

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

Campus Parnaíba

Curso de Licenciatura em Física

*Uma abordagem experimental dos osciladores
clássicos utilizando a plataforma Arduino*

Vitória Silva de Freitas Dutra

Parnaíba

2018

Vitória Silva de Freitas Dutra

*Uma abordagem experimental dos osciladores
clássicos utilizando a plataforma Arduino*

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Instituto Federal de Educação, Ciência
e Tecnologia do Piauí – *Campus* Parnaíba,
como requisito para obtenção do título de li-
cenciada em Física, sob orientação do Prof.
Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior.

Parnaíba

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Dutra, Vitória Silva de Freitas

D978u Uma abordagem experimental dos osciladores clássicos utilizando a
plataforma Arduino / Vitória Silva de Freitas Dutra. - 2018.
103 f.: il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Parnaíba Licenciatura em
Física, 2018.

Orientador : Prof Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior .

1. Oscilador harmônico clássico. 2. Sensores. 3. Plataforma Arduino.
I. Título.

CDD - 530

Elaborado por Micheline Angélica Aragão Gouveia CRB 3/1244

**UMA ABORDAGEM EXPERIMENTAL DOS OSCILADORES CLÁSSICOS
UTILIZANDO A PLATAFORMA ARDUÍNO**

Vitória Silva de Freitas Dutra

Aprovado em 21 / 12 / 2018

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Física do
IFPI/Campus Parnaíba, aprovado pela Banca Examinadora:

Itamar Vieira de Sousa Junior

Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Junior (Orientador) - Presidente
IFPI/Campus Parnaíba-PI

Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento

Prof. Me. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento – Examinador
IFPI/Campus Parnaíba-PI

Francisco Ronan Viana Araújo

Prof. Me. Francisco Ronan Viana Araújo – Examinador
IFPI/Campus São Raimundo Nonato

Parnaíba PI

2018

À minha mãe

Agradecimentos

Deixo meus agradecimentos ao professor Itamar Vieira Júnior, sobretudo, pelos bons ensinamentos e orientação. Reconheço e sou grata ao professor orientador pelo dedicação, paciência, respeito e profissionalismo com o qual construímos esse trabalho, tenho gratidão pelas inúmeras vezes que dispôs de tempo para me auxiliar dentro do laboratório de Física e pelo amparo fora do contexto da sala de aula nas discussões e dúvidas que tive no decorrer do curso acerca dos temas de Física em geral.

Direciono meus agradecimentos aos demais professores do Instituto Federal do Piauí com o qual contribuíram na minha formação acadêmica, em especial os professores de Física do campus, cada um com sua individualidade possui características específicas que certamente influenciarão na minha futura prática profissional. Particularmente não seria capaz de esquecer a contribuição do professor Alexandro Nascimento por ter tirado dúvidas e ajudado com a adaptação à escrita no LaTeX, sou grata pelo professor ter dado assistência quando solicitada sua ajuda, é admirável sua compreensão frente as dificuldades do alunado, e ao professor Marcos Antônio Matos pelas conversas e votos facultativos de incentivo e motivação no decorrer do curso, sentirei falta.

Aos companheiros de curso que mantiveram até o último período cooperando, apoiando e se disponho à ajudar uns aos outros deixo meus agradecimentos. Vocês foram fundamentais para o sucesso e conclusão dessa jornada, fico feliz em sair do Ifpi com bons laços de amizade nas quais cultivamos nesses quatro anos de curso. Gratidão também aos colegas de curso que me ajudaram a fotografar os experimentos. Registro meu muito obrigada a comunidade do Ifpi como um todo, servidores de todos os setores.

Por fim, e não menos importante dedico meus agradecimentos aos meus familiares e aos amigos externos à instituição, vocês mais do que qualquer outro, sabem dos desafios e provas que enfrentei nesses quatro anos de curso, das noites e afazeres que abdiquei para concluir com êxito as atividades acadêmicas. À vocês sou eternamente grata pelo apoio, confiança e pelos momentos de descontração, sobretudo, nessa etapa final.

*“Compreender as coisas que nos rodeiam é a melhor
preparação para compreender o que há mais além.”
(Hipátia)*

Resumo

O oscilador harmônico clássico tem análogos em muitos campos da Física, apesar do exemplo mecânico, uma massa presa por uma mola parecer elementar, fenômenos oscilatórios constituem a base para o entendimento de uma numerosa quantidade de sistemas físicos que englobam sistemas macroscópicos e microscópicos. No entanto, durante o processo de formação, os estudantes de Física são, em geral, apresentados apenas a modelos teóricos destes osciladores onde temos massas pontuais conectadas a molas ideais compondo sistemas que dificilmente são encontrados em situações reais e que, dessa forma, podem levar estes estudantes à interpretações equivocadas do mundo ao seu redor. Tendo em vista este contexto, usamos neste trabalho um aparato que permite estudar experimentalmente sistemas oscilantes do tipo massa-mola em diversas situações. O aparato foi utilizado para estudar o comportamento de diversas configurações de osciladores harmônicos sob condições que vão desde a presença de forças de resistência até a influência de forças externas periódicas. Foi possível investigar experimentalmente o fenômeno da ressonância, batimentos, e características peculiares de diferentes forças de resistência impostas ao sistema. Para tanto, foram utilizados sensores reciclados de impressoras em conjunto com alguns componentes eletrônicos de baixo custo e a plataforma Arduino atuando como interface para leitura e transferência de dados.

Palavras-chaves: Oscilador Harmônico Clássico. Sensores. Arduino.

Abstract

The classical harmonic oscillator has analogues in many fields of physics, despite the mechanical example, a mass trapped by a spring seem elemental, oscillatory phenomena form the basis for the understanding of a large number of physical systems that encompass macroscopic and microscopic. However, during the training process, physics students are usually presented only to the theoretical models of these oscillators where we have point masses connected to the ideal springs composing systems that are difficult to find in real situations and that, in this way, can lead these students to the misinterpretations of the world around them. Considering this context, we use developed in this work an apparatus that allows experimental study of oscillating systems of the mass-spring type in different situations. The apparatus was used to study the behavior of several configurations of harmonic oscillators under conditions ranging from the presence of resistance forces to the influence of periodic external forces. It was possible to experimentally investigate the phenomenon of resonance, beats, and peculiar characteristics of different resistance forces imposed on the system. For this purpose, recycled printer sensors were used in conjunction with some low cost electronic components and the Arduino platform acting as interface for reading and data transfer.

Keywords: Classical Harmonic Oscillator. Sensor. Arduino.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Construção de um amortecedor viscoso com placas planas paralelas separadas por um fluido newtoniano. <i>Fonte:</i> Autoria própria	21
Figura 2 – a) Indicação do comprimento natural da mola. b) Posição de equilíbrio da partícula pendurada. c) Posição arbitrária em oscilação. <i>Fonte:</i> Autoria própria	23
Figura 3 – Resposta harmônica do oscilador harmônico simples. <i>Fonte:</i> Autoria própria	26
Figura 4 – a) Oscilador massa/mola com atrito entre superfícies secas. b) Caso 1. $x > 0$ e $v > 0$. c) Caso 2. $x < 0$ e $v < 0$. <i>Fonte:</i> Autoria própria	28
Figura 5 – Resposta do oscilador com amortecimento constante. <i>Fonte:</i> Autoria própria	31
Figura 6 – Movimento oscilatório com amortecimento constante, indicação das amplitudes dos dois primeiros meio ciclos, amplitude decaindo linearmente. <i>Fonte:</i> Autoria própria	34
Figura 7 – Resposta oscilatória no amortecimento subcrítico. <i>Fonte:</i> Autoria própria	37
Figura 8 – Resposta do movimento no amortecimento crítico. <i>Fonte:</i> Autoria própria	39
Figura 9 – Resposta do movimento no amortecimento supercrítico. <i>Fonte:</i> Autoria própria	40
Figura 10 – Movimento oscilatório senoidal impelido com amortecimento. Solução do estado transiente, permanente e a superposição dos dois. <i>Fonte:</i> Autoria própria	43
Figura 11 – Fator de amplificação dinâmica. Amplitudes em função da frequência ω . <i>Fonte:</i> Autoria própria	44
Figura 12 – Fenômeno de Batimentos no oscilador. <i>Fonte:</i> Autoria própria	47
Figura 13 – Fenômeno de Ressonância no oscilador. <i>Fonte:</i> Autoria própria	48
Figura 14 – Função de força na forma de dente de serra. <i>Fonte:</i> Autoria própria	51
Figura 15 – Comunicação em série de Fourier da função força de impulsão no formato ‘dente de serra’. <i>Fonte:</i> Autoria própria	52
Figura 16 – a) Função Degrau de força. b) Função Impulso de força. <i>Fonte:</i> Autoria própria	53
Figura 17 – Resposta do oscilador para uma função degrau da força. <i>Fonte:</i> Autoria própria	55
Figura 18 – Resposta dinâmica de uma função impulso da força. <i>Fonte:</i> Autoria própria	56

Figura 19	–Resposta do oscilador à uma pico da função de força. <i>Fonte:</i> Autoria própria	58
Figura 20	–a) Sensor óptico eletrônico indicando a passagem da fita de código linear. b) Diagrama do encoder com uma fita de leitura óptica. <i>Fonte:</i> [1], adaptado.	61
Figura 21	–Diagrama de conexão elétrica do sensor óptico com o Arduino. Comunicação Arduino/Notebook via porta USB. <i>Fonte:</i> Autoria própria . . .	62
Figura 22	–a) Imediatamente antes de liberar a fita, Indicação de excesso de linha que será esticada. b) Posicionamento final após a liberação da fita. <i>Fonte:</i> Autoria própria	65
Figura 23	–Montagem do experimento para a obtenção da aceleração da gravidade local. <i>Fonte:</i> Autoria própria	66
Figura 24	–a) Equilíbrio antes da medição. b) Deformação com a adição de massas. <i>Fonte:</i> Autoria própria	67
Figura 25	–a) Visão global do arranjo experimental que finda determinar a constante elástica da mola. b) Distensão da mola c) Equipamento de adição de massas. <i>Fonte:</i> Autoria própria	68
Figura 26	–Diagrama experimental oscilador com uma única mola. <i>Fonte:</i> Autoria própria	69
Figura 27	–a) Vista global da montagem experimental de análise da relação inércia/frequência do oscilador. b) Conexão da esfera via roldana ao carrinho. c) Ligação da mola com uma extremidade fixa ao carrinho. <i>Fonte:</i> Autoria própria	70
Figura 28	–Diagrama experimental oscilador com duas molas. <i>Fonte:</i> Autoria própria	71
Figura 29	–a) Vista global da montagem de análise da relação inércia/frequência do oscilador com molas associadas. b) Molas interligadas ao carrinho. <i>Fonte:</i> Autoria própria	71
Figura 30	–a) Diagrama experimental oscilador forçado. b) Diagrama experimental do oscilador forçado e amortecido. <i>Fonte:</i> Autoria própria	73
Figura 31	–a) Montagem experimental do oscilador forçado. b) Composição de molas associadas em paralelo. c) Instrumento formado pela bobina e o elemento ferromagnético capaz de forçar o oscilador. d) Aparato de amortecimento composto por uma coluna de fluido. <i>Fonte:</i> Autoria própria	74
Figura 32	–a) Circuito elétrico fonte regulada com valor de tensão de 11 V. b) Em detalhe as conexões dos pinos do Arduino Nano e o transistor. <i>Fonte:</i> Autoria própria	76
Figura 33	–Posição vs Tempo na queda livre. Em destaque o valor da aceleração gravitacional local oriundo do fit polinomial da curva.	77

Figura 34 –Gráfico Força Peso vs Deformação. Em destaque o valor obtido da constante elástica da mola oriundo do fit linear da reta.	79
Figura 35 –Superposição dos gráficos gerados ao colocar o sistema para oscilar com valores de massa distintos. <i>Fonte: Autoria própria</i>	80
Figura 36 –Superposição dos gráficos gerados ao colocar o sistema com molas associadas para oscilar com valores de massa distintos. <i>Fonte: Autoria própria</i>	82
Figura 37 –Resposta dinâmica forçada de um oscilador massa/mola com amortecimento viscoso. <i>Fonte: Autoria própria</i>	84
Figura 38 –Oscilação na frequência de ressonância com aumento linear da amplitude. <i>Fonte: Autoria própria</i>	85
Figura 39 –Oscilação na frequência de ressonância com aumento não linear da amplitude. <i>Fonte: Autoria própria</i>	86
Figura 40 –Ocorrência de batimentos no oscilador. Indicação das frequências envolvidas no fenômeno. <i>Fonte: Autoria própria</i>	87
Figura 41 –Gráfico x vs t para uma função impulso de força. <i>Fonte: Autoria própria</i>	88
Figura 42 –Amortecimento característico da oscilação no trilho de ar. <i>Fonte: Autoria própria</i>	89
Figura 43 –Amortecimento com fluido de viscosidade na ordem de 10^{-3} . <i>Fonte: Autoria própria</i>	90
Figura 44 –Amortecimento com fluido de viscosidade na ordem de 10^{-6} . <i>Fonte: Autoria própria</i>	91
Figura 45 –Interface do Matlab, exemplificação de uma rotina em matlab, ao lado o resultado gráfico gerado. <i>Fonte: Autoria própria</i>	99
Figura 46 –Modelo de Placa Arduino - Arduino Mega. <i>Fonte: Autoria própria</i> . . .	100
Figura 47 –Ambiente de desenvolvimento integrado do Arduino. <i>Fonte: Autoria própria</i>	101
Figura 48 –Interface do Origin, exemplificação de um projeto criado no software. <i>Fonte: Autoria própria</i>	102

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Relação força peso e deformação	78
Tabela 2	–	Oscilador massa/mola variando a inércia	80
Tabela 3	–	Comparação dos valores de frequência experimentais e teóricos do oscilador massa/mola ao variar sua inércia.	81
Tabela 4	–	Oscilador com molas associadas em paralelo variando a inércia	82
Tabela 5	–	Valores de frequência experimentais e teóricos do oscilador massa/mola com associação de molas em paralelo ao variar sua inércia.	83

Lista de símbolos

τ	Tensão de cisalhamento
μ	Coefficiente de viscosidade dinâmica
ω	Frequência angular de oscilação
ϕ	Ângulo de fase
η	Ângulo de fase
π	Constante circular ($\approx 3,14$)
ν	Frequência de oscilação
β	Parâmetro de amortecimento
α	Ângulo arbitrário
λ	Ângulo arbitrário
ε	Pequena quantia de frequência angular
δ	Delta de Dirac

Sumário

1	Introdução	16
2	Dinâmica dos movimentos oscilatórios	18
2.1	Componentes de um oscilador	20
3	Oscilações	23
3.1	Oscilações harmônicas	23
3.2	Oscilações livres com amortecimento constante	27
3.3	Oscilações livres com amortecimento viscoso	34
3.3.1	Movimento Subamortecido	36
3.3.2	Movimento Criticamente Amortecido	38
3.3.3	Movimento Superamortecido	39
3.4	Oscilações forçadas	40
3.4.1	Oscilação amortecida sob força harmônica	41
3.4.2	Oscilação amortecida sob força periódica arbitrária	49
3.4.3	Oscilação forçada à funções de impulsão	53
3.4.3.1	Resposta a uma função Heaviside	54
3.4.3.2	Resposta a uma função Impulso	56
4	O Método Experimental	61
4.1	Preparativos e montagem dos experimentos	64
4.1.1	Determinação do valor local da aceleração da gravidade	64
4.1.2	Determinação da constante elástica das molas	66
4.1.3	Relação entre a frequência de oscilação e a inércia do sistema	68
4.1.4	Oscilador sob influência de força externa	72
5	Resultados e Discussões	77
5.1	Determinação do valor local da aceleração da gravidade	77
5.2	Determinação da constante elástica das molas	78
5.3	Relação entre a frequência de oscilação e a inércia do sistema	79
5.4	Oscilador sob influência de força externa	83
	Considerações Finais	92
	Referências	94

Apêndices	97
APÊNDICE A Visão Geral do MATLAB	98
APÊNDICE B Conhecendo o Arduino	100
APÊNDICE C Explorando o Origin Pro 8.5	102

1 Introdução

Os sistemas físicos observados na natureza são de maneira geral complexos, de modo que do ponto de vista físico não é fácil obter uma descrição precisa e completa mesmo em fenômenos cotidianos. Tendo em vista estas dificuldades, os físicos se empenham na construção de modelos que expliquem o comportamento de apenas alguns aspectos de sistemas físicos isolando seus componentes mais importantes. Neste processo, frequentemente são formuladas de leis Físicas, que tem suas validades testadas a partir da experimentação.

No âmbito dessas teorias, tem-se a *Dinâmica*, seguimento da *Mecânica Clássica* que dedica o estudo aos movimentos de partículas, sistemas de partículas e corpos rígidos sob a ação de forças. A partir do século XVII, os conceitos e princípios fundamentais da Dinâmica Clássica surgiram significativamente com as ideias de Galileu, com seguimentos de Newton, Huygens, Leibniz, Euler, Lagrange, d'Alembert e Hamilton [2].

A mecânica newtoniana formulada por Isaac Newton descreve o movimento de partículas no espaço como consequência das interações delas entre si e com o meio externo. Newton, ao descrever o movimento dessas partículas, buscava determinar as posições dos corpos no espaço, levando em conta o tempo como parâmetro de medida. Como foco da construção dessa teoria, tem-se a concepção central de conservação do momento como estado fundamental e a variação temporal dessa grandeza como uma consequência de interações físicas devido ao meio externo, na qual introduziu, por sua vez, a noção de força [3].

A contribuição de Galileu com estudos sistemáticos de movimento, em torno de 1600, proporcionou avanços na teoria newtoniana da mecânica. O tratamento da dinâmica do movimento de um corpo é baseado no estudo de sua trajetória espacial em função do parâmetro tempo. A formulação como um todo realiza-se em termos da essência construtiva da teoria newtoniana, cuja caracterização se fundamenta nas grandezas mensuráveis posição e tempo. A grandeza física central no que compete o estudo e a interpretação física da dinâmica newtoniana é o momento. A grandeza força representa a variação temporal do momento, cuja configuração é dada por um campo vetorial fixado a cada ponto do espaço variável no tempo, espaço de fase [4]. À vista disso, para se estudar a dinâmica de corpos e sistemas dotados de massa e elasticidade, solicita-se a construção de modelos teóricos para os campos de forças onde ocorre o movimento.

No contexto da mecânica, uma força que conduz o retorno de um sistema perturbado ao seu estado de equilíbrio é conhecida como *restauradora*, esse tipo de força permite descrever o comportamento de muitos sistemas mecânicos ligeiramente perturbados, e a

relevância de se estudar cuidadosamente a implicação dessa na natureza se dá, sobretudo, pois a natureza de oscilações decorrente desse tipo de força possui análogos próximos em muitos outros campos da física [5].

Este trabalho tem como objetivo compreender a fenomenologia das oscilações por meio do estudo do movimento dessa manifestação, de modo que a decorrência desse conhecimento contribua com a divulgação científica da temática. Além disso, a fim de obter um estudo sofisticado do movimento oscilatório, avaliamos experimentalmente a natureza da resposta do sistema dinâmico quando sujeito à uma força externa senoidal e sob influência de uma força de impulso de curta aplicação no oscilador, assim como, características peculiares das forças de resistência existentes na natureza, já que a força resistiva é presente nos sistemas oscilatórios. Adotamos uma metodologia experimental cuja aquisição e tratamento de dados é feita com a plataforma Arduino funcionando como interface.

Experimentos controlados por microcontroladores são usados em projetos de automação. Os microcontroladores são adequados para coleta e controle de dados em experimentos de Física, o mais popular entre os usuários, são os ATmega's do Arduino. A adoção do Arduino é financeiramente viável, a plataforma apresenta baixo custo, cerca de 2,5 dólares por unidade, fácil programação, variedades nas placas e grande quantidade de material disponível para acesso na internet [6].

Atualmente, a adoção do projeto Arduino tem sido muito comum na investigação de fenômenos físicos. A maioria dos trabalhos publicados nos últimos anos, ao se tratar de experimentação com aquisição de dados à baixo custo, teve a plataforma Arduino atuando como interface nos projetos de Física. A investigação de fenômenos ondulatórios, mecânicos, térmicos e eletrônicos podem ser encontrados nos trabalhos [7, 8, 9, 10, 11].

Estruturamos esse trabalho dividindo-o em cinco capítulos, o primeiro de introdução à temática da dinâmica das oscilações. No segundo capítulo, abordamos a formulação, o modelo analítico do comportamento oscilatório e o limite de validade da resposta dinâmica de sistemas lineares. No terceiro capítulo, abordamos os detalhes descritivos do sistema oscilatório em termos das equações analíticas que governam seu comportamento quando sujeito a determinadas condições iniciais, a previsão teórica e a simulação computacional de cada comportamento. No quarto capítulo, descrevemos o método experimental implantado, detalhando a metodologia de aquisição de dados e montagens experimentais. Por fim, discutimos os resultados experimentais no quinto capítulo, fundamentando os fenômenos ocorridos no oscilador com base no observado. Na tentativa de avaliar o desempenho experimental, elaboramos uma conclusão.

2 Dinâmica dos movimentos oscilatórios

Um dos precursores da ciência experimental, Galileu Galilei (1564 - 1642), no seu estudo das leis do movimento, escreveu o primeiro tratado da dinâmica, em 1590 [2]. O filósofo florentino observando o comportamento de um pêndulo simples na catedral em Pisa, analisou o período do aparato mecânico com sua pulsação. A partir daí, Galileu obteve uma série de resultados interessantes sobre corpos oscilatórios, descrevendo relações entre frequência, período e comprimento de um pêndulo simples.

Isaac Newton (1642 - 1727), publicou em seu tratado monumental, *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, em 1687, as três leis do movimento [3]. Este conjunto de leis permitiu a descrição de movimento de partículas e corpos rígidos consolidando conceitos estudados por Galileu e apresentando novas ideias.

Sob outra perspectiva, no tratamento analítico, atribuída a Leibniz (1646 - 1716) e Lagrange (1736 - 1813), as equações são expressas em termos de coordenadas arbitrárias independentes, operando com grandezas escalares, energia cinética e energia potencial, sem empregar a noção de forças de interação. Em substituição as forças e acelerações vetoriais característicos do tratamento newtoniano, as equações de Lagrange possuem a vantagem de se adequar às coordenadas generalizadas arbitrárias [12]. É importante ressaltar que tanto o tratamento newtoniano quanto os tratamentos Hamilton-Lagrange fornecem os mesmos resultados e apresentam vantagens e desvantagens a depender do problema em questão.

A fim de estudar o movimento oscilatório no domínio do tempo, trataremos da dinâmica das oscilações lineares de um corpo e as forças coligadas a ele, por meio das equações diferenciais na variável temporal que governam o movimento com um grau de liberdade. De modo geral, um sistema oscilatório compõe um meio de armazenamento de energia potencial, mola ou elasticidade, um meio de armazenamento de energia cinética, massa ou inércia, e um meio de perda gradativa de energia, amortecimento [13].

Um sistema em oscilação trabalha com a transmissão alternada de energia cinética em potencial vice-versa e, no amortecimento, certa quantidade energética é dissipada a cada período de oscilação, em contrapartida, para manter um regime permanente de oscilação, necessita-se de uma ação externa atuante no sistema.

As ações externas que agem sobre um sistema oscilatório são determinísticas quando sua magnitude for conhecida em qualquer instante, nessa situação, o método de análise dinâmica inclui o comportamento analítico ou numérico em função do tempo. E podem ser randômicas, quando a magnitude das ações não é determinada num instante qualquer, nessa circunstância, o tratamento dinâmico revela alguma regularidade estatís-

tica, cujas ações estabelecem características probabilísticas em seu comportamento [4]. A velocidade do vento, o movimento do solo ao longo do tempo de atuação de um terremoto são exemplos de vibrações aleatórias, nesses casos, a resposta ao movimento é descrita sob quantidades estatísticas, e não cabe ao presente estudo essa abordagem.

As oscilações possuem classificações importantes, e com base nessas definições e limitações do oscilador, pode-se construir o modelo teórico para análise do seu comportamento. As vibrações são livres quando, após uma perturbação inicial, o sistema permanecer oscilando livremente, sem a atuação de agentes externos. Por exemplo, as oscilações em sistemas mecânicos do tipo pêndulo simples e oscilador harmônico simples. Em contrapartida, as vibrações são forçadas quando no sistema atuar um agente externo. Oscilações que surgem em máquinas possuem essa característica. Um evento interessante ocorre quando a frequência de excitação externa coincide com a frequência natural do sistema vibratório, em tal condição resulta o estado de *ressonância*, com ela, o sistema físico vibra com amplitudes cada vez mais superiores [14].

As oscilações amortecidas, todavia, retratam de forma muito abrangente o comportamento oscilatório que ocorre na natureza. Geralmente são resultantes do atrito ou alguma outra resistência durante a oscilação, esse elemento implica no amortecimento do movimento até o ponto o qual não haverá mais oscilação [5]. Em certos sistemas físicos o quantitativo de amortecimento é insignificante comparado ao conjunto oscilatório como um todo, amortecimento fraco, de pouca influência no cálculo, no entanto, na análise de perturbações próximas da ressonância a consideração do amortecimento torna-se indispensável, caso típico observado em circuitos elétricos.

A constância na discussão dos sistemas oscilatórios lineares advém da abrangência dos fenômenos oscilatórios em muitos ramos da física e da engenharia. É permitido, sobretudo, o emprego de aproximações lineares no estudo dos sistemas devido a obtenção da resposta ao movimento, em grande parte, aplicando métodos analíticos, visto que, o princípio de superposição de efeitos é válido e as técnicas matemáticas para o desenvolvimento do problema são mais conhecidas.

A resposta ao movimento oscilatório depende, em geral, das condições iniciais da situação, assim como das excitações externas, variável de entrada no sistema. Em muitos casos o comportamento global do sistema é conhecido a partir de um modelo físico, cuja modelagem matemática dispõe das equações governantes do movimento, nas quais as soluções revelam as características físicas do problema. A seguir, discutiremos o mecanismo oscilatório a partir da análise dinâmica de sistemas vibratórios, observando a resposta do sistema com base nas variáveis de entrada no oscilador. Para isso, devemos antes entender o comportamento dos componentes básicos de um oscilador (massa, mola e amortecedor), e seus limites de validade.

2.1 Componentes de um oscilador

Admitindo que uma partícula em movimento oscilatório possua a posição de equilíbrio estável, onde a origem do sistema de referência coincida com esse ponto, mova-se em apenas uma direção. Caso essa partícula sofra um deslocamento, uma determinada força tende a restaurá-la para sua posição de equilíbrio, como por exemplo, um átomo numa extensa cadeia molecular [5].

Considerando em particular o caso onde a força de restauração é uma função da posição, e o elo mecânico, mola, é linear, sendo desprezível sua inércia e amortecimento. A força desenvolvida pela mola descreve a força de restauração e suas derivadas são contínuas. Dessa forma, a expansão em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio estático, $x = 0$, é dada por:

$$F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{3!} x^3 \left(\frac{d^3 F}{dx^3} \right)_0 + \dots$$

Visto que F_0 é nulo, pois significa a quantidade da força na origem. Para valores pequenos de deslocamento x , os termos de derivadas de ordem superior podem ser desprezados, portanto:

$$F(x) = x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0.$$

Definindo k a rigidez da mola linearizada em $x = 0$, de maneira que:

$$k = - \left(\frac{dF}{dx} \right)_0.$$

Em razão da força de restauração ter direção contrária ao sentido de deslocamento, a derivada $\left(\frac{dF}{dx} \right)_0$ é negativa, e k uma constante positiva. Assim, a aproximação é:

$$F(x) = -kx. \quad (2.1)$$

As molas reais são não lineares e respeitam a expressão 2.1 até um determinado limite de deformação. Ao ultrapassar esse limite, a tensão ultrapassa o limite de escoamento do material e a relação força/deformação converte-se em não linear [15]. Os processos físicos que obedecem à *lei de Hooke*, indicada na equação 2.1 envolvem deformações elásticas. A aproximação das forças lineares oriunda da lei de Hooke tem validade no limite de pequenas amplitudes de oscilação.

Nos sistemas físicos, a determinação das causas do amortecimento são extremamente difíceis, em geral, o que se sabe é que a energia de oscilação é gradativamente dissipada em forma de calor, som, histerese e atrito durante o movimento. O amortecimento é oriundo da força de retardo cuja realização de trabalho implica numa perda de energia

mecânica. Como consequência disso, modelam-se tipos de amortecimento, classificando-os em amortecimento viscoso, amortecimento de coulomb e amortecimento por histerese.

O amortecimento viscoso ocorre quando um sistema oscila em um meio fluido (ar, água, óleo e gás), cuja resistência ofertada pelo fluido na partícula durante o movimento indica a perda de energia. Em muitos casos, onde a variação da velocidade é pequena, a força de retardo desse mecanismo é geralmente proporcional a alguma potência da velocidade. Essa força de resistência é conhecida como força de arrasto, com direção que se opõe ao sentido do movimento e magnitude acima da velocidade do som. Exemplos característicos de amortecimento viscoso se observa em películas de fluido entre superfícies deslizantes e em fluxo de fluido ao redor de um pistão dentro de um cilindro [16].

A previsão desse resultado é verificado experimentalmente pela construção de um modelo de amortecedor utilizando duas placas paralelas de área A separadas por um fluido newtoniano de viscosidade μ , a uma distância d uma da outra, indicamos esse modelo de amortecedor a seguir na Figura 1.

