



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
Campus Parnaíba
Curso de Licenciatura em Física

Sandro Emerson da Silva Gomes

Introdução ao Cálculo Tensorial com Aplicações

Parnaíba – PI
2018

Sandro Emerson da Silva Gomes

Introdução ao Cálculo Tensorial com Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para a obtenção do diploma do Curso de Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus Parnaíba.

Orientador: Prof. M^e. Marcos Antonio Matos Souza

Parnaíba – PI

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Gomes , Sandro Emerson da Silva

G633i Introdução ao cálculo tensorial com aplicações / Sandro Emerson da Silva
Gomes . - 2018.
53 f.: il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Parnaíba Licenciatura em
Física, 2018.

Orientador : Prof Me. Marcos Antônio Matos Souza .

1. Cálculo tensorial . 2. Relatividade. 3. Eletromagnetismo. I.Título.

CDD - 530

Elaborado por Micheline Angélica Aragão Gouveia CRB 3/1244

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO TENSORIAL COM APLICAÇÕES

Sandro Emerson da Silva Gomes

Aprovado em 13 / 12 / 2018

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Física do IFPI/Campus Parnaíba, aprovado pela Banca Examinadora:

Marcos Antonio Matos Souza

Prof. Marcos Antonio Matos Souza - (Orientador) – Presidente-
IFPI/Campus Parnaíba

Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento

Prof. Me. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento - Examinador
IFPI/Campus Parnaíba

Gildario Wm L.

Prof. Dr. Gildario Dias Lima — Examinador

UFPI- campus Ministro Reis Velloso)

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a todos os meus professores e colegas por tudo que aprendi na graduação.

”Eu, um universo de átomos, um átomo no universo.”

– Richard Feynman –

Resumo

Este trabalho tem por objetivo desenvolver e aplicar técnicas do cálculo tensorial, que permitem escrever as equações da mecânica clássica e do eletromagnetismo, em regime relativístico, na forma covariante. Nos três capítulos iniciais, construímos a fundamentação teórica necessária ao nosso propósito, para, em seguida, aplicarmos nos dois capítulos seguintes, referentes à relatividade com enfoque na mecânica relativística e o eletromagnetismo, respectivamente.

Palavras-chave: Cálculo tensorial. Relatividade. Eletromagnetismo.

Abstract

This work aims to develop and apply techniques of tensor calculus that allow us to write the equations of classical mechanics and electromagnetism, in relativistic regime, in covariant form. In the first three chapters, we build the theoretical foundation necessary for our purpose, to next, apply in the two following chapters with respect to relativity with focus on relativistic mechanics and the electromagnetism, respectively.

Keywords: Tensor calculus. Relativity. Electromagnetism.

Sumário

Prólogo	1
1 Introdução	2
2 Conceitos Fundamentais	5
2.1 Espaços Duais	5
2.2 Componentes Covariantes e Contravariantes de um Vetor	6
2.3 Leis de Transformação Covariante e Contravariante	7
2.4 Tensores	10
3 Álgebra Tensorial	12
3.1 Operações Fundamentais	12
3.1.1 Adição de tensores	12
3.1.2 Multiplicação de tensores	13
3.1.3 Contração de tensores	14
3.1.4 Composição de tensores	14
3.2 Notação Indicial	15
4 Relatividade Restrita	18
4.1 Transformações de Lorentz	18
4.2 Quadrivetores e Operadores Direfenciais	21
4.2.1 Quadrivetores	21
4.2.2 Operadores Diferenciais	23
4.3 Dinâmica Relativística	24
4.3.1 Formalismo Newtoniano	24
4.3.2 Formalismo Lagrangiano	27
5 Eletromagnetismo	30
5.1 Quadricorrente e Quadripotencial	30
5.2 Tensor de Campo Eletromagnético e a Forma Covariante das Equações de Maxwell	32

6	Considerações Finais	36
	Referências	37
	Apêndice A – Transformações de Lorentz para E e B	38

Prólogo

O Cálculo Tensorial, como hoje é conhecido, foi originalmente chamado de *Cálculo Diferencial Absoluto* em um artigo intitulado “*Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*”, publicado no ano de 1900 no jornal acadêmico *Mathematische Annalen* pelos autores Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita. Esse ramo da Matemática veio logo a destacar-se na física teórica no começo do século XX. De forma resumida, o cálculo tensorial é a parte da matemática que lida com transformações gerais de coordenadas entre dois diferentes sistemas de referência, ao generalizar os conceitos de escalares, vetores e matrizes para entidades geométricas de mais alta ordem, com a incrivelmente útil propriedade de manterem-se invariantes após a transformação. Foi isso que chamou a atenção de Einstein para o cálculo diferencial absoluto, pois era justamente a linguagem que ele procurava para descrever fenômenos relativísticos, uma vez que, na Teoria da Relatividade, a natureza é estudada do ponto de vista de diversos sistemas de referência.

Não obstante o cálculo tensorial ter sido criado pelo matemático francês Ricci e seu pupilo Levi-Civita, outros nomes aparecem com bastante frequência, devido grandes contribuições à teoria, tal como é o caso de Bernhard Riemann, pelo desenvolvimento da Geometria Diferencial, e Elwin Bruno Christoffel, pelos famosos símbolos de Christoffel que aparecem nas expressões das derivadas covariantes de um vetor.

Neste trabalho, iremos, inicialmente, ver como estabelecer relações entre grandezas que passaram por uma transformação do sistema de coordenadas. Em seguida, essas relações de transformação serão generalizadas para um conjunto de quantidades, que, se as respeitarem, receberão a designação de *tensor*, para, posteriormente, serem manipuladas em equações com o propósito de torná-las gerais em qualquer sistema de referência. Feito isso, nos apropriaremos da notação compacta e da propriedade de transformação dos tensores para reescrevermos as leis de movimento da Mecânica Clássica e as equações de Maxwell da Eletrodinâmica no regime relativístico, de modo a corresponderem aos postulados da Relatividade. Em outras palavras, buscaremos a forma *covariante* das equações da mecânica clássica e da eletrodinâmica pois, toda lei física que atende aos postulados da Relatividade é dita ser covariante.

1 *Introdução*

O Cálculo Tensorial procura estabelecer uma linguagem matemática válida em qualquer sistema de coordenadas, e não em apenas um particular (BERMAN, 1987).

Tal como é postulado na Teoria da Relatividade de Einstein, as leis da Física devem valer para quaisquer que sejam os referenciais adotados. Esta ideia apresentada por Einstein, em particular, conduziu à necessidade da formulação de um ferramental matemático que pudesse permitir a passagem de uma lei física de um referencial para outro sem perda de generalidade.

Assim sendo, vamos começar nosso estudo analisando o efeito da mudança de variáveis sobre algumas entidades analíticas.

Consideremos n variáveis independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$, na qual denotaremos todas pela letra x , diferindo uma da outra apenas pelo índice. Suponha que podemos (e de fato podemos) aplicar uma transformação nessas coordenadas que nos leve a outro conjunto de coordenadas, denotadas por x'_i ($i=1,2,\dots,n$). É sabido também que a transformação utilizada é reversível, isto é, temos as duas expressões equivalentes

$$x_i = x_i(x') \quad (1.1)$$

$$x'_i = x'_i(x). \quad (1.2)$$

Para fixar as ideias, tomaremos $n=3$ e passaremos as coordenadas x, y, z do sistema cartesiano ortogonal, para três combinações genéricas e independentes de x, y, z (coordenadas curvilíneas, por exemplo) que chamaremos de q_1, q_2, q_3 . Agora, suponha que se tratando de uma questão física, ou geométrica, ou qualquer que seja o caso, nós tivermos de considerar não apenas as coordenadas x do sistema, mas um certo conjunto de entidades relacionadas a elas. Por exemplo, nosso sistema pode ter a ele associado um campo escalar, que pode ser uma distribuição de temperatura num determinado ambiente, ou um campo vetorial que possa representar um campo de forças existente numa dada região. Para ilustrarmos esses exemplos, vamos imaginar que de fato há uma função temperatura $T=T(x,y,z)$ definida em cada ponto de um sistema Cartesiano, ou um campo de forças existente numa dada região, sendo representado em cada ponto do referencial,

por um vetor. Daí fazemos a mudança de variáveis. Temos de encontrar alguma forma de expressar a mesma quantidade ou fenômeno físico. Para esse propósito, temos que introduzir certos parâmetros nas quantidades estudadas (mais adiante ficará claro do que se tratam esses parâmetros) que, no novo sistema de referências, possam tomar o lugar daqueles que eram mais adequados no antigo. Tais parâmetros são obtidos por meio de uma lei que não pode ser especificada *a priori* (uma certa quantidade pode se transformar de forma *invariante, covariante ou contravariante*), mas que depende do problema em questão e, em parte, de convenções adequadas (LEVI-CIVITA, 1927). Por exemplo, no novo sistema a temperatura T será uma função das coordenadas q_1, q_2, q_3 , no entanto, mudar o sistema de referência não irá alterar a temperatura de cada ponto do ambiente, isto é, as temperaturas pertencerão aos mesmos pontos do espaço, quer seja calculada no novo referencial ou no antigo. Consequentemente, T como função de q_i pode ser obtida pela simples substituição de x, y, z por seus valores como funções de q_1, q_2, q_3 . Esse tipo de comportamento, na qual é o mais simples considerado numa transformação, é chamado de *transformação por invariância* (LEVI-CIVITA, 1927). Todas as funções de posição que conservam seu valor independentemente do sistema de coordenadas escolhido se transformam dessa maneira.

