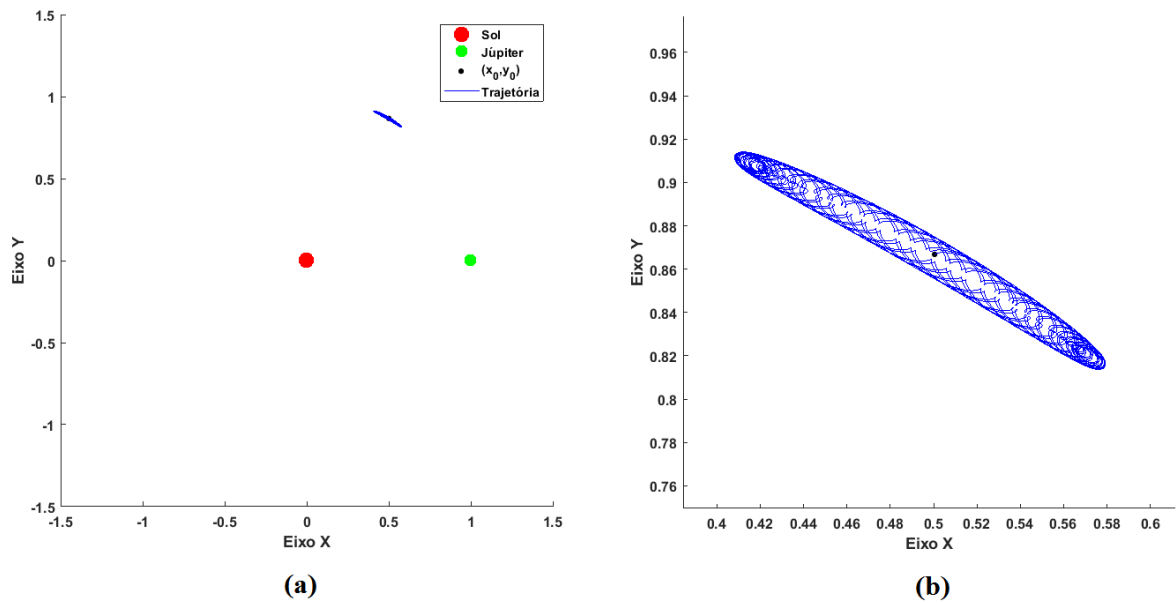


Figura 26 – Órbita do asteróide 2010TK7. Em (a) se encontra a representação da trajetória do asteróide sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Júpiter. Em (b) foi feita uma ampliação de sua órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor

Para esta primeira e as seguintes simulações a respeito de mudanças de sistemas os parâmetros da Tabela 8 serão utilizados, com μ_{ST} , μ_{SJ} e μ_{SN} representando a massa reduzida do sistema Sol-Terra, Sol-Júpiter e Sol-Netuno respectivamente.

Tabela 8 – Massas reduzidas dos sistemas Sol-Terra, Sol-Júpiter e Sol-Netuno.

Relação de massas reduzidas	
μ_{ST}	0.000003002505
μ_{SJ}	0.0009533386
μ_{SN}	0.00005250000

Analisando o gráfico na parte (a) da Figura 26, observamos que a órbita do asteróide no sistema Sol-Júpiter, fica contida somente nas proximidades do ponto lagrangeano de equilíbrio, apresentando um estado de libração permanente que fica bem evidente na parte (b) da mesma figura. O movimento não apresenta características caóticas, pois o asteróide entrou em um regime de certa estabilidade.

Para simular a órbita no sistema Sol-Netuno, podemos utilizar os dados da Tabela 8, obtendo:

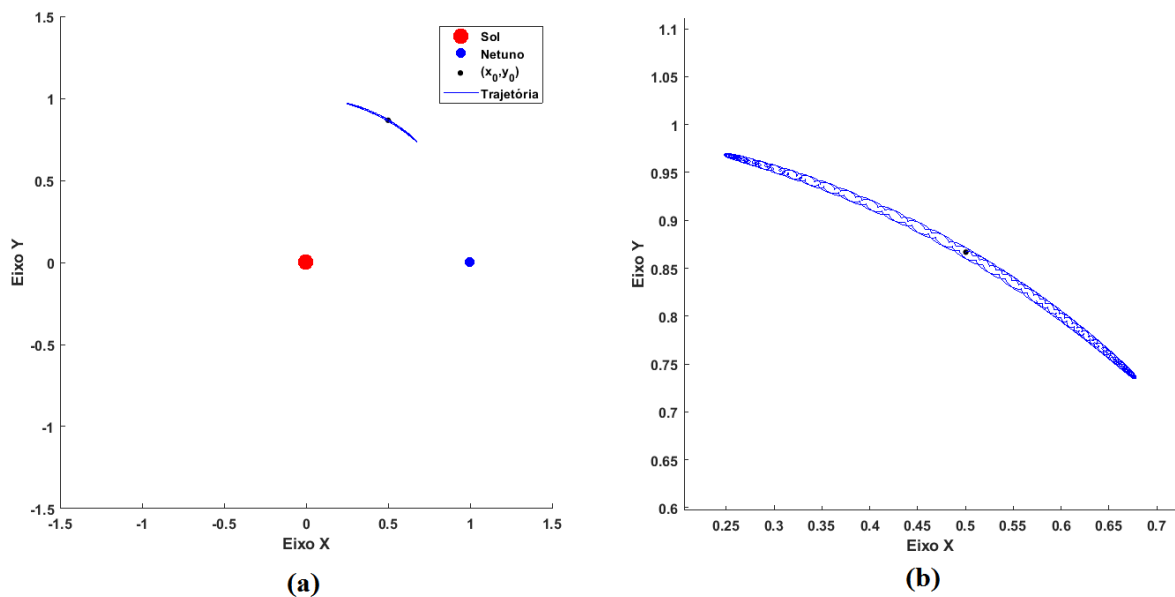


Figura 27 – Órbita do asteróide 2010TK7. Em (a) se encontra a representação da trajetória do asteróide sujeito a interação gravitacional do sistema Sol-Netuno. Em (b) foi feita uma ampliação de sua órbita para uma melhor visualização. Fonte: Do próprio autor

A órbita do asteróide 2010TK7, mostrada na parte (a) da Figura 27, para este sistema se mostrou bem parecida com a descrita no sistema Sol-Júpiter, diferindo somente quanto a alongação e também quanto a intensidade das librações, neste caso elas são menos acentuadas, observar parte (b) da Figura 27, mas de modo geral o movimento do corpo não possui uma rota caótica.

Para o caso do asteróide troiano os mesmos procedimentos utilizados anteriormente serão empregados, simulando sua órbita para o sistema Sol-Netuno obtemos a Figura 28.

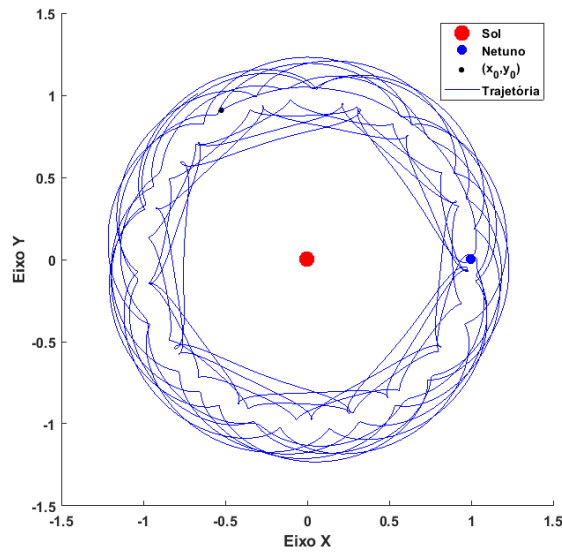


Figura 28 – Órbita do asteróide tipo Troiano no sistema Sol-Netuno. Fonte: Do próprio autor

Nesta simulação, verificamos que a mudança no sistema, gerou uma órbita bem diferente da anterior para o sistema Sol-Júpiter, a trajetória obtida apresentou um certo grau de librações, tanto próxima quanto afastada das primárias.

Por fim, para concluir esta etapa construímos os gráficos para um asteróide da família Hilda, no sistema Sol-Netuno. A imagem da simulação pode ser visualizada na Figura 29.