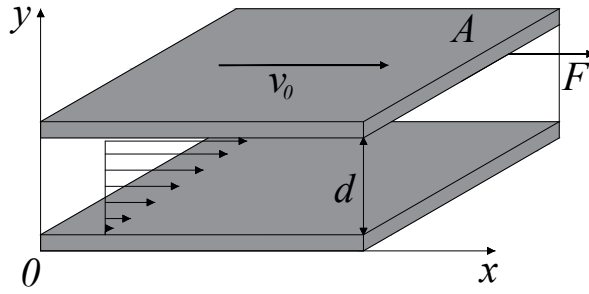


Figura 1: Construção de um amortecedor viscoso com placas planas paralelas separadas por um fluido newtoniano. *Fonte:* Autoria própria

Admitindo que uma placa superior seja puxada para a direita com velocidade v_0 , as camadas de fluido que tocam a placa que se desloca, movem-se com uma velocidade v_0 , enquanto as camadas de fluido próximas da placa fixa não se movem [17]. Considerando então que as velocidades das camadas de fluido variam linearmente de 0 à v , pela lei de Newton da viscosidade, a tensão de cisalhamento τ orientada na camada a uma distância y da placa fixa é indicada por:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{dv}{dy}.$$

Onde $\frac{dv}{dy}$ é o gradiente de velocidade. A força de resistência observada na superfície inferior da placa que se desloca é:

$$F = \frac{\mu A}{d} v_0. \quad \implies \quad F = c v_0. \quad (2.2)$$

A constante de proporcionalidade $c = \frac{\mu A}{d}$ é o coeficiente de viscosidade, denominada constante de amortecimento. Sua unidade no SI é Ns/m^2 . Se o amortecedor for não linear, geralmente se usa um processo de linearização ao redor da velocidade de operação [16]. No processo de linearização, a constante de amortecimento expressa:

$$c = \left. \frac{dF}{dv} \right|_v.$$

No amortecimento por atrito seco, chamado de Coulomb, as ‘leis de força’ para esse tipo de atrito são empíricas, o fenômeno está intimamente ligado à natureza dos materiais e ao estado das superfícies envolvidas, o grau de polimento, a presença de lubrificantes e a oxidação, são fatores de forte influência na realização deste. A intensidade da força de amortecimento é uniforme e experimentalmente independente da velocidade, em sentido oposto ao movimento do corpo oscilatório [3].

O amortecimento de comportamento constante é causado pelo atrito entre superfícies secas em contato. A equação de movimento com amortecimento de Coulomb apresenta pontos de descontinuidade, a frequência natural do sistema não se altera no amortecimento e a amplitude sofre uma redução numa taxa linear uma vez que essa redução no amortecimento viscoso ocorre exponencialmente [18]. Reservamos uma seção no próximo capítulo para tratarmos desse caso especial, pois o comportamento mecânico desse problema trás particularidades, em vista disso, se torna complicado o desenvolvimento de um modelo analítico generalizado para este problema, veremos que a inserção de métodos numéricos podem resolver essa problemática.

Um material ao se deformar, dissipa e absorve energia, isso é produto do atrito entre as superfícies internas que deslizam durante a deformação. Na oscilação de um corpo com amortecimento histerético, o diagrama de tensão/deformação descreve uma curva de histerese. A histerese é fortemente relacionada a sistemas não lineares, consiste numa propriedade de materiais ou sistemas físicos em manter suas características mesmo com a continuidade das solicitações que as provocam. Esse fenômeno surge ao se estudar eletromagnetismo, elasticidade e plasticidade em materiais e oscilações em redes cristalinas. A principal característica vincula os estímulos, forças e tensões, a resposta do sistema, deslocamento, na formação de ciclos fechados ao variar o estímulo de forma contínua e periódica, com amplitude suficientemente grande [19].

No limite de baixas velocidades, é comumente adotado o modelo de amortecimento viscoso na abordagem dos problemas que envolve o sistema mecânico oscilatório. O terceiro componente do sistema elástico é a massa (inércia). Admite-se a massa como um corpo rígido na qual pode ganhar ou perder energia cinética a medida que ocorre variação da sua velocidade.

3 Oscilações

Visto o comportamento dos elementos que compõem o modelo mecânico teórico, partiremos para os detalhes descritivos do sistema oscilatório em termos das equações analíticas que governam seu comportamento quando o problema está sujeito a determinadas condições iniciais, assim como a simulação em *Matlab*¹ da resposta oscilatória dos sistemas. O movimento oscilatório ao se repetir em intervalos de tempo iguais gera um movimento periódico, a categoria mais simples de movimento com periodicidade é o movimento harmônico.

3.1 Oscilações harmônicas

Possivelmente o mecanismo mais simples cujos movimentos respeitam uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes seja uma massa suspensa verticalmente por uma mola [13]. Dessa forma, considerando uma partícula de massa m ligada a uma mola de massa desprezível na posição vertical, Figura 2, buscaremos a equação diferencial que caracteriza o sistema oscilatório.

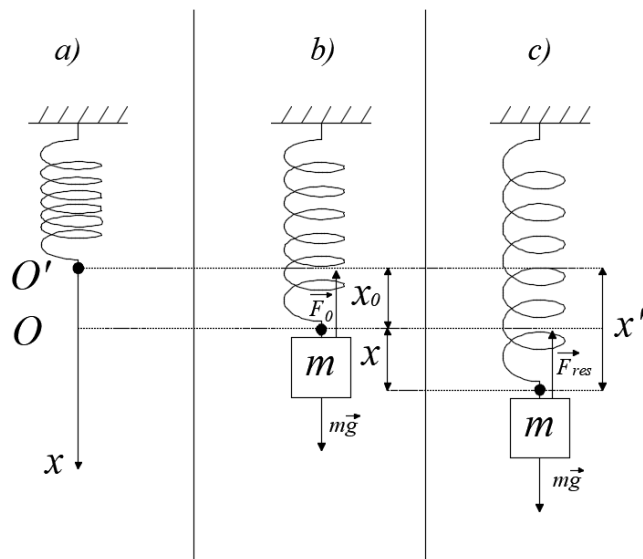


Figura 2: a) Indicação do comprimento natural da mola. b) Posição de equilíbrio da partícula pendurada. c) Posição arbitrária em oscilação. *Fonte:* Autoria própria

¹ Consiste em um pacote de programas que pode ser usado para a solução de uma variedade de problemas científicos e de engenharia, entre eles, equações algébricas lineares, equações não lineares, diferenciação, integração numérica, equações diferenciais entre outros [16]. Reservamos no apêndice A um setor sobre o Matlab.

Admitindo que a mola se encontra inicialmente em seu comprimento natural, e devido a adição de uma massa m , a posição de equilíbrio do sistema passa ter como referência o eixo em O onde x_0 representa o alongamento em relação ao eixo O' , faremos uma transformação para que tenhamos o equilíbrio estável do sistema orientado pelo eixo O . A equação de movimento em relação à O' , pela segunda lei de Newton, é indicada por:

$$F(x) = m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -kx' + mg. \quad \implies \quad \frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{k}{m} x' = g.$$

Tomada essa orientação percebemos a presença de um termo na qual torna a equação não homogênea, poderíamos sem problema nenhum resolver a equação diferencial encontrando a solução homogênea e a solução particular, no entanto, se realizarmos uma operação de modo que o termo constante seja naturalmente eliminado, obtemos a equação homogênea típica de um oscilador harmônico simples. Dessa maneira, observando a configuração do oscilador massa/mola, na Figura 2, sabemos que $x = x' - x_0$ e como no equilíbrio temos, $mg = kx_0$, então, $x_0 = mg/k$, cujo valor de x_0 é uma constante, isto é, as derivadas de x' e x são iguais. Assim:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}. \quad \implies \quad \frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Dessa forma, concluímos que:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx' = mg. \quad \implies \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + k(x + x_0) = mg.$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + kx_0 = mg. \quad \implies \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + mg = mg.$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0.$$

É comumente adotado no oscilador massa/mola, a origem do plano de referência na posição de equilíbrio incrementada a massa sem influência do peso, porém, sabemos que isso é devido a transformação feita nos sistemas de coordenadas. Realizando a análise dimensional de k/m , verificamos que o termo tem dimensão de frequência angular ao quadrado, assim:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Dessa forma, a equação de movimento do sistema que consiste em uma equação de segunda ordem homogênea é:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1)$$

Podemos encontrar a solução dessa equação diferencial substituindo os termos da equação pelos termos da equação quadrática do tipo:

$$m^2 + \omega_0^2 = 0. \quad \implies \quad m = \pm i\omega_0.$$

Cujas raízes são complexas e distintas, portanto, a solução geral é formada pela combinação linear das duas funções linearmente independentes, assim:

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Expressando-a em termos trigonométricos, utilizando a fórmula de Euler podemos reescrever a solução geral da seguinte maneira:

$$x(t) = A_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + A_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t).$$

$$x(t) = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + (A_1 - A_2) i \sin \omega_0 t.$$

As constantes A_1 e A_2 são arbitrárias, porém estas constantes podem ser complexas, o número de elementos independentes pode ser reduzido para dois, tornando A_1 e A_2 conjugados complexos. Para gerar as combinações de A_1 e A_2 um par arbitrário de constantes, reduzimos a expressão de maneira que:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Lembramos da relação trigonométrica $\cos(\alpha - \lambda) = \cos \alpha \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda$, e definindo as constantes C_1 e C_2 como, $C_1 = A \cos \phi$ e $C_2 = A \sin \phi$. Obtemos:

$$x(t) = A \cos \phi \cos \omega_0 t + A \sin \phi \sin \omega_0 t.$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi). \quad (3.2)$$

Dependendo da definição exata da fase ϕ , a solução pode ser escrita de uma forma alternativa, onde as fases ϕ e η diferem entre si por $\frac{\pi}{2}$, essa alteração no ângulo de fase representa uma mudança no instante inicial $t = 0$, assim temos também como solução da equação a seguinte expressão:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \eta). \quad (3.3)$$

As equações 3.2 e 3.3 exibem o comportamento senoidal do deslocamento do oscilador harmônico simples, onde A é a máxima distância que o corpo pode ir em relação à sua posição de equilíbrio, ou seja, amplitude do movimento. O ϕ e η , ângulos de fase, representam onde o movimento se inicia. Abaixo ilustramos um exemplo desse comportamento, na Figura 3, impondo condições iniciais.

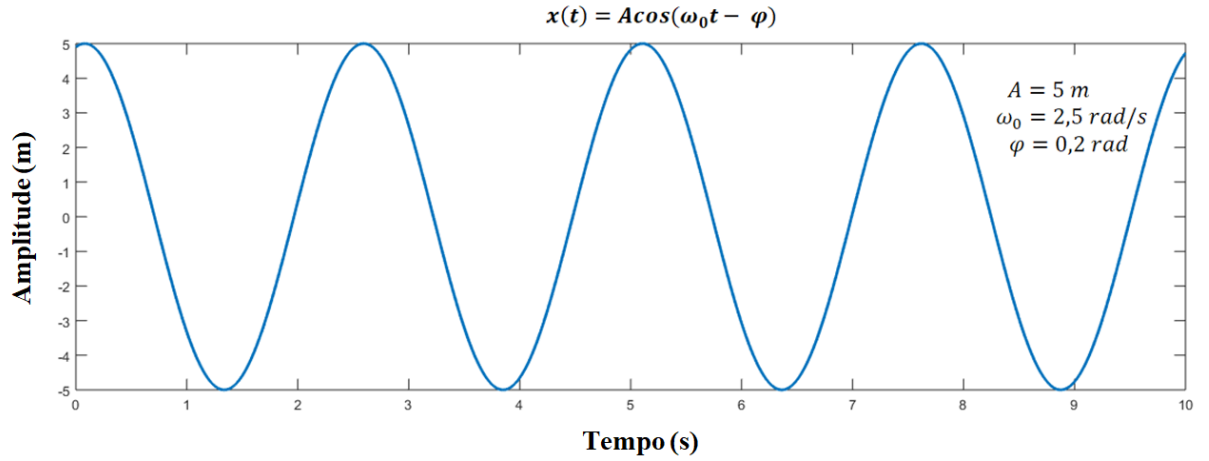


Figura 3: Resposta harmônica do oscilador harmônico simples. *Fonte:* Autoria própria

Nas equações de funções harmônicas do tempo o movimento é simétrico em relação à posição de equilíbrio da massa, a velocidade apresenta um ponto de máximo e a aceleração é nula toda vez que a partícula passa pela posição de equilíbrio. Nos deslocamentos extremos, a velocidade é nula e a aceleração é máxima. Além disso, podemos obter a energia total do oscilador. Para isso devemos encontrar a energia cinética.

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t - \phi).$$

$$T = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t - \phi). \quad (3.4)$$

A energia potencial do oscilador pode ser obtida pelo cálculo do trabalho necessário para deslocar o corpo a uma distância x . Em oposição a força restauradora, a quantidade incremental de trabalho dW para movimentar o corpo a uma distância dx é:

$$dW = -Fdx = kx dx.$$

$$U = \int_0^x kx dx. \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}kx^2.$$

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi). \quad (3.5)$$

A energia mecânica total do oscilador é a soma da energia cinética T com a energia potencial U , portanto:

$$E = T + U. \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega_0 t - \phi) + \cos^2(\omega_0 t - \phi)].$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \quad (3.6)$$

Nota-se que o resultado é constante, independe do tempo, com isso a energia se conserva, de fato não há dissipação já que a princípio não levamos em conta perdas por atrito ou ações externas de forças. A energia depende apenas da amplitude e da rigidez da mola, sendo proporcional ao quadrado da amplitude, resultado geral para sistemas lineares. O período de movimento é definido como o intervalo de tempo entre as repetições sucessivas da posição da partícula. Esse intervalo ocorre quando o argumento da função trigonométrica aumenta por 2π , ou seja:

$$\omega_0 \tau_0 = 2\pi. \quad \implies \quad \tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Assim, a frequência ν_0 é indicada por:

$$\nu_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.7)$$

Observa-se que o período do oscilador harmônico simples não depende da amplitude, isto é, da energia mecânica total do sistema. Um sistema que assume essa característica é conhecido como *isócrono* [20]. Destacamos que esse é um caso especial, isto pois, só ocorre no limite da aproximação de primeira ordem (Lei de Hooke), caso a amplitude aumentasse muito a força deixaria de ser linear.

Nas próximas seções daremos início ao tratamento de sistemas sujeitos a forças dissipativas (amortecimento). Iniciaremos apresentando um sistema massa/mola sujeito à ação de uma força de magnitude constante, esse problema é interessante pois embora o sistema massa/mola seja frequentemente estudado no contexto dos osciladores em física, o sistema amortecido por uma força de magnitude constante raramente aparece discutido nos livros didáticos da área.

3.2 Oscilações livres com amortecimento constante

O amortecimento constante é resultado do deslizamento de duas superfícies secas, onde a força de amortecimento (atrito) é igual ao produto entre a força normal e o coeficiente de atrito ($F = N\mu$), evidências experimentais exibem independência da velocidade e do deslocamento nesse tipo de amortecimento [14].

Por simplicidade vamos considerar um sistema com apenas um grau de liberdade sujeito a atrito entre superfícies secas conforme representado na Figura 4a. Sabemos que a força de atrito sempre é oposta à tendência de movimento e, portanto, o seu sentido varia a cada ciclo seguindo as alterações no sentido da velocidade. Dessa forma, a equação diferencial de movimento será diferente em intervalos de meio ciclo, ou seja, devemos considerar em nossos cálculos dois casos específicos, seguindo a orientação da força de atrito conforme observamos na Figura 4b e 4c.

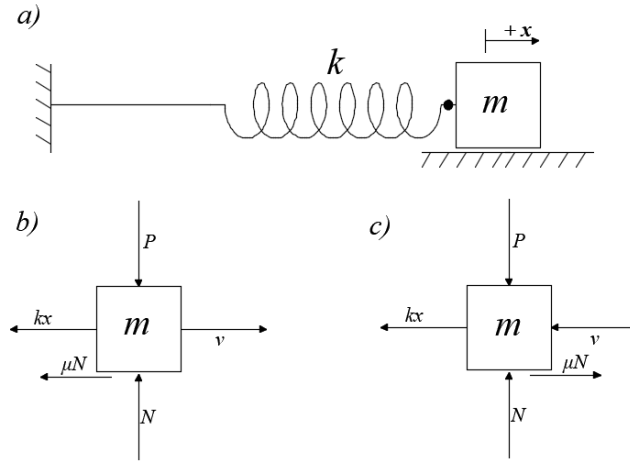


Figura 4: a) Oscilador massa/mola com atrito entre superfícies secas. b) Caso 1. $x > 0$ e $v > 0$. c) Caso 2. $x < 0$ e $v < 0$. Fonte: Autoria própria

No primeiro caso, notamos que quando o deslocamento é positivo ($x > 0$), segundo a nossa orientação de referência, a velocidade também é positiva ($\frac{dx}{dt} > 0$), a partícula se movimenta da esquerda para a direita, com isso, pela segunda lei de Newton a equação de movimento é dada por:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu N. \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = -\frac{\mu N}{m}.$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{\mu N}{m}. \quad (3.8)$$

Onde temos $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Essa equação diferencial não homogênea possui duas parcelas em sua solução geral, uma delas consiste na solução complementar, discutida anteriormente em oscilações harmônicas, cuja solução é indicada por:

$$x_h(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t.$$

A outra parcela consiste na solução particular, para encontrar o formato dessa solução, utilizando o método dos coeficientes a determinar, obtém-se a solução particular que representa a combinação linear de um conjunto linearmente independente de funções, para esse problema o termo não homogêneo constitui de uma constante, admitimos que a solução tem a seguinte forma:

$$x_p(t) = A. \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_p}{dt} = 0. \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x_p}{dt^2} = 0.$$

Substituindo a derivada segunda e a função na equação diferencial 3.8, temos:

$$\omega_0^2 A = -\frac{\mu N}{m}. \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\mu N}{m \omega_0^2}.$$

$$x_p(t) = A = -\frac{\mu N}{k}.$$

Portanto, a solução geral pode ser expressa de tal forma que A_1 e A_2 são constantes cujos valores dependem das condições iniciais desse meio ciclo.

$$x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}. \quad (3.9)$$

No segundo caso, observamos que quando o deslocamento é negativo ($x < 0$) mediante o sistema de referência adotado, a velocidade é negativa ($\frac{dx}{dt} < 0$), a partícula se movimenta da direita para a esquerda, pela segunda lei de Newton obtemos a equação:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + \mu N. \implies \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{\mu N}{m}.$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{\mu N}{m}. \quad (3.10)$$

De maneira análoga ao primeiro caso, a solução geral para essa fração do problema é indicada pela expressão:

$$x(t) = A_3 \cos \omega_0 t + A_4 \sin \omega_0 t + \frac{\mu N}{k}. \quad (3.11)$$

Com A_3 e A_4 constantes a serem determinadas pelas condições iniciais desse meio ciclo. As soluções encontradas indicam que para cada meio ciclo o movimento é harmônico e a posição de equilíbrio muda de $\frac{\mu N}{k}$ para $-\frac{\mu N}{k}$.

Nota-se que a aplicação da segunda lei de Newton à partícula produz duas equações diferenciais lineares que descrevem a função de posição da massa dependendo de sua velocidade. Interpretamos que cada fração de solução só é válida até o ponto de ‘virada’ no oscilador, ou seja, cada solução tem validade até certo ponto havendo uma alternância entre as duas soluções encontradas na análise do problema. O ideal é encontrar uma única equação que expresse o comportamento do problema em sua totalidade.

A fim de expressar as equações 3.8 e 3.10 em uma só configuração iremos adotar uma função que contemple ambas soluções, a função mais adequada para essa problemática é denominada *função sinal*. Em matemática essa função retorna o sinal do número real, e possui a seguinte definição [21]:

$$\text{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Introduzindo essa função nas equações de movimento, sabendo que $N = mg$, podemos expressa-las em uma só equação da seguinte forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + mg \mu \text{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right) + kx = 0.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\mu \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.13)$$

Onde $\operatorname{sgn}(dx/dt)$ é a função sinal, cujo valor segue a definição 3.12. Essa equação diferencial revela pontos de descontinuidade no problema. É trabalhoso encontrar analiticamente a resposta do movimento, contudo, métodos numéricos podem ser utilizados para resolver essa problemática, utilizaremos por conveniência o *método de Runge-Kutta*² pois iremos determinar a resposta dinâmica do oscilador programando numa rotina em Matlab.

O programa Matlab possui diversas funções residentes nas quais são usadas para resolver desde uma única equação diferencial ordinária a sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem [22]. A função residente do Matlab utilizada para resolver o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que iremos obter implementando no problema o método de Runge-Kutta explícitos de segunda ordem é a ‘ode23’, indicada para problemas como o da equação 3.13.

A solução numérica é um procedimento na qual se emprega o cálculo de estimativa para a solução associada a um conjunto de pontos discretos. O processo para determinar a solução é incremental, feito passo a passo, começando do ponto onde o valor inicial é fornecido. A partir daí de posse da solução conhecida no primeiro ponto determina-se uma solução em um segundo ponto, e assim por diante. Nos processos que abordam passos simples a solução no ponto seguinte, x_{i+1} é calculada a partir da solução conhecida no ponto atual x_i [23].

O métodos explícitos de cálculo numérico são aqueles que calculam o estado do sistema em um tempo posterior ao estado atual, ao passo que métodos implícitos obtém a solução resolvendo a equação que envolve ambos estados do sistema [22]. Detemos de um problema cujo método explícito de cálculo numérico se fará útil para os cálculos, nele se usa uma fórmula explícita para calcular o valor da variável dependente no próximo valor da variável independente em uma fórmula explícita, o próximo valor desconhecido da variável dependente y_{i+1} , é calculado utilizando uma expressão na forma:

$$y_{i+1} = f(x_i, x_{i+1}, y_i).$$

Onde x_i , y_i e x_{i+1} são grandezas conhecidas. Utilizaremos o método numérico para o presente problema pois uma equação diferencial de ordem n deve ser convertida em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem antes de empregar a função residente em Matlab [16], isto é, primeiramente devemos resolver a equação diferencial de segunda ordem pelo método de Runge-Kutta, na qual vamos gerar duas equações diferenciais de

² Os métodos de Runge-Kutta formam uma família de métodos iterativos implícitos e explícitos para a resolução numérica de soluções de equações diferenciais ordinárias, técnica esta desenvolvida por volta de 1900 pelos matemáticos C. Runge e M.W. Kutta.

primeira ordem. Admitindo as seguintes condições iniciais, $x(0) = 0,5$ e $\frac{dx(0)}{dt} = 0$, para reescrever a equação 3.13 como um conjunto de duas equações diferenciais de primeira ordem, mediante a introdução de:

$$x_1 = x \quad e \quad x_2 = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}.$$

Devemos, pelo método, fazer:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 = f_1(x_1, x_2).$$

Assim, pela equação 3.13, obtemos:

$$\frac{dx_2}{dt} + \mu g \operatorname{sgn}(x_2) + \frac{k}{m} x_1 = 0. \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dt} = -\mu g \operatorname{sgn}(x_2) - \frac{k}{m} x_1 = f_2(x_1, x_2).$$

Em notação matricial observa-se:

$$\frac{dx}{dt} = f = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ -\mu g \operatorname{sgn}(x_2) - \frac{k}{m} x_1 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Onde

$$x(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix}.$$

Por fim, ao simular a resposta da oscilação livre de um sistema com amortecimento constante em uma rotina no Matlab, utilizando ode23 para os seguintes parâmetros do oscilador, $m = 10 \text{ kg}$, $k = 200 \text{ N/m}$ e $\mu = 0,5$, obtemos a resposta indicada na Figura 5. Reescrevemos a equação do problema na forma matricial, pois as entradas no programa em Matlab fará a leitura por meio da introdução dos parâmetros em forma de matrizes.

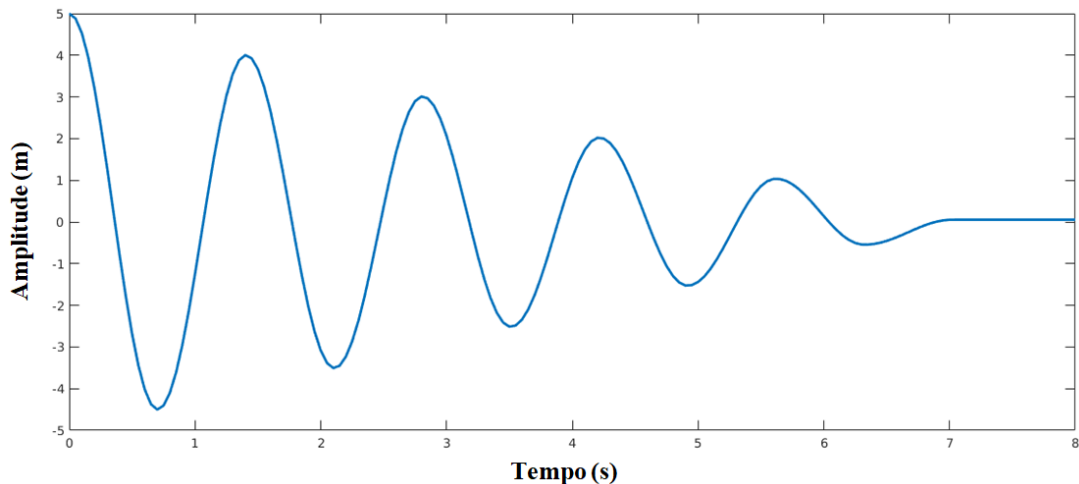


Figura 5: Resposta do oscilador com amortecimento constante. *Fonte:* Autoria própria

Como podemos observar pelo procedimento numérico, o processo para determinar a solução do problema de oscilações com amortecimento constante é incremental, feito passo a passo em acordo com as duas equações de movimento encontrada nas soluções em 3.9 e 3.11, cada uma no seu respectivo meio ciclo, todavia, as iterações do problema podem ser avaliadas analiticamente pela simulação das soluções 3.9 e 3.11, dividindo o eixo do tempo em seguimentos separados por, $\frac{dx}{dt} = 0$, isto é, intervalos de tempo com direções de movimento diferentes, vamos inferir que as condições iniciais do ponto de partida sejam $x(0) = x_0$ e $\frac{dx}{dt} = 0$, e o movimento começando da direita para a esquerda, assim, aplicando as condições iniciais e avaliando as constantes na equação 3.11, temos:

$$x(0) = A_3 \cos 0 + A_4 \sin 0 + \frac{\mu N}{k} = x_0. \quad \Rightarrow \quad A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}. \quad (3.15)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = -A_3 \omega_0 \sin 0 + A_4 \omega_0 \cos 0. \quad \Rightarrow \quad A_4 = 0. \quad (3.16)$$

Dessa forma, reescrevendo a equação 3.11 com as constantes determinadas, temos:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega_0 t + \frac{\mu N}{k}. \quad (3.17)$$

Essa solução é válida apenas para metade do ciclo, isto é, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_0}$. Quando $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ a partícula estará em sua posição extrema esquerda e seu deslocamento em relação à posição de equilíbrio é:

$$x_1\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \pi + \frac{\mu N}{k}. \quad \Rightarrow \quad x_1\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right).$$

As quantidades x_0 , x_1 e $x_2, \dots$, denotam as amplitudes do movimento em meios ciclos sucessivos. Lembrando que o movimento iniciou com um deslocamento de $x = x_0$ e em meio ciclo o valor se tornou $-\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$, é perceptível que a redução em magnitude no tempo $\frac{\pi}{\omega_0}$ é de $\frac{2\mu N}{k}$. No segundo meio ciclo a massa se movimenta da esquerda para a direita, para determinar as constantes A_1 e A_2 desse período precisamos primeiramente estabelecer as condições iniciais dessa fração do problema, o novo $x(0)$ será o valor de x em $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, assim como, o novo $\frac{dx(0)}{dt}$ será o valor de $\frac{dx}{dt}$ em $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, portanto, de posse da equação 3.17, podemos:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \pi + \frac{\mu N}{k}. \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right). \quad (3.18)$$

$$\frac{dx\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)}{dt} = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \sin \pi. \quad \Rightarrow \quad \frac{dx\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)}{dt} = 0. \quad (3.19)$$

Estas são as condições iniciais para a fração de solução governada pela equação 3.9, aplicando as condições iniciais nessa equação, obtemos:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = A_1 \cos \pi + A_2 \sin \pi - \frac{\mu N}{k}.$$

$$-\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) = -A_1 - \frac{\mu N}{k}. \quad \implies \quad A_1 = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right). \quad (3.20)$$

$$\frac{dx\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)}{dt} = -A_1\omega_0 \sin \pi + A_2\omega_0 \cos \pi. \quad \implies \quad A_2 = 0. \quad (3.21)$$

Dessa maneira, reescrevendo a equação 3.9 com as constantes A_1 e A_2 determinadas, podemos:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right) \cos \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}. \quad (3.22)$$

Semelhante ao primeiro caso que avaliamos, essa solução só tem validade para o segundo meio ciclo onde o tempo pertence o intervalo $\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}$. Ao final da metade desse ciclo, o valor de x e de $\frac{dx}{dt}$ são:

$$x_2\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right) \cos 2\pi - \frac{\mu N}{k}. \quad \implies \quad x_2\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \left(x_0 - \frac{4\mu N}{k}\right). \quad (3.23)$$

$$\frac{dx\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)}{dt} = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right) \sin 2\pi. \quad \implies \quad \frac{dx\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)}{dt} = 0. \quad (3.24)$$

Que se tornam as condições iniciais para o terceiro meio ciclo. Esse procedimento pode ser mantido até que o movimento do oscilador cesse. O movimento para quando $x_n \leq \frac{\mu N}{k}$, visto que, sob essa circunstância a força restauradora exercida pela mola (kx) tem magnitude menor que a força de atrito (μN). O número de meios ciclos que transcorrem antes do movimento parar é dado por:

$$x_0 - n\left(\frac{2\mu N}{k}\right) \leq \frac{\mu N}{k}. \quad \implies \quad n \geq \left\lceil \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}} \right\rceil. \quad (3.25)$$

Em cada ciclo sucessivo a amplitude do movimento é reduzida em $\frac{4\mu N}{k}$, de modo que as amplitudes ao final de quaisquer ciclos consecutivos estejam relacionadas por:

$$x_m = x_{m+1} - \frac{4\mu N}{k}.$$

Observa-se que a redução da amplitude ocorre por uma quantia de $\frac{4\mu N}{k}$, em um ciclo no intervalo de $\frac{2\pi}{\omega_0}$, dessa forma, a inclinação das retas de decaimento pode ser definida pela relação:

$$-\frac{\frac{4\mu N}{k}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = -\frac{2\mu N\omega_0}{\pi k}. \quad (3.26)$$

A seguir, na Figura 6, ilustramos o resultado da simulação em Matlab com a indicação dos parâmetros avaliados por meio da iteração feita manualmente.