Em contrapartida, com as componentes de um vetor, do outro exemplo citado, isso não acontece. Na verdade, a magnitude e a direção do vetor serão as mesmas qualquer que seja feita a escolha do referencial. Suas componentes, no entanto, mudam de sistema para outro; isso é bastante claro no caso de uma rotação simples, na qual o parâmetro utilizado na transformação é a bem conhecida matriz de rotação, mas, se a transformação não se tratar desse caso particular (podemos querer representar um vetor num sistema de eixos oblíquos ao invés de um ortogonal), não sabemos *a priori* como ficarão as componentes no novo referencial. O que devemos fazer é encontrar a lei de transformação para o caso em questão.

Vamos considerar que nosso vetor seja uma força (assim como no nosso exemplo). Para encontrarmos essa lei de transformação, podemos adotar como guia uma quantidade escalar relacionada ao nosso vetor que possua um significado físico e que se transforma por invariância. Já deve ter ficado claro que esse escalar se trata do trabalho realizado por essa força. Nesse caso, consideremos dois pontos infinitesimalmente próximos em nosso sistema Cartesiano, na qual as coordenadas diferem por dx, dy, dz . Então, o trabalho realizado por essa força, cujas componentes são F_x, F_y, F_z , passando de um ponto para o outro será

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (1.3)$$

essa quantidade possui um significado físico e é invariante, então, conseqüentemente, pode ser concretamente determinada no novo sistema. Fazendo a mudança para coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 , podemos achar os respectivos valores de dx , dy , dz , por meio da fórmula

$$dx = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i, \quad (1.4)$$

valendo o mesmo para, dy e dz .

O trabalho será dado então, por,

$$dW = \sum_{i=1}^3 (F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i}) dq_i, \quad (1.5)$$

na qual é análoga à fórmula 1.3. De fato, fazendo a substituição

$$F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1.6)$$

obtemos,

$$dW = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + Q_3 dq_3. \quad (1.7)$$

Aqui, as quantidades Q_i desempenham o mesmo papel que as projeções cartesianas F_i . Assim, parece adequado dizer que Q_i são as componentes da força no novo referencial. Com isso, podemos dizer que a fórmula

$$Q_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} F_i, \quad (1.8)$$

representa a lei de transformação das componentes de um vetor. Essa lei é conhecida como *covariância*.

Feito isso, definimos nosso propósito vendo que, dado um sistema de referência (que pode ser de qualquer tipo, tanto faz), a um conjunto de quantidades possuindo significados físicos, geométricos, etc, nós atribuímos uma lei de transformação por meio da qual um outro conjunto de quantidades, possuindo os mesmos significados, é associado ao outro sistema de referência (LEVI-CIVITA, 1927). Como chegar a essas quantidades associadas é o propósito do cálculo tensorial.

Dedicaremos o próximo capítulo à construção de uma descrição adequada das grandezas que sofrem uma transformação de coordenadas. Restringiremos nossa atenção, por enquanto, ao estudo das transformações das componentes de um vetor.

2 Conceitos Fundamentais

2.1 Espaços Duais

A concepção de vetores como entes geométricos é ampliada a uma extensa gama de funções, desde que o conjunto dessas funções forme um espaço vetorial (espaço linear) sobre um conjunto de escalares (SÁNCHEZ, 2010).

Funções com derivadas contínuas que atendem a determinados axiomas são assumidas como “vetores”, e todas as formulações e conceitos desenvolvidos para os vetores geométricos são aplicáveis a essas funções (SÁNCHEZ, 2010). Tendo em vista essas ideias básicas da Álgebra Linear, não devemos pensar sempre em um vetor como uma entidade puramente geométrica, não esquecendo que o mesmo pode ser visto como uma função (e vice-versa) com propriedades específicas.

Sabendo que podemos estabelecer relações funcionais a objetos geométricos, vamos agora, definir de forma breve e sucinta o conceito de *espaço dual*, que assume grande importância na análise tensorial.

Definição. Se V é um espaço vetorial de dimensão n formado pelos vetores de base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, então, associado a V , existe um espaço V^* , também de dimensão n , de base $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n\}$ denominado espaço dual de V , tal que, $\varepsilon^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$, onde, δ_j^i é a função delta de Kronecker.

A seguir, enunciaremos um teorema (conhecido como *Teorema da Representação*) que fornece uma operação na qual nos permite relacionar os vetores de V com os vetores de V^* .

Teorema. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita dotado de produto interno, então para todo vetor $\mathbf{f}$ de V^* existe um único vetor $\mathbf{a}$ de V , tal que, $\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b}$ é outro vetor de V .

O teorema acima nos diz que existe uma relação de correspondência unívoca entre os espaços V e V^* , ou seja, se para um dado elemento $\mathbf{f}$ de V^* existe um, e apenas um, elemento $\mathbf{a}$ de V associado a ele, então a aplicação de $\mathbf{f}$ em outro elemento de V resulta no produto interno desses dois elementos de V .

As definições acima exibidas podem ser encontradas no capítulo dois da obra “*Linear Algebra and Its Applications*”, de Peter Lax.

Com essas definições, podemos avançar no nosso estudo das transformações das componentes de um vetor sob uma mudança de coordenadas.

2.2 Componentes Covariantes e Contravariantes de um Vetor

Consideremos um espaço vetorial V de dimensão n e $\mathbf{e}_j = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base desse espaço, que chamaremos de *base natural*. Todo vetor $\mathbf{a}$ pertencente a V pode ser representado na base indicada

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n a^j \mathbf{e}_j = a^j \mathbf{e}_j, \quad (2.1)$$

em que a^j são as componentes do vetor $\mathbf{a}$ nessa base. Repare que as componentes aparecem com um índice sobrescrito, enquanto que os vetores de base natural aparecem com um índice subscrito. Por razões que serão esclarecidas mais tarde, esta escolha não é aleatória e deve ser mantida.

Como já foi dito, existe um espaço dual V^* associado a V formado pela base $\varepsilon_i = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, na qual $\varepsilon^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$. Com esta definição podemos ver que as funções lineares ε^i nos dão as componentes de um vetor de V

$$\varepsilon^i(\mathbf{a}) = \varepsilon^i(a^j \mathbf{e}_j) = a^j \varepsilon^i(\mathbf{e}_j) = a^j \delta_j^i = a^i. \quad (2.2)$$

Qualquer função $\mathbf{v}^*$ que pertença a V^* , caracterizada por $\mathbf{v}^*(\mathbf{e}_j) = v_j^*$ pode ser escrita na base ε^i : $\mathbf{v}^* = v_i^* \varepsilon^i$.

Como já se referiu, esses espaços apresentam a mesmas propriedades e, através do produto interno, podemos identificar cada função $\mathbf{v}^*$ de V^* com um vetor $\mathbf{v}$ do espaço V

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \quad (2.3)$$

deste modo, passamos apenas a trabalhar no espaço V , ao representar cada vetor $\mathbf{v}^*$ pelo seu correspondente $\mathbf{v}$. Para que ambos os vetores tenham as mesmas componentes,

¹Por simplicidade de notação, sempre utilizaremos a convenção de Einstein para somatórios, isto é, índices repetidos sempre implicam soma e, assim, omitiremos o símbolo de soma.

define-se uma nova base em V , $\mathbf{e}^i = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n\}$ denominada *base dual* de V

$$\mathbf{v}^* = v_i^* \varepsilon^i = v_i \varepsilon^i, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i. \quad (2.5)$$

Contudo, o vetor $\mathbf{v}$ continua a poder ser definido na base natural $\mathbf{e}_i$ por $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$. Em particular

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{e}_j) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow v_i \varepsilon^i(\mathbf{e}_j) = v_i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i. \quad (2.6)$$

Esta última equação exprime uma regra fundamental da análise tensorial uma vez que relaciona as duas bases (natural e dual) de qualquer referencial:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i. \quad (2.7)$$

A partir deste momento, as componentes de cada vetor serão designadas conforme a base a que digam respeito:

v^i - *componentes contravariantes* de $\mathbf{v}$ (representado por um vetor coluna);

v_i - *componentes covariantes* de $\mathbf{v}$ (representado por um vetor linha).

Os índices das componentes são representados por *índices covariantes* ou *índices contravariantes* consoante as componentes sejam covariantes ou contravariantes respectivamente. Os índices contravariantes encontram-se sempre representados em sobrescrito, enquanto que os índices covariantes são representados sempre em subscrito.