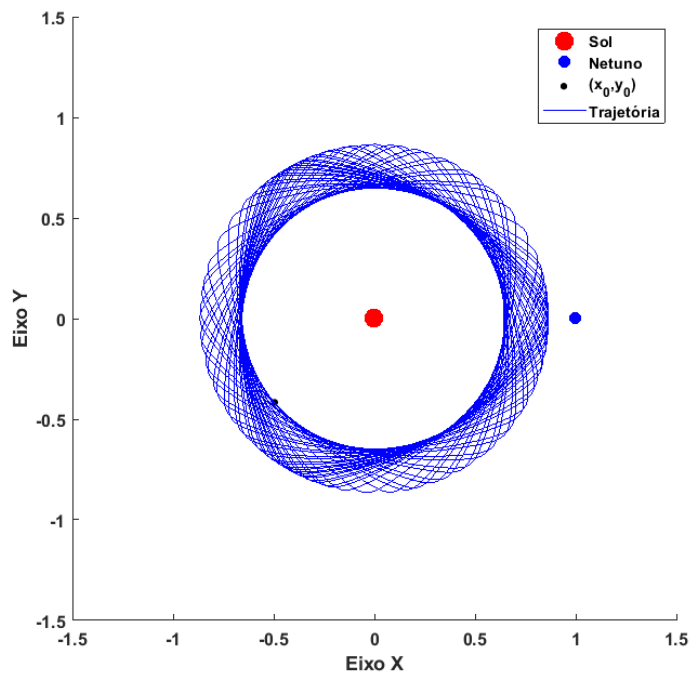


Figura 29 – Órbita do asteróide da família Hilda no sistema Sol-Netuno. Fonte: Do próprio autor

Para o sistema Sol-Netuno, o padrão orbital observado pode ser entendido como uma extensão da forma orbital apresentada por ele no sistema Sol-Júpiter, com uma maior concentração de cruzamentos das linhas de trajetória, mais o sistema não apresenta padrões caóticos.

Concluímos esta parte verificando que de fato certos sistemas de três corpos com determinadas condições iniciais fazem com que ocorra uma perda da previsibilidade no padrão orbital.

5.3 LIBRAÇÃO DE PLUTÃO

Esta seção é dedicada a um caso curioso do fenômeno de libração na órbita de Plutão. Este planeta anão diferente dos outros possuem uma inclinação considerável em relação ao plano das órbitas dos outros planetas do sistema solar como pode ser visto na figura 30. Durante seu periélio¹ ele fica mais próximo do Sol do que Netuno, no entanto devido a inclinação de sua órbita eles não colidem, no entanto a interação gravitacional dele com Netuno poderia levar a uma eventual colisão.

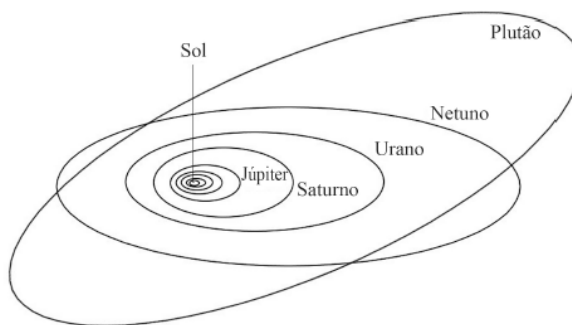


Figura 30 – Órbitas planetárias do Sistema Solar e a órbita de Plutão. Fonte:(MACEDO; JUNIOR, 2018)

Esta colisão não ocorre devido a ressonância que existe entre as órbitas dos dois corpos celestes. Em função desta ressonância a órbita de Plutão sofre libração devido a uma troca de momento angular entre Netuno e Plutão.

Para validar estas afirmações foi simulado numericamente a libração da órbita de Plutão utilizando o problema restrito de três corpos. O gráfico da simulação numérica pode ser observado na Figura 31.

¹ Ponto da órbita, de qualquer astro do sistema solar que se encontra mais perto do Sol.