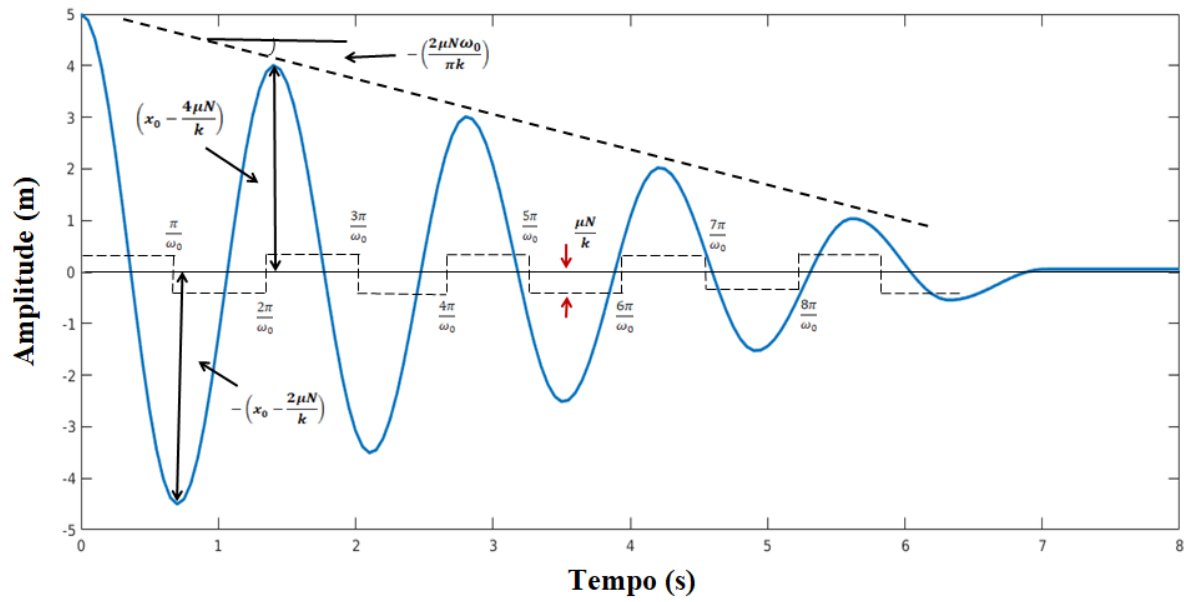


Figura 6: Movimento oscilatório com amortecimento constante, indicação das amplitudes dos dois primeiros meio ciclos, amplitude decaindo linearmente. *Fonte:* Autoria própria

A amplitude do movimento no amortecimento constante decai aritmeticamente, ao passo que no amortecimento viscoso a amplitude sofre uma redução exponencial, a amplitude no amortecimento constante, sobretudo, diminui por um montante fixo a cada ponto de ‘virada’, Figura 6. O movimento com o amortecimento constante é periódico, ao passo que pode ou não ser periódico em um sistema viscosamente amortecido. Na seção a seguir, abordaremos o sistema mecânico amortecido por uma força que é proporcional a uma potência da velocidade, os problemas que sequeciam essa seção serão modelados por um sistema viscosamente amortecido.

3.3 Oscilações livres com amortecimento viscoso

Sistemas mecânicos realistas sofrem efeito de forças de atrito, que conduzem a extinção do movimento. Em geral, o modelo de amortecimento viscoso é o mais utilizado em práticas experimentais de física e engenharia, já que este encaminha equações de movimento moderadamente simplista, na qual fornece resultados satisfatórios em um número muito grande de aplicações. O coeficiente de amortecimento na construção de um modelo experimental é a propriedade que manifesta maior incerteza, esse valor é obtido experimentalmente e não se fundamenta na geometria do elemento, nem nas propriedades dos materiais [4]. Como vimos anteriormente, a força de amortecimento viscoso é uma função linear proporcional à velocidade vetorial, indicada por:

$$F = -b \frac{dx}{dt}.$$

De modo que o b é o coeficiente de amortecimento viscoso, cujo sinal negativo simboliza oposição ao sentido da velocidade. Ao imaginar uma partícula de massa m , em um sistema com um grau de liberdade se movendo sob a combinação de uma força resistiva e uma força de restauração linear, se uma posição x dessa partícula for medida em relação à posição de equilíbrio, aplicando a segunda lei de Newton, temos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx. \quad \implies \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Como sabemos a frequência angular do oscilador é $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e β indica o parâmetro de amortecimento definido por:

$$\beta = \frac{b}{2m}.$$

Dessa forma, podemos escrever a equação diferencial que descreve o movimento da partícula sujeita a força resistiva da seguinte maneira:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.27)$$

De posse da equação algébrica oriunda da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, determinamos as raízes da equação quadrática, assim:

$$m^2 + 2\beta m + \omega_0^2 = 0.$$

$$m = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2}. \quad \implies \quad m = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial do movimento amortecido pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x(t) = e^{-\beta t} [C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}]. \quad (3.28)$$

O primeiro termo dessa solução é uma função do tempo, exponencial descendente, contudo, observando o termo dentro da raiz, nota-se que existem três casos específicos de interesse para a descrição do movimento. Isto pois, essa raiz pode se encontrar no domínio dos números reais ou dos números complexos, e podem ser iguais ou distintas. Para isso, iremos analisar a natureza das raízes e o comportamento separadamente da solução em cada caso. Quando o termo de amortecimento $\beta^2 > \omega_0^2$, os expoentes da equação são números reais, não há oscilação possível, isso se refere ao caso de *superamortecimento*. Quando o termo $\beta^2 < \omega_0^2$, o expoente se torna um número complexo, isto é, $\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t$. Uma vez que

$$e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t} = \cos \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t \pm i \sin \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t.$$

os termos entre colchetes da equação 3.28 são oscilatórios, a esse caso denomina-se *subamortecimento*. Para o valor de $\beta^2 = \omega_0^2$, o radical se reduz a zero, esse caso limite entre o movimento oscilatório e não oscilatório é chamado de *amortecimento crítico* [14]. A seguir iremos averiguar o resultado do movimento nos três casos.

3.3.1 Movimento Subamortecido

O movimento onde o oscilador permeia no regime de amortecimento subcrítico é dominado pela força restauradora, definindo ω_1 como a frequência angular do oscilador amortecido, de tal forma que $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, as raízes da equação algébrica são os seguintes números complexos conjugados:

$$m = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

$$m = -\beta \pm i\sqrt{\omega_1^2}.$$

As raízes são complexas, dessa forma, a solução mais geral se enquadra na combinação linear das funções:

$$x(t) = e^{-\beta t}[C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}].$$

É possível compactar essa solução em termos de apenas uma função harmônica com fase ajustável. Porém, primeiro, devemos escreve-la em termos de funções trigonométricas utilizando a fórmula de Euler, assim:

$$x(t) = e^{-\beta t}[C_1(\cos \omega_1 t + i \sen \omega_1 t) + C_2(\cos \omega_1 t - i \sen \omega_1 t)].$$

$$x(t) = e^{-\beta t}[A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sen \omega_1 t].$$

Definindo as constantes A_1 e A_2 como $A_1 = A \cos \phi$ e $A_2 = A \sen \phi$, e utilizando a identidade trigonométrica $\cos(\alpha - \lambda) = \cos \alpha \cos \lambda + \sen \alpha \sen \lambda$, temos:

$$x(t) = e^{-\beta t}[A \cos \phi \cos \omega_1 t + A \sen \phi \sen \omega_1 t].$$

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi). \quad (3.29)$$

Nessa solução temos um termo oscilante dado pela função trigonométrica, todavia, a amplitude do oscilador amortecido decai exponencialmente com o tempo devido ao fator $e^{-\beta t}$, isto é, o sistema oscila numa amplitude cada vez menor em torno do ponto de equilíbrio, e retorna gradativamente à posição neutra em movimento não periódico, vejamos esse comportamento na Figura 7.

O decremento logarítmico do movimento é conhecido pela taxa de redução da amplitude, definido em função do logaritmo natural, com a razão entre duas amplitudes de oscilação em dois pontos de máximos consecutivos [15].

$$e^{\beta \tau_1} = \frac{Ae^{-\beta T}}{Ae^{-\beta(T+\tau_1)}}.$$

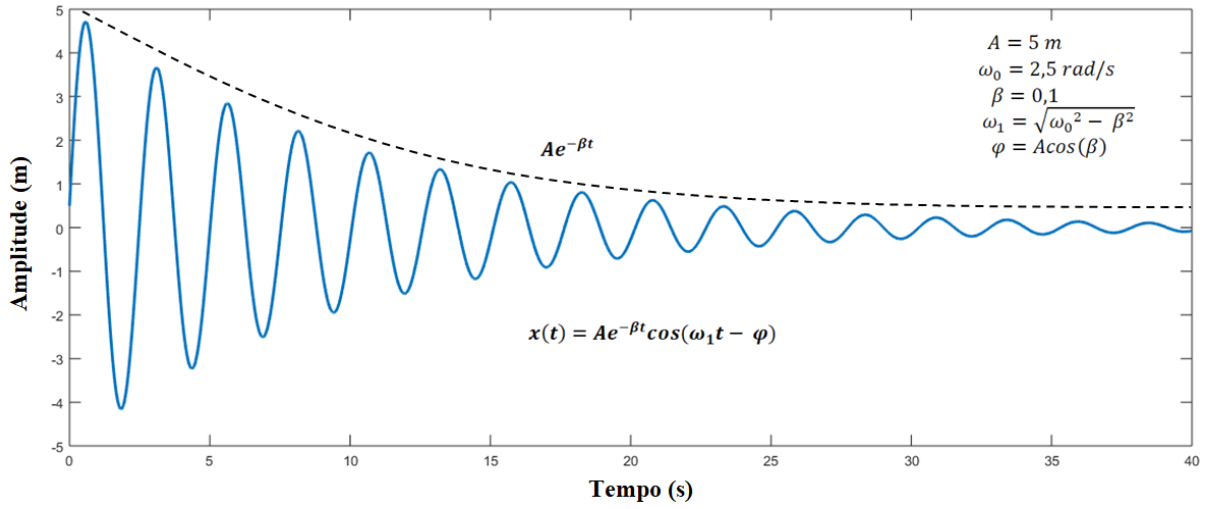


Figura 7: Resposta oscilatória no amortecimento subcrítico. *Fonte:* Autoria própria

No limite onde o atrito se torna desprezível, ou seja, $\beta \ll \omega_1$, determina-se a solução do oscilador harmônico durante um tempo tão longo quanto se precise, e a frequência de oscilação ω_1 se torna a frequência natural do oscilador ω_0 . Podemos obter a energia do oscilador amortecido, para isso admitindo a solução encontrada em 3.29 e sabendo que a energia total é a soma da energia cinética com a energia potencial elástica, temos:

$$E = T + U. \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

$$E = \frac{1}{2}m \{ A[-\beta e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi) - \omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \phi)] \}^2 + \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} \cos^2(\omega_1 t - \phi).$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} \{ [\beta \cos(\omega_1 t - \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \phi)]^2 + \frac{k}{m} \cos^2(\omega_1 t - \phi) \}.$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} \{ \beta^2 \cos^2(\omega_1 t - \phi) + 2\beta\omega_1 \cos(\omega_1 t - \phi) \sin(\omega_1 t - \phi) + \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \phi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega_1 t - \phi) \}.$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} \{ (\beta^2 + \omega_0^2) \cos^2(\omega_1 t - \phi) + \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \phi) + 2\beta\omega_1 \cos(\omega_1 t - \phi) \sin(\omega_1 t - \phi) \}.$$

Sabendo que a função trigonométrica seno do arco duplo é $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, podemos condensar a equação da energia em:

$$E = \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} \{ (\beta^2 + \omega_0^2) \cos^2(\omega_1 t - \phi) + \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \phi) + \beta\omega_1 \sin 2(\omega_1 t - \phi) \} \quad (3.30)$$

Diferentemente das oscilações harmônicas, a energia no sistema amortecido não é constante no tempo. A energia na verdade é continuamente fornecida ao meio de amortecimento e dissipada em forma de radiação, a taxa temporal de variação da energia é:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + kx \left(\frac{dx}{dt} \right) \implies \frac{dE}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \right) \left[m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + kx \right]. \\ \frac{dE}{dt} &= -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \implies \frac{dE}{dt} = -2m\beta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A taxa de diminuição de energia mecânica não ocorre uniformemente, ela é proporcional ao quadrado da velocidade vetorial, além de sempre ser ≤ 0 e nula quando a velocidade assumir valores nulos.

Uma propriedade que guarda interesses especiais por tratar de uma contagem de ciclos em um oscilador harmônico com a presença de amortecimento pequeno é indicada por uma medida de qualidade [17]. Quanto menor for o amortecimento, maior será o período de tempo de contagem de oscilações sem perder informações a respeito da fase inicial. O número de ‘oscilações disponíveis’ no oscilador com amortecimento é designado por um fator de qualidade Q . Essa propriedade intrínseca do oscilador é definida pela razão entre o tempo de decaimento τ_β e o período de oscilação τ_0 .

$$Q = 2\pi \frac{\tau_\beta}{\tau_0} = \omega_0 \tau_\beta = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (3.32)$$

3.3.2 Movimento Criticamente Amortecido

Quando o amortecimento no movimento ocorre na ‘fronteira’ entre o meio sub-crítico e supercrítico, isto é, para $(\beta^2 = \omega_0^2)$, o regime de amortecimento é denominado crítico. Nesse caso limite as raízes da equação característica oriunda da equação diferencial de segunda ordem são:

$$m = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \implies m_1 = m_2 = -\beta.$$

Haja vista que essa circunstância se enquadra no caso onde as raízes são reais e iguais, podemos escrever a solução da equação na forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} \implies x(t) = e^{-\beta t} (C_1 + C_2 t). \\ x(t) &= e^{-\omega_0 t} (C_1 + C_2 t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Observamos pela Figura 8, a resposta do movimento quando sujeito a esse tipo de amortecimento, nota-se que nesta solução o sistema retorna ligeiramente ao equilíbrio, o mecanismo de amortecimento não apresenta uma oscilação. Amortecedores mecânicos em geral são configurados no regime crítico de amortecimento devido ao conforto que esse caso em particular fornece aos sistemas [20].

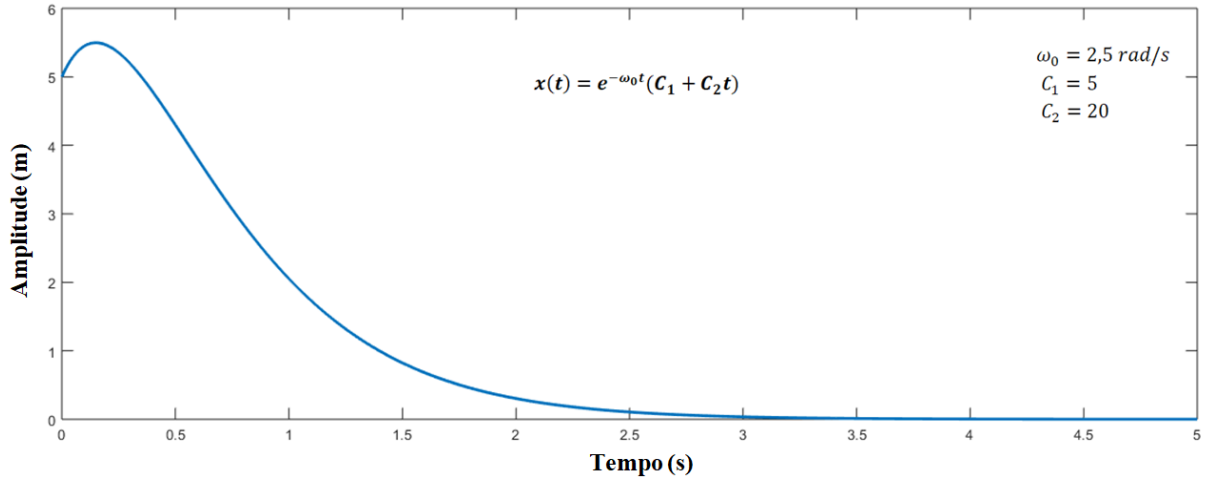


Figura 8: Resposta do movimento no amortecimento crítico. *Fonte:* Autoria própria

3.3.3 Movimento Superamortecido

O regime de amortecimento chamado supercrítico ocorre quando o quadrado do parâmetro de amortecimento β é maior que o quadrado da frequência natural de oscilação ω_0 , isto é $\beta^2 > \omega_0^2$, dessa forma as raízes m assumem valores reais e distintos. Admitindo $\omega_2^2 = \beta^2 - \omega_0^2$, onde ω_2^2 não representa uma frequência angular já que o movimento não é periódico, temos as soluções da equação característica da equação diferencial homogênea os seguintes números reais:

$$m = -\beta \pm \sqrt{\omega_2^2}. \quad \Rightarrow \quad m = -\beta \pm \omega_2.$$

As raízes são reais e distintas, de tal forma que a solução geral para essa circunstância se enquadra na combinação linear das funções:

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}].$$

Definindo as constantes como $A_1 = \frac{A}{2} e^{-\phi}$ e $A_2 = \frac{A}{2} e^{\phi}$, podemos reescrever a solução da seguinte maneira:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[\frac{A}{2} e^{-\phi} e^{\omega_2 t} + \frac{A}{2} e^{\phi} e^{-\omega_2 t} \right]. \quad \Rightarrow \quad x(t) = A e^{-\beta t} \left[\frac{e^{(\omega_2 t - \phi)} + e^{-(\omega_2 t - \phi)}}{2} \right].$$

Para condensar a solução em termos de uma função hiperbólica, lembrando do formato da função hiperbólica cosseno indicada abaixo :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Observando a semelhança da função com o último termo da solução, podemos finalmente escrever a solução geral da equação diferencial em termos de uma função hiperbólica, assim:

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cosh(\omega_2 t - \phi). \quad (3.34)$$

Essa solução revela o movimento não periódico desse tipo de amortecimento, uma vez que o cosseno hiperbólico não é uma função periódica. Diferentemente do oscilador harmônico subamortecido o sistema não apresenta uma oscilação, o decaimento para a posição de equilíbrio ocorre rapidamente. Em suma, o movimento superamortecido do oscilador pode apresentar decaimentos extremamente rápido, como podemos ver na Figura 9, esse amortecimento muito rápido depende é claro das condições iniciais do problema.

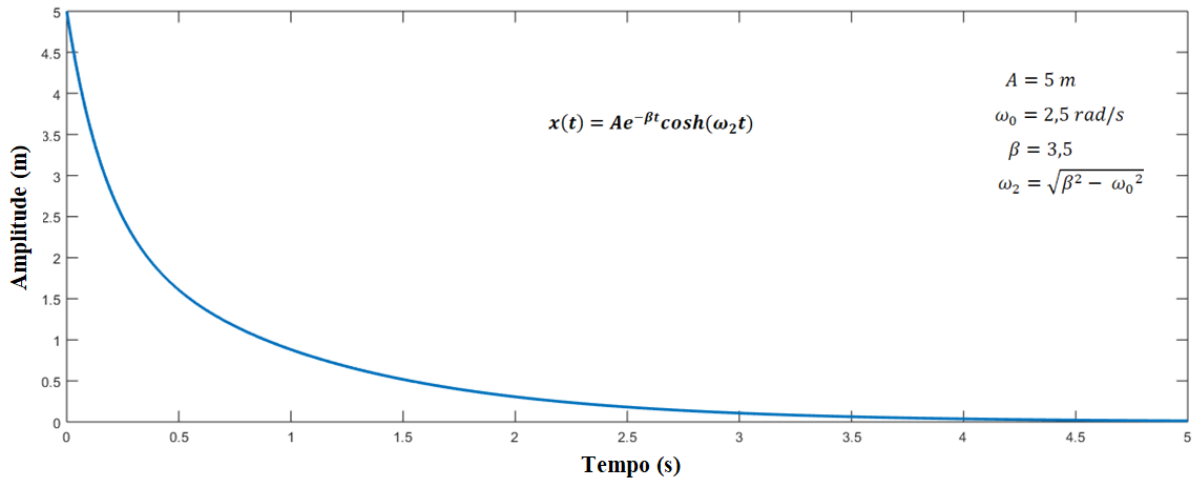


Figura 9: Resposta do movimento no amortecimento supercrítico. *Fonte:* Autoria própria

Tendo em vista que uma força linear de restauração produz uma resposta oscilante caso o amortecimento (atrito) não domine o movimento, subamortecimento, o próximo estudo compreende a aplicação de uma força externa na partícula oscilante. Nesse sistema mecânico, a configuração de oscilação sujeito a uma força externa é conhecida como oscilação forçada, na seção a seguir, discutiremos as implicações dinâmicas nos sistemas oscilantes submetidos à classes distintas de excitações.

3.4 Oscilações forçadas

Nas seções anteriores examinamos oscilações livres, onde o oscilador recebe inicialmente uma energia, seja por velocidades iniciais ou deslocamentos, e em seguida é solto desenvolvendo livremente seu movimento, as oscilações são amortecidas pelas forças de resistência atuante no sistema físico, exceto no caso limite onde ao desprezá-la, o movimento não cessa, ou seja, permeia indefinidamente (oscilações harmônicas). Além disso, o período de oscilação é subordinado pela natureza do oscilador, isto é, pela força de restauração atuante nele e sua inércia. Vamos conduzir o nosso estudo analisando a implicação produzida por uma força externa no oscilador. O período dessa ação externa pode ou não coincidir com o período natural de oscilação. A energia oriunda da força externa preenche continuamente a energia do oscilador ao compensar a dissipação no amortecimento.

A natureza da força empregada ao sistema físico pode ser harmônica, periódica arbitrária, não periódica ou aleatória. Para cada classificação existem métodos para a determinação da resposta oscilatória, as forças harmônicas são expressas pelas funções trigonométricas seno e cosseno, as forças periódicas arbitrárias incluem as harmônicas como caso particular, se repetem em intervalos de tempo iguais, e sob certas condições veremos que podem ser desenvolvidas em séries infinitas de funções harmônicas [4].

A excitação não periódica pode ser de curta ou longa duração, a força não periódica de curta duração é conhecida como impulsiva, se caracteriza por ter grande intensidade, atuando em intervalos de tempo muito curtos, para a força impulsiva abordaremos uma notável ferramenta sujeita a um impulso unitário, a delta de Dirac. Para obter a resposta oscilatória do sistema com a aplicação de uma força não periódica de longa duração, vários são os métodos que podem ser adotados, dentre eles, a excitação pelo método da integral de convolução, integração de Fourier ou pelas transformadas de Laplace [16].

As oscilações aleatórias diferenciam-se, pois não podemos prever o seu valor instantâneo, suas variações são imprevisíveis, no entanto, assim como muitos fenômenos aleatórios essas também apresentam uma regularidade estatística, sendo possível uma abordagem estatística para esse problema [14].

As vibrações aleatórias contém frequências numa distribuição contínua sobre uma faixa larga, isto é, sob um espectro de frequências, cuja matemática carregaria nesse problema uma distribuição de probabilidade associada a uma função aleatória no tempo, seria necessário um trabalho separado para tratar das oscilações de caráter aleatório, devido a isso, não estudaremos esse comportamento nesse presente texto. Todavia, trataremos das demais classes separadamente, começando pelo modelo físico mais simplista, excitação harmônica na forma $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$, $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \phi)$ ou $F(t) = F_0 e^{i\omega t + \phi}$, onde F_0 é a amplitude, ω é a frequência angular da força de impulsão e ϕ o ângulo de fase da excitação harmônica. A fase ϕ depende do valor de $F(t)$ em $t = 0$, geralmente nulo para efeito de simplificação.

3.4.1 Oscilação amortecida sob força harmônica

Considerando a ação de uma força de impulsão que varia harmonicamente com o tempo, no sistema físico oscilatório viscosamente amortecido, a força total na partícula é:

$$F = -b \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega t.$$

A edo do movimento a partir do diagrama de corpo livre do sistema oscilatório é:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad \implies \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t. \quad (3.35)$$

Admitimos a mesma notação anterior, onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\beta = \frac{b}{2m}$ e $F = \frac{F_0}{m}$. Uma vez que a equação diferencial é de segunda ordem e não homogênea, a solução geral compreende duas partes, uma função complementar (homogênea), que consiste na oscilação livre amortecida, modelada pela equação 3.28, e uma solução particular. Devemos determinar a solução particular do problema para termos a solução completa do oscilador. A solução particular é uma solução de estado permanente de frequência ω igual a da força de excitação externa. Supondo que a solução particular tenha a forma:

$$X_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Calculando as derivadas, obtemos:

$$\frac{dX_p}{dt} = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t. \quad \implies \quad \frac{d^2 X_p}{dt^2} = -C_1\omega^2 \cos \omega t - C_2\omega^2 \sin \omega t.$$

Substituindo-as na equação 3.35, temos:

$$\begin{aligned} -C_1\omega^2 \cos \omega t - C_2\omega^2 \sin \omega t + 2\beta[-C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t] + \omega_0^2[C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t] \\ = F \cos \omega t. \end{aligned}$$

$$[C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + 2C_2\beta\omega] \cos \omega t + [C_2(\omega_0^2 - \omega^2) - 2C_1\beta\omega] \sin \omega t = F \cos \omega t.$$

Dessa forma, igualando os coeficientes, obtemos:

$$C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + 2C_2\beta\omega = F \quad e \quad C_2(\omega_0^2 - \omega^2) - 2C_1\beta\omega = 0.$$

Na segunda equação, podemos:

$$C_2(\omega_0^2 - \omega^2) = 2C_1\beta\omega. \quad \implies \quad C_1 = \frac{C_2(\omega_0^2 - \omega^2)}{2\beta\omega}. \quad (3.36)$$

Substituindo C_1 na primeira equação, determinamos o valor de C_2 , portanto:

$$\frac{C_2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{2\beta\omega} + 2C_2\beta\omega = F. \quad \implies \quad C_2 \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}{2\beta\omega} \right] = F.$$

$$C_2 = \frac{2\beta\omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \quad (3.37)$$

Logo, substituindo o valor de C_2 na equação 3.36, encontramos o valor de C_1 :

$$C_1 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \quad (3.38)$$

Contudo, a solução particular pode ser escrita da seguinte maneira:

$$X_p = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{2\beta\omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \sin \omega t.$$

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} + \frac{2\beta\omega \sin \omega t}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \right].$$

Definindo os termos:

$$\cos \phi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad e \quad \sin \phi = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Podemos reescrever a solução particular:

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} [\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t].$$

Lembrando que o $\cos(\alpha - \lambda) = \cos \alpha \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda$, temos a solução particular para o sistema amortecido sob influência de forças senoidais de impulsão:

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi). \quad (3.39)$$

Onde o ϕ é a fase entre a força externa e o movimento resultante do oscilador.

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

Em geral, ocorre um atraso entre a atuação da força e a resposta do sistema. Vimos que as possíveis soluções para o caso homogêneo propiciam um rápido decaimento exponencial à posição de equilíbrio com o passar do tempo, sendo por isso chamada de *transiente*, Figura 10.

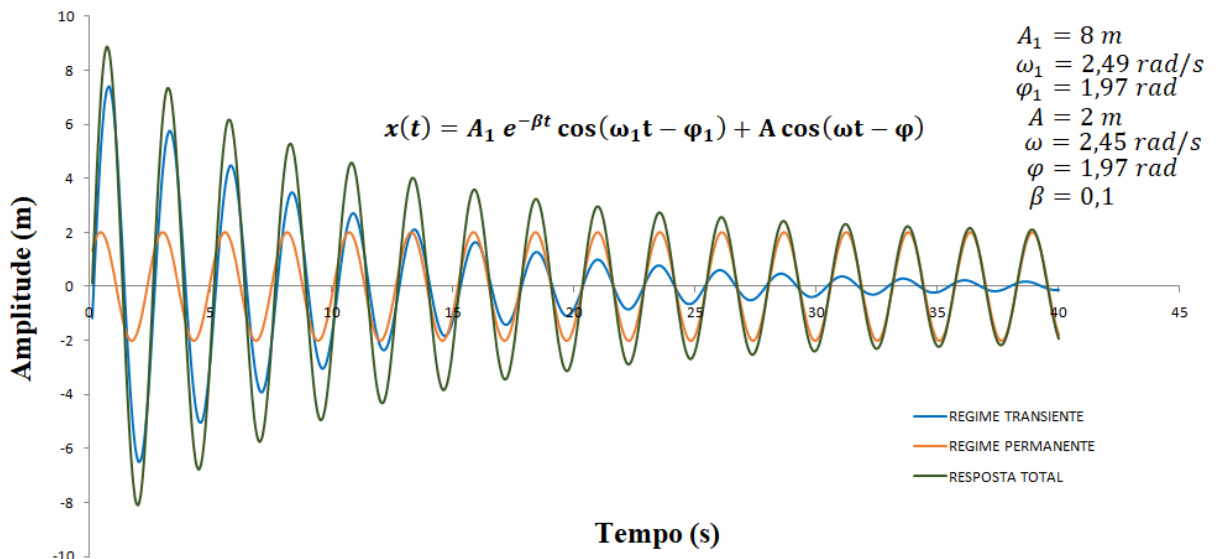


Figura 10: Movimento oscilatório senoidal impulsionado com amortecimento. Solução do estado transiente, permanente e a superposição dos dois. *Fonte:* Autoria própria

Notamos pela equação 3.39, que a amplitude de oscilação é uma função dependente da frequência angular da força de excitação externa, uma vez que ω_0 , β e F permanecem constantes, dessa forma, podemos:

$$A = f(\omega) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (3.40)$$

Essa função é exibida na Figura 11, para diferentes valores de amortecimento, com ω_0 e F fixos. Para $\omega = 0$, a amplitude é simplesmente $\frac{F}{\omega_0^2}$, contudo, no limite de $\omega \rightarrow \infty$, a amplitude tende a zero. Na Figura 11, as curvas revelam a grande influência do fator de amortecimento na amplitude de oscilação e por sua vez, no ângulo de fase em zonas próximas da ressonância. A ressonância é um fenômeno peculiar que acontece em sistemas forçados oscilantes, a discussão do comportamento desse fenômeno é importante, devido sua abrangência na natureza seja em escala macro ou microscópica [13].