2.3 Leis de Transformação Covariante e Contravariante

Suponha que queiramos passar as variáveis $x^1, x^2, \dots, x^n$ de um sistema de coordenadas arbitrário para as variáveis $x'^1, x'^2, \dots, x'^n$ de um novo sistema de coordenadas. A relação entre os dois referenciais é dada pelas expressões equivalentes

$$x'^i = x'^i(x^j) \quad (2.8)$$

$$x^j = x^j(x'^i), \quad (2.9)$$

diferenciando ambos os lados da equação 2.8 (podemos fazer o mesmo com 2.9 que chegaremos no mesmo resultado), obtemos

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad (2.10)$$

esta igualdade expressa a *lei de transformação contravariante* de um sistema.

Para ficar mais claro, vamos tomar $n=3$ e fazer uma mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas, isto é, as variáveis $\{r, \theta, \varphi\} = \{x'^1, x'^2, x'^3\}$ tomarão o lugar de $\{x, y, z\} = \{x^1, x^2, x^3\}$. Note que estamos representando as coordenadas do novo sistema por x'^i (variáveis com linha) enquanto que as coordenadas no antigo sistema são representadas por x^i (variáveis sem linha), esta é uma convenção geral. Consideremos agora um vetor deslocamento $d\mathbf{r}$ ligando dois pontos infinitesimalmente próximos, com coordenadas cartesianas diferindo por dx, dy, dz . Podemos escrever esse vetor da seguinte maneira

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3 = dx^i\mathbf{e}_i, \quad (2.11)$$

mas, a diferencial dr é dada por

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz = \frac{\partial r}{\partial x^i}dx^i, \quad (2.12)$$

então, teremos que

$$\frac{\partial r}{\partial x^i}dx^i\mathbf{e}_r = dx^i\mathbf{e}_i \quad \therefore \quad \mathbf{e}_r = \frac{\partial x^i}{\partial r}\mathbf{e}_i. \quad (2.13)$$

O mesmo raciocínio pode ser adotado para a representação dos versores $d\vec{\theta} = d\theta\mathbf{e}_\theta$ e $d\vec{\varphi} = d\varphi\mathbf{e}_\varphi$:

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x^i}{\partial \theta}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial x^i}{\partial \varphi}\mathbf{e}_i, \quad (2.14)$$

de uma maneira geral,

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\mathbf{e}_j, \quad (2.15)$$

esta é a lei de transformação dos vetores de *base natural* de um sistema. Considerando que qualquer vetor pode ser escrito no referencial antigo ou no novo, temos que

$$\begin{aligned} v'^i\mathbf{e}'_i &= v^j\mathbf{e}_j \Rightarrow v'^i\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\mathbf{e}_j = v^j\mathbf{e}_j \Rightarrow v'^i\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = v^j \\ \therefore v'^i &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}v^j, \end{aligned} \quad (2.16)$$

esta é a *lei de transformação das componentes contravariantes* de um vetor. Note que esta equação é análoga a 2.10. O motivo pelo qual chamamos v^i de componentes contravariantes se dá pelo fato de que elas se *transformam de forma contrária* aos vetores de

base natural. Comparando as equações 2.15 e 2.16, vemos que, de fato $\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right) = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)^{-1}$, onde devemos considerar $\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right)$ como a matriz de transformação do sistema. É fácil identificar que o determinante dessa matriz nada mais é que o *Jacobiano* (J) do sistema

$$\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right| = J, \quad \left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right| = J^{-1}. \quad (2.17)$$

Note também que, de fato, os índices de cima são índices “linha” e os índices de baixo são índices “coluna”.

Contudo, já encontramos um tipo ligeiramente diferente de transformação vetorial. O vetor gradiente de uma função escalar φ , definido por

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\mathbf{e}_3, \quad (2.18)$$

se transforma em,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \quad (2.19)$$

pois $\varphi = \varphi(x^j)$ e $x^j = x^j(x'^i)$. Se tivéssemos feito $\varphi = \varphi(x'^i)$, onde $x'^i = x'^i(x^j)$, chegaríamos no mesmo resultado encontrado acima, verificando, explicitamente, que $\varphi(x^j) = \varphi(x'^i)$ é um invariante. A equação 2.20 é tomada como a definição de um *vetor covariante*, pois, se $\frac{\partial\varphi}{\partial x'^i}$ é a i -ésima componente do vetor gradiente no novo referencial e $\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}$ é a j -ésima componente do vetor gradiente no antigo referencial, podemos generalizar a igualdade acima para um vetor qualquer, isto é,

$$v'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} v_j, \quad (2.20)$$

na qual exprime a *lei de transformação covariante* de um vetor.

Uma forma alternativa de chegar à expressão acima é dada pelo produto interno de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, que produz um invariante, ou seja,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i v_i = u'^j v'_j, \quad \text{mas} \quad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} u'^j, \quad (2.21)$$

então,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} u'^j v_i = u'^j v'_j \quad \Rightarrow \quad v'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} v_i, \quad (2.22)$$

ou,

$$v'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} v_j, \quad (2.23)$$

que é análogo a 2.20.

Já vimos como as componentes contravariantes e covariantes de um vetor se transformam, e como os vetores da base natural se transformam. Resta-nos agora, ver como os vetores da base dual se transformam. Da identidade $v'_i \mathbf{e}^i = v_j \mathbf{e}^j$, temos

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} v_j \mathbf{e}^i = v_j \mathbf{e}^j \quad \therefore \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j, \quad (2.24)$$

na qual fornece a lei de transformação dos elementos da base dual. Note que as componentes contravariantes de um vetor se transformam da mesma maneira que os elementos da base dual. Comparando as equações 2.15 e 2.20 vemos que as componentes covariantes se transformam da mesma maneira que os elementos da base natural do sistema, daí se justifica o nome covariante.

Com base nessa discussão, podemos chegar à seguinte definição:

Definição. Componentes covariantes tem a mesma lei de transformação que os vetores de base natural $\mathbf{e}_i$.

Componentes contravariantes tem a mesma lei de transformação dos vetores de base dual $\mathbf{e}^i$.

2.4 Tensores

Até agora, limitamos nossa discussão ao estudo das transformações das componentes de um vetor, que se trata de uma quantidade matemática de 3^1 componentes (se estiver num referencial tridimensional). Na verdade, as leis de transformação covariante e contravariante não se restringem apenas a vetores. De um modo geral, podemos dizer que todas as entidades matemáticas com que trabalhamos, caracterizada por uma multiplicidade num dado sistema de coordenadas, terão de obedecer a uma lei geral de transformação (LEVI-CIVITA, 1927)

$$T^{i_1, i_2, \dots, i_k}_{j_1, j_2, \dots, j_l} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{m_1}} \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{m_2}} \cdots \frac{\partial x'^{i_k}}{\partial x^{m_k}} \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{n_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{n_l}}{\partial x'^{j_l}} T^{m_1, m_2, \dots, m_k}_{n_1, n_2, \dots, n_l}. \quad (2.25)$$

A essas entidades nos referimos como *tensores*, e a lei geral expressa acima é conhecida por *lei de transformação tensorial*. Um tensor de ordem p (com $p = k + l$, no nosso caso) fica definido por uma função multilinear com n^p componentes num espaço de dimensão n , onde p representa sua ordem, que se mantém invariante se ocorrer uma mudança do sistema de referência (SÁNCHEZ, 2010). No caso em que $p = 0$, o tensor é dito de ordem

0 e é conhecido como escalar; para $p = 1$ o tensor é de ordem 1 e é caracterizado por um vetor e, para $p = 2$ temos uma matriz. Para $p \geq 3$ não há um objeto matemático comumente associado; dizemos se tratar apenas de um tensor, e assim por diante. Quanto a *variância*, um tensor pode ser covariante, contravariante ou misto dependendo de como esteja organizado seus índices:

- $T^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ - tensor contravariante de ordem k ;
- $T_{j_1, j_2, \dots, j_l}$ - tensor covariante de ordem l ;
- $T^{i_1, i_2, \dots, i_k}_{j_1, j_2, \dots, j_l}$ - tensor misto de ordem $k + l$.

Um tensor de segunda ordem A^{ij} é *simétrico* se seu transposto for igual a ele mesmo, isto é

$$A^{ij} = A^{ji}. \quad (2.26)$$

Analogamente, um tensor de segunda ordem *antissimétrico* tem seu transposto igual ao seu valor oposto

$$A^{ij} = -A^{ji}. \quad (2.27)$$

3 Álgebra Tensorial

No capítulo passado vimos que um tensor pode ser definido como qualquer quantidade matemática que se transforma de acordo com a equação 2.25. Acerca do que foi visto em relação às transformações tensoriais, Tullio Levi-Civita define quatro operações que caracterizam a *álgebra tensorial*.

Além dessas operações, veremos como escrever de forma compacta, utilizando a *notação indicial*, assim como a convenção de Einstein para somatórios, algumas expressões envolvendo o operador diferencial ∇ .