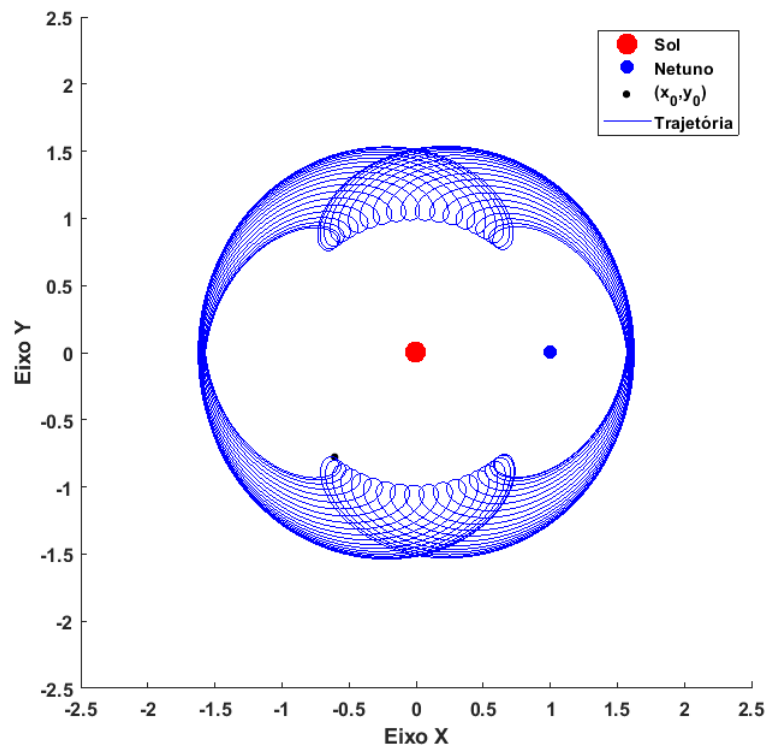


Figura 31 – Gráfico da libração da órbita de Plutão, no sistema Sol-Netuno. Fonte: Do próprio autor

A simulação da órbita de Plutão com o problema restrito de três corpos, condiz com os dados apontados na literatura (MARTINS; ZANOTELLO, 2018), (KOZAI, 1962), (WILLIAMS; BENSON, 1971), e mostra que é possível obter diversas quantidades relevantes sem levar em consideração forças perturbativas referentes a N corpos que requer uma análise numérica bem mais sofisticada.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho possibilitou uma visão mais ampla a respeito do Problema de Três Corpos. Nos cursos de licenciatura em Física do IFPI (e possivelmente na maioria deles Brasil a fora) o estudo deste tipo de problema não é realizado apesar de sua grande importância para a compreensão da natureza.

A utilização do formalismo Hamiltoniano da mecânica foi adotado por ser mais conveniente e elegante em comparação com o newtoniano e também por facilitar a obtenção das equações que descrevem sistemas dinâmicos.

Como é comum para este tipo de problema e também para uma grande quantidade de sistemas físicos, as equações que ditam as características do sistema não possuem solução analítica, tornando necessário o uso de métodos numéricos. Neste trabalho foi adotado um dos mais conhecidos e eficientes na busca de solução de EDO's, que é o método de Runge-Kutta clássico.

Neste trabalho apresentamos o PR3C buscando uma solução para este problema que serve de modelo para o estudo de sistemas como, deslocamento de uma nave espacial sujeita ao potencial da Terra e da Lua, ou o movimento de asteróides no nosso sistema solar. Determinamos as equações de movimento e, a partir destas, conseguimos determinar as órbitas possíveis através de simulações numéricas. Simulamos as órbitas para objetos sujeitos a diversas condições iniciais simulando desde interações fracas entre o objeto de menor massa com outros corpos nas proximidades, até mesmo os casos de libração das órbitas, onde se observou também que a órbita de Plutão apresenta uma libração própria, o que o impede de colidir com Netuno.

Outros estudos podem ser desenvolvidos a partir deste trabalho. Além das órbitas, informações importantes tais como o comportamento caótico que este tipo de sistema pode apresentar, bem como métodos mais sofisticados que auxiliam e otimizam a solução numérica do problema, estas informações podem ser obtidas respectivamente a partir da determinação de seções de Poincaré no espaço de fase e de utilização de técnicas de regularização, como a de Birkhoff, que tenta retirar as singularidades do sistema.