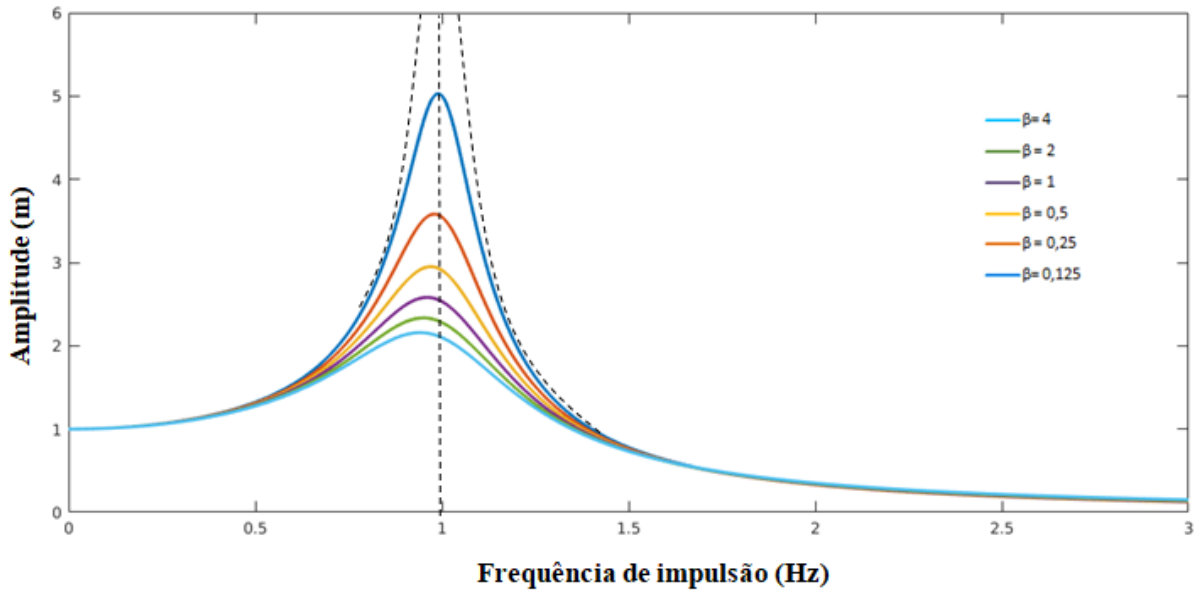


Figura 11: Fator de amplificação dinâmica. Amplitudes em função da frequência ω . *Fonte:* Autoria própria

Para determinar a frequência onde a amplitude de oscilação, na equação 3.40, possui um valor de máximo, ou seja, frequência de ressonância da amplitude, devemos:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0. \quad \implies \quad \frac{d}{d\omega} F [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

$$F \left\{ -\frac{1}{2} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-\frac{3}{2}} [-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\beta^2] \right\} = 0.$$

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\beta^2 = 0. \quad \implies \quad -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2) = 0.$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2 = 0. \implies \omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (3.41)$$

Quando a frequência atinge o valor da equação 3.41, a amplitude assume um valor de máximo. Todavia, a frequência de ressonância ω_R , diminui a medida que o parâmetro de amortecimento β aumenta, observa-se que não ocorre ressonância no limite $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, pois a frequência de ressonância se torna um número imaginário, consequentemente, A decresce monotonicamente com o aumento de ω , e não é isso que verificamos de fato.

Para identificarmos quanto amortecido é o sistema na ressonância, analisamos o seu fator de mérito, dessa forma, como vimos na equação 3.32, o fator de qualidade é definido pela razão entre a frequência de ressonância e o parâmetro de amortecimento.

$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta}. \quad (3.42)$$

No limite onde não há amortecimento no sistema, o fator de qualidade tende ao infinito, $Q \rightarrow \infty$. Quando a excitação externa oscila numa frequência ω , muito próxima à frequência de ressonância ω_R , dependendo do atrito, a amplitude do movimento pode se torna exacerbadamente grande, isso implica na ruptura do movimento devido ao aumento demasiado da amplitude, sob efeitos de ressonância.

A ressonância pode ser um efeito desejável, como no caso de alguns sistemas eletrônicos. No receptor de rádio, por exemplo, é desejável efetuar a sintonia em determinadas estações de rádio sem a interferência de outras estações, melhorando a qualidade sonora do dispositivo, para isso, é trabalhado altos valores de ressonância em uma frequência desejada. Todavia, o mesmo fenômeno não é bem vindo, por exemplo, ao se tratar de grandes estruturas na engenharia, como pontes, viadutos e prédios, porque essas estruturas rompem sob efeitos de ressonância, vibrações externas como ações do vento, terremoto podem provocar esse efeito [20].

Segundo a equação 3.41, para um sistema sem atrito, a frequência de ressonância se torna a frequência natural do oscilador. A força externa oscila numa frequência igual à frequência natural de oscilação. Para analisar o movimento, devemos partir da equação diferencial 3.35, sem a parcela de atrito, isto é, $\beta = 0$. Assim:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t. \quad (3.43)$$

Essa equação diferencial é de segunda ordem e não homogênea, a solução da homogênea associada, é dada por:

$$X_h = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Supondo que a solução particular do problema admite a forma:

$$X_p = A \cos \omega t.$$

Para determinar sua derivada de segunda ordem, devemos:

$$\frac{dX_p}{dt} = -A\omega \sin \omega t. \quad \implies \quad \frac{d^2 X_p}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t.$$

Substituindo os respectivos valores da função e sua derivada segunda na equação diferencial 3.43, obtemos:

$$-A\omega^2 \cos \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t = F \cos \omega t. \quad \implies \quad A(\omega_0^2 - \omega^2) = F.$$

$$A = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Com isso, a solução completa é expressa da seguinte maneira:

$$x(t) = X_h + X_p. \quad \implies \quad x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

As condições iniciais do problema constituem de $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = v_0$, caso particular do oscilador em repouso na posição de equilíbrio, dessa forma, constatamos:

$$C_1 = x_0 - \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad e \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Portanto, reescrevendo a solução do problema, temos:

$$x(t) = \left[x_0 - \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t - \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + F \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]. \quad (3.44)$$

Esse resultado representa a superposição de dois movimentos harmônicos de frequências diferentes, levando ao fenômeno de *Batimentos*, no limite de ω próximo à ω_0 . Nesse tipo de oscilação, a amplitude aumenta e diminui conforme um padrão regular. Considerando o caso particular cujas condições iniciais são $x_0 = v_0 = 0$, a equação 3.44 se reduz a:

$$x(t) = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

De posse da relação trigonométrica:

$$\cos \alpha - \cos \lambda = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \lambda}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \lambda}{2} \right).$$

Podemos expressar o termo oscilante da equação, assim:

$$x(t) = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} \right) t \operatorname{sen} \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \right) t \right].$$

Admitindo a frequência forçante ω ligeiramente menor que a frequência natural ω_0 do oscilador, $\omega_0 - \omega = \varepsilon$, onde ε é uma quantia pequena e positiva, $\omega_0 + \omega = 2\omega$, e ainda $(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = 4\varepsilon\omega$, podemos condensar a equação de tal forma:

$$x(t) = \left(\frac{F}{2\varepsilon\omega} \operatorname{sen} \varepsilon t \right) \operatorname{sen} \omega t. \quad (3.45)$$

Como ε é pequeno, a função $\operatorname{sen} \varepsilon t$ varia de forma lenta, o período é $\frac{2\pi}{\varepsilon}$, portanto grande, em contrapartida o outro termo senoide vibra com um período menor de $\frac{2\pi}{\omega}$. Dessa forma, a amplitude aumenta e diminui constantemente, Figura 12.

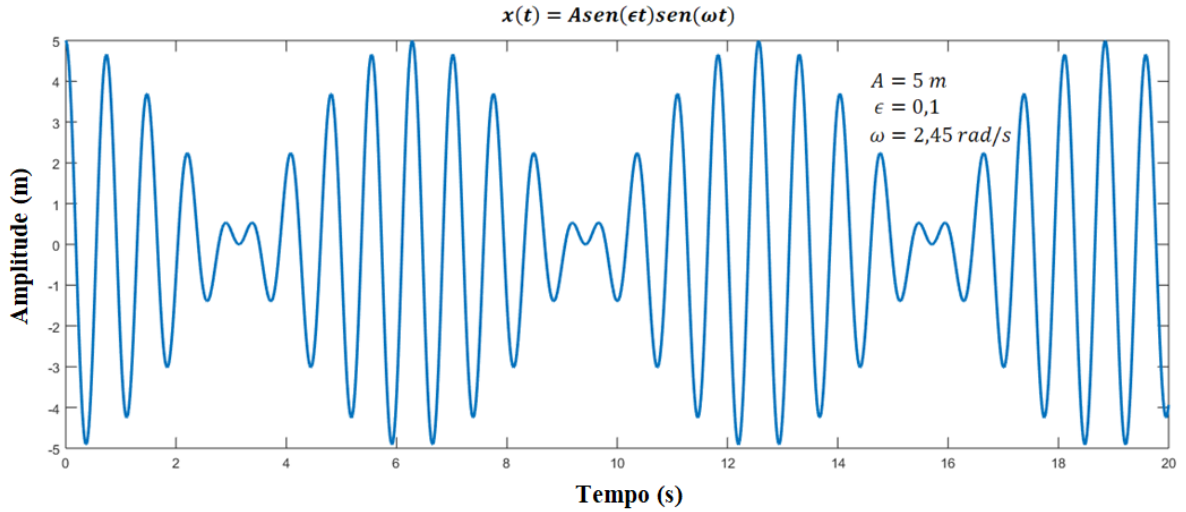


Figura 12: Fenômeno de Batimentos no oscilador. *Fonte:* Autoria própria

Visto que, no limite onde a frequência oriunda de um agente externo é igual a frequência natural de oscilação, $\omega = \omega_0$, o último termo da equação 3.44, toma uma forma indefinida, pois fica $\frac{0}{0}$. Como saída dessa problemática, aplicaremos a regra de L'Hospital para avaliar o termo, dessa maneira:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{\frac{d}{d\omega} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)}{\frac{d}{d\omega} (\omega_0^2 - \omega^2)} \right].$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{t \operatorname{sen} \omega t}{2\omega} \right].$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] = \frac{t \sin \omega_0 t}{2\omega_0}.$$

Com esse resultado, podemos então escrever a resposta do sistema não amortecido em ressonância, assim:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (3.46)$$

Na equação 3.46, nota-se que, em ressonância, a partir das condições iniciais impostas, a amplitude do sistema aumenta linearmente com o tempo. Na Figura 13, observamos o efeito de ressonância, na realidade, esse aumento ocorre até que seja estabilizada por outro efeito, geralmente a presença de efeitos dissipativos ou não lineares [17].

Em sistemas lineares, levamos em conta aproximações de pequenas oscilações, no entanto, em um sistema mecânico, a amplitude atinge um valor limite onde o sistema se ‘rompe’ antes que a oscilação se perpetue indefinidamente, a partir dessa circunstância, o modelo de pequenas oscilações empregado é incompatível, tendo em vista que a lei de Hooke não teria mais validade para grandes amplitudes, dessa forma, a resposta oscilatória passa a depender de termos não lineares.

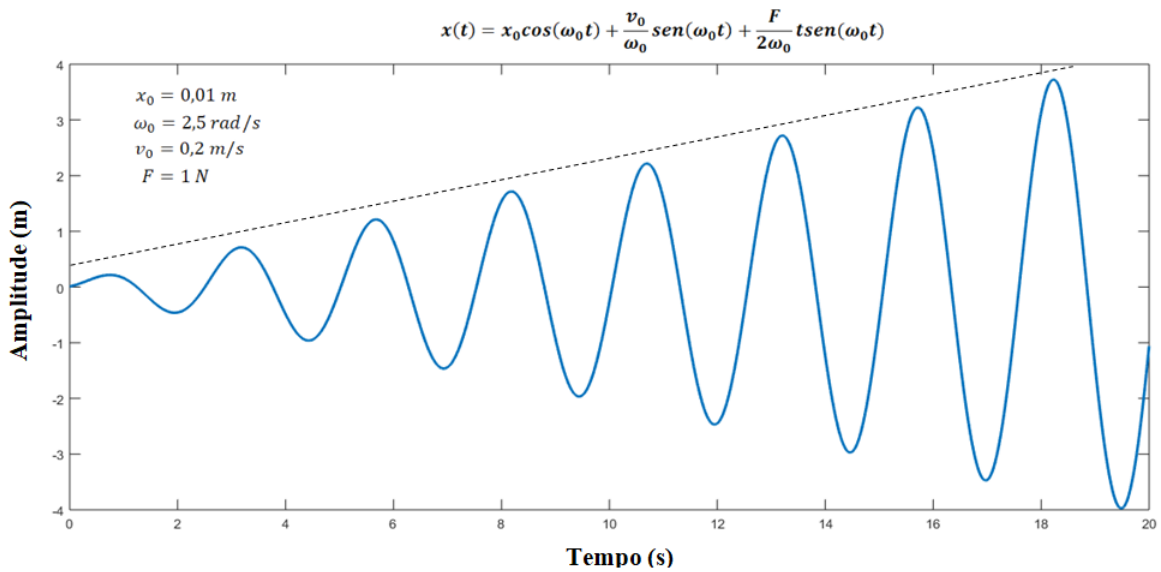


Figura 13: Fenômeno de Ressonância no oscilador. *Fonte:* Autoria própria

Como vimos, a posição de uma partícula no modelo do oscilador mecânico pode ser naturalmente mensurada no tempo, no entanto, a interpretação do movimento de osciladores de diferentes natureza pode se tornar mais acessíveis, através de uma abordagem partindo da interação do oscilador com forças externas, é o caso da interação entre moléculas da atmosfera com a luz proveniente do sol. As moléculas são sistemas ligados por cargas elétricas, e sua frequência natural de oscilação é associada ao movimento relativo entre as cargas elétricas constituintes desse sistema, porém sabemos que cargas

interagem com campos elétricos, dessa forma é possível excitar moléculas por meio de luz. Essas moléculas se excitam na presença de luz, como também emitem luz ao oscilar, nessa circunstância o sinal utilizado na interferência da luz fornece informações do estado da molécula possibilitando o estudo do oscilador logo após a excitação [13].

É importante estudar o quadro ressonante em diversos sistemas físicos fora do contexto da mecânica, pois, em geral, a força externa desempenha um papel fundamental quando em interação periódica com um oscilador, sob efeitos de ressonância, pois essa situação dispõe de informações a respeito de certos sistemas físicos, investigações na estrutura do núcleo foram realizadas através da sondagem por ressonância, na interação de raios gama com o núcleo atômico, assim como efeitos de ressonância contribuíram nas explicações da cor do céu e nas linhas espectrais vistas na fotosfera solar [24].

Tendo em vista que, a resposta ao movimento do oscilador sujeito a uma força harmônica pode ser construída utilizando uma formatação temporal de força mais generalizada, trataremos na próxima seção, sistemas com um grau de liberdade sujeito à funções forçantes gerais periódicas. Quando a perturbação externa no oscilador tem caráter periódico (não harmônica), a função forçante é interpretada como uma soma de funções harmônicas, veremos no caso a seguir.

3.4.2 Oscilação amortecida sob força periódica arbitrária

Embora o movimento harmônico seja o mais simples nos sistemas oscilatórios, grande parte das vibrações que ocorrem no mundo real não são harmônicas. Todavia, qualquer função periódica no domínio do tempo pode ser representada por uma soma infinita de termos harmônicos (senos e cossenos) [16]. A superposição de soluções harmônicas nos permite resolver a equação diferencial mais geral do problema de oscilações forçadas, sob força harmônica, se existir um intervalo de tempo τ onde $F(t + \tau) = F(t)$, ou seja, F como uma função periódica. Portanto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = F(t). \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x = F(t). \quad (3.47)$$

Podemos resolver o problema admitindo a superposição de solução, devido a linearidade da equação de movimento que estamos trabalhando, isto é, se na equação 3.35, fosse na verdade várias equações independentes, uma para cada parcela da força, a resposta do oscilador seria a combinação linear das respostas de cada componente harmônica da força, princípio válido para qualquer número de forças harmônicas superpostas. Vejamos isso supondo a seguinte solução particular para a força externa, $F = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t$.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\beta\frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2x_1 = F_1 \cos \omega_1 t \quad e \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\beta\frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2x_2 = F_2 \cos \omega_2 t.$$

Contudo, a linearidade da equação diferencial, implica em:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) (x_1 + x_2) = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t.$$

Como extensão desse resultado ainda podemos considerar o argumento para um conjunto de n soluções com $x_n(t)$, cada uma apropriada a uma determinada $F_n(t)$, assim:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t).$$

Podemos observar que essa última expressão é a mesma da equação 3.47, se identificarmos as combinações lineares como :

$$x(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) \quad e \quad F(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t).$$

Quando cada uma das funções individuais tiver dependência harmônica no tempo, pela equação 3.39, se $F(t)$ tem a configuração abaixo:

$$F(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n).$$

A solução do estado estacionário é indicada por:

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2}} \cos(\omega_n t - \eta_n - \phi_n). \quad (3.48)$$

Onde o ângulo de fase é dado por:

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{2\omega_n \beta}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \right).$$

Porém, a razão dessa generalidade se deve ao fato de funções harmônicas formarem uma base para a decomposição de qualquer função periódica arbitrária $F(t)$, à vista disso, a força pode ser expandida numa *série de Fourier*. Este princípio se aplica a pequenas vibrações mecânicas, vibrações elétricas, ondas sonoras, ondas eletromagnéticas e a todos os fenômenos físicos governados por equações diferenciais lineares [24]. No caso físico onde a força $F(t)$ tem período $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, podemos:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t]. \quad (3.49)$$

Na série, os coeficientes são indicados por:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t') \cos(n\omega t') dt' \quad e \quad b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t') \sin(n\omega t') dt'.$$

Substituindo os limites de integração por $-\frac{\tau}{2}$ e $\frac{\tau}{2}$, sabendo que $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, temos:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} F(t') \cos(n\omega t') dt' \quad e \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} F(t') \sin(n\omega t') dt'.$$

Para representar uma função periódica de força utilizando a expansão de Fourier, iremos admitir uma função de força de impulsão na forma de ‘dente de serra’, Figura 14. Considerando o período oscilação pertence ao intervalo $-\frac{\tau}{2}$ à $\frac{\tau}{2}$, a função de força $F(t)$ em série de Fourier é indicada por:

$$F(t) = A \frac{t}{\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

$$F(t) = \frac{\omega A}{2\pi} t. \quad (3.50)$$

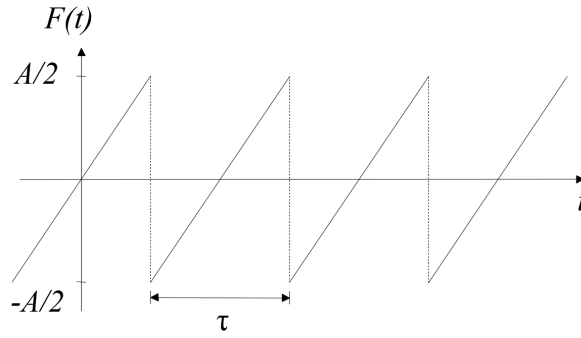


Figura 14: Função de força na forma de dente de serra. *Fonte:* Autoria própria

Notamos que se trata de uma função ímpar, logo, os coeficientes a_n e a_0 são nulos, já o b_n é fornecido por:

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left(\frac{\omega A}{2\pi} t' \right) \sin n\omega t' dt'. \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} t' \sin n\omega t' dt'.$$

Fazendo uma integração por partes, obtemos:

$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left[-t' \frac{\cos n\omega t'}{n\omega} \Big|_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} + \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{\cos n\omega t'}{n\omega} dt' \right].$$

$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left[-\frac{\pi}{\omega} \frac{\cos n\pi}{n\omega} + \frac{\pi}{\omega} \frac{\cos(-n\pi)}{n\omega} + \frac{\sin n\omega t'}{n^2 \omega^2} \Big|_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \right].$$

$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left[\frac{\pi}{n\omega^2} (-\cos n\pi + \cos(-n\pi)) \right]. \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{A}{\pi n} (-1)^{n+1}. \quad (3.51)$$

De modo que o termo $(-1)^{n+1}$, admite:

$$-\cos n\pi = \begin{cases} +1, & n \text{ ímpar} \\ -1, & n \text{ par} \end{cases}$$

Portanto, temos a representação da força:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{\pi n} (-1)^{n+1} \right) \sin n\omega t = \frac{A}{\pi} \left[\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right]. \quad (3.52)$$

Na Figura 15, o resultado gráfico para alguns termos dessa expansão, observamos que a convergência dessa função não ocorre rapidamente, à medida que o número de termos aumenta, a aproximação melhora em todas as regiões, exceto na vizinhança da descontinuidade, a esse comportamento dá-se o nome de *Fenômeno de Gibbs* [16].

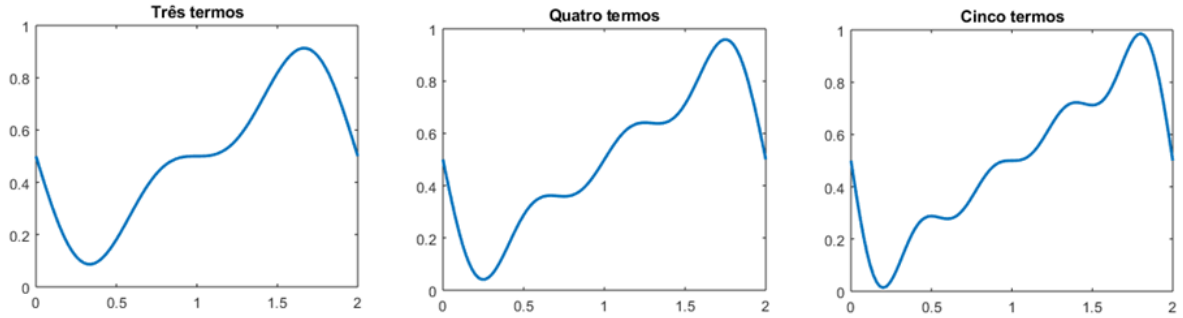


Figura 15: Comunicação em série de Fourier da função força de impulsão no formato ‘dente de serra’. *Fonte:* Autoria própria

Ao expandir o intervalo de decomposição de $F(t)$, é possível tornar mais geral a solução para o problema contemplando também forças não periódicas, a generalização do teorema das séries de Fourier aplicáveis a forças não periódicas consiste no teorema da integral de Fourier, que permite representar funções contínuas como uma superposição de forças que oscilam harmonicamente [24]. No limite de $\tau \rightarrow \infty$, onde a frequência é $n\omega = \frac{2n\pi}{\tau}$, temos um modelo contínuo de sistema e a série de Fourier cede espaço para a *Transformada de Fourier*.

A expansão de Fourier possibilita descrever uma função periódica em termos de funções harmônicas, que ocupam o intervalo completo de decomposição. Em contrapartida, a dependência de grandezas físicas com o tempo ou com o espaço podem ocorrer em termos de funções infinitamente localizadas, orientadas pela distribuição *Delta de Dirac* [24]. A classe de forças excitadoras não periódicas, cuja magnitude é intensa e ocorre em um curto intervalo de tempo são conhecidas como impulsivas, na seção a seguir discutiremos as implicações no oscilador dessa classificação específica de força.

3.4.3 Oscilação forçada à funções de impulsão

A resposta de um sistema dinâmico, quando excitado através da aplicação súbita de uma força não periódica, é denominada como resposta transiente, uma vez que não são geralmente produzidas oscilações de estado permanente. A configuração de força aperiódica nos problemas de engenharia e física, conduzem análises mais elaboradas para essa classe de força, uma gama de problemas físicos, sobretudo, aqueles que envolvem circuitos elétricos oscilantes envolvem o estudo do movimento no regime transitório [14]. Dessa forma, trataremos o comportamento temporário de um oscilador linear sujeito a uma força de impulsão com ação ‘descontínua’.

A ação ‘descontínua’ é uma idealização, já que a aplicação de uma força ocorre em um intervalo de tempo finito. No entanto, se o tempo de aplicação for tão pequeno quando comparado ao período natural de oscilação, o resultado é uma boa aproximação do caso ideal [5]. Como vimos, a equação diferencial que descreve o movimento de um oscilador viscosamente amortecido sujeito a um impulso é:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m}. \quad (3.53)$$

A solução do problema compõe a solução da equação homogênea e a solução particular, $x(t) = x_h + x_p$. A solução complementar de um sistema subamortecido é:

$$x_h(t) = e^{-\beta t}(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t). \quad (3.54)$$

Sabendo que $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, a solução particular, por sua vez, depende da natureza de $F(t)$. Funções de força ‘descontínua’ assumem dois curiosos formatos interessantes, são elas, a função degrau (função de Heaviside) e a função de impulso, Figura 16.

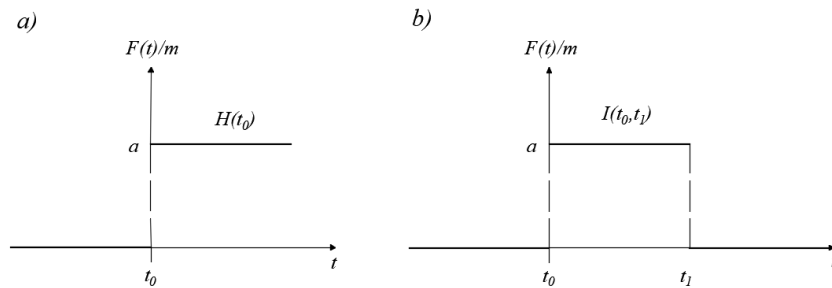


Figura 16: a) Função Degrau de força. b) Função Impulso de força. *Fonte:* Autoria própria

A função de Heaviside é uma função singular e descontínua, de valor nulo quando seu argumento for negativo, valor constante quando o argumento for positivo, e assume a média dos limites laterais da função quando o argumento for nulo [25]. É comum a função ser usada como uma distribuição, porém costuma-se defini-lá da seguinte maneira:

$$H(t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t > t_0 \end{cases} \quad (3.55)$$

Onde a é uma constante com dimensão de aceleração, e t_0 indica o tempo de aplicação da força. Essa função conhecida como função degrau $H(t)$, foi modelada pelo inglês Oliver Heaviside (1850-1925) ao estudar eletrodinâmica, sua estratégia era tornar as equações diferenciais nos problemas de circuitos elétricos em meras equações algébricas facilmente resolvíveis, essa distribuição representava um tipo de descontinuidade que surgia com uma operação usando a função voltagem, que assumia valor constante quando fechava o circuito a partir de $t > 0$ [26].

A função de impulso $I(t)$, consiste na modelagem de uma função degrau positiva aplicada em t_0 , seguida por uma negativa aplicada em algum tempo posterior, t_1 [15]. Portanto:

$$I(t_0, t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (3.56)$$

Uma vez definido o formato das funções de força, iremos encontrar a resposta dos osciladores lineares com aplicação de uma função excitação degrau, e a resposta à uma função excitação por impulso.

3.4.3.1 Resposta a uma função Heaviside

Para funções do tipo degrau, o movimento é descrito pela edo com $t > t_0$, então:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = a. \quad (3.57)$$

Admitindo a seguinte solução particular do problema, temos:

$$x_p(t) = A. \quad \implies \quad \frac{dx_p}{dt} = 0. \quad \implies \quad \frac{d^2x_p}{dt^2} = 0.$$

Substituindo na equação 3.57, concluímos que a constante A e a x_p , equivalem:

$$A = x_p(t) = \frac{a}{\omega_0^2}.$$

A solução geral, portanto:

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_0)} \left\{ A_1 \cos \left[\omega_1(t-t_0) \right] + A_2 \sin \left[\omega_1(t-t_0) \right] \right\} + \frac{a}{\omega_0^2}. \quad (3.58)$$

Inferindo as condições iniciais do problema, $x(t_0) = x_0 = 0$ e $t_0 = 0$, podemos:

$$x(t_0) = (A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0) + \frac{a}{\omega_0^2}. \quad \implies \quad A_1 = x_0 - \frac{a}{\omega_0^2}.$$

$$A_1 = -\frac{a}{\omega_0^2}. \quad (3.59)$$

Da primeira derivada da solução 3.58, aplicada no $t_0 = 0$, obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta e^{-\beta t} \left(-\frac{a}{\omega_0^2} \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t \right) + e^{-\beta t} \left(\frac{a\omega_1}{\omega_0^2} \sin \omega_1 t + A_2 \omega_1 \cos \omega_1 t \right).$$

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = -\beta \left(-\frac{a}{\omega_0^2} \cos 0 + A_2 \sin 0 \right) + \left(\frac{a\omega_1}{\omega_0^2} \sin 0 + A_2 \omega_1 \cos 0 \right) = 0.$$

$$A_2 = -\frac{a\beta}{\omega_0^2 \omega_1}. \quad (3.60)$$

Contudo, a resposta para um sistema, sendo a força uma função degrau para $t < t_0$ será $x(t) = 0$ e para $t > t_0$ com $t_0 = 0$, por simplificação, será:

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_0)} \left\{ -\frac{a}{\omega_0^2} \cos [\omega_1(t-t_0)] - \frac{a\beta}{\omega_0^2 \omega_1} \sin [\omega_1(t-t_0)] \right\} + \frac{a}{\omega_0^2}.$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta e^{-\beta t}}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right\}. \quad (3.61)$$

No oscilador, há um deslocamento no valor de $\frac{a}{\omega_0^2}$, Figura 17, para o situação de $\beta = 0, 2\omega_0$. Se nenhum amortecimento ocorrer, isto é, $\beta = 0$ e $\omega_1 = \omega_0$, a oscilação é senoidal com extremos de amplitude nos valores de 0 e $\frac{2a}{\omega_0^2}$. Quando $\beta = 0$, a solução é:

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (3.62)$$

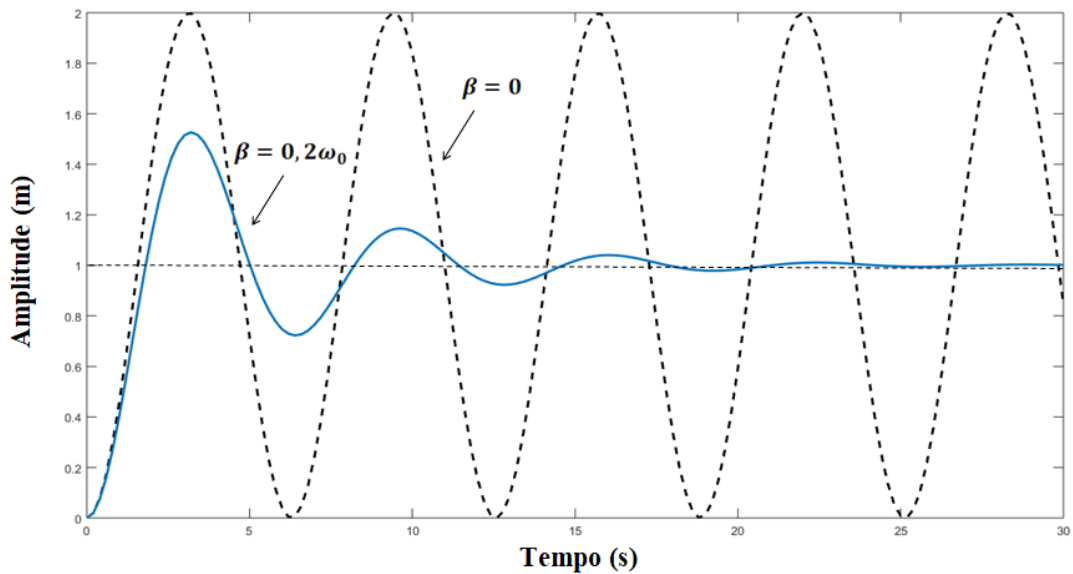


Figura 17: Resposta do oscilador para uma função degrau da força. *Fonte:* Autoria própria

3.4.3.2 Resposta a uma função Impulso

Admitindo a função impulso como a diferença entre duas funções degrau, separadas por um intervalo de $t_1 - t_0 = \tau$, a solução geral desse sistema linear é a superposição de duas soluções obtidas no problema anterior para $t > t_1$, dessa forma, a combinação linear de dois termos independentes é indicada por:

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\beta(t-t_0)} \cos \left[\omega_1(t-t_0) \right] - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \left[\omega_1(t-t_0) \right] \right\} \\ - \frac{a}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\beta(t-t_0-\tau)} \cos \left[\omega_1(t-t_0-\tau) \right] - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0-\tau)}}{\omega_1} \sin \left[\omega_1(t-t_0-\tau) \right] \right\}.$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_0)} \left\{ e^{\beta\tau} \cos \left[\omega_1(t-t_0-\tau) \right] - \cos \left[\omega_1(t-t_0) \right] + \frac{\beta e^{\beta\tau}}{\omega_1} \sin \left[\omega_1(t-t_0-\tau) \right] \right. \\ \left. - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \left[\omega_1(t-t_0) \right] \right\}.$$

Ilustramos a resposta do movimento da função impulso aplicada em $t = t_0$, para $\beta = 0, 2\omega_0$, na Figura 18. Se porventura o período τ da função se aproximar de zero, a resposta será tão pequena ao ponto de ser nula. No entanto, considerando $a \rightarrow \infty$, à medida que o $\tau \rightarrow 0$, mantendo o produto entre eles constante, a resposta do sistema será finita [5]. É consideravelmente interessante a análise dessa limitação em particular, devido essa característica ser uma aproximação importante de uma força impulsiva, cuja aplicação tem aspecto de um pico, isto em $t > t_0$, com $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega_1}$.