3.1 Operações Fundamentais

3.1.1 Adição de tensores

Está claro que não podemos dar qualquer significado tensorial a uma expressão do tipo $A^{ij} + B^i$, pois ela não satisfaz à lei de transformação dada em 2.25 (SPAIN, 2003). No entanto, uma soma tensorial é bem definida se os elementos em questão for tensores do mesmo tipo (isto é, que sejam de mesma ordem e tenham o mesmo número de índices covariantes e contravariantes), por exemplo, consideremos os tensores mistos genéricos de ordem n

$$A_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n} \quad e \quad B_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n}, \quad (3.1)$$

ao somarmos, teremos como resultado um tensor do mesmo tipo, ou seja

$$A_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n} + B_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n} = C_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n}. \quad (3.2)$$

Para verificarmos essa igualdade, vamos considerar o caso particular em que os tensores envolvidos são de ordem 2. Nossa hipótese será, então, considerar duas funções escalares ϕ e ψ , tais que

$$\phi = A_j^i x_i x^j \quad e \quad \psi = B_j^i x_i x^j. \quad (3.3)$$

A soma desses escalares ainda será um escalar, de modo que

$$\phi + \psi = (A_j^i + B_j^i)x_i x^j = C_j^i x_i x^j, \quad (3.4)$$

com

$$C_j^i = A_j^i + B_j^i. \quad (3.5)$$

De um modo geral, qualquer combinação linear de tensores do mesmo tipo produz um tensor do mesmo tipo (SPAIN, 2003).

3.1.2 Multiplicação de tensores

Diferentemente da adição, a multiplicação tensorial, também chamada de *produto externo*, pode acontecer com tensores de qualquer tipo (LEVI-CIVITA, 1927). Se considerarmos o tensor $A_{j_1, \dots, j_m}^{i_1, \dots, i_n}$ com n índices contravariantes e m índices covariantes, e o tensor $B_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$, com r índices contravariantes e s índices covariantes, o tensor resultante da multiplicação de $A_{j_1, \dots, j_m}^{i_1, \dots, i_n}$ com $B_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$ terá $n+r$ índices contravariantes e $m+s$ índices covariantes e de ordem igual à soma da ordem dos tensores que foram multiplicados (LEVI-CIVITA, 1927), isto é,

$$A_{j_1, \dots, j_m}^{i_1, \dots, i_n} B_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} = C_{j_1, \dots, j_m, l_1, \dots, l_s}^{i_1, \dots, i_n, k_1, \dots, k_r}. \quad (3.6)$$

Novamente, podemos verificar a igualdade acima considerando duas funções escalares para o caso particular de tensores de 2ª ordem:

$$\phi = A_j^i x_i x^j \quad e \quad \psi = B_l^k x_k x^l. \quad (3.7)$$

O produto de dois invariantes resultará num invariante:

$$\phi\psi = A_j^i B_l^k x_i x^j x_k x^l = C_{jl}^{ik} x_i x^j x_k x^l, \quad (3.8)$$

assim,

$$A_j^i B_l^k = C_{jl}^{ik}, \quad (3.9)$$

pois, para que o produto em 3.8 continue sendo um escalar, o tensor resultante deve ter os índices correspondentes aos das respectivas coordenadas (x), para que a soma seja efetuada. Esse argumento se justifica para o caso geral em que os tensores são de ordem qualquer (LEVI-CIVITA, 1927).

3.1.3 Contração de tensores

Fazemos a contração de um tensor misto qualquer igualando um índice covariante a um índice contravariante e, então, realizamos a soma sobre aquele índice, formando, assim, um tensor de duas ordens mais baixa que a do tensor original (LEVI-CIVITA, 1927). Por exemplo, se considerarmos um tensor genérico de 4ª ordem A_{kl}^{ij} e, se igualarmos os índices j e l , teremos um tensor de 2ª ordem

$$A_{kl}^{ij} \rightarrow A_{kj}^{ij} = A_k^i. \quad (3.10)$$

Podemos verificar esta operação através da lei de transformação tensorial 2.25

$$A_{kl}^{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x^n}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} A_{mn}^{rs}, \quad (3.11)$$

se igualamos os índices j e l , obtemos

$$\begin{aligned} A_{kj}^{ij} &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} A_{mn}^{rs} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} A_{mn}^{rs} = \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \delta_s^n A_{mn}^{rs} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} A_{mn}^{rn} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} A_m^r = A_k^i, \end{aligned} \quad (3.12)$$

portanto,

$$A_{kj}^{ij} = A_k^i. \quad (3.13)$$

3.1.4 Composição de tensores

Se combinarmos as operações de multiplicação e contração de tensores, nós obtemos a operação conhecida como *composição* ou *multiplicação interna* de dois tensores (LEVI-CIVITA, 1927).

Para exemplificar, consideremos os tensores A_{ir}^h e B_j^{ks} . Se compormos os tensores em relação aos índices r e s , obteremos o tensor C_{ij}^{hk} , na qual primeiro fazemos a multiplicação

$$A_{ir}^h B_j^{ks} = C_{irj}^{hks}, \quad (3.14)$$

e depois contraímos os índices r e s

$$C_{irj}^{hks} \rightarrow C_{isj}^{hks} = C_{ij}^{hk}. \quad (3.15)$$

A volta também vale, isto é, primeiro podemos contrair e depois multiplicar

$$C_{ij}^{hk} = A_{is}^h B_j^{ks}. \quad (3.16)$$

3.2 Notação Indicial

Às vezes, quando trabalhamos com equações que envolvem operadores vetoriais, podemos simplificar a notação utilizando a convenção de Einstein para somatórios na representação de um vetor, podendo compactar a equação de modo que facilite seu desenvolvimento. A notação indicial é especialmente (e amplamente) utilizada em equações da área do eletromagnetismo, que fazem muito uso do operador *nabla* ∇ na formulação de suas equações. Vamos ver agora como podemos representar todas as operações que envolvem esse vetor, de forma compacta, em coordenadas Cartesianas.

Começamos com a representação do próprio operador nabla. Sabemos que ele é definido da seguinte maneira:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (3.17)$$

podendo ser colocado na forma de somatório

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,^2 \quad (3.18)$$

assim, a *i*-ésima componente de ∇ será

$$(\nabla)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i, \quad (3.19)$$

onde frequentemente a definição

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i, \quad (3.20)$$

é utilizada para compactar ainda mais a notação.

Com essa representação do operador nabla, podemos reescrever as expressões que decorrem de sua operação.

1) GRADIENTE DE UMA FUNÇÃO ESCALAR

Se ϕ é uma função escalar, então

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \partial_i \phi \mathbf{e}_i, \quad (3.21)$$

²Nesta seção, como estamos trabalhando em coordenadas Cartesianas, usaremos apenas índices subscritos pois, somente em referenciais Cartesianos as componentes covariantes e contravariantes de um vetor se confundem.

e a i -ésima componente fica

$$(\nabla\phi)_i = \partial_i\phi. \quad (3.22)$$

2) DIVERGÊNCIA DE UMA FUNÇÃO VETORIAL

Se $\mathbf{A}$ é uma função vetorial, então

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_i A_i. \quad (3.23)$$

3) ROTACIONAL DE UMA FUNÇÃO VETORIAL

Sabendo que o rotacional de um campo vetorial é dado pela expressão

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z, \quad (3.24)$$

temos

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \mathbf{e}_1 + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) \mathbf{e}_2 + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \mathbf{e}_3 = \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \mathbf{e}_k, \quad (3.25)$$

onde ε_{ijk} é um *pseudotensor* de 3ª ordem conhecido como *símbolo de Levi-Civita* ou *tensor de permutação* (apesar de ser um pseudotensor), definido como

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{para permutações pares de } i, j, k, \\ 0, & \text{para índices repetidos,} \\ -1, & \text{para permutações ímpares de } i, j, k. \end{cases} \quad (3.26)$$

4) LAPLACIANO DE UMA FUNÇÃO ESCALAR

O laplaciano de ϕ , com ϕ sendo uma função escalar, é dado por

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = (\partial_i \mathbf{e}_i) \cdot (\partial_i \phi \mathbf{e}_i) = \partial_i \partial_i \phi (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = \partial_i \partial_i \phi. \quad (3.27)$$

5) LAPLACIANO DE UMA FUNÇÃO VETORIAL

O laplaciano de $\mathbf{A}$ se assemelha ao laplaciano de ϕ , no entanto, note que o laplaciano de uma função escalar produz um escalar; no caso de uma função vetorial, o laplaciano de $\mathbf{A}$ produzirá um vetor cujo componente x será o laplaciano de A_x , e assim por diante

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{e}_x + (\nabla^2 A_y) \mathbf{e}_y + (\nabla^2 A_z) \mathbf{e}_z = \partial_i \partial_i A_j \mathbf{e}_j, \quad (3.28)$$

e suas componentes se escrevem

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_i = \partial_i \partial_i A_j. \quad (3.29)$$

Com isso, definimos de forma compacta as operações que se efetuam com o operador diferencial ∇ .

4 *Relatividade Restrita*

Neste capítulo, voltaremos nossa atenção para o estudo da mecânica relativística, relembrando alguns conceitos básicos da teoria da relatividade especial. Em seguida, apresentamos uma reformulação de algumas grandezas cinemáticas e dinâmicas que compõem as leis que descrevem o movimento de uma partícula em regime relativístico, a fim de obtermos a forma covariante dessas equações.