REFERÊNCIAS

- BEUTLER, G. *Methods of Celestial Mechanics*. Berlin: Springer - Verlag, 2005. Citado na página 29.
- BOYCE, W. E.; PRIMA, R. C. D. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado na página 50.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. *Methods of Celestial Mechanics*. New York and London: Academic Press, 1961. Citado na página 40.
- COLLINS, G. W. *The Foundations of Celestial Mechanics*. USA: The Pachart Foundation dba Pachart Publishing House, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- DANTAS, M. P.; LLIBRE, J. The global phase space for the 2- and 3-dimensional kepler problems. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, v. 8, p. p. 45, Dezembro 2009. Citado na página 30.
- DUKKIPATI, R. V. *Numerical Methods*. USA: New Age International Publishers, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 9, 53 e 55.
- DULLIN, H. R.; WORTHINGTON, J. The vanishing twist in the restricted three-body problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 276, p. p. 12–20, Maio 2014. Citado na página 30.
- FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Citado na página 50.
- GILAT, A. P.; SUBRAMANIAN, V. *Métodos Numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. Porto Alegre: Bookman, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 52, 54 e 56.
- GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. 2. ed. Reading, MA: Addison - Wesley, 1980. Citado 5 vezes nas páginas 9, 19, 22, 24 e 83.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. [S.l.]: Pearson Addison Wesley, 2011. Citado na página 38.
- KOZAI, Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astronomical Journal*, v. 67, n. 9, 1962. Citado na página 75.
- LEMO, N. A. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 23, 28 e 82.
- MACEDO, G. S.; JUNIOR, A. J. R. Aplicação do problema restrito de tres corpos no estudo do movimento de astros do sistema solar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. n. 4, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 11, 29, 62 e 74.
- MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas a Física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 1999. Citado na página 50.
- MARTINS, F. A. C.; ZANOTELLO, M. Mecânica celeste e a teoria dos sistemas dinâmicos: uma revisão do problema circular restrito de três corpos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. n. 2, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 75.

- MCCUSKEY, S. W. *Introduction to Celestial Mechanics*. 1. ed. USA: Addison - Wesley Publishing Company, 1963. Citado na página 40.
- MOLTON, F. R. *An Introduction to Celestial Mechanics*. 4. ed. New York: The Macmillan Company, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. New York: Cambridge University Press, 1999. Citado 11 vezes nas páginas 9, 18, 32, 38, 39, 40, 42, 43, 47, 48 e 49.
- NETO, J. B. *Mecânicas Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. Citado na página 27.
- NEWTON, I. The principia: mathematical principles of natural philosophy. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy by I. Bernard Cohen and Julia Bundenz*. Berkeley, CA. Publisher: University of California Press, 1999. Citado na página 18.
- PANG, T. *An Introduction to Computational Physics*. New York: Cambridge University Press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- PIRES, A. S. T. *Evolução das Idéias da Física*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. Citado na página 18.
- POINCARÉ, H. *Léçons de mécanique céleste*. [S.l.]: Gauthier Villars, 1905. v. 1. Citado na página 16.
- POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier Villars. Paris I (1892); Paris II (1893); Paris III (1899). [S.l.]: Dover edn, 1957. Citado na página 16.
- PRADO, A. F. B. A. *Trajetórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade*. 1. ed. São José dos Campos: Editora Autor, 2001. Citado na página 39.
- PRAZERES, R. F. *Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema de Três Corpos*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, Dezembro 2010. Citado na página 31.
- REN, Y.; SHAN, J. Low-energy lunar transfers using spatial transit orbits. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 19, n. n. 3, p. p. 554–569, Março 2014. Citado na página 39.
- SPERANDIO, D. *Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. Citado na página 50.
- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*. 5. ed. Estados Unidos: Brooks Cole, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 9, 20, 22, 27 e 28.
- VALTONEN, M.; KARTTUNEN, H. *The Three-Body Problem*. New York: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 40.
- WILLIAMS, J. G.; BENSON, G. S. Resonances in the neptune-pluto system. *Astronomical Journal*, v. 76, n. 2, 1971. Citado na página 75.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. São Paulo: Makron, 2001. v. 1. Citado na página 51.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE NOETHER

Para a demonstração do Teorema é conveniente considerar somente termos de primeira ordem em ε . Da transformação 2.10 presente no capítulo 2, obtemos:

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \varepsilon \dot{\vartheta} \quad \frac{dt}{dt'} = (1 + \varepsilon \dot{\vartheta})^{-1} = 1 - \varepsilon \dot{\vartheta} \quad (\text{A.1})$$