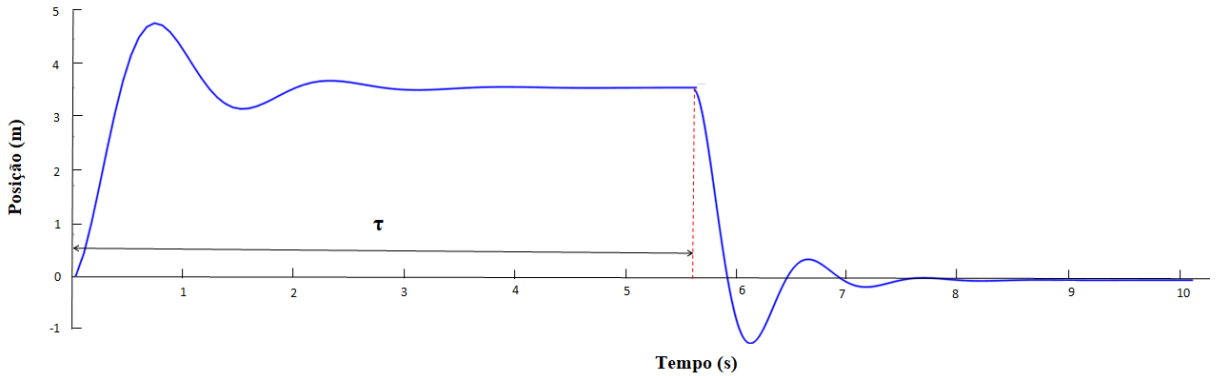


Figura 18: Resposta dinâmica de uma função impulso da força. *Fonte:* Autoria própria

Atribuído ao Paul Dirac (1902-1984), um ‘pico’ é geralmente denominado como ‘função’ delta e expresso simbolicamente com $\delta(t - t_0)$. Dirac na sua obra *Principles of Quantum Mechanics*, em 1930, incorporou o preliminar trabalho de Werner Heisenberg e o de Erwin Schrödinger em um único formalismo matemático com a introdução da ‘função’ delta, cujas propriedades gozam de: 1) $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ 2) $\delta(0) = \infty$ e 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$ [27].

Para trabalharmos com essa função, vamos expandir a solução da função impulso admitindo $\tau \rightarrow 0$, com $b = a\tau = \text{constante}$. Adotando $A = t - t_0$ e $B = t$, sabemos primeiramente das relações trigonométricas que:

$$\cos \left[\omega_1(t - t_0) - \omega_1\tau \right] = \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] \cos \omega_1\tau + \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] \sin \omega_1\tau.$$

$$\sin \left[\omega_1(t - t_0) - \omega_1\tau \right] = \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] \cos \omega_1\tau - \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] \sin \omega_1\tau.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_0)} & \left\{ e^{\beta\tau} \left\{ \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] \cos \omega_1\tau + \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] \sin \omega_1\tau \right\} - \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\beta e^{\beta\tau}}{\omega_1} \left\{ \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] \cos \omega_1\tau - \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] \sin \omega_1\tau \right\} - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Como τ é um valor pequeno, iremos expandir os termos $e^{\beta\tau}$, $\cos \omega_1\tau$ e $\sin \omega_1\tau$ em série de Taylor, mantendo somente os termos de primeira ordem de τ de cada polinômio. Para a exponencial, adotando $x = \beta\tau$, podemos:

$$e^x = e^0 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + x. \quad \implies \quad e^x \approx 1 + \beta\tau.$$

Para as funções trigonométricas, adotando $x = \omega_1\tau$, devemos:

$$\cos x = \cos 0 + (-\sin 0)x + (-\cos 0)\frac{x^2}{2!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{(\omega_1\tau)^2}{2}.$$

$$\cos \omega_1\tau \approx 1.$$

$$\sin x = \sin 0 + (\cos 0)x + (-\sin 0)\frac{x^2}{2!} + (-\cos 0)\frac{x^3}{3!} + \cdots = x - \frac{x^3}{6} = \omega_1\tau - \frac{(\omega_1\tau)^3}{6}.$$

$$\sin \omega_1\tau \approx \omega_1\tau.$$

Substituindo os respectivos resultados da expansão na $x(t)$, eliminando os termos em comum e desprezando os termos multiplicados por τ^2 , obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_0)} & \left\{ (1 + \beta\tau) \left\{ \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] + \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] \omega_1\tau \right\} - \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\beta(1 + \beta\tau)}{\omega_1} \left\{ \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] - \cos \left[\omega_1(t - t_0) \right] \omega_1\tau \right\} - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \left[\omega_1(t - t_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_0)} \left\{ \text{sen} [\omega_1(t-t_0)] \omega_1 \tau + \frac{\beta^2 \tau}{\omega_1} \text{sen} [\omega_1(t-t_0)] \right\}.$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_0)} \text{sen} [\omega_1(t-t_0)] \left\{ \omega_1 \tau + \frac{\beta^2 \tau}{\omega_1} \right\}. \quad (3.63)$$

Observamos com esse resultado que à medida que t assume grandes valores, o oscilador retorna a posição de equilíbrio, a Figura 19 evidencia a função resposta com $\beta = 0, 2\omega_0$.

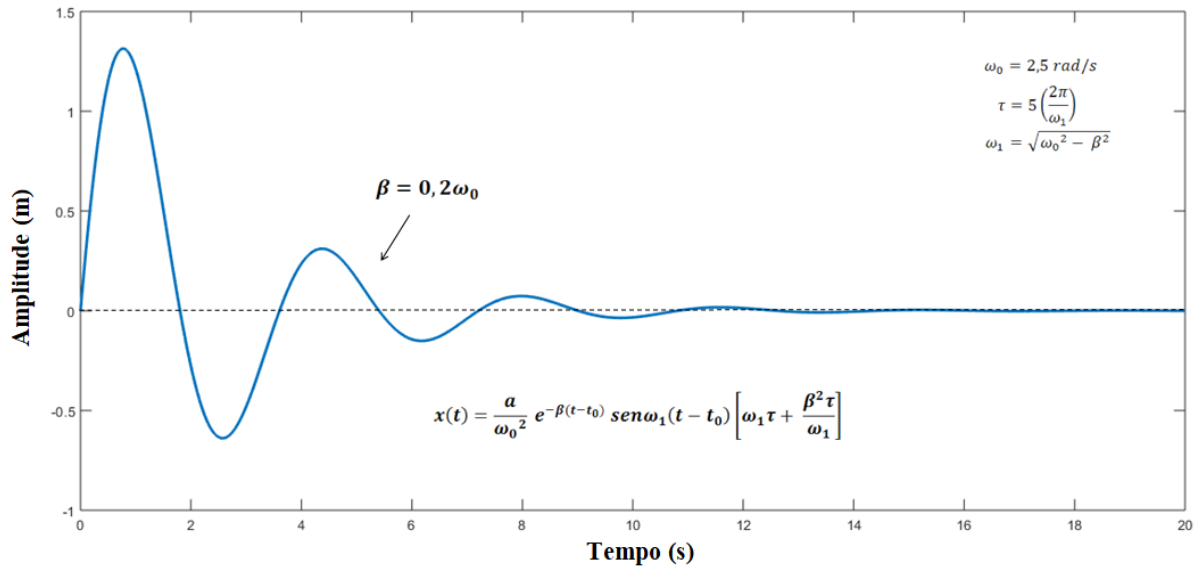


Figura 19: Resposta do oscilador à uma pico da função de força. *Fonte:* Autoria própria

O resultado obtido na resposta de um oscilador linear sujeito a uma força de impulsão conduz a uma técnica de manipulação de funções de forças gerais desenvolvida por George Green (1793 - 1841). O método de Green consiste na atuação de uma força arbitrária como uma série de impulsos, podemos perfeitamente imaginar uma força $F(t)$ qualquer como uma soma de uma série de impulsos, cada uma agindo em um intervalo curto de tempo δt gerando um impulso $F(t)\delta t$ [28].

A Função de Green dependente do tempo é uma ferramenta útil na resolução de problemas que descrevem sistemas físicos. Além da utilização do método de Green no problema do oscilador linear, uma discussão similar aparece em problemas com a equação de condução do calor numa barra homogênea, estende-se também ao tratamento da equação de Schrödinger, equações da onda, teoria quântica de campos, eletrodinâmica e teoria estatística de campos para se referir a vários tipos de funções de correlação [29].

Para o problema do oscilador de amortecimento viscoso no regime subcrítico onde definimos $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, se o sistema de impulsão é uma interação linear, o princípio de superposição é válido e a função resposta pode ser interpretada como a superposição de

deslocamentos quando sobre o oscilador atuar um impulso instantâneo [5]. Dessa forma, vamos expressar o termo não homogêneo da equação diferencial como a soma de funções de forças de impulso. Assim:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{m} = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} I_n(t).$$

Assumindo,

$$I_n(t) = I(t_n, t_{n-1}) = \begin{cases} a_n(t_n), & t_n < t < t_{n-1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O intervalo de tempo onde I_n age é quando $t_{n-1} - t_n = \tau$ com $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega_1}$. Dessa forma, a solução para o n -ésimo impulso partindo da equação 3.63 é:

$$x(t) = \frac{a_n(t_n)}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_n)} \text{sen} [\omega_1(t-t_n)] \left\{ \omega_1\tau + \frac{\beta^2\tau}{\omega_1} \right\}.$$

$$x(t) = \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_n)} \text{sen} [\omega_1(t-t_n)] \left\{ \frac{\omega_1^2 + \beta^2}{\omega_1} \right\}.$$

$$x(t) = \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_n)} \text{sen} [\omega_1(t-t_n)] \left\{ \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \right\}.$$

$$x(t) = \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \text{sen} [\omega_1(t-t_n)] \quad \text{para } t > t_0 + \tau.$$

$$x(t) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^N \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \text{sen} [\omega_1(t-t_n)] \quad \text{para } t_N < t < t_{N+1}. \quad (3.64)$$

Essa é a solução com a contribuição de todos os impulsos, incluindo o N -ésimo, podemos considerar o intervalo se aproximando de zero, fazendo $t_n = t'$, expressamos o soma agora como uma integral, assim:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{a(t')}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \text{sen} [\omega_1(t-t')] dt'. \quad (3.65)$$

A função $G(t, t')$ é denominada função de Green para a equação do oscilador linear.

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & t < t' \\ \frac{1}{m\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \text{sen} [\omega_1(t-t')] dt', & t \geq t' \end{cases}$$

Em termos da função de Green podemos escrever a expressão do deslocamento.

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(t') G(t, t') dt'. \quad (3.66)$$

Essa solução já estava configurada para determinadas condições iniciais, isto é, o oscilador em repouso antes de aplicar a força, para outras condições iniciais, a solução geral pode ser obtida de maneira semelhante. A expressão 3.66 é de grande utilidade no estudo de comportamento transiente de sistemas mecânicos ou elétricos quando submetidos à numerosos tipos variados de forças.

Normalmente se utiliza o método de Green quando se trata de soluções de equações não homogênea, cuja principal vantagem reside da ocorrência da função Green ser a solução da equação para um elemento infinitesimal da parte não homogênea da equação, já contida as condições iniciais expressa também pela integral [5].

Para a determinação da resposta do sistema impulsivo usamos as ‘funções de base’ delta atribuída ao método de Green, a partir disso substituímos uma equação diferencial não homogênea por uma condição de localidade entre as soluções homogêneas. Essa condição depende das condições iniciais do oscilador e com ela encontramos a resposta do oscilador a qualquer força, não necessariamente periódica [24].

Uma vez feita a fundamentação teórica da dinâmica oscilatória por meio das discussões e simulações vistas nesse capítulo, exibiremos o comportamento e as características de certos sistemas oscilatórios mediante um arranjo experimental que engloba sensoria-mento eletrônico e coleta de dados, nas quais teremos o rastreo da posição em função do tempo dos diversos sistemas físicos em estudo. Analisaremos através dos gráficos gerados na coleta as variáveis físicas que implicam na descrição do movimento, bem como o comportamento oscilatório característico de cada manipulação física feita no oscilador, esperamos que os sistemas se comportem conforme segue as características teóricas pontuadas nesse capítulo. No próximo capítulo, especificamos a metodologia experimental adotada na aquisição dos dados, esclarecemos o procedimento de coleta, o funcionamento e montagem de cada circuito eletrônico e o setup dos experimentos.

4 O Método Experimental

Em nossos experimentos, a dinâmica do sistema é determinada a partir da medição do valor instantâneo da posição. Estas informações são obtidas utilizando um dispositivo transdutor denominado *encoder óptico* conectado à plataforma Arduino.

O encoder óptico é um dispositivo amplamente utilizado em aplicações que exigem o controle de posição e velocidade, esse dispositivo eletrônico é constituído por um emissor e um receptor de luz infravermelho, que trabalha em conjunto com uma fita estriada e converte as interrupções do sinal luminoso oriundas da passagem da fita em pulsos elétricos. Com este sistema teremos na saída do receptor pulsos digitais (0 ou 1), gerados pela ausência ou presença de luz emitida do mesmo. Por meio da decodificação dos bits gerados, podemos, a partir de uma calibração prévia, determinar a posição relativa entre o encoder, a fita, e conseqüentemente do objeto que se pretende medir [30]. Na figura 20 ilustramos o sensor óptico eletrônico utilizado em nossos experimentos.

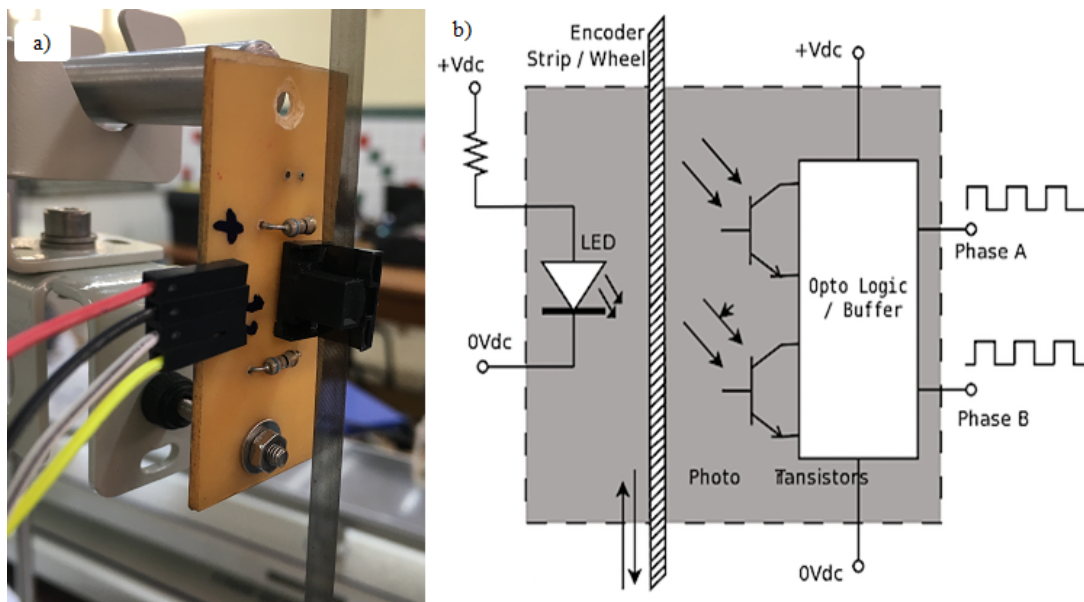


Figura 20: a) Sensor óptico eletrônico indicando a passagem da fita de código linear. b) Diagrama do encoder com uma fita de leitura óptica. Fonte:[1], adaptado.

Esse encoder é um transdutor utilizado para a conversão de movimentos lineares em impulsos elétricos de onda quadrada, Figura 20b), de modo que esses impulsos podem ser lidos e tratados por um microcontrolador. Resumidamente, a atividade de um transdutor ocorre quando o dispositivo converte em um sinal elétrico detectável uma informação de algum estímulo físico captada por um sensor, estímulo esse que pode ser elétrico, mecânico, óptico, térmico ou acústico.

O principal objetivo do dispositivo é trabalhar com uma variável mais facilmente quantificada para facilitar o sistema de medição. A confecção do sensor de posição retirado de uma impressora jato de tinta está em detalhes em [31].

Como dito anteriormente, os impulsos elétricos podem ser recebidos por um microcontrolador, sendo que esse microcontrolador consiste em um circuito integrado programável que possui em seu interior uma ULA (Unidade Lógica Aritmética), responsável pelo processamento das informações, memória e periféricos de entrada e saída [32].

Neste trabalho adotamos o Arduino Mega, cujo componente principal é o microcontrolador ATmega2560, ele compõe a nossa ferramenta de aquisição de dados. O Arduino foi escolhido por possuir em sua placa todos os componentes necessários para um rápido desenvolvimento à um baixo custo. Reservamos no apêndice um espaço destinado ao projeto Arduino apresentando para o leitor a plataforma de maneira mais detalhada.

O Arduino efetua a leitura/decodificação do encoder, processa e comunica a informação obtida em suas portas digitais, para que haja toda essa comunicação entre cada aparato do sistema de medição, necessita-se de um sistema de conexão elétrica entre o sensor, a placa Arduino e o computador. Na figura abaixo, ilustramos o diagrama elétrico, evidenciando as conexões elétricas que comunicam o sensor e a placa Arduino.

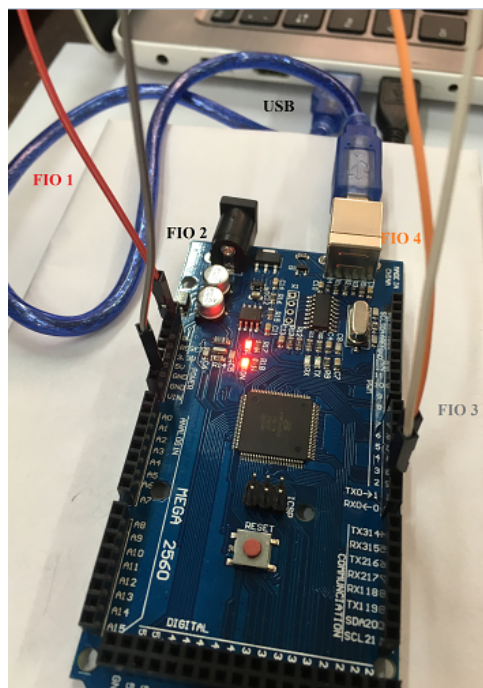


Figura 21: Diagrama de conexão elétrica do sensor óptico com o Arduino. Comunicação Arduino/Notebook via porta USB. *Fonte:* Autoria própria

Na Figura 21, o fio 1 identifica a conexão de alimentação (+5V), com corrente de $15mA$, o fio 2 indica a conexão no GND, pino negativo do Arduino, os fios 3 e 4, por sua vez, indicam a conexão nas portas digitais 2 e 3 da placa, respectivamente. A placa

Arduino é conectada ao notebook via porta USB, para programar o Arduino de forma que ele execute o que desejamos é utilizado o ambiente de desenvolvimento, denominado IDE do Arduino, nesse ambiente se escrevem os códigos na linguagem padrão *C* compreendida pelo Arduino. O IDE permite a escrita de um conjunto de instruções, feitas passo a passo no computador (programa) seguindo a linguagem *C/C++*, das quais ao executar o *upload* para o Arduino, ele então efetuará as definidas instruções, interagindo com o que estiver conectado a ele [33], no nosso caso, o sistema de sensoriamento óptico.

No conjunto de instruções que compreende o programa de microcontroladores, na qual viabiliza o mecanismo de medida adotado, existem funções predominantes, cujas tarefas dessas são realizadas de modo que a medida seja a mais precisa possível. Em programas de microcontroladores, as interrupções são ferramentas úteis para que as tarefas sejam efetuadas automaticamente, pode-se utilizar interrupções para priorizar ou não tarefas e resolver problemas de tempo [34]. Como temos a intenção de temporizar o sistema de medida para obtermos de fato informações relevantes dos sistemas em estudo, as rotinas de serviço de interrupções (ISRs) se farão úteis nos códigos do Arduino implementados no presente método experimental. A discussão e desenvolvimento dos códigos utilizados nesse trabalho estão em detalhes na bibliografia [31].

Quando se trabalha com circuitos micro controlados, a temporização é fundamental para a geração de sinais ou eventos periódicos, nos microcontroladores são disponíveis periféricos temporizador/contador, cujo uso da contagem correta e precisa do tempo auxilia e promove uma eficiente programação para a realização de vários projetos eletrônicos [35]. Para contornar os problemas de temporização nos projetos do Arduino, se utiliza os *Timers*, na configuração desses é possível controlar o seu modo de operação por meio da atuação dos *registradores*¹.

A vantagem de trabalhar na manipulação direta dos registradores, ao se tratar de contagem de tempo, é que a leitura e escrita em pinos é feita de maneira muito mais rápida, quando comparada ao tempo de leitura de funções prontas disponível na biblioteca do Arduino. O microcontrolador ATmega2560 do Arduino Mega, dispõe de seis temporizadores, cuja referência de processamento de três deles utilizam de 8 bits para executar suas operações, e os outros três temporizadores (timers) utilizam 16 bits na realização de suas operações [36]. Em geral, os temporizadores são configurados para que sua atuação promova no limite de acurácia das medidas de tempo, resultados precisos. Para mais informações a respeito dos registradores dos timers do Arduino Mega, consultar o *Datasheet*², que consiste numa espécie de manual do Arduino Mega.

Enfim, para a obtenção dos dados experimentais, isto é, captura de um estímulo pelo sensor, transferência de dados para a placa Arduino, e comunicação via USB com o

¹ Os registradores do Timer são os responsáveis pelo controle do temporizador/contador.

² http://pdf.datasheetcatalog.com/datasheets2/30/3055029_1.pdf

notebook, passamos para o tratamento gráfico dos experimentos. Para a análise gráfica dos dados, optamos pela utilização do software *Origin Pro 8.5*. O software importa dados de ferramentas de medida, processa-os, executa ajustes de dados experimentais, evidenciando características dos fenômenos observados como uma espécie de filtro, ajustes de curvas e muitos outros recursos para uma boa análise estatística de dados [37].

O ajuste de curvas nos gráficos derivado de dados experimentais é um grande desafio para pesquisadores, no entanto, o Origin oferta várias funções pré-formatadas, que permitem regulagem nos parâmetros e valores, esse software mostrou-se extremamente útil para a nossa construção gráfica, utilizamos em todos os experimentos pós coleta de dados o Origin como ferramenta de análise e construção gráfica. Para evitar a sobrecarga do texto com mais detalhes sobre o software Origin, destinamos no apêndice uma breve apresentação do software. Seguiremos percorrendo a respeito dos preparativos e montagem do setup dos experimentos. No decorrer do texto, identificaremos os materiais utilizados, desenvolvendo comentários acerca da prática científica, os sucessos, fracassos e as dificuldades de cunho experimental vivenciadas dentro do laboratório.

4.1 Preparativos e montagem dos experimentos

Os experimentos foram realizados no laboratório de física do Instituto Federal do Piauí, a experimentação se dividiu basicamente em dois modelos de configuração, nosso sistema massa/mola foi posto para oscilar com os materiais e instrumentos dispostos verticalmente, e com os equipamentos dispostos na horizontal. Para facilitar o entendimento do leitor acerca da experimentação, ilustramos em todos as práticas os diagramas que correspondem as situações concebidas dentro do laboratório. Iniciaremos explicitando com se deu a montagem dos materiais utilizados nos experimentos para a determinação da gravidade local e constante elástica das molas utilizadas nos osciladores.

4.1.1 Determinação do valor local da aceleração da gravidade

Utilizando o aparato experimental realizamos um experimento cujo objetivo é determinar o valor local da aceleração gravitacional. Este experimento possui duas finalidades, a primeira é testar a funcionalidade do aparato e a segunda é determinar o valor experimental de g que será utilizado em outras partes do trabalho.

A montagem foi realizada utilizando duas bases com sapatas niveladoras, barras para compor o suporte de apoio do sensor, uma fita de código linear, placa Arduino, fios para conexão elétrica (jumpers), um computador, uma esfera de massa $0,0250\text{ kg}$, um suporte de altura regulável para apoio do hardware e uma linha de multifilamentos. Este sistema está representado esquematicamente na Figura 22 onde ilustramos a situação imediatamente antes e depois da queda da fita pelo sensor.

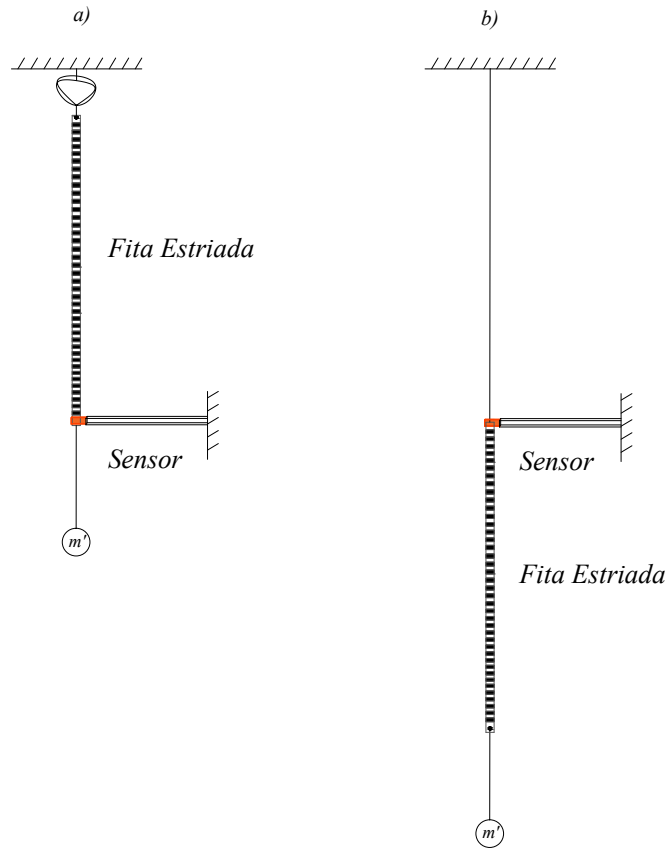


Figura 22: a) Imediatamente antes de liberar a fita, Indicação de excesso de linha que será esticada. b) Posicionamento final após a liberação da fita. *Fonte: Autoria própria*

O arranjo experimental foi planejado para que a fita de código linear passasse por completo pelo sensor, tendo em vista que a fita tem cerca de 30 cm, o fenômeno ocorrido após o ato de abandono (queda livre) da fita possuía menos de um segundo, dessa forma configuramos o Arduino para que a leitura fosse feita em três segundos contudo, coletando uma numerosa quantidade de pontos sucessivos. Segundo o código desenvolvido coletavam-se um total de 2955 pontos sucessivos de posições e a cada 1,024 ms coletava-se um valor de posição.

Os materiais citados foram organizados conforme a Figura 23, após por em prática a experimentação, de posse dos dados processados e fornecidos pelo Arduino partimos para o tratamento gráfico no Origin. Esperamos obter um valor aproximado de $9,81 \text{ m/s}^2$, que consiste na aceleração da gravidade na Terra ao nível do mar e à latitude de 45° .