4.1 Transformações de Lorentz

Seja S um referencial inercial e S' outro referencial inercial que se move em relação a S com velocidade constante v , na direção x , próxima da velocidade da luz. Assim, a coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , atribuídas a um mesmo evento por observadores situados nos respectivos referenciais, estão relacionadas da seguinte maneira

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde γ e β são, respectivamente

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (4.2)$$

Uma das consequências dos postulados da relatividade é a de que intervalos de espaço e intervalos de tempo não são individualmente invariantes. Por exemplo, na mecânica em regime não relativístico - onde valem as transformações galileanas - o comprimento de um objeto em movimento parece ser igual para todos os observadores em diferentes referenciais inerciais, valendo o mesmo para a contagem do tempo. Dizemos então que, $\Delta x' = \Delta x$ e $\Delta t' = \Delta t$ são *invariantes* por transformações de Galileu. No entanto, como sugerem as transformações de Lorentz, $\Delta x' \neq \Delta x$ e $\Delta t' \neq \Delta t$, isto é, variações individuais de espaço

e tempo não são invariantes no regime de altas velocidades. Por isso, para que diferentes observadores em diferentes referenciais, movendo-se uns em relação aos outros, percebam a luz se propagando sempre com a mesma velocidade, o espaço e o tempo se ajustam de modo a fazer valer os postulados da relatividade. Apesar disso, existe uma grandeza que, sob uma transformação de Lorentz, permanece inalterada. Para ilustrarmos, consideremos novamente os referenciais S e S' de anteriormente. Se no instante $t = 0$ um pulso de luz é emitido da origem coincidente dos dois referenciais, então um observador em S verá um pulso esférico se propagando de acordo com a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (4.3)$$

onde ct é o raio da esfera luminosa. Da mesma forma, o observador de S' verá o pulso

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (4.4)$$

Passando a parte espacial para o segundo membro e igualando as duas equações, obtemos

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (4.5)$$

A igualdade acima pode ser facilmente verificada aplicando-se as transformações de Lorentz no primeiro membro. Essa grandeza que não se altera por uma transformação de Lorentz é chamada de *intervalo invariante*, e seu quadrado é dado por

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (4.6)$$

De maneira análoga, o intervalo ds entre dois eventos infinitesimalmente próximos, separados espacialmente e temporalmente pelas coordenadas (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, é dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (4.7)$$

Note que ds não se trata de uma variação no espaço euclidiano tridimensional, nem de uma variação temporal do tempo absoluto de Newton, mas sim de uma mudança no que chamamos de *espaço-tempo*, como é definido na relatividade. Essa particular combinação de espaço com tempo leva à sugestão de se considerar o fator ct como uma quarta coordenada - a coordenada temporal - do espaço-tempo, conhecido também como *espaço-tempo de Minkowski*, usualmente denotado com a seguinte métrica

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (4.8)$$

na qual ds^2 terá a seguinte forma

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu,^3 \quad (4.9)$$

e as transformações de Lorentz serão dadas por

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (4.10)$$

onde $\Lambda^\mu_\nu x^\nu$ é um tensor de segunda ordem que fornece as entradas da matriz de transformação

$$[\Lambda] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

No espaço-tempo de Minkowski, as transformações de Lorentz assumem a forma

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad (4.12)$$

Assim, a forma mais geral das transformações acima é dada em 4.10.

Outra quantidade invariante por mudanças de referencial inercial, que desempenha importante papel na teoria da relatividade é o *tempo próprio*. O intervalo de tempo próprio $d\tau$ é definido como o intervalo de tempo medido no sistema de referência em que a partícula encontra-se instantaneamente em repouso (LEMOS, 2013). Assim, um observador situado no referencial inercial S, estudando uma partícula em repouso no referencial inercial S' que se move relação a S com velocidade constante v , percebe uma variação do espaço-tempo dada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} = c^2 dt^2 - \mathbf{v} dt \cdot \mathbf{v} dt = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (4.13)$$

Do ponto de vista de S', a variação espaço temporal será

$$ds'^2 = c^2 d\tau^2, \quad (4.14)$$

³Por convenção, sempre utilizaremos índices gregos variando de 0 a 3 quando estivermos nos referindo ao espaço-tempo de Minkowski.

pois, no intervalo de tempo $d\tau$ a partícula permaneceu imóvel. Igualando ds'^2 com ds^2 , concluímos que

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}. \quad (4.15)$$

Note, a partir de 4.14, que $d\tau$ é de fato um *escalar*⁵, pois ds'^2 e c também são escalares.

O conceito de tempo próprio desempenha importante papel na teoria da relatividade, pois a formulação covariante da mecânica exige a substituição de antigos parâmetros dependentes do que antes era considerado como absoluto, t , por novos parâmetros dependentes do tempo próprio τ , uma vez que, no regime relativístico, t deixa de ser um escalar e, variações de grandezas com respeito a t produzirão quantidades que não irão satisfazer a condição 4.10.

4.2 Quadrivetores e Operadores Direfenciais

4.2.1 Quadrivetores

Um dos postulados da relatividade afirma que as leis da física tem a mesma forma em todos os referenciais inerciais. A fim de fazer valer esse princípio, a expressão matemática das leis físicas devem envolver somente quantidades com regras de transformação bem definidas quando se passa de um referencial inercial para outro (LEMOS, 2013). Como já foi mencionado, um escalar no contexto da relatividade é uma quantidade invariante sob transformações de Lorentz. O análogo dos vetores tridimensionais, para o espaço quadridimensional, são os *quadrivetores* ou *4-vetor*, que são quantidades de quatro componentes que se transformam da mesma forma que as coordenadas x^μ , dadas pela regra de transformação 4.10.

Os quadrivetores, por serem vetores no espaço-tempo de Minkowski, e por serem designados para desempenhar o papel de tornar as equações das leis físicas covariantes, são considerados tensores de primeira ordem num espaço quadridimensional. Um quadrivetor genérico contravariante é dado por

$$V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3), \quad (4.16)$$

cuja lei de transformação já foi mencionada. Um quadrivetor covariante é dado por

$$V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3), \quad (4.17)$$

na qual se transforma de maneira contrária à lei de transformação contravariante:

⁵Um escalar no contexto da Relatividade se refere a um *invariante de Lorentz*

$$V'_\mu = \Lambda'_\mu V_\nu. \quad (4.18)$$

A diferença entre um quadrivetor contravariante e um covariante é bastante sutil. A diferença reside apenas no fato de que suas componentes espaciais possuem o sinal trocado:

$$V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3) = (V^0, -V^1, -V^2, -V^3). \quad (4.19)$$

A razão disso está na forma de como definimos a métrica do espaço de Minkowski. Lembre-se de que o quadrado do intervalo invariante foi definido como uma quantidade que não sofre alterações por transformações de Lorentz, dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (4.20)$$

ou

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (4.21)$$

de modo que o produto escalar entre dois quadrivetores de posição $dx^\mu dx_\mu$, deve manter a invariância de ds^2 , isto é,

$$dx^\mu dx_\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)(dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) = ds^2. \quad (4.22)$$

Isto implica que

$$dx^0 dx_0 = c^2 dt^2, \quad dx^1 dx_1 = -(dx^1)^2, \quad dx^2 dx_2 = -(dx^2)^2, \quad dx^3 dx_3 = -(dx^3)^2, \quad (4.23)$$

e isso será verdade se

$$dx_0 = dx^0, \quad dx_1 = -dx^1, \quad dx_2 = -dx^2, \quad dx_3 = -dx^3, \quad (4.24)$$

ou seja, dx_μ só difere de dx^μ pelo sinal das componentes da parte espacial. Esta é uma característica dos quadrivetores considerada como condição necessária para valer as transformações de Lorentz ao mudarmos de referencial inercial. Na verdade, existe outra forma de definir o intervalo invariante, pois a quantidade

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.25)$$

também não sofre alterações por uma transformação de Lorentz. Não há nada que nos

impeça de trabalhar com a igualdade acima, caso desejássemos. O que devemos garantir é que a parte temporal tenha o sinal oposto ao da parte espacial; essa oposição de sinais é uma característica intrínseca da teoria da relatividade, no entanto, a escolha do sinal positivo para o termo $(cdt)^2$ é arbitrária (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002). Alguns autores preferem definir ds^2 como na equação 4.25, por isso, para evitar ambiguidade, é importante que o leitor preste atenção na convenção adotada, pois, nos casos em que ds^2 aparece como em 4.25, a diferença entre um quadri vetor contravariante e um covariante estará na troca de sinais da parte temporal, ao invés da espacial. A nossa escolha feita aqui para os sinais da parte temporal e espacial é tal que, para corpos em velocidade não relativística, o intervalo espaço temporal adota um valor real e positivo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \Rightarrow ds = cdt > 0, \quad (4.26)$$

onde $\frac{dr}{dt}$ é a velocidade da partícula, considerada muito menor que a velocidade da luz.