Onde o último resultado foi obtido por meio de uma expansão em série de Taylor, truncando na primeira derivada. Note que:

$$\frac{dq'_i}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dq'_i}{dt} = (1 - \varepsilon \dot{\vartheta})(\dot{q}_i + \varepsilon \dot{\vartheta}_i) = \dot{q}_i + \varepsilon \dot{\vartheta}_i - \varepsilon \dot{\vartheta} \dot{q}_i + \varepsilon^2 \dot{\vartheta} \dot{\vartheta}_i \quad (\text{A.2})$$

Como o termo com ε^2 , será desconsiderado, fazendo $\rho_i = \dot{\vartheta}_i - \dot{q}_i \dot{\vartheta}$, obtemos:

$$\frac{dq'_i}{dt'} = \dot{q}_i + \varepsilon \rho_i \quad (\text{A.3})$$

Da condição de invariância da ação, temos:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i + \varepsilon \vartheta_i, \dot{q}_i + \varepsilon \rho_i, t + \varepsilon \psi) \frac{dt'}{dt} dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i + \varepsilon \vartheta_i, \dot{q}_i + \varepsilon \rho_i, t + \varepsilon \psi) (1 + \varepsilon \dot{\vartheta}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Precisamos então expandir a Lagrangeana $\mathcal{L}(q_i + \varepsilon \vartheta_i, \dot{q}_i + \varepsilon \rho_i, t + \varepsilon \psi)$, em uma serie de Taylor.

$$\mathcal{L}(q_i + \varepsilon \vartheta_i, \dot{q}_i + \varepsilon \rho_i, t + \varepsilon \psi) \approx \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \varepsilon \vartheta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon \rho_i \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \varepsilon \psi \quad (\text{A.5})$$

Substituindo então esta Lagrangiana na condição de invariância da ação, equação A.4.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \varepsilon \vartheta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon \rho_i \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \varepsilon \psi \right] (1 + \varepsilon \dot{\vartheta}) dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \varepsilon \vartheta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon \rho_i \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \varepsilon \psi \right] dt + \\ &\quad \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \dot{\vartheta} dt + \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \vartheta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \rho_i \right] \dot{\vartheta} \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Descartando o termo com ε^2 , obtemos:

$$\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \vartheta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \rho_i \right] + \mathcal{L} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \psi \right] dt = 0 \quad (\text{A.7})$$

De onde obtemos diretamente a condição de Noether, substituindo o valor de ρ_i , então:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \vartheta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{\vartheta}_i - \dot{q}_i \dot{\psi}) \right] + \mathcal{L} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \psi = 0 \quad (\text{A.8})$$

Esta é a condição necessária para que a ação seja invariante sob uma transformação do tipo 2.10. Definindo a quantidade;

$$h = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \quad (\text{A.9})$$

Tomando a derivada total da quantidade h , temos:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Com a utilização das equações de Lagrange¹, a derivada total de h se resume a seguinte expressão.

$$\frac{dh}{dt} = \left[\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] - \left[\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (\text{A.11})$$

Utilizando então as equações A.11, A.9 e as equações de Lagrange na condição de Noether A.8, obtemos.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{i=1}^n \dot{\vartheta}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \dot{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \mathcal{L} \dot{\psi} - \frac{dh}{dt} \psi = \\ \sum_{i=1}^n \left[\vartheta_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dot{\vartheta}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] - h \dot{\psi} - \frac{dh}{dt} \psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

¹ Verificar o Capítulo 1, na seção de discussão do formalismo.

Observe que esta expressão pode ser simplificada para a forma mais compacta.

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \vartheta_i - h\psi \right] = 0 \quad (\text{A.13})$$

Substituindo então o valor da quantidade h , na equação acima, temos o seguinte.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\vartheta_i - \dot{q}_i \psi) + \psi \mathcal{L} \right] = \\ \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \psi - \vartheta_i) - \psi \mathcal{L} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A partir desta condição, obtemos de forma imediata a expressão.

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \psi - \vartheta_i) - \psi \mathcal{L} \quad (\text{A.15})$$

Completando então a demonstração do Teorema de Noether.

APÊNDICE B – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Com o objetivo de simplificar o problema, algumas vezes é necessário, fazer mudanças nas variáveis canônicas aos quais o sistema é descrito no espaço de fase, isto também só é possível, tendo em vista que as variáveis são independentes entre si. Tais mudanças devem ser feitas de modo a preservar a forma hamiltonniana das equações de movimento (LEMOS, 2013).