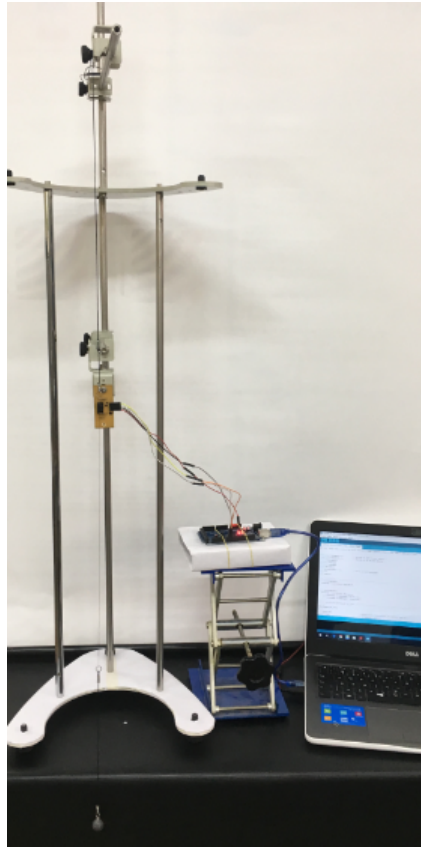


Figura 23: Montagem do experimento para a obtenção da aceleração da gravidade local.

Fonte: Autoria própria

4.1.2 Determinação da constante elástica das molas

A segunda montagem realizada teve o objetivo de determinar a constante elástica das molas envolvidas no movimento oscilatório em estudo. Optamos por determinar as constantes elásticas das molas com o método experimental proposto para tornar nosso procedimento singular e satisfatório do ponto de vista empírico, pois com os valores reais medidos pelo método podemos ponderar melhor os percentuais de erro entre a previsão teórica e a previsão experimental, assim como apontar a eficácia da técnica de captura e processamento de dados por meio da ferramenta que utilizamos quando analisados os resultados experimentais.

Os materiais utilizados nesse experimento foram os seguintes: duas bases com sapatas niveladoras, barras para compor o suporte de apoio do sensor, um sensor óptico eletrônico, uma fita de código linear, um gancho, discos de massas iguais, placa Arduino, jumpers, um computador, molas helicoidais, um suporte de altura regulável para apoio da hardware e uma linha de multifilamentos. A seguir na Figura 24, indicamos o diagrama experimental desse experimento.

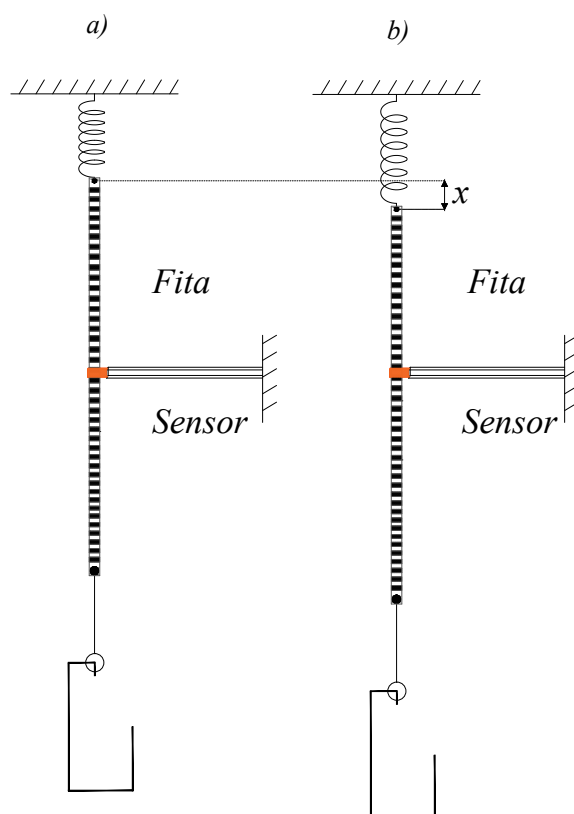


Figura 24: a) Equilíbrio antes da medição. b) Deformação com a adição de massas. *Fonte:* Autoria própria

A disposição dos equipamentos nesse experimento tem por finalidade a suspensão de uma mola, à qual são penduradas e acrescentadas massas iguais em sequência por um gancho conectado à fita de código linear. O esperado é que o aumento na quantidade de massa suspensa pela mola seja acompanhado pelo aumento da deformação da mola. Essa variação de posição, isto é, leitura da posição de equilíbrio estático inicialmente sem adição de nenhuma massa até a leitura da posição final do sistema após a adição de uma massa é feita pelo sensor quando a fita viaja ao acompanhar o movimento do sistema.

Com uma balança de precisão medimos a massa de 50 g dos discos de massa adicionados para obter a constante elástica. Penduramos na ponta do gancho quatro discos, um por vez e anotamos a deformação provocada na mola de acordo com a respectiva quantidade de discos, na Figura 25. Repetimos o procedimento por 5 vezes e fizemos a média dos valores expedido no monitor serial no software do Arduino. A reprodução desse processo ocorreu em todas as vezes que necessitou-se da magnitude da constante elástica das molas implementadas nos experimentos. A montagem do próximo esqueleto experimental têm o intuito de determinar o período/frequência de oscilação de um MHS e sua dependência em relação aos parâmetros do oscilador.

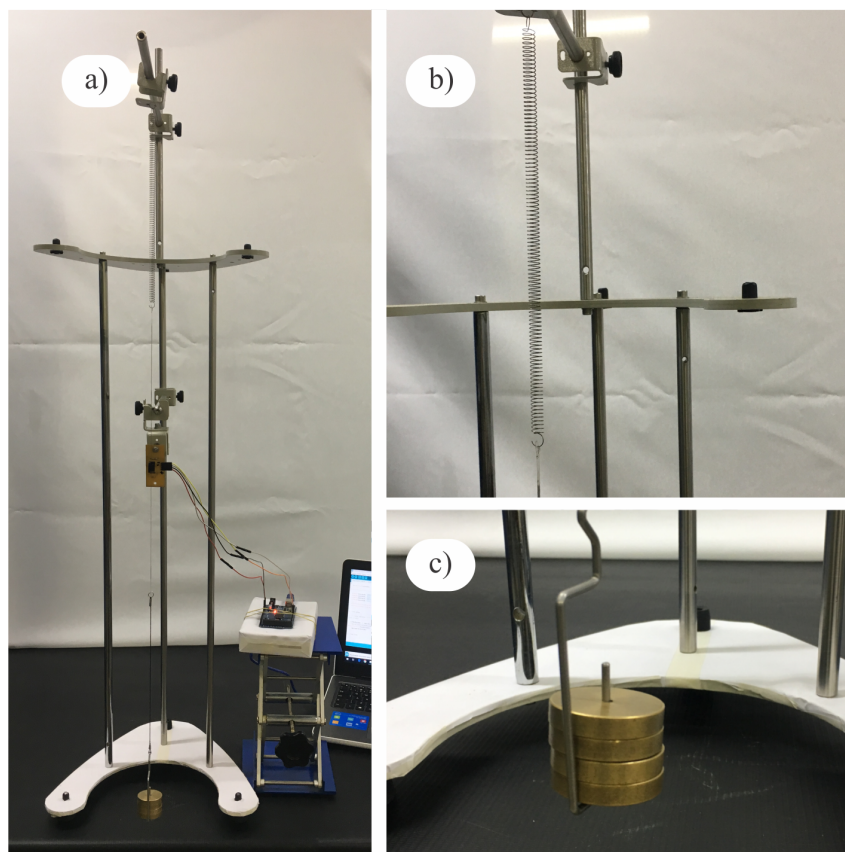


Figura 25: a) Visão global do arranjo experimental que finda determinar a constante elástica da mola. b) Distensão da mola c) Equipamento de adição de massas. *Fonte:* Autoria própria

4.1.3 Relação entre a frequência de oscilação e a inércia do sistema

Esse experimento é subdividido em duas etapas, na primeira iremos dispor no oscilador uma única mola, Figura 26, e na segunda iremos compor uma associação de duas molas no oscilador, Figura 28, utilizaremos para isso os seguintes materiais: um trilho de ar de 120 cm, uma unidade de fluxo de ar, uma mangueira aspirador 1,5", um carrinho apropriado para trilho de ar, uma fita de código linear, um sensor óptico eletrônico, uma haste de sustentação para o sensor, duas molas helicoidais, um fio de multifilamentos, uma esfera, uma roldana com haste fixada no trilho, discos de massas iguais, placa Arduino, jumpers e um computador.

Realizamos essa abordagem com configurações distintas para analisar o erro no que diz respeito as frequências observadas com a variação de massa entre o comportamento oscilatório quando temos molas associadas sem nenhuma extremidade fixada, e uma mola única com uma extremidade fixa. Tentaremos verificar os resultados com mudanças em parâmetros como esses no oscilador.

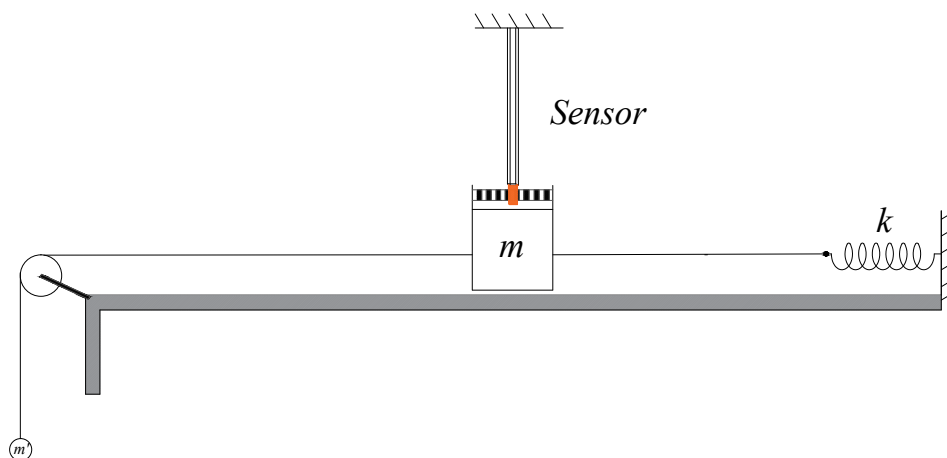


Figura 26: Diagrama experimental oscilador com uma única mola. *Fonte:* Autoria própria

A priori a montagem se deu de modo que uma única mola entrou na composição do oscilador, conforme a Figura 26. Inicialmente fixamos a fita no carrinho e posicionamos o suporte com o sensor de maneira que o carrinho pudesse passear no trilho de ar sem causar prejuízo na leitura, ao pendurar uma esfera numa extremidade do fio cuja conexão carrinho/mola é feita sob o trilho de ar, realizamos sequencialmente o experimento variando a massa do oscilador com a adição de quatro discos de massa um por vez, cuja massa de cada disco é de $50g$.

Medimos com uma balança de precisão a massa de todos os componentes oscilantes e determinamos que a massa total do conjunto, ou seja, massa do carrinho somado a massa da esfera e da mola, sem a adição de nenhum disco é de $0,252\text{ kg}$. À posteriori esses valores serão úteis para o confronto do resultado teórico com o experimental.

Prendemos uma esfera de massa compatível com o carrinho e a mola em uma das extremidades do fio como estratégia de mantê-lo esticado durante o movimento, detalhes como esse são aperfeiçoados com a prática experimental. No início configuramos esse oscilador de várias outras formas, com outras molas, outras esferas, outro carrinho, até essa configuração definitiva foram etapas a serem sucedidas e melhoradas. Buscávamos sempre a configuração que melhor se adequava ao modelo proposto de oscilação em um grau de liberdade sujeito a baixos valores de amplitude. Na Figura 27, segue imagens da montagem real do presente experimento.

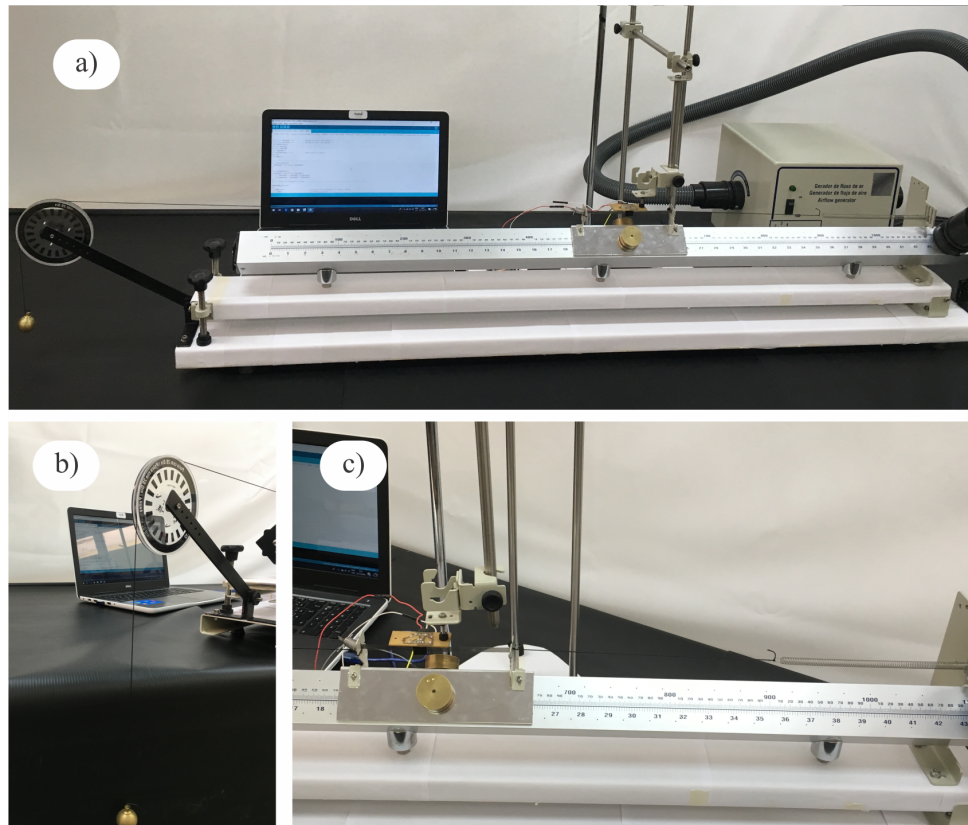


Figura 27: a) Vista global da montagem experimental de análise da relação inércia/frequência do oscilador. b) Conexão da esfera via roldana ao carrinho. c) Ligação da mola com uma extremidade fixa ao carrinho. *Fonte:* Autoria própria

Liga-se o trilho de ar para que o carrinho suspenda diminuindo portanto o atrito cinético com a superfície do trilho, com isso ao acionar a leitura do sensor aplica-se no carrinho uma excitação inicial com pequenas variações na amplitude, afastando-o da sua posição de equilíbrio, a posição do carrinho na oscilação é então rastreada com o passeio da fita pelo sensor. Após trinta segundos contados a datar do início da leitura, os dados são enviados para o monitor serial do Arduino, a partir daí plota-se os gráficos no Origin, a construção gráfica é feita de maneira que o gráfico forneça valores de posições dadas em metro e valores de tempo dados em segundo. De posse dos gráficos para avaliar o período de oscilação determina-se a variação dos pontos entre duas cristas consecutivas, quantificado o período facilmente temos domínio da frequência de oscilação.

O experimento é repetido sujeito a diferentes valores de inércia, é esperado que a frequência de oscilação diminua conforme à aumento na inércia do sistema oscilante. A segunda configuração para o mesmo experimento ocorreu mediante a associação de duas molas de mesma constante elástica, ajustamos a montagem anterior eliminando alguns componentes do oscilador, utilizamos o mesmo carrinho com a fita fixada de modo que seja realizado a leitura da fita pelo sensor, entretanto, prendemos uma das duas extremidades das molas diretamente no carrinho, no diagrama da Figura 28.

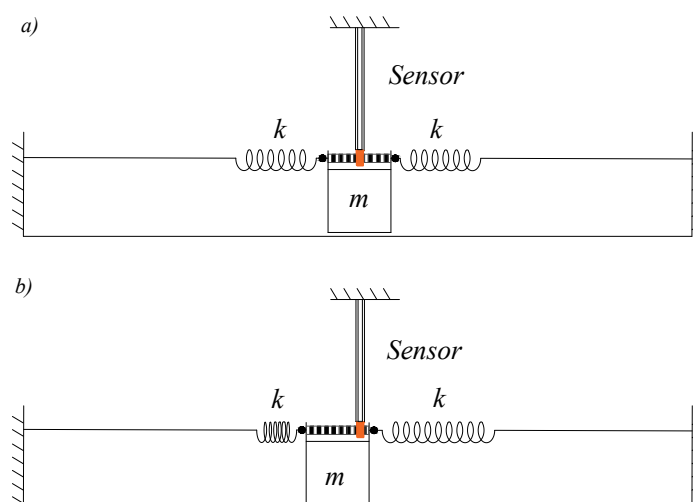


Figura 28: Diagrama experimental oscilador com duas molas. *Fonte:* Autoria própria

Realizamos o mesmo procedimento de oscilação variando moderadamente a massa do oscilador, o mesmo procedimento de plotagem gráfica utilizando o Origin e a mesma metodologia de obtenção do período e frequência de oscilação, isto é, verificando a variação dos pontos entre duas cristas consecutivas. Na Figura 29, a montagem real do experimento.

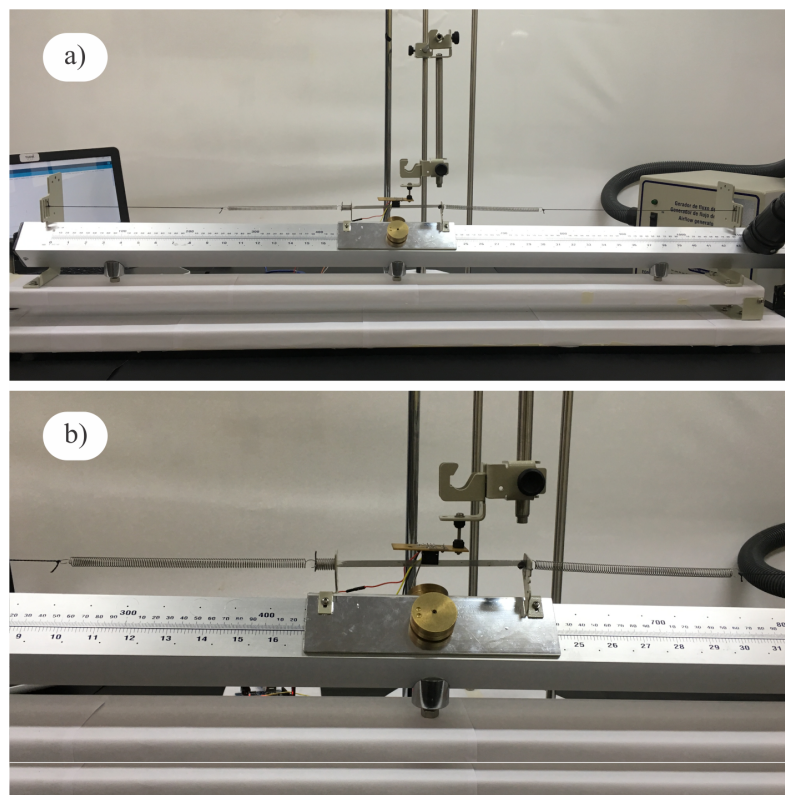


Figura 29: a) Vista global da montagem de análise da relação inércia/frequência do oscilador com molas associadas. b) Molas interligadas ao carrinho. *Fonte:* Autoria própria

Daremos continuidade com o esqueleto experimental preponderante desse trabalho, até a consolidação da configuração definitiva percorremos uma caminhada, antes de termos essa montagem em definitivo tentamos alguns arranjos experimentais, grande parte deles no trilho de ar, neste último não obtivemos grandes sucessos devido a falta de controle nos graus de liberdade da mola gerado ao manter o sistema forçado em uma extremidade do trilho e amortecido na outra, esse fato revela, sobretudo, a dificuldade da retirada de um modelo idealizado pronto na teoria dos livros de Física. Não é uma tarefa trivial compor um oscilador de modo a ter controle nos parâmetros envolvidos na oscilação.

4.1.4 Oscilador sob influência de força externa

Utilizamos os seguintes utensílios para essa amostragem, duas bases com sapatas niveladoras, barras para compor o suporte de apoio do sensor, um sensor óptico eletrônico, uma fita de código linear, placas Arduino, jumpers, um computador, uma esfera de massa $0,070\text{ kg}$, linhas de multifilamentos, duas molas helicoidais, uma bobina, uma barra de ferro cerca de 10 cm , uma proveta de 500 ml , dois suportes de altura regulável, uma para apoio da hardware e outro para apoio da proveta, uma protoboard, uma fonte de tensão e corrente regulável, um transistor, um dissipador de calor, um resistor de $10\text{ K}\Omega$ e um diodo.

Reproduzimos duas espécies de sistema forçado, uma sem o incremento de amortecimento e outra adicionando ao sistema um mecanismo de amortecimento. Nesse arranjo conectamos uma extremidade da fita encoder à um suporte, e esse último às molas. Conectamos a outra extremidade da fita por meio de um pedaço de fio uma das extremidades da barra de ferro de modo que com o movimento oscilatório da fita viajasse pelo sensor captando as sucessivas posições de interesse. Prendemos um gancho em cada extremidade do ferro para ser possível a união da fita com a esfera.

Na primeira estrutura experimental compomos o oscilador utilizando como técnica duas molas com uma de suas extremidades fixas associadas em paralelo, garantindo na medida do possível estabilidade no movimento com um grau de liberdade, conectadas a ela a fita de código linear, a essa última vinculamos uma barra de ferro, que consistia no material ferromagnético na qual ao passar por dentro da bobina faria o papel de forçar o movimento do encoder, conseqüentemente das molas. Por fim, acoplamos à barra de ferro uma esfera de massa $0,070\text{ kg}$, essa esfera que irá ‘sentir’ o amortecimento quando adicionado a coluna de fluido. No diagrama *a*) da Figura 30 ilustramos a situação descrita.

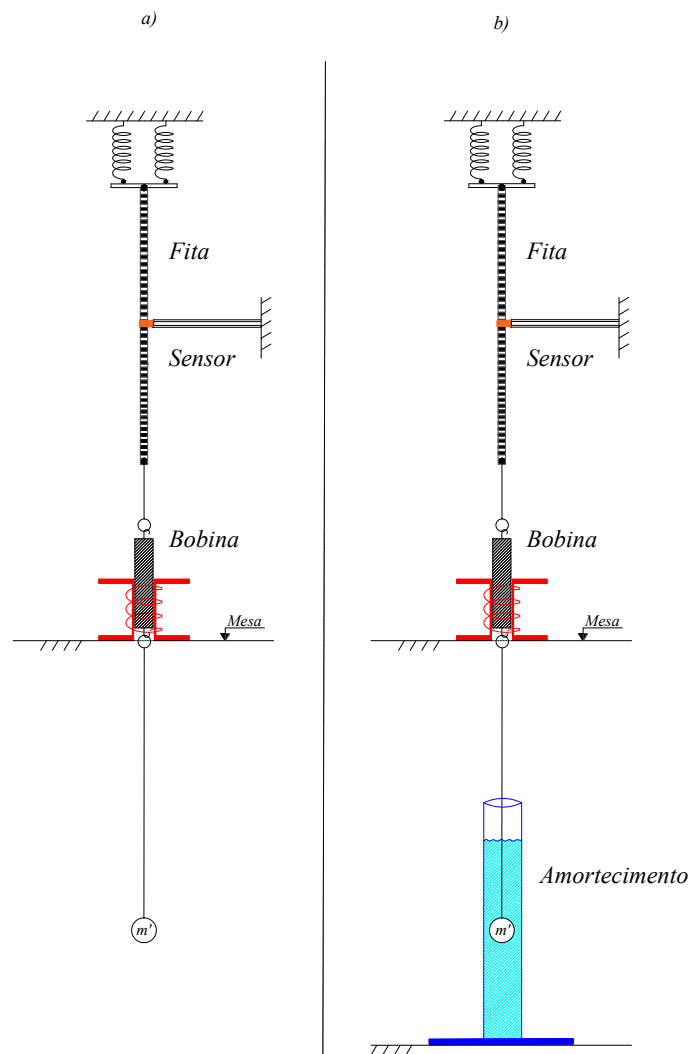


Figura 30: a) Diagrama experimental oscilador forçado. b) Diagrama experimental do oscilador forçado e amortecido. *Fonte:* Autoria própria

Na segunda estrutura montamos o maquinário com os aparatos arranjados de maneira semelhante ao anterior, no entanto, adicionamos à ele um instrumento de amortecimento na qual compreende de uma coluna de fluido contido em uma proveta de 500 *ml*. A esfera que deixamos interligada à barra de ferro consiste no elemento do oscilador que ‘sente’ o amortecimento, haja vista que essa esfera ficava imersa no fluido em todos os instantes durante a oscilação. No diagrama b) da Figura 30 tornamos ilustre essa montagem experimental.

Essa engenhoca funcionava na experimentação tomando os devidos cuidados com o correto alinhamento entre os elementos constituintes do oscilador, o movimento oscilatório majoritariamente estava contido à um grau de liberdade, na vertical, haviam inevitavelmente movimentos transversais das molas, todavia, sob a ótica do sistema global esse translado quando comparado ao movimento longitudinal era irrelevante. Na Figura 31,

explanamos a definitiva organização experimental, para eliminar a máquina de amortecimento tirávamos a proveta do oscilador.

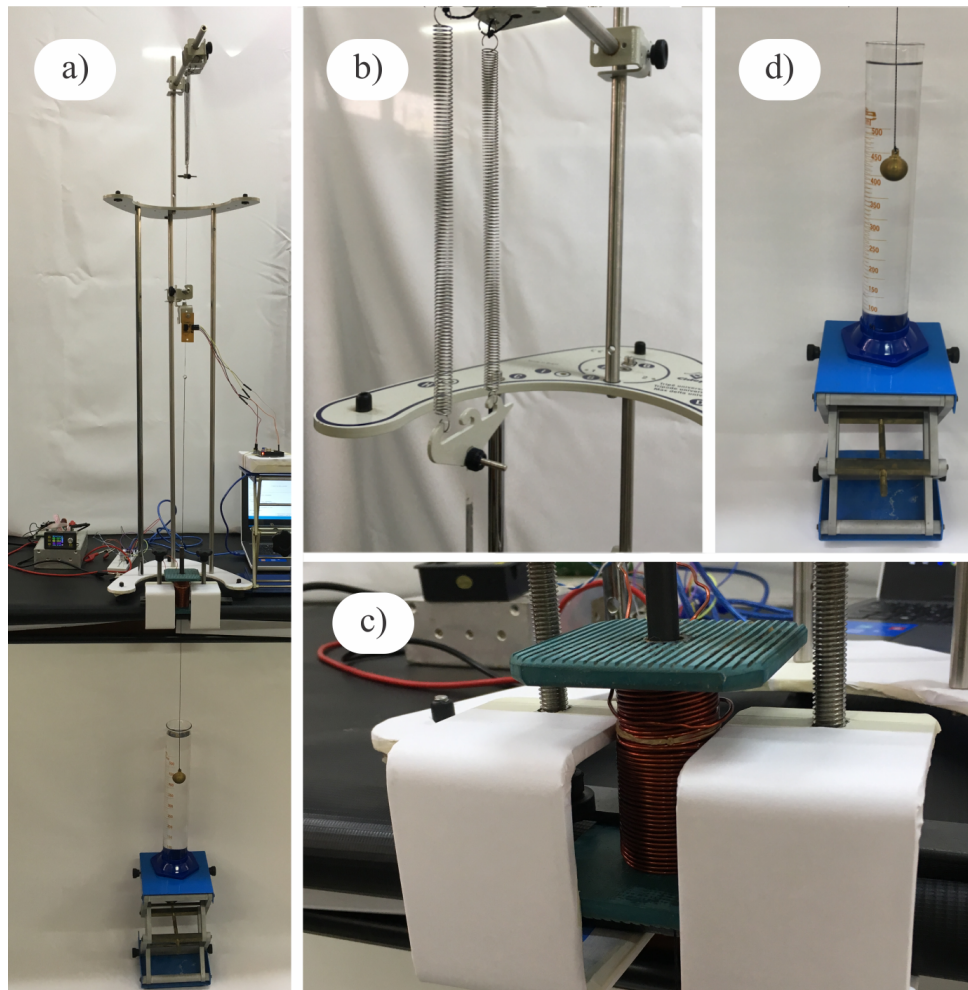


Figura 31: a) Montagem experimental do oscilador forçado. b) Composição de molas associadas em paralelo. c) Instrumento formado pela bobina e o elemento ferromagnético capaz de forçar o oscilador. d) Aparato de amortecimento composto por uma coluna de fluido. *Fonte:* Autoria própria

Pela Figura 31, observa-se a introdução de um circuito RL no instrumental capaz de forçar o oscilador, esse circuito com fonte de alimentação de corrente contínua é interligado aos terminais da bobina, ao transistor e a placa Arduino Nano. A bobina contém múltiplas espiras cilíndricas de fio condutor, nesse caso, fio de cobre, e se comporta como um dispositivo elétrico denominado *indutor*.

O indutor consiste em um componente na qual se armazena energia magnética compreendida em seu volume interior, o material ferromagnético que passa estrategicamente no interior da bobina possui a propriedade de ser fortemente imantado, cuja presença do cilindro concentra as linhas de força de campo magnético que se assemelham àquelas geradas por um ímã no interior das espiras tornando o campo magnético resultante mais intenso [38].

O aumento súbito da corrente elétrica na bobina produz uma força eletromotriz auto-induzida que se opõe à variação da corrente, essa força provoca o aparecimento de uma tensão aos terminais da bobina [39]. Quando a corrente estabiliza, a bobina não cria mais ‘oposição’ e a tensão no terminal da bobina torna-se nula. Todavia, na prática, dificilmente encontra-se um campo magnético perfeitamente uniforme, nas bordas de um elemento magnético há sempre algumas linhas de campo que não são paralelas às outras.

As linhas de campo nas bordas de um elemento magnético são chamadas de espalhamento (efeito de bordas) [40]. Ao cruzar o cilindro ferromagnético o fluxo magnético sofre um espalhamento, isso faz com que a área por onde passa o fluxo seja maior que a área geométrica do cilindro.