4.2.2 Operadores Diferenciais

As derivadas em relação às coordenadas do espaço-tempo tem propriedades independentes das funções sobre as quais atuam (LEMOS, 2013). O operador *nabla quadridimensional*, também conhecido como *quadrigradiante*, pode aparecer de duas formas

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (4.27)$$

A versão covariante ∂_μ é definida como a derivada com respeito às coordenadas contravariantes de um quadri vetor posição. Parece estranho, mas note que, se considerarmos a transformação de x^μ

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} x^\lambda, \quad (4.28)$$

podemos relacionar as coordenadas do referencial antigo com o novo, por meio da fórmula

$$x^\lambda = x^\lambda(x'^\mu), \quad (4.29)$$

assim, a derivada com respeito a x'^μ será

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \quad (4.30)$$

mas, $\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu$, daí

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}. \quad (4.31)$$

Mostrando que a derivada com respeito a uma coordenada contravariante se transforma de modo covariante, justificando o índice subscrito de $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. Analogamente, a derivada com respeito a uma coordenada covariante se transforma de modo contravariante. Daí, chegamos às leis de transformação do quadrigradiente:

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}, \quad \partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \partial^{\nu}. \quad (4.32)$$

No espaço-tempo de Minkowski, as coordenadas do quadrigradiente são

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} &= (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \\ \partial^{\mu} &= (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

de modo que o produto escalar $\partial_{\mu} \partial^{\mu}$ nos fornece outro invariante de Lorentz

$$\square \equiv \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} - \nabla^2, \quad (4.34)$$

onde $\square$ é o operador de d'Alembert, conhecido também como d'Alembertian, o análogo quadridimensional do laplaciano.

Alguns tensores podem ter sua ordem aumentada por diferenciação. Por exemplo, se ϕ é um escalar, então

$$\partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi = \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \text{tensor de segunda ordem}.$$

Se $T^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, então

$$\partial_{\lambda} T^{\mu\nu} = \text{tensor de terceira ordem}.$$

Se houver contração dos índices, por diferenciação pode-se reduzir a ordem do tensor

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = \text{tensor de primeira ordem}.$$

Em particular, a aplicação do operador $\square$ em um tensor, não altera sua ordem.

4.3 Dinâmica Relativística

4.3.1 Formalismo Newtoniano

Sabemos que na mecânica clássica, no formalismo newtoniano, a equação que rege o movimento das partículas é dada pela segunda lei de Newton

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (4.35)$$

Sob uma transformação de Galileu, esta equação preserva sua invariância uma vez que a aceleração permanece imutável ao passar de um referencial inercial para outro. No entanto, é evidente que a equação 4.35, como foi dada acima, não preserva sua forma sob transformações de Lorentz. A fim de obtermos a formulação covariante desta equação de movimento, precisamos substituir alguns parâmetros cinemáticos e dinâmicos por seus correspondentes na relatividade especial.

Para obtermos a versão quadridimensional da segunda lei de Newton, comecemos procurando definir a *quadrivelocidade*. Estamos bastante habituados a pensar na velocidade como a taxa de variação temporal da posição de um móvel. Poderíamos então supor que a quadrivelocidade seria a variação temporal do quadrivetor posição

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (4.36)$$

onde U^μ é a quadrivelocidade. A definição acima está incorreta pois dt não é um invariante individualmente, afetando a forma como U^μ deve se transformar ao passar de um referencial para outro. No entanto, já definimos uma grandeza invariante com dimensão de tempo: o tempo próprio τ . Assim, ao dividirmos um quadrivetor por um invariante, obteremos outro quadrivetor. Com isso, a quantidade U^μ fica definida por

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (4.37)$$

com $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$. Lembrando que o tempo próprio é o tempo sentido por uma partícula no referencial em que ela se encontra. Para evitarmos ambiguidade, deixaremos claro que o fator γ que aparece na definição de tempo próprio não necessariamente precisa ser constante. Observemos que a partícula estudada no referencial que se move, pode ter um movimento arbitrário, inclusive acelerado. O que se exige é que o referencial em relação ao qual o movimento é descrito seja inercial. Assim, dt pode ser uma função de t se a partícula realiza um movimento arbitrário, ou pode ser constante se permanece em repouso no seu referencial. Estaremos aqui, considerando que, um observador num sistema de referência S , observa uma partícula descrevendo uma trajetória qualquer num referencial em movimento S' . Daí, se $\mathbf{u}$ é a velocidade da partícula do ponto de vista de S , seu tempo próprio será

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt. \quad (4.38)$$

Da equação 4.37, podemos encontrar as componentes da quadri-velocidade

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \quad \Rightarrow \quad U^0 = \gamma c. \quad (4.39)$$

Fazendo o mesmo para as componentes espaciais, obtemos

$$U^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{u}), \quad (4.40)$$

onde $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é a velocidade tridimensional da partícula.

Analogamente, a *quadriaceleração* é o quadri-vetor definido por

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}, \quad (4.41)$$

cuja componente temporal é dada por

$$a^0 = \frac{dU^0}{d\tau} = \gamma c \frac{d\gamma}{dt} = \gamma c \frac{d}{dt} \left\{ \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{\gamma^4}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \quad (4.42)$$

onde $\mathbf{a}$ é a aceleração tridimensional da partícula. Fazendo o mesmo para as componentes espaciais, obtemos

$$a^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \frac{\gamma^4}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u} + \gamma^2 \mathbf{a} \right). \quad (4.43)$$

Por fim, o *quadrimomento* de uma partícula é definido como

$$P^\mu = mU^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{u}). \quad (4.44)$$

Note que $\gamma m\mathbf{u} = \mathbf{p}$ é o momento relativístico da partícula, nos permitindo escrever

$$P^\mu = (\gamma mc, \mathbf{p}). \quad (4.45)$$

Considerando que a expressão da energia relativística para uma partícula, movendo-se à velocidade $\mathbf{u}$, é dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma mc^2, \quad (4.46)$$

podemos reescrever a componente temporal do quadrimomento

$$P^0 = \gamma mc = \frac{\gamma mc^2}{c} \quad \Rightarrow \quad P^0 = \frac{E}{c}, \quad (4.47)$$

daí, concluímos que

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (4.48)$$

é o quadrivetor que relaciona a energia e o momento linear de uma partícula. Assim, a conservação da energia e momento estará relacionada à conservação de uma só grandeza.

Agora que já obtivemos as grandezas quadridimensionais relacionadas à velocidade, aceleração e momento, estamos prontos para propor a versão covariante da segunda lei de Newton, que é dada por:

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu. \quad (4.49)$$

O quadrivetor F^μ é a *quadriforça*, cuja componente temporal é dada por

$$F^0 = \frac{dP^0}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} \quad \Rightarrow \quad F^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \quad (4.50)$$

onde $\mathbf{F} = \frac{m\dot{\mathbf{u}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ ¹ é a força relativística. As componentes espaciais são obtidas por

$$F^i = \gamma \frac{dp^i}{dt} = \gamma F^i, \quad (4.51)$$

portanto, as componentes da quadriforça serão

$$F^\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \gamma \mathbf{F} \right). \quad (4.52)$$

Com isso, a segunda lei de Newton fica bem definida no regime relativístico.

4.3.2 Formalismo Lagrangiano

Assim como foi feito com a dinâmica newtoniana, a dinâmica lagrangiana também pode ser ajustada aos novos parâmetros da relatividade, no entanto, veremos que a lagrangiana relativística não terá mais a forma $L = T - V$.

A equação de movimento relativístico de uma partícula sujeita a um potencial $V(r)$ é dada por

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla V(r). \quad (4.53)$$

A equação de movimento acima pode ser posta na forma lagrangiana, para isso, notemos que

¹O ponto sobre a variável implica derivada temporal: $\cdot = \frac{d}{dt}$

$$p^i = \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}} \right), \quad (4.54)$$

e também que, as componentes de $\nabla V(r)$ podem ser escritas como

$$\frac{\partial V(r)}{\partial \dot{x}^i} = (\nabla V(r))_i, \quad (4.55)$$

daí, a equação de movimento 4.53 pode ser posta na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad (4.56)$$

com a lagrangiana

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}} - V(r). \quad (4.57)$$

A partir da equação 4.57, verificamos que a lagrangiana de fato não possui a forma $L = T - V$, uma vez que a energia cinética de uma partícula no regime relativístico é dada por

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (4.58)$$

A formulação lagrangiana dada pelas equações de movimento 4.56 não é covariante, pois gera apenas a equação de movimento relativística 4.53, que se refere a um sistema inercial particular (LEMOS, 2013). Já uma formulação lagrangiana covariante deve nos fornecer uma descrição do movimento de uma partícula num referencial inercial qualquer, tal como o faz a equação 4.49.

Como já obtivemos todos os parâmetros necessários para a reformulação da segunda lei de Newton, podemos usá-los para obtermos a forma covariante das equações de Lagrange, dada por

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial U^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (4.59)$$

com x^μ e U^μ desempenhando os papéis de coordenadas e velocidades generalizadas respectivamente.