Considerando então variáveis canônicas gerais (q, p) , para descrição global de um sistema genérico, sua hamiltonniana tem a forma $H(q, p, t)$, as equações de Hamilton são escritas como:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (\text{B.1})$$

É necessário ir em busca de transformações inversíveis, do tipo:

$$Q_i = Q(q, p, t) \quad P_i = P(q, p, t) \quad (\text{B.2})$$

Deve ser então possível encontrar uma função $K(Q, P, t)$, em que as equações de movimento tenham suas formas preservadas.

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (\text{B.3})$$

Cabe um pequeno comentário a respeito das novas equações de movimento, as equações nas novas variações devem preservar a forma hamiltoniana, não importando a Hamiltoniana original.

Tomando a forma variacional das equações de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right] dt = 0 \quad (\text{B.5})$$

Uma condição necessária para a validade destas equações, é que os integrandos difiram por uma derivada total, e uma função $\phi(q, p, t)$, onde as variações são tomadas a tempo fixo, isto é, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ e $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$, temos então:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt &= \delta \phi(q(t_2), p(t_2), t_2) - \delta \phi(q(t_1), p(t_1), t_1) = \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \delta q_i(t_2) + \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \delta p_i(t_2) - \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \delta q_i(t_1) - \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \delta p_i(t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Assim, a transformação inversível B.2, preserva a forma hamiltoniana das equações se:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \dot{q}_i - H &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d\phi}{dt} = \\ \sum_i p_i dq_i - H dt &= \sum_i P_i dQ_i - K dt + d\phi = \\ \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H) dt &= d\phi \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Esta equação caracteriza uma transformação canônica genérica, note que ϕ pode ser vista como uma função das variações antigas e novas. Além disso para completar os comentários a respeito de transformações canônicas, é necessário enfatizar que a transformação é possível também através de uma função que gera a transformação, tal função é chamada de função geradora, que pode ser uma função das variáveis antigas e novas, para o caso da transformação canônica tratada no capítulo 3, ela tinha a forma $F = F(Q_i, p_i, t)$, existem outros tipos de funções geradoras que podem ser encontradas em (GOLDSTEIN, 1980). Uma função deste tipo é definida na forma:

$$F(Q_i, p_i, t) = - \sum_i q_i p_i + \phi(q, p, t) \quad (\text{B.8})$$

Temos então partir desta equação:

$$dF = -d \left(\sum_i q_i p_i \right) + d\phi = \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad (\text{B.9})$$

Utilizando então a equação B.7 obtemos:

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt = - \sum_i q_i dp_i - \sum_i P_i dQ_i + (K - H) dt \quad (\text{B.10})$$

De onde obtemos por comparação que as equações que definem a transformação canônica são:

$$q_i = - \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad P_i = - \frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{B.11})$$

Que são justamente as equações que geram os resultados já utilizados no capítulo 3, mais precisamente nas equações 3.19, 3.20, e para escrever a nova Hamiltoniana 3.21.

APÊNDICE C – CÓDIGOS DAS SIMULAÇÕES

C.1 CÓDIGO PARA OS POTENCIAIS

O código utilizado para a plotagem dos potenciais do sistema Terra-Lua, é apresentado a seguir, note que este código pode ser utilizado para plotar todos os potenciais, basta colocar a variável que representa o potencial que se deseja dentro do comando *surf(x,y,potencialdesejado)*;

```
%Potencial generalizado do Problema Restrito de 3 Corpos
```

```
clear;
```

```
close;
```

```
%Massa reduzida do Sistema Terra-Lua
```

```
ni = 0.012277471;
```

```
%Tamanho dos Eixos X e Y
```

```
[x, y] = meshgrid(linspace(-1.5, 1.5, 200));
```

```
%Potencial da Lua
```

```
ugl = -ni./sqrt( (x - 1 + ni).^2 + y.^2 );
```

```
%Potencial da Terra
```

```
ugt = -(1-ni)./sqrt( (x + ni).^2 + y.^2 );
```

```
%Potencial Centrifugo
```

```
uc = - (x.^2+ y.^2)/2;
```

```
%Potencial Generalizado
```

```
u = uc+ugt+ugl;
```

```
%Plota a Superficie do Potencial
```

```
surf(x,y,u);
```

```
%contour(x,y,log(log(-u)), linspace(-1, -.5, 30));
```

```
axis equal;
```

```
zlim([-3,0]);
```

```
view(10,34);
```

```
zoom(1);
```