O princípio de geração de uma força senoidal do nosso oscilador com o movimento do material ferromagnético no interior da bobina se assemelha ao movimento de um motor rotativo, podemos imaginar que na extremidade da fita encoder há aplicação de uma força dinâmica gerando tal comportamento. Existe uma eletrônica por trás do funcionamento dessa chave que possibilita o movimento senoidal do oscilador, a seguir iremos comenta-la.

Dos elementos do circuito eletrônico um de fundamental importância é o transistor, composto de três filamentos, chamados de base, emissor (polo positivo) e coletor (polo negativo), a base mantém o controle do estado do transistor [41]. Quando o transistor está desligado, não existe carga elétrica na base, por isso, inexistência de corrente elétrica entre o emissor e o coletor (bit 0), em contrapartida, quando é aplicada certa tensão na base o circuito é fechado e é estabelecida a corrente entre o emissor e o receptor (bit 1).

O microcontrolador é projetado com o intuito de fazer a inteligência do circuito e não de suportar grandes correntes, no entanto, como auxílio para esse controle instauramos um transistor operando na comunicação e controle do circuito micro controlado evitando o risco de danos, haja vista que a corrente pode ser chaveada por esse dispositivo.

Ao solenoide ligamos com uma das suas terminações o polo negativo da fonte de 11 V, alimentando-o com 1,5 A, à outra terminação do solenoide ligamos no filamento de base do transistor, no filamento coletor do transistor conectamos um resistor, cuja função é limitar a corrente do coletor, ao conjunto associamos um diodo para evitar que uma corrente contrária chegue ao Arduino, o diodo faz essa proteção admitindo corrente apenas em um único sentido.

Para segurança do material semicondutor (transistor) fixamos nele um dissipador de calor. Ligamos a porta digital 6 do Arduino ao transistor. Unimos em um pacote único o ground da fonte, o ground do Arduino e o filamento emissor do transistor. Dessa forma, temos os 5 V do Arduino controlando o transistor, fazendo ele funcionar como uma chave e 11 V da fonte suprindo o eletroímã. A seguir na Figura 32 indicamos o diagrama do circuito elétrico descrito.

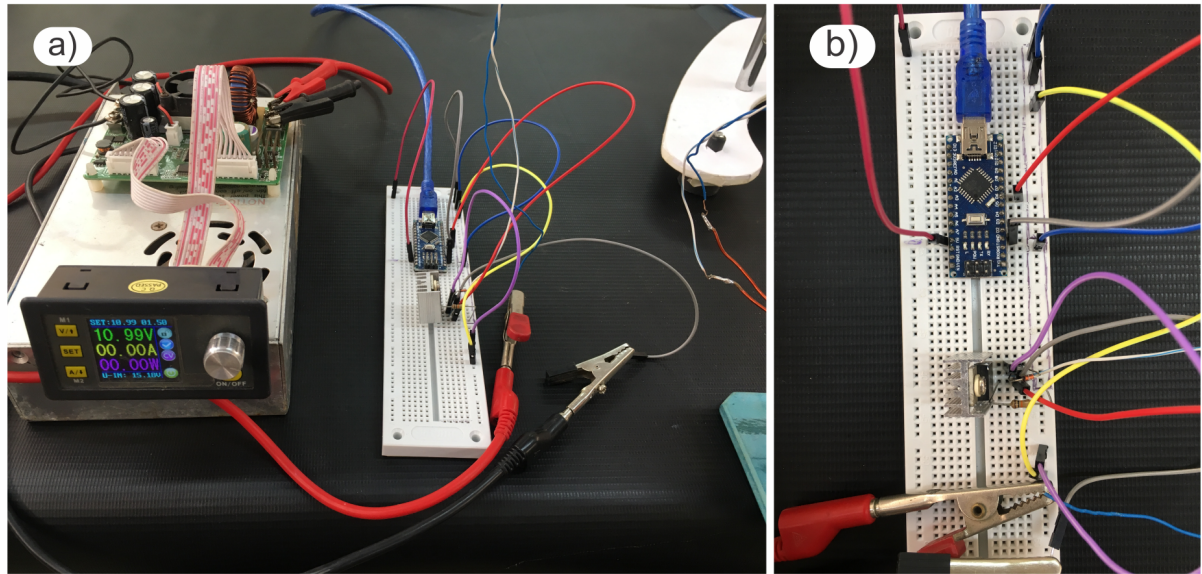


Figura 32: a) Circuito elétrico fonte regulada com valor de tensão de 11 V. b) Em detalhe as conexões dos pinos do Arduino Nano e o transistor. *Fonte:* Autoria própria

Temos a partir daí um Arduino trabalhando na aquisição de valores instantâneos de posições em função da variável tempo e um outro Arduino auxiliando a aplicação da força externa no oscilador. Para este último trabalhamos no software do Arduino de modo que ele mandasse a informação de mudança de estado à porta digital 6 via interrupção com Timer. Basicamente esse foi o procedimento de geração de uma força senoidal no oscilador, estendemos o desempenho eletrônico para a ação de uma força impulsiva gerando atuação de um sinal de alto e um sinal de baixo em um curto intervalo de tempo.

Feito toda essa engenharia agora é possível estudarmos a Física do oscilador forçado sob influência de força senoidal e sob influência de força impulsiva. Temos o intuito de validar experimentalmente o comportamento fenomenológico dos fenômenos ressonância e batimentos, assim como avaliar a resposta dinâmica do sistema forçado, forçado e amortecido observando as variáveis físicas ao comparar com a previsão teórica.

5 Resultados e Discussões

5.1 Determinação do valor local da aceleração da gravidade

Este experimento foi repetido uma grande número de vezes ajustando o sistema a cada repetição na tentativa de melhorar os resultados. Foram obtidos valores para a aceleração gravitacional que variam de 9 m/s^2 à $9,66 \text{ m/s}^2$, esse experimento se mostrou extremamente sensível às condições de abandono realizada pelo experimentador, a fim de atingir resultados com uma boa aproximação reduzimos o atrito entre a fita de código linear e as paredes do sensor alinhando cuidadosamente as hastes e os componentes experimentais. Dentre as vezes que sucedemos esse experimento selecionamos um dos histórico de resultados da prática experimental para o tratamento gráfico de tal. Abaixo declaramos o resultado procedido por meio de um gráfico de deslocamento em função do tempo indicando o valor local da aceleração da gravidade, Figura 33.

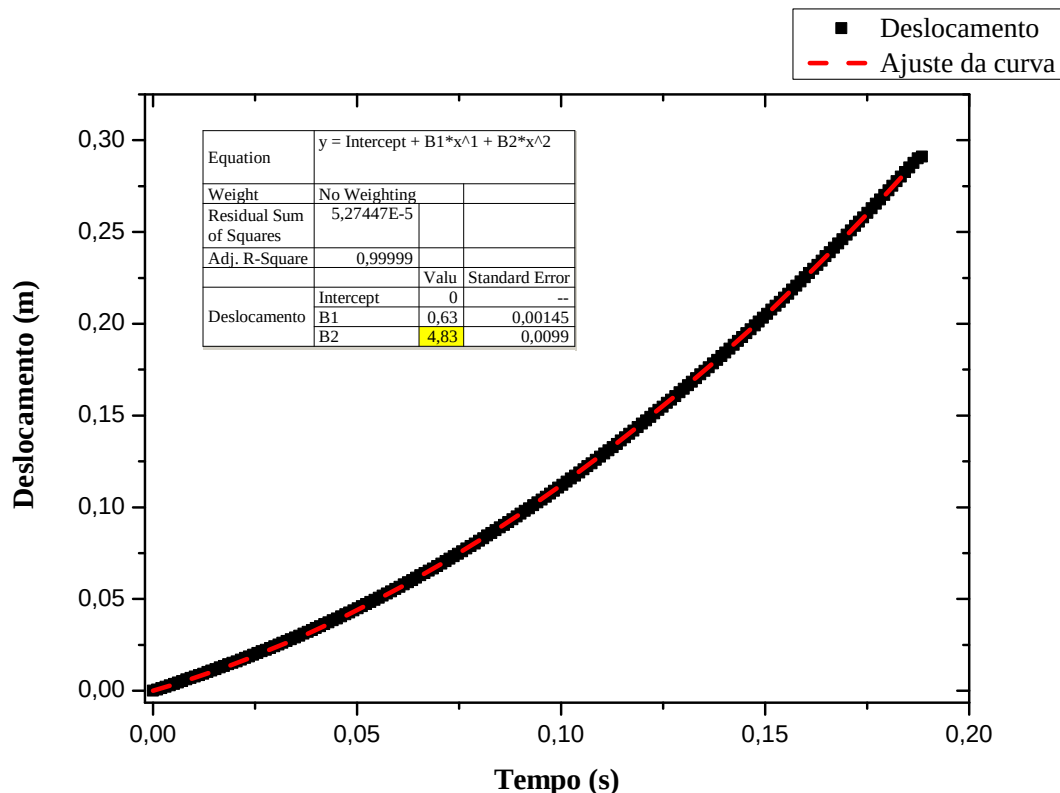


Figura 33: Posição vs Tempo na queda livre. Em destaque o valor da aceleração gravitacional local oriundo do fit polinomial da curva.

Os valores experimentais são coletados pelo Arduino e enviados ao computador através da porta de comunicação serial. Estes dados são plotados em um gráfico ao qual

é realizado um ajuste polinomial da curva. Esta técnica é comumente denominada Fit e consiste no ajuste de equação polinomial fornecida para que esta coincida com os dados experimentais.

Em especial, para o nosso caso, como se trata da queda livre de um objeto, sabendo que a equação do movimento de queda livre é descrita pela equação parabólica $x = x_0 + v_0t + \frac{g}{2}t^2$, isto é, polinomial de grau dois, realizamos o ajuste conforme o formato da equação parabólica cujo coeficiente $\frac{B}{2}$ na Figura 33 resultou em um valor de 4,83. Dessa forma, conhecida a equação de movimento de um corpo em queda livre, temos a quantidade de $9,66 \text{ m/s}^2$ de aceleração da gravidade local.

Com esse resultado constatamos uma boa aproximação ao valor previsto de aceleração da gravidade, o erro de 0,98% representa os diversos fatores que influenciam na medição, em situações reais o experimentador compartilha de um ambiente não ideal cuja resistência, sobretudo, o atrito se fará presente nos sistemas em estudo mesmo que se utilizem excelentes técnicas de atenuação desses efeitos. Utilizaremos esse resultado observado de aceleração gravitacional nos demais experimentos, seguiremos discutindo a respeito da experimentação que finda determinar a constante elástica das molas incrementadas no oscilador.

5.2 Determinação da constante elástica das molas

Após proceder a montagem e execução do experimento cujo objetivo é determinar a constante elástica das molas, identificamos no monitor serial do Arduino no computador os respectivos valores de deformação ocorrida na mola com a adição uma a uma das massas, relacionamos esses valores na Tabela 1 indicando a deformação correspondente a um dada força peso, consideramos o valor da gravidade medido no experimento anterior.

Tabela 1: Relação força peso e deformação

Força Peso (N)	Deformação (m)
0,483	0,033
0,966	0,066
1,449	0,099
1,932	0,132

De posse desse resultado, facilmente é feito o gráfico força peso vs deformação no Origin, de maneira que se obtém a constante efetiva desejada da mola realizando o Fit Linear, isto é, o ajuste de curva linear que consiste numa ferramenta que examina a relação entre a resposta às variáveis independentes em uma função linear. A metodologia de ajuste do Origin faz uso do método de mínimos quadrados ponderados para ajustar a função no modelo linear e fornecer para o nosso caso a constante da mola obtida pelo

coeficiente da reta. Abaixo na Figura 34 evidenciamos o resultado dessa operação com indicação do valor da constante elástica da mola.

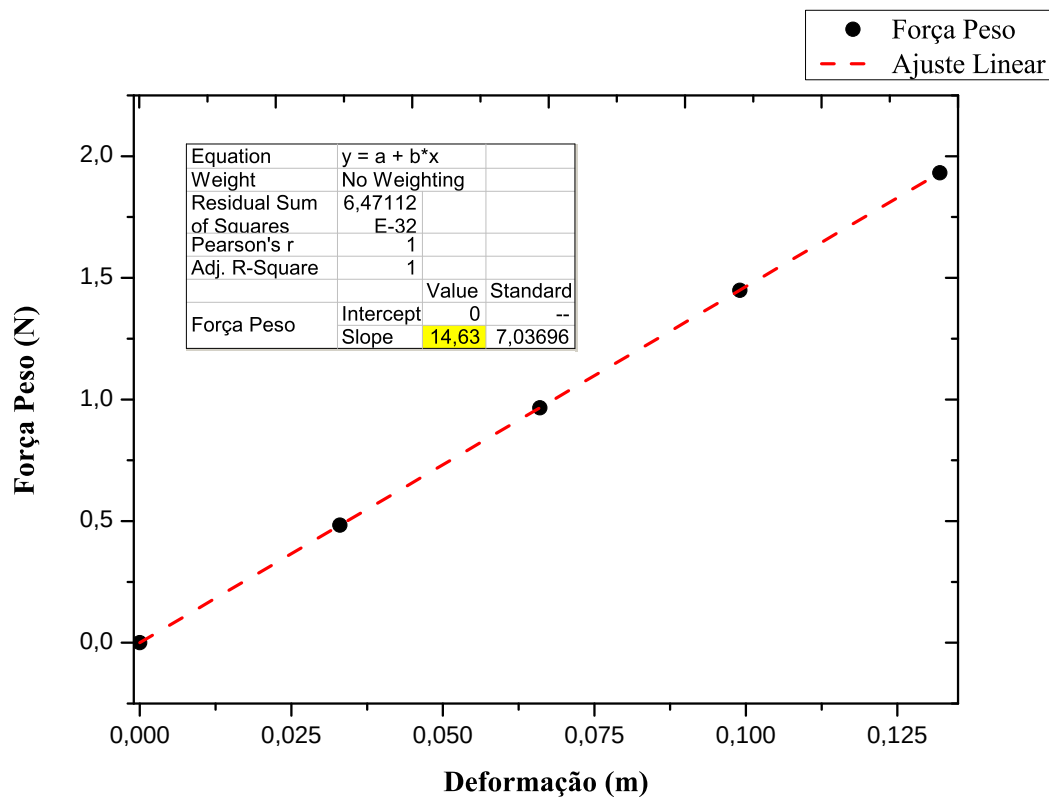


Figura 34: Gráfico Força Peso vs Deformação. Em destaque o valor obtido da constante elástica da mola oriundo do fit linear da reta.

Usaremos essa mesma mola no experimento cujo objetivo é avaliar experimentalmente a relação entre o período/frequência de oscilação e a inércia do oscilador. No laboratório de física selecionamos mais uma mola de constante elástica semelhante a essa evidenciada nos resultados experimentais e com duas molas semelhantes realizamos os experimentos de associação de molas.

5.3 Relação entre a frequência de oscilação e a inércia do sistema

Após por em prática o método experimental apresentado no capítulo anterior, verificamos os resultados experimentais de período e frequência obtidos através dos gráficos oriundos da configuração do oscilador com uma mola, e da configuração com associação de molas de mesma constante elástica. Experimentalmente apuramos o período de oscilação, ou seja, a diferença de valores entre duas cristas consecutivas, do oscilador indicado na Figura 27, quando sujeito a variações de massa, os resultados obtidos estão indicados na tabela abaixo:

Tabela 2: Oscilador massa/mola variando a inércia

Massa (kg)	Período (s)	Frequência (Hz)
0,252	0,8090	1,2360
0,302	0,8807	1,1354
0,352	0,9318	1,0732
0,402	1,0036	0,9964
0,452	1,0547	0,9481

As informações que extraímos dos resultados experimentais quanto as variáveis indicadas na Tabela 2 são as seguintes, observa-se que a medida que a massa do sistema aumenta, o período de oscilação aumenta havendo uma redução na frequência oscilante, visualmente podemos observar ao superpor os gráficos dos resultados obtidos no experimento, Figura 35, a mudança no período de oscilação com a adição de massa.

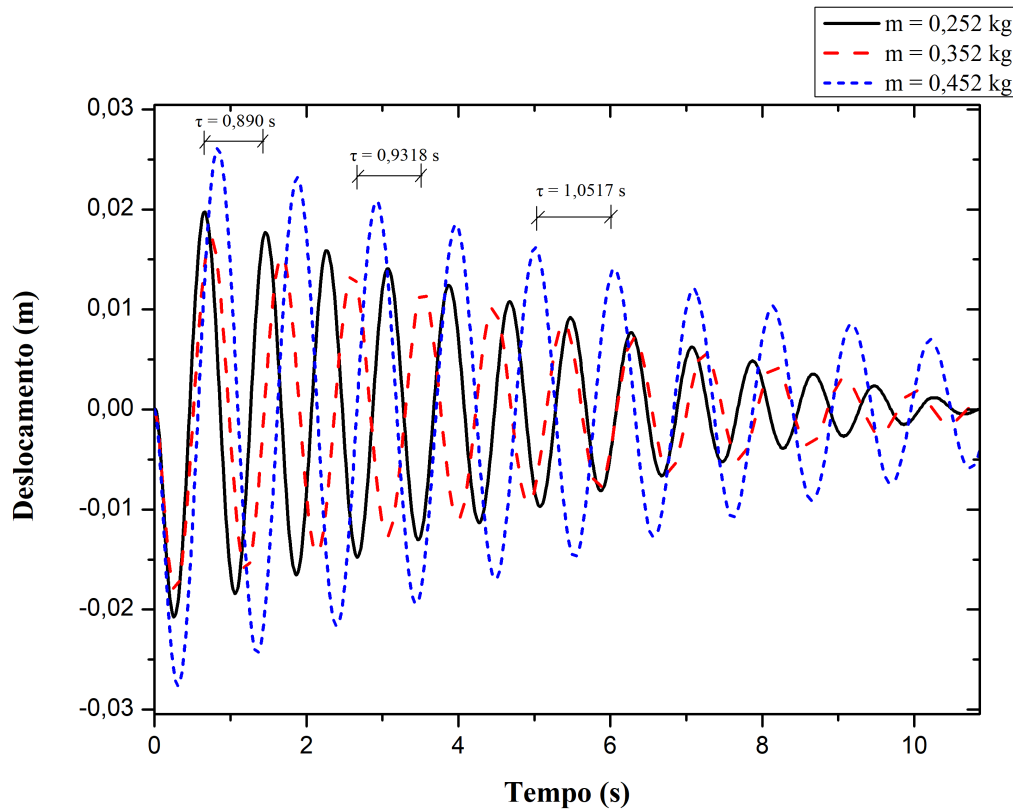


Figura 35: Superposição dos gráficos gerados ao colocar o sistema para oscilar com valores de massa distintos. *Fonte:* Autoria própria

Uma informação relevante que podemos acrescentar a respeito dos parâmetros que modificam o comportamento oscilatório de um oscilador é que ao substituir do sistema a mola, com constante elástica diferente da adotada no experimento, se uma nova mola possuir constante elástica maior, essa possuiria uma maior taxa de restauração provocando uma redução no período de oscilação. Para comparar os resultados observados com os

previstos pelo modelo teórico do oscilador calculamos a frequência de oscilação por meio da equação 3.7 considerando quatro casas decimais nos cálculos. A seguir na Tabela 3 o comparativo entre o resultado previsto e o observado indicando o erro percentual.

Tabela 3: Comparação dos valores de frequência experimentais e teóricos do oscilador massa/mola ao variar sua inércia.

Massa (kg)	Freq. Observada (Hz)	Freq. Prevista (Hz)	Erro Percentual
0,252	1,2360	1,2129	1,02%
0,302	1,1354	1,1079	1,02%
0,352	1,0732	1,0263	1,06%
0,402	0,9964	0,9603	1,04%
0,452	0,9481	0,9056	1,05%

Com o experimento proposto verificamos o esperado pois ao comparar o resultado observado com o previsto obtemos um erro de medida da ordem de 10^{-2} , certamente devido a resistência da força de atrito no movimento, na tentativa de evitá-lo utilizamos o trilho de ar, no entanto sabemos que em sistemas físicos reais não é uma tarefa fácil reduzir totalmente o atrito. Além disso, podemos argumentar a diferença dos valores quando comparados justificando a presença de inércia rotacional no sistema físico realista oriundo do momento de inércia da polia, em modelos teóricos admitem-se comumente que o componente é um elemento ideal não interferindo na dinâmica do sistema.

Na configuração do oscilador com associação de molas de mesma constante elástica indicado na Figura 29, observando o comportamento da deformação das molas na oscilação não identificamos de imediato o tipo de associação equivalente do oscilador, devido a isso fizemos o cálculo para determinar a constante elástica equivalente e o tipo de associação a que se refere. Feito os cálculos, verificamos que a disposição das molas no oscilador equivale a uma associação em paralelo, como consequência, a constante elástica equivalente ao dobro do valor experimental encontrado no experimento de determinação da constante elástica.

Seguindo a mesma metodologia de obtenção de dados da configuração do oscilador com uma única mola, e de maneira análoga, apuramos o período de oscilação, ou seja, a diferença de valores entre duas cristas consecutivas, do oscilador indicado na Figura 29, quando sujeito as mesmas variações de massa. Nesse novo arranjo, a massa do conjunto oscilatório sem a adição dos discos é de $m = 0,1852 \text{ kg}$. Os resultados obtidos nesse experimento estão organizados na tabela abaixo:

Tabela 4: Oscilador com molas associadas em paralelo variando a inércia

Massa (kg)	Período (s)	Frequência (Hz)
0,1852	0,4608	2,1701
0,2352	0,5224	1,9142
0,2852	0,5735	1,7436
0,3352	0,6144	1,5501
0,3852	0,6656	1,5024

Ao relacionar as informações dos parâmetros contidos na Tabela 4, avaliamos que o aumento na inércia do sistema massa/mola, provoca um aumento no período de oscilação na qual gera redução na frequência oscilante. Observamos modificação no comportamento do oscilador ao superpor os gráficos dos resultados experimentais. A seguir na Figura 36, ilustramos a atuação do oscilador perante a variação do parâmetro inércia indicando o período de oscilação das curvas.

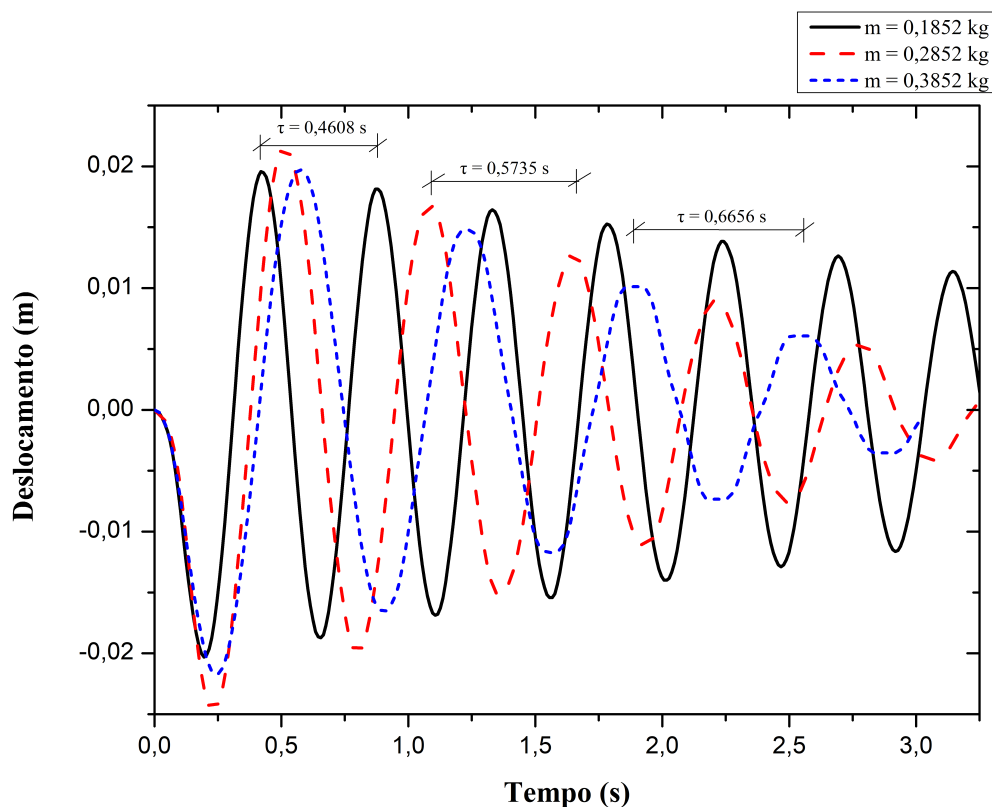


Figura 36: Superposição dos gráficos gerados ao colocar o sistema com molas associadas para oscilar com valores de massa distintos. *Fonte:* Autoria própria

Para melhorar a análise do planejamento experimental vamos confrontar os valores de frequência observada com os valores de frequência prevista no modelo teórico ideal do oscilador massa/mola. Para isso, calculamos a frequência de oscilação por meio da equação 3.7 considerando quatro casas decimais nos cálculos, lembrando que para essa

configuração consideramos sob efeitos de cálculo a constante de mola equivalente ao sistema com associação em paralelo. A seguir na Tabela 5 o comparativo entre o resultado previsto e o observado examinando, para controle estatístico, o erro percentual entre as medidas.

Tabela 5: Valores de frequência experimentais e teóricos do oscilador massa/mola com associação de molas em paralelo ao variar sua inércia.

Massa (kg)	Freq. Observada (Hz)	Freq. Prevista (Hz)	Erro Percentual
0,1852	2,1701	2,0000	1,08%
0,2352	1,9142	1,7752	1,08%
0,2852	1,7436	1,6121	1,08%
0,3352	1,5501	1,4873	1,04%
0,3852	1,5024	1,3874	1,08%

Assim como a situação anterior, a frequência de oscilação observada se aproxima da frequência prevista no modelo de oscilador idealizado. Nesse caso, com um erro um pouco maior, justificamos também esse percentual de erro superior ao confrontar os valores argumentando que as molas possuem uma configuração inicial com distensão em ambos os lados do oscilador, onde há grau de instabilidade da mola durante a oscilação, haja vista que essas diferentemente do caso anterior não possuem uma das extremidades fixadas, em modelos teóricos não se admitem fatores que influenciam o componente dinâmico do movimento oscilatório, além disso, há influência oriunda da resistência da força de atrito ao movimento.

Daremos sequência discutindo os resultados experimentais do oscilador forçado, verificando a ocorrência de fenômenos como ressonância e batimentos e suas implicações ao oscilador. Analisaremos a composição da oscilação transiente em um sistema forçado, o regime oscilante sob influência de uma força impulsiva, e por fim discutir espécies distintas de amortecimento e suas características.

5.4 Oscilador sob influência de força externa

Ao realizar o experimento da montagem mostrada na Figura 30b), e configurando no Arduino o período de 0,3 s de atuação da força senoidal, isto é, frequência forçada de 3,33 Hz, capturamos as sucessivas posições do movimento oscilatório do sistema massa/mola em questão. De posse das sucessivas posições em função da variável tempo plotamos o gráfico x vs t no Origin evidenciado abaixo, Figura 37.

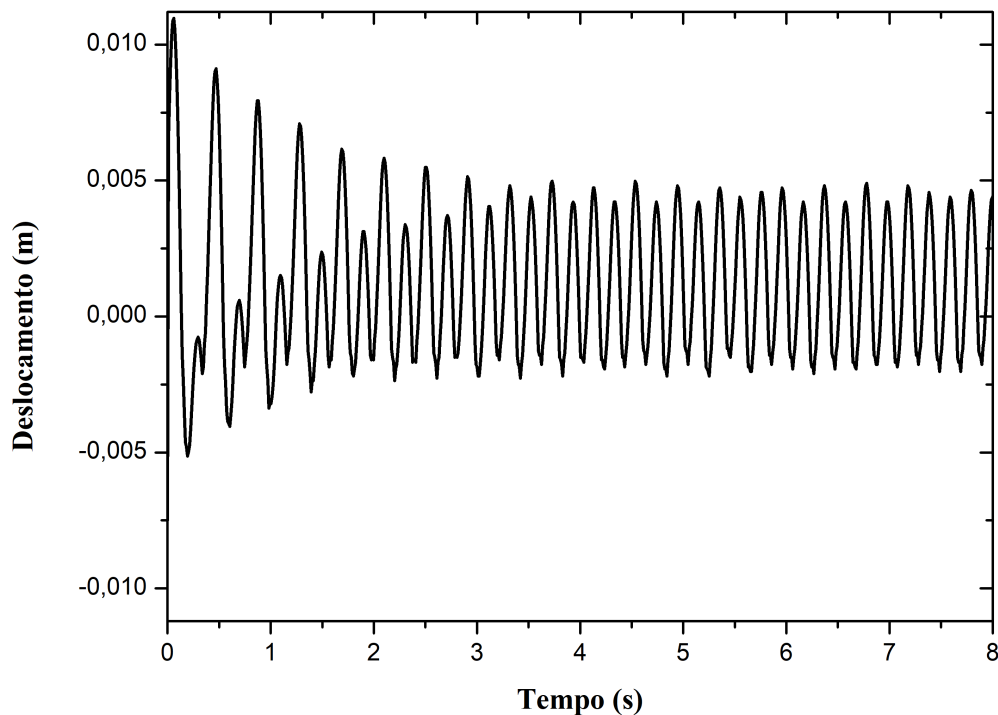


Figura 37: Resposta dinâmica forçada de um oscilador massa/mola com amortecimento viscoso. *Fonte:* Autoria própria

Selecionamos os primeiros 8 s de fenômeno, a partir desse intervalo de tempo conseguimos caracterizar o comportamento do oscilador e verificar o esperado. Esse gráfico expõe o caráter transiente do oscilador nos primeiros instantes de fenômeno, cuja solução nesse pedaço superpõem a resposta ao amortecimento e a força senoidal. No entanto, a dissipação de energia devido o amortecimento é restaurada ao sistema pela aplicação da força externa, a partir dos 3 s de fenômeno a resposta dinâmica do oscilador se comporta segundo a solução estacionaria, isto é, regime permanente. Observamos que esse comportamento exibido no gráfico da Figura 37 oriundo da experimentação se assemelha a situação comportamental da previsão teórica exibida na Figura 10.

Medimos a massa correspondente a esse conjunto oscilatório, ou seja, fizemos o somatório de todas as massas envolvidas no oscilador, verificamos uma massa total de 0,127 g, dessa forma, sabendo o valor da constante elástica das molas no experimento podemos calcular a frequência natural do oscilador. De uma experimentação anterior medimos o valor de 14,63 N/m de constante elástica da mola.

Sabendo que temos duas molas associadas em paralelo a constante de mola equivalente será $K_{eq} = 29,26 \text{ N/m}$, isto é, o dobro do valor medido para uma mola única. Conhecida essa informação de massa e constante elástica equivalente, calculamos segundo

a expressão 3.7 a quantia de $2,41 \text{ Hz}$ correspondente à frequência natural de oscilação. Esse cálculo se fez necessário para termos o valor de frequência natural como parâmetro pra realização dos experimentos que sequenciam cujo objetivo é determinar a frequência de ressonância do oscilador.

Segundo a montagem da Figura 30a), configuramos o Arduino declarando o período de atuação da força no oscilador de modo a variar a frequência forçante. Realizamos alguns experimentos com valores diferentes de frequência, selecionamos o valor de $2,5 \text{ Hz}$ de frequência forçante que desempenhou características ressonantes no oscilador. Com a captura dos pontos plotamos o seguinte gráfico, Figura 38.

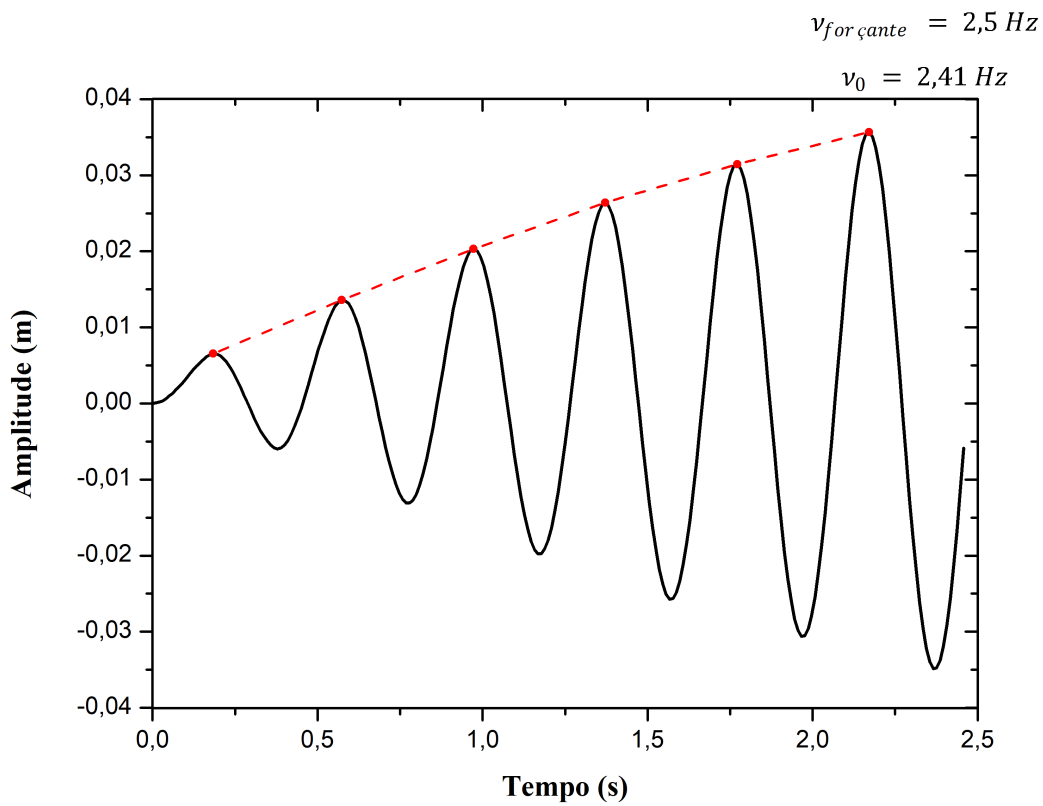


Figura 38: Oscilação na frequência de ressonância com aumento linear da amplitude. *Fonte:* Autoria própria

Notamos pelo gráfico que em ressonância, o oscilador exibe um comportamento de aumento linear da amplitude, o efeito de ressonância, na realidade física do sistema mecânico ocorre até que a amplitude atinga um valor limite onde o sistema se rompe, no nosso caso, esse rompimento ocorre com o salto do cilindro de ferro do interior da bobina, interrompendo portanto a oscilação, na previsão teórica se não há amortecimento, $\beta = 0$, e segundo a expressão 3.40, a amplitude no denominador só depende da diferença $\omega_0^2 - \omega^2$ sendo essa diferença pequena a amplitude tende ao infinito, a seguir iremos observar que na presença de amortecimento isso não ocorre.

Como esperado o fenômeno ocorrido na realização experimental aconteceu numa frequência forçante de $2,5 \text{ Hz}$ valor bem próximo a frequência natural do oscilador. Ao avaliar a razão entre as frequências, natural e forçante, em um diagrama que revela o fator de amplificação dinâmica percebemos que a razão é aproximadamente 1, conforme a previsão teórica evidenciada na Figura 11, revelando mais uma vez características ressoantes no oscilador.

Repetimos o experimento com a mesma frequência forçante, $2,5 \text{ Hz}$, adicionando ao oscilador o amortecimento contido na coluna de água, colocamos a esfera pra oscilar dentro do fluido conforme a Figura 30b). Com o histórico de posições dessa nova configuração construímos o seguinte gráfico, Figura 39.

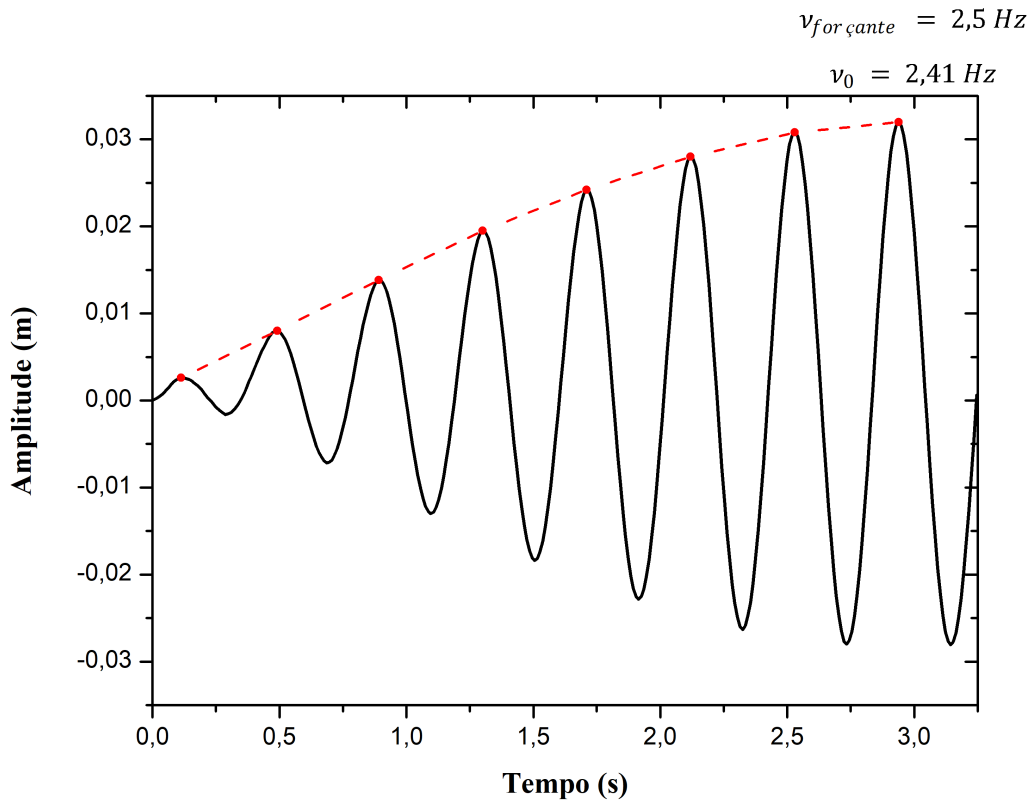


Figura 39: Oscilação na frequência de ressonância com aumento não linear da amplitude. *Fonte:* Autoria própria

Nessa situação pelo gráfico percebemos um novo comportamento de ressonância no oscilador, isto claro, pela influência do amortecimento, como sabemos pela equação 3.41 a frequência de ressonância depende do amortecimento, quanto maior for o amortecimento, menor será a frequência de ressonância, então não poderíamos ter algo diferente do ocorrido. Pela Figura 39 notamos o novo comportamento do oscilador quando a frequência forçante se aproxima da frequência natural do sistema massa/mola, a amplitude agora cresce de maneira não linear.

Outro fenômeno característico do oscilador massa/mola quando a ele se aplica uma força externa é o fenômeno de batimentos, para verifica-lo experimentalmente colocamos o oscilador indicado na Figura 30a), para oscilar com uma frequência forçada de $2,70 \text{ Hz}$. Abaixo na Figura 40 temos o resposta dinâmica do fenômeno.

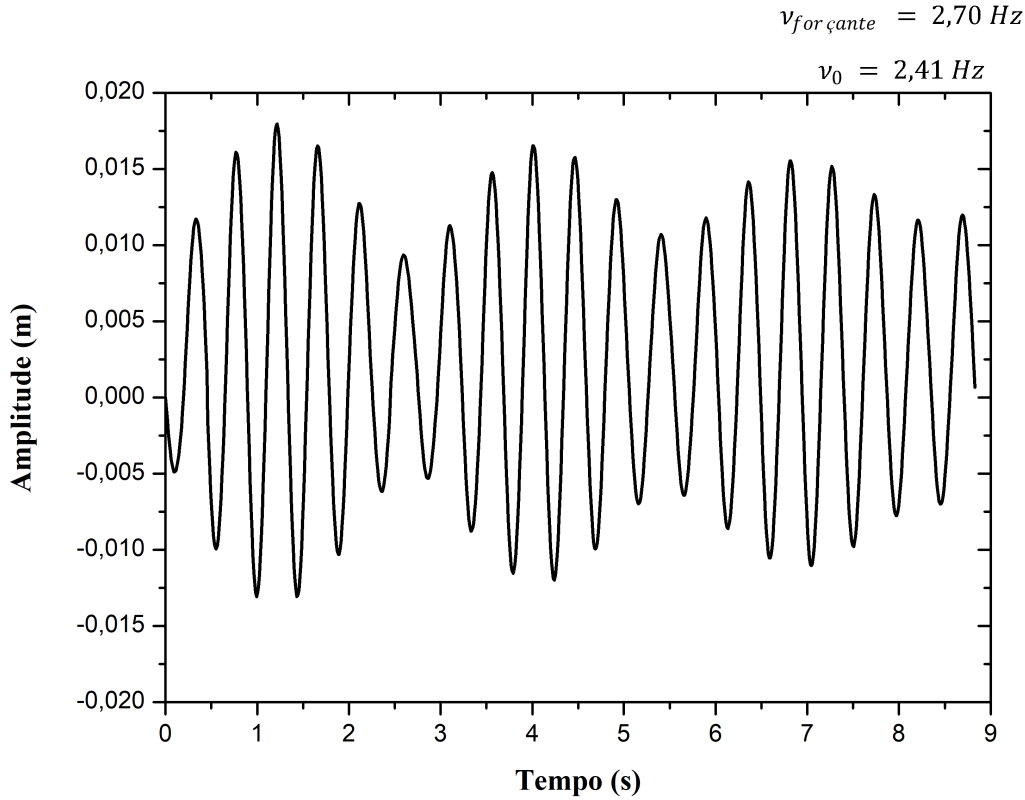


Figura 40: Ocorrência de batimentos no oscilador. Indicação das frequências envolvidas no fenômeno. *Fonte:* Autoria própria

Observando a resposta oscilatória da Figura 40 verificamos o resultado da soma de dois sinais, é notório uma leve defasagem entre os sinais devido a frequências ligeiramente diferentes que geram, sobretudo, momentos onde há interferência construtiva, maior amplitude, e momentos de interferência destrutiva, menor valor resultante de amplitude. Notamos que a resposta resultante da experimentação gera justamente um comportamento que se assemelha ao fenômeno de batimentos.

Realizamos experimentação no oscilador forçado subordinado à força senoidal de impulsão, isto é, o oscilador permanecia forçado durante todo o período de coleta de dados, ou seja, por 30 s sem interrupção, todavia, temos o intuito de verificar a resposta dinâmica do oscilador quando sujeito a uma força impulsiva de curta duração, para isso estendemos a discussão gerando atuação de picos sucessivos ao sistema. Para essa abordagem ao realizar o experimento segundo a montagem da Figura 31 na ausência de amortecimento, obtivemos a seguinte representação gráfica, Figura 41.

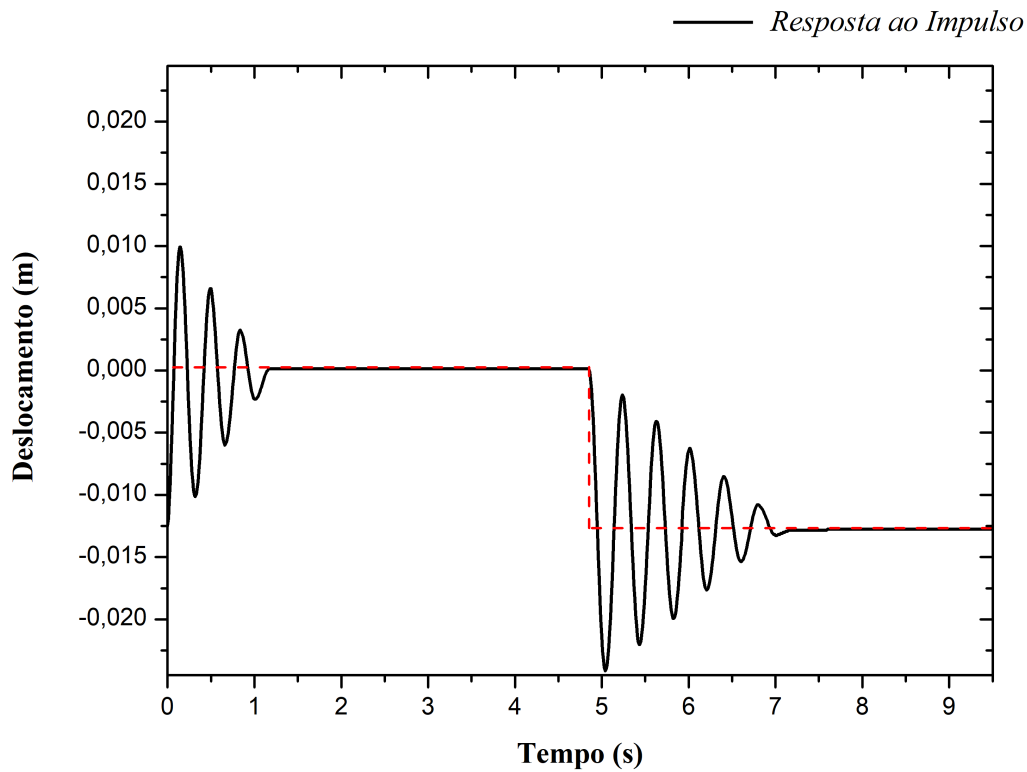


Figura 41: Gráfico x vs t para uma função impulso de força. *Fonte:* Autoria própria

Nesse experimento o oscilador era excitado com uma espécie de ‘peteleco’ a cada 5 s, selecionamos para análise os primeiros 10 s de fenômeno. Na modelagem teórica levamos em conta a função impulso de força como a diferença entre duas funções degrau separadas por um determinado tempo, dessa forma a resposta dinâmica teórica obtida se caracterizava mediante a Figura 18.

Ao comparar o resultado teórico com o observado na Figura 41 percebemos semelhanças no comportamento oscilatório, esse resultado não poderia ser diferente já que a metodologia experimental de aplicação de força que adotamos tem o formato de força modelado por uma função degrau. Dedicamos nesse trabalho a discussão citada pela presença dessa característica ao se estudar certas situações em física e, sobretudo, pois a concepção de um impulso possibilita a obtenção de soluções nas quais majorem ou minorem determinadas variáveis.

Por fim, reservamos para esse trabalho a discussão a respeito das classes de amortecimento que influenciaram na dinâmica oscilatória do nosso sistema forçado. Nos experimentos antecedentes tínhamos influência de um amortecimento constante, dado pela resistência ao movimento, μN , quando o sistema era posto pra oscilar horizontalmente no trilho de ar.

Em contrapartida, tínhamos a evidência de uma força de resistência proporcional a velocidade dada por, cv , quando o sistema oscilava verticalmente sem o contato direto com uma superfície. Diante disso tentaremos avaliar por meio dos gráficos o comportamento na operação experimental no trilho de ar e verticalmente livre de superfície no ar e na água. Daremos início com a oscilação no trilho de ar, seguimos a montagem experimental da Figura 30a) cujas molas estavam associadas em paralelo, abaixo temos a resposta oscilante dessa circunstância, Figura 42.

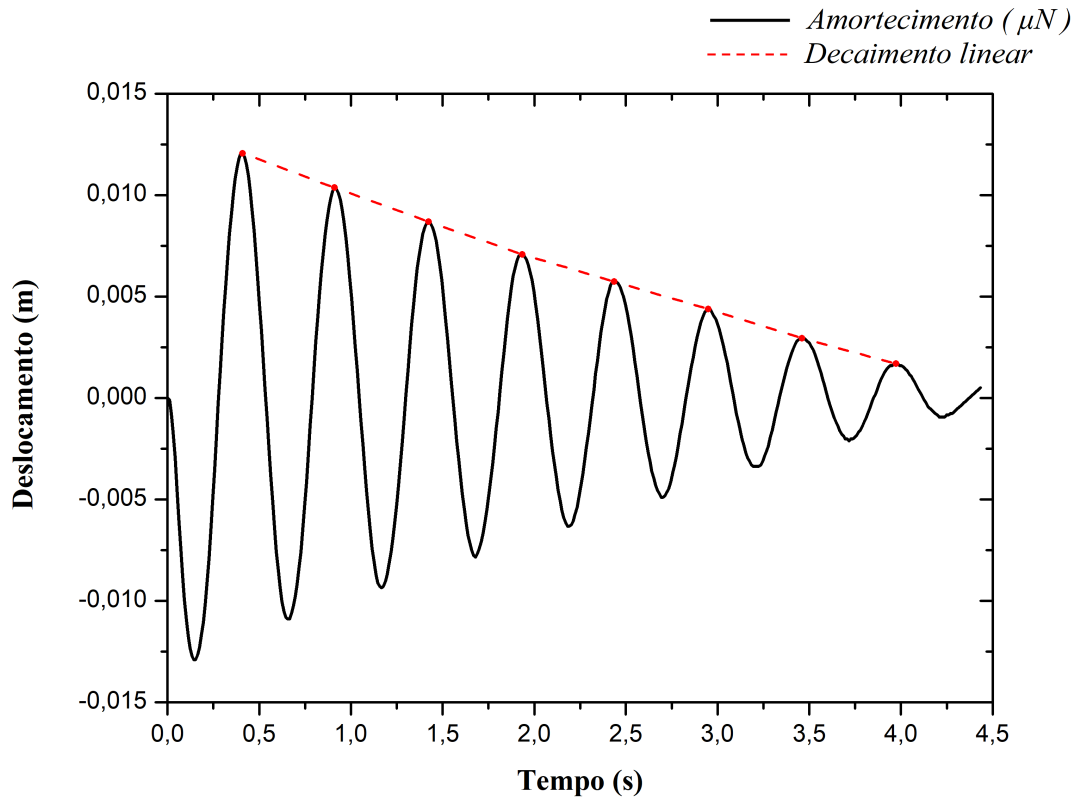


Figura 42: Amortecimento característico da oscilação no trilho de ar. *Fonte:* Autoria própria

Nesse experimento o decaimento linear da amplitude revela a característica esperada da resistência ao movimento oriundo da força de atrito presente do contato do carrinho com o trilho de ar. Vimos em detalhes no capítulo 3 o comportamento desse tipo de atrito, como esperado obtivemos uma resposta dinâmica do oscilador em concordância com a evidenciada na Figura 5.

Realizamos a experimentação seguindo a montagem da Figura 30b) eliminando do oscilador o conjunto da bobina, tínhamos apenas a oscilação amortecida pelo fluido, nesse experimento as molas também estavam associadas em paralelo, coletamos os dados e obtivemos a seguinte resposta, Figura 43.

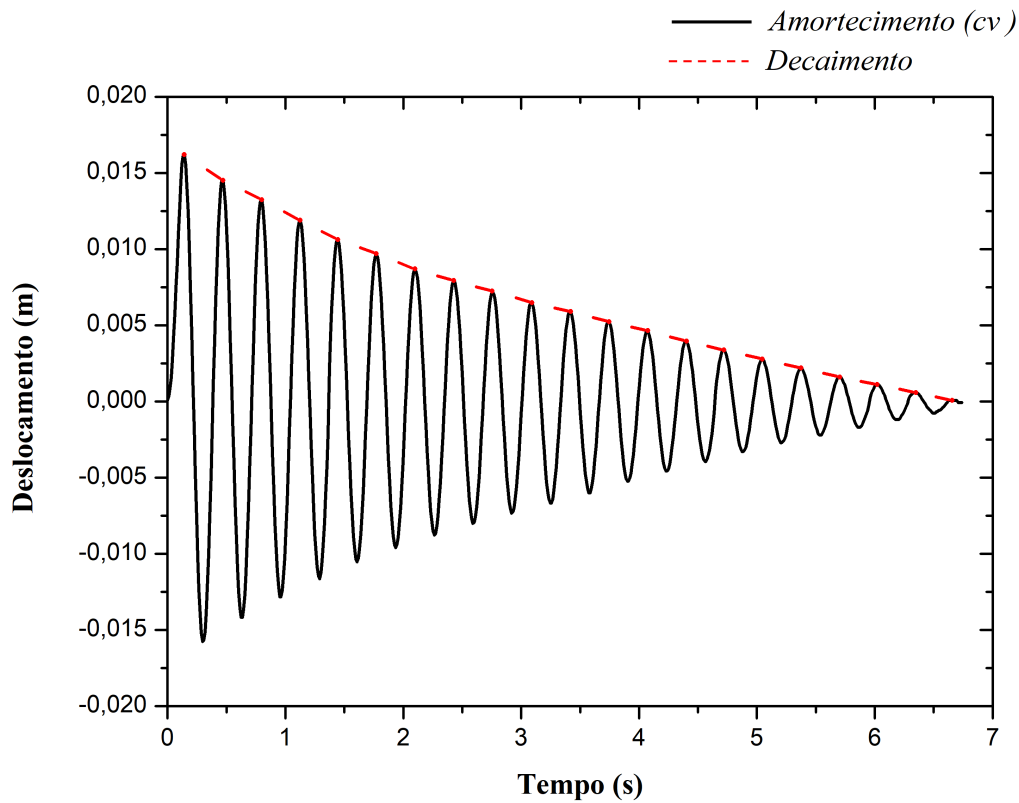


Figura 43: Amortecimento com fluido de viscosidade na ordem de 10^{-3} . Fonte: Autoria própria

Tentamos gerar uma perturbação inicial cuja amplitude inicial se assemelhasse a amplitude de início na oscilação da Figura 42, assim como priorizamos manter molas com associação em paralelo em ambos casos para termos situações sujeitas a condições iniciais semelhantes, facilitando o comparativo entre as experiências.

A diferença na amplitude inicial nos dois gráficos é devido ao controle experimental de execução do experimentador, em cada situação carregamos particularidades experimentais únicas. O decaimento exponencial da amplitude evidenciado na Figura 43 é esperado, a energia se dissipa conforme esse comportamento, o resultado teórico leva a essa mesma circunstância, Figura 7.

Examinamos o comportamento do oscilador segundo a montagem, Figura 30b), eliminando além da bobina, a coluna de água do conjunto oscilatório, dessa forma, a esfera oscilava livremente no ar, ao gerar o gráfico no Origin, obtivemos a resposta da Figura 44. Assim como nos demais casos, priorizamos a montagem com molas associadas em paralelo e uma excitação inicial cuja amplitude inicial fosse semelhante aos casos anteriores.

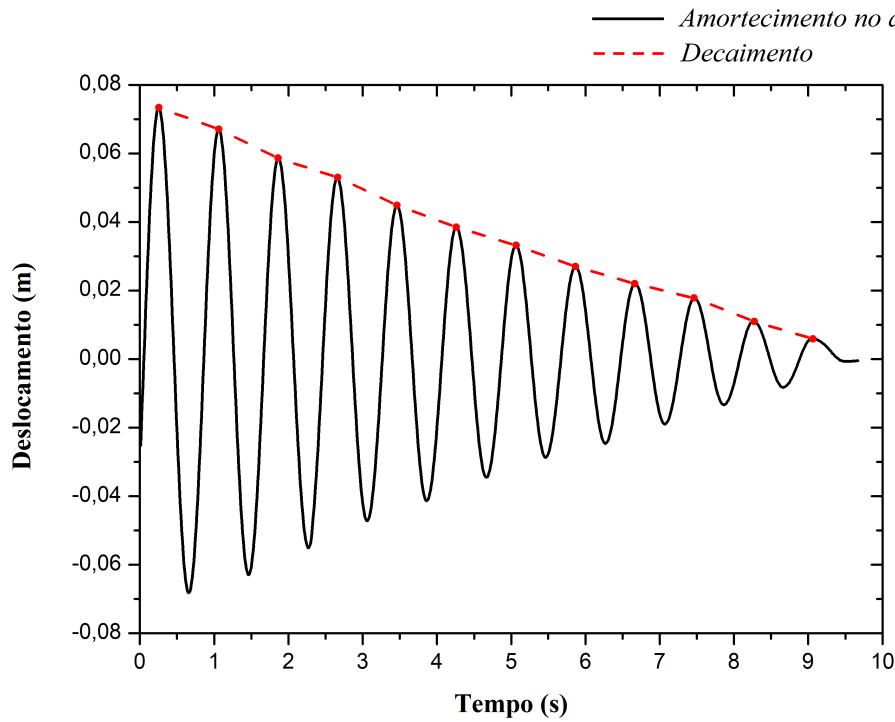


Figura 44: Amortecimento com fluido de viscosidade na ordem de 10^{-6} . Fonte: Autoria própria

Obtemos um decaimento aproximadamente linear, verificamos a inexistência nessa situação de uma força de contato à uma superfície, ou seja, não faria sentido modelar nessa situação uma resistência ao movimento correspondente a uma força de atrito (μN), mesmo o comportamento dissipatório sendo igual ao observado na Figura 42.

A resistência ao movimento nessa situação é proporcional a uma potência da velocidade, no entanto, o comportamento diferenciado da experimentação anterior, decaimento exponencial, pode ser justificado pela diferença quanto a viscosidade dos fluidos em questão, a água tem viscosidade da ordem de 10^{-3} enquanto o ar possui uma viscosidade da ordem de 10^{-6} , nos atentamos a essa diferença de parâmetro e supomos que essa questão tenha influência na desigualdade de comportamento observada pois no modelo de amortecedor viscoso que comentamos no capítulo 2, revela que a viscosidade é um fator embutido na constante de amortecimento quando adotamos (cv), equação 2.2.

Entretanto, várias são as variáveis que incorporam a constante c quanto tratamos de um amortecimento viscoso, esse que citamos é apenas uma delas que observamos imediatamente com a modificação do fluido em oscilação, pois mantemos no limite da experiência os mesmos parâmetros comparativos aos dois casos. Contudo, o comentamos que em oscilação a resistência ao movimento quando constante dissipa energia a uma taxa linear, tendo em vista que a amplitude decai sob essa mesma taxa.

Considerações Finais

Tendo em vista os resultados atingidos nesse trabalho, no que concerne a utilização do aparato experimental na qual nos permitiu estudar o comportamento de osciladores harmônicos sob variadas configurações, destacamos que o contato experimental com o oscilador harmônico extraído de modelos físicos teóricos estudado na graduação amplifica no contexto acadêmico a visão sobre a natureza dos osciladores lineares clássicos modelados sob condições ideais. Implicações do tipo inércia rotacional, atrito, dissipação de energia são variáveis que desconsideramos na teoria, em contrapartida, na realidade física de fenômenos observados em osciladores reais é notório a inferência de tais parâmetros.

O instrumento de medida utilizado para esse trabalho desempenhou no limite de acurácia excelentes resultados experimentais acerca dos fenômenos observados, a ferramenta de aquisição de dados possibilitou a construção de um dispositivo muito utilizado em laboratório de Física. A ferramenta é de baixo custo, e capaz de explorar a potencialidade de fenômenos físicos existentes em sistemas oscilantes do tipo massa/mola, assim como, expandir a compreensão quanto aos fenômenos oscilatórios que se é estudado durante a graduação em Física.

Além da melhor compreensão da natureza do mundo físico real, destacamos que esse trabalho possibilitou a construção de um ambiente rico de conhecimento científico, isto pois, aliamos nessa obra conhecimentos de vários ramos da Física que foram além da temática principal, podemos apontar como exemplo, a ciência que precisamos para compor circuitos eletrônicos, assim como, o conhecimento de programação necessário e fundamental para resolver problemas de automação no Arduino e também problemas computacionais de Física ao trabalhar no computador soluções numéricas na discussão teórica da ocorrência do amortecimento constante.

A investigação experimental que fizemos pode ser estendida a inúmeros sistemas dinâmicos que ocorrem no limite de tempo de captura do sensor. As situações dinâmicas realistas que estudamos podem ser profundamente exploradas, limitamos a nossa discussão à ocorrência de fenômenos dinâmicos validados experimentalmente no oscilador para despertar o interesse do leitor quanto a relevância de se estudar a dinâmica considerando as variáveis existentes nos sistemas físicos reais, assim como ser de interesse que mudanças simplistas em parâmetros podem acarretar numa brusca situação no oscilador ao investigar o fenômeno ressonância, de mesmo modo que uma mudança de configuração pode produzir características peculiares de força resistiva no sistema em oscilação.

Neste trabalho mostramos a possibilidade de realizar experimentos de Física à baixo custo, utilizando a Plataforma Arduino. Em geral, atingimos os objetivos propo-

tos para o trabalho, conduzimos a escrita de forma clara, detalhando as sutilezas da produção, esperamos com essa abordagem ter despertado no leitor interesse acerca de experimentação