Note que a condição necessária para que a equação acima seja válida em todos os referenciais inerciais é que os fatores $\frac{\partial L}{\partial U^\mu}$ e $\frac{\partial L}{\partial x^\mu}$ não mudem por uma transformação de Lorentz, isto é, que eles tenham as propriedades de quadri vetores. Com esse raciocínio, e sabendo que x^μ e U^μ já são quadri vetores, chegamos à conclusão de que a lagrangiana

4.57 também se trata de um invariante de Lorentz!

5 *Eletromagnetismo*

Em 1905, Einstein propôs em seu artigo “*Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*” que o espaço e o tempo, antes considerados como absolutos e independentes desde a época de Newton, estariam relacionados de uma maneira que a variação de um implicasse a variação do outro, de tal forma que a velocidade da luz seja sempre a mesma para todos os referenciais em que é medida. Essa relação de correspondência entre espaço e tempo foi matematicamente formulada por Lorentz e utilizada por Einstein em seu artigo para determinar como um evento físico se transforma quando analisado a partir de um referencial em movimento uniforme em relação àquele na qual o evento acontece.

Einstein começa apresentando assimetrias na Eletrodinâmica de Maxwell quando aplicada em corpos em movimento e, fundamentando-se na Teoria Eletromagnética, propõe os princípios da Relatividade que alteram estruturalmente as concepções de espaço e tempo (OTA, 2005). Com isso, Einstein reformula a mecânica no regime relativístico através das transformações de Lorentz para, em seguida, demonstrar que se as mesmas forem aplicadas à eletrodinâmica, é possível escrever as equações de Maxwell de modo que elas relacionem os campos com suas fontes da mesma maneira em todos os referenciais (OTA, 2005).

5.1 Quadricorrente e Quadripotencial

Vamos ver como as fontes de campo na eletrodinâmica (ρ e $\mathbf{J}$) e os potenciais eletromagnéticos são reformulados ao serem analisados em um referencial em movimento. Consideremos um sistema carregado com carga Q , ocupando um volume V , num referencial que se move com velocidade constante $\mathbf{u}$. A densidade de carga desse sistema será

$$\rho = \frac{Q}{V},$$

e a densidade de corrente

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}.$$

As quantidades acima foram medidas no referencial do laboratório (S), que possui velocidade $-\mathbf{u}$ para um observador no referencial que se encontra o sistema carregado (S'). No referencial próprio das cargas, a densidade de carga própria ρ_0 é dada por

$$\rho_0 = \frac{Q}{V_0},$$

onde V_0 é o volume da porção em repouso. Como a dimensão correspondente à direção do movimento do referencial das cargas sofre a contração de Lorentz,

$$V = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} V_0,$$

teremos que, no referencial do laboratório

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{J} = \rho_0 \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Assim, a densidade de carga e corrente juntam-se para formar o quadrivetor

$$J^\mu = (c\rho, J^1, J^2, J^3), \quad (5.1)$$

que corresponde à densidade de corrente e carga em 4 dimensões, geralmente designada de *quadricorrente*.

A quadricorrente possui a vantagem de relacionar as duas fontes de campo numa única expressão. Assim, as equações que envolvem ρ e $\mathbf{J}$ podem ser reescritas em termos apenas de J^μ .

Considere, por exemplo, a equação da continuidade, na qual expressa a lei de conservação das cargas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Em termos da quadricorrente, essa equação pode ser escrita como

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (5.2)$$

onde o índice μ varia de 0 a 3. Como a coordenada temporal de J^μ é $c\rho$, então

$$\partial_0 J^0 = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} = \frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Portanto, a equação da continuidade fica muito bem expressa pela equação 5.2.

Conforme sabemos, os potenciais eletromagnéticos carregam a informação do campo, nos permitindo escrever as expressões dos campos elétrico e magnético em termos de potenciais

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

onde ϕ é o potencial escalar eletrostático e $\mathbf{A}$ é o potencial vetorial magnético. Da mesma forma que as fontes de campo foram reunidas numa só grandeza, os potenciais eletromagnéticos formam um 4-vetor,

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A^1, A^2, A^3\right), \quad (5.3)$$

conhecido como *quadripotencial*.

Assim, qualquer expressão que envolva algum dos potenciais também poderá ser escrita em termos apenas de A^μ .

5.2 Tensor de Campo Eletromagnético e a Forma Covariante das Equações de Maxwell

Dadas as transformações de Lorentz para os campos elétrico e magnético ⁴

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

vemos que elas são misturadas quando passadas de um referencial para outro. Está claro também que as componentes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ não se comportam como as coordenadas espaciais de um 4-vetor. No entanto, ainda é possível relacionar essas seis quantidades independentes numa única equação (assim como foi feito para a quadricorrente e o quadripotencial). As componentes dos campos serão relacionadas por uma entidade que não é um 4-vetor, mas um tensor de segunda ordem. Mas, um tensor de segunda ordem no espaço de Minkowski possui 4^2 componentes e, só temos seis quantidades independentes a relacionar. Esse problema é resolvido se o tensor for antissimétrico, pois, das 16 componentes, 4 são nulas e 6 são repetições das outras 6, então, teremos apenas seis componentes independentes. Podemos chegar nesse tensor de forma fácil.

Um tensor antissimétrico genérico tem a seguinte forma

⁴Veja o Apêndice A, onde constam as transformações de Lorentz para os campos.

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & t^{01} & t^{02} & t^{03} \\ -t^{01} & 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{02} & -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{03} & -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Aplicando as transformações de Lorentz do espaço-tempo de Minkowski nesse tensor

$$t'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} t^{\alpha\beta}, \quad (5.6)$$

onde,

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \quad e \quad \Lambda_{\beta}^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}, \quad (5.7)$$

podemos obter cada uma das entradas da matriz acima. Por exemplo

$$t'^{01} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\beta}} t^{\alpha\beta}, \quad (5.8)$$

a soma acima, à primeira vista, resultará em 16 termos, no entanto, como x'^0 e x'^1 só dependem de x^0 e x^1 , a derivada se anulará sempre que α e β forem diferentes de 0 ou 1.

Assim, a soma terá apenas quatro componentes

$$t'^{01} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} t^{00} + \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} t^{01} + \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} t^{10} + \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} t^{11}, \quad (5.9)$$

mas como $t^{00} = t^{11}$ e $t^{01} = -t^{10}$, então

$$t'^{01} = \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} - \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} \right) t^{01}. \quad (5.10)$$

Resolvendo essas derivadas, obtemos

$$t'^{01} = [\gamma^2 - (\gamma\beta)^2] t^{01}, \quad \therefore \quad t'^{01} = t^{01}. \quad (5.11)$$

Fazendo o mesmo para as outras cinco entradas independentes, obtemos o conjunto

$$\begin{aligned} t'^{01} &= t^{01}, & t'^{02} &= \gamma(t^{02} - \beta t^{12}), & t'^{03} &= \gamma(t^{03} - \beta t^{31}), \\ t'^{23} &= t^{23}, & t'^{31} &= \gamma(t^{31} - \beta t^{03}), & t'^{12} &= \gamma(t^{12} - \beta t^{02}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Comparando essas entradas com as transformações das componentes dos campos elétrico e magnético, podemos construir o tensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

conhecido como *tensor de campo eletromagnético*. Poderíamos também, comparar a primeira linha das igualdades 5.12 com as componentes do campo magnético e a segunda linha com as componentes do campo elétrico, para obtermos

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

conhecido como o *tensor dual* de $F^{\mu\nu}$ (GRIFFITHS, 2011).

Podemos agora, finalmente, escrever as equações de Maxwell na forma covariante em termos do tensor de campo, na qual assumem a forma

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \partial_\nu \bar{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.15)$$

Podemos identificar cada uma das equações de Maxwell a partir dessas expressões, por exemplo, se fazemos $\mu = 0$ na primeira das equações 5.15, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} &= \mu_0 J^0 \Rightarrow \\ \frac{1}{c}(\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) &= \mu_0 c \rho \Rightarrow \\ \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \mu_0 c \rho \quad \therefore \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

que corresponde à *lei de Gauss*. De forma análoga, se μ variar de 1 a 3, obtemos as três componentes da *lei de Ampère*.

Para a segunda das equações 5.15, se $\mu = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_0 \bar{F}^{00} + \partial_1 \bar{F}^{01} + \partial_2 \bar{F}^{02} + \partial_3 \bar{F}^{03} &= 0 \Rightarrow \\ \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 &= 0 \quad \therefore \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

que é a *lei de Gauss magnética*. Analogamente, fazendo μ variar de 1 a 3 na segunda expressão, obtemos as três componentes de *lei de Faraday*.

Resumindo, a lei de Gauss e a lei de Ampère estão compactadas em

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad (5.18)$$

e a lei de Gauss magnética e a lei de Faraday em

$$\partial_\nu \overline{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.19)$$

Uma análise mais cuidadosa do tensor de campo eletromagnético nos permite escrever as quatro equações de Maxwell em termos apenas de $F^{\mu\nu}$ (LEMOS, 2013). O resultado será as equações de Maxwell na forma explicitamente covariante:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (5.20)$$

6 *Considerações Finais*

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho vimos, brevemente, como as grandezas tensoriais estão inseridas nas equações das leis que descrevem alguns fenômenos físicos, com a importante tarefa de torná-las covariantes. Vimos como definir um tensor e suas leis de transformação, e a consequência dessas definições em teorias como a Relatividade Especial e o Eletromagnetismo. O presente texto pretende, portanto, mostrar a importância do cálculo tensorial como ferramenta de auxílio aos físicos que buscam uma descrição compacta e elegante das equações que descrevem os fenômenos que nos cercam. Não obstante os tensores possuírem grande aplicação na Relatividade Especial, sua maior utilidade está presente na Relatividade Geral, na qual Einstein encontrou a instrumentação necessária para a formulação de novas ideias que remetem à Gravitação.

Referências

- BERMAN, M. S. *Cálculo tensorial e relatividade geral - Uma introdução*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3. ed. Columbia University: Prentice Hall, 2002.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.
- LEMOIS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.
- LEVI-CIVITA, T. *The Absolute Differential Calculus*. Great Britain: Blackie Son Limited, 1927.
- OTA, M. Eletromagnetismo e relatividade: Continuidade formal – ruptura conceitual. *Sociedade Brasileira de História da Matemática*, 2005.
- SPAIN, B. *Tensor Calculus A Concise Course*. New York: Dover Publications, 2003.
- SÁNCHEZ, E. *Cálculo Tensorial*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2010.

APÊNDICE A – Transformações de Lorentz para E e B

A Teoria da Relatividade postula que as leis dos fenômenos físicos são as mesmas em todos os sistemas de referência inercial. Nosso objetivo aqui será ver como as componentes dos vetores campo elétrico e magnético se transformam quando lhes são aplicadas as transformações de Lorentz.

A Eletrodinâmica de Maxwell está fundamentada em quatro equações que relacionam os campos com suas fontes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}), \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss magnética}), \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (\text{Lei de Faraday}), \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} \quad (\text{Lei de Ampère}). \quad (\text{A.4})$$

Se estamos num referencial S estudando fenômenos eletromagnéticos que acontecem num referencial S' , em movimento retilíneo e uniforme em relação a S , usamos as transformações de Lorentz para descrever o que acontece em S'

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x), \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

onde γ e β são, respectivamente

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a estrutura do espaço-tempo de Minkowski, as coordenadas utilizadas serão

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad , \quad (A.7)$$

e as transformações de Lorentz terão o seguinte aspecto

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad (A.8)$$

ou, na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (A.9)$$

Podemos também, escrever essas transformações na forma de somatória implícita

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (A.10)$$

onde os índices gregos variam de 0 a 3, e $[\Lambda]$ representa a matriz de transformação de Lorentz.

Para ver como as componentes dos campos se transformam em S', vamos aplicar as transformações de Lorentz nas derivadas parciais em relação às coordenadas e substituir nas equações de Maxwell. Antes disso, lembremos que as coordenadas que se transformam assumem a forma

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right), \quad (A.11)$$

mantendo uma relação de correspondência do tipo

$$x' = x'(x, t), \quad t' = t'(x, t), \quad (A.12)$$

de modo que uma variação na coordenada temporal implicará em um adicional na variação da coordenada espacial, e vice versa, fazendo com que as derivadas parciais tenham um termo excedente, isto é

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (A.13)$$

com isso, teremos as seguintes transformações das derivadas parciais

$$\partial_t = \gamma(\partial'_t - v\partial'_1), \quad \partial_1 = \gamma(\partial'_1 - \frac{\beta}{c}\partial'_t), \quad \partial_2 = \partial'_2, \quad \partial_3 = \partial'_3. \quad (\text{A.14})$$

Escrevendo as equações de Maxwell na forma de componentes, temos

$$\partial_i E_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}), \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_i B_i = 0 \quad (\text{Lei de Gauss magnética}), \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k = -\partial_t B_i \quad (\text{Lei de Faraday}), \quad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \mu_0 J_i + \frac{1}{c^2}\partial_t E_i \quad (\text{Lei de Ampère}). \quad (\text{A.18})$$

Assim, a transformação para a lei de Gauss será:

$$\gamma\partial'_1 E_1 - \gamma\frac{\beta}{c}\partial'_t E_1 + \partial'_2 E_2 + \partial'_3 E_3 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (\text{A.19})$$

Para a lei de Gauss magnética, teremos

$$\gamma\partial'_1 B_1 - \gamma\frac{\beta}{c}\partial'_t B_1 + \partial'_2 B_2 + \partial'_3 B_3 = 0. \quad (\text{A.20})$$

Para a lei de Faraday, obtemos

$$\begin{aligned} \partial'_2 E_3 - \partial'_3 E_2 &= -\gamma\partial'_t B_1 + \gamma v\partial'_1 B_1, \\ \partial'_3 E_1 - \partial'_1 \gamma(E_3 + vB_2) &= -\partial'_t \gamma(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3), \\ \partial'_1 \gamma(E_2 - vB_2) - \partial'_2 E_1 &= -\partial'_t \gamma(B_3 + \frac{\beta}{c}E_2). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Analogamente, para a lei de Ampère, teremos

$$\begin{aligned} \partial'_2 B_3 - \partial'_3 B_2 &= \mu_0 J_1 + \frac{1}{c^2}\gamma\partial'_t E_1 - \frac{1}{c^2}\gamma v\partial'_1 E_1, \\ \partial'_3 B_1 - \partial'_1 \gamma(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2) &= \mu_0 J_2 + \frac{1}{c^2}\partial'_t \gamma(E_2 - vB_3), \\ \partial'_1 \gamma(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3) - \partial'_2 B_1 &= \mu_0 J_3 + \frac{1}{c^2}\partial'_t \gamma(E_3 - vB_2). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Comparando as equações obtidas após a transformação, com a equações antes da transformação (as equações de Maxwell na forma de componentes), vemos que a equação A.19 não possui a mesma estrutura de derivadas que a lei de Gauss, pois há um termo excedente envolvendo $\partial_t E_1$. Isto também acontece com a lei de Gauss magnética e com

as componentes x da lei de Faraday e lei de Ampère, pois tem termos excedentes relativamente às equações escritas no sistema S. Note que o mesmo não acontece com as componentes y e z da lei de Faraday e Ampère, pois elas já possuem a estrutura de derivadas em relação às equações originais no sistema S. Precisamos, portanto, reescrever as duas leis de Gauss e as componentes x das duas outras leis para que fiquem com a mesma estrutura que as leis do sistema S para, então, compararmos as componentes e chegarmos nas respectivas transformações. Para fazermos isso, precisamos recorrer a alguma álgebra.

Para encontrarmos uma expressão com a mesma forma que a lei de Gauss no sistema S, multiplicamos A.19 por γ e somamos à componente x da equação A.22 multiplicada por $(-\gamma v)$:

$$\partial'_1 E_1 + \partial'_2 \gamma (E_2 - v B_3) + \partial'_3 \gamma (E_3 + v B_2) = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} (\rho - \frac{\beta}{c} J_1). \quad (\text{A.23})$$

Para a lei de Gauss magnética, multiplicamos A.20 por γ e somamos à componente x de A.21 multiplicada por $(\gamma \frac{\beta}{c})$:

$$\partial'_1 B_1 + \partial'_2 \gamma (B_2 + \frac{\beta}{c} E_3) + \partial'_3 \gamma (B_3 - \frac{\beta}{c} E_2) = 0. \quad (\text{A.24})$$

Para a componente x da lei de Faraday, multiplicamos A.20 por γv e somamos à componente x de A.21 multiplicada por γ :

$$\partial'_2 \gamma (E_3 + v B_2) - \partial'_3 \gamma (E_2 - v B_3) = -\partial'_t B_1. \quad (\text{A.25})$$

Finalmente, para a componente x da Lei de Ampère, multiplicamos A.19 por $(-\gamma \frac{\beta}{c})$ e somamos à componente x de A.22 multiplicada por γ :

$$\partial'_2 \gamma (B_3 - \frac{\beta}{c} E_2) - \partial'_3 \gamma (B_2 + \frac{\beta}{c} E_3) = \mu_0 \gamma (J_1 - \rho v) + \frac{1}{c^2} \partial'_t E_1. \quad (\text{A.26})$$

Comparando essas últimas quatro expressões - na verdade só precisamos de duas delas, mas tudo bem, foi bom chegar nas quatro - com suas correspondentes do sistema S, chegamos às transformações

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - v B_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + v B_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2), \\ J'_1 &= \gamma(J_1 - \rho v), & J'_2 &= J_2, & J'_3 &= J_3, & \rho' &= \gamma(\rho - \frac{\beta}{c} J_1). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Observando as transformações das fontes de campo, vemos que elas se relacionam

uma com a outra. Novamente verificamos aqui que $\mathbf{J}$ se transforma como as componentes espaciais de um quadrivetor, e ρ como sua componente temporal (compare J'_1 com x'_1 e ρ' com t' nas transformações de Lorentz dadas no início do apêndice). Com isso concluímos as transformações de Lorentz para os campos e suas fontes.