C.2 CÓDIGO PARA AS TRAJETÓRIAS

Nesta seção se apresenta o código utilizado em todas as simulações das trajetórias percorridas pelo terceiro corpo. Neste código se encontra a implementação do método de Runge-Kutta Clássico. Observe que os parâmetros apresentados na forma *xxxxxx*, devem ser previamente preenchidos de acordo com a simulação que se deseja, logo, é necessário a utilização dos dados das tabelas 1,2,3,4,5,6,7 e 8.

```
%Problema de Valor Inicial em um referencial não inercial
simulado por Runge-Kutta de quarta ordem
clear;
close;

%Massa reduzida do sistema
ni = xxxxxxxxxxxx; % mM / (mE + mM)

E = [-ni, 0];
M = [1- ni, 0];
bodies = [E;M]; %(0,0) centro de massa do sistema

y0 = [xxxxxx, xxxxxx , xxxxxx, xxxxxx]; %Condições iniciais

[T4, Y4] = RK4(@f, [0, 17.0584], y0, 200000); %O valor do vetor
pode ser variável, funciona como tempo de Simulação

hold on;
drawcircle1(bodies(1,1), bodies(1,2));
drawcircle2(bodies(2,1), bodies(2,2));
plot(y0(1), y0(2), '.k', 'MarkerSize', 9);
xlim([-1.5,1.5]); ylim([-1.5,1.5]); axis equal; xlim('manual');
xlabel('Eixo X', 'FontSize', 12, 'Fontweight', 'Bold');
ylabel('Eixo Y', 'FontSize', 12, 'Fontweight', 'Bold');
set(gca, 'FontSize', 12, 'Fontweight', 'Bold');
plot(Y4(:,1), Y4(:,2), 'b', 'linewidth', 1.2);
legend('Terra', 'Lua', '(x_0,y_0)', 'Trajetória'); %Legenda do
```

gráfico

```
function dy = f(~, y)
%Função com a presença das equações que descrevem o problema.
ni = xxxxxxxx; % mM / (mE + mM)
rE = sqrt( (y(1) + ni).^2 + y(2).^2 );
rM = sqrt( (y(1) -1 + ni).^2 + y(2).^2 );
dy = zeros(4,1);
dy(1) = y(3);
dy(2) = y(4);
dy(3) = y(1) + 2*y(4) - (1-ni)*(y(1)+ni)./rE.^3 -
        ni*(y(1)-1+ni)./rM.^3;
dy(4) = y(2) - 2*y(3) - (1-ni)*y(2)./rE.^3 - ni*y(2)./rM.^3;
end
```

```
function [T, Y] = RK4(f, tspan, y0, n)
%Método de Runge-Kutta de quarta ordem
T = linspace( tspan(1), tspan(2), n);
h = T(2) - T(1);
Y = zeros(n, length(y0));
Y(1,:) = y0;
for k = 1 : n-1
k1 = f(T(k), Y(k,:));
k2 = f(T(k) + h/2, Y(k,:) + h/2*k1');
k3 = f(T(k) + h/2, Y(k,:) + h/2*k2');
k4 = f(T(k) + h, Y(k,:) + h*k3');
Y(k+1,:) = Y(k,:) + h/6*(k1' + 2*k2' + 2*k3' + k4');
end
end
```

```
function [b2] = drawcircle1(cx, cy)
%Função para desenhar círculos (Bola da esquerda)
b2 = plot(cx,cy,'.m','MarkerSize',35);
end
```

```
function [b2] = drawcircle2(cx, cy)
%Função para desenhar círculos (Bola da direita)
b2 = plot(cx,cy,'.g','MarkerSize',25);
end
```

```
function [value, isterminal, direction] = myevents(~, y)
%Função utilizada, para determinar o final da simulação
[value, ~] = cart2pol(y(1), y(2));
if y(1) > 0
    isterminal = 1;
else
    isterminal = 0;
end
direction = -1;
end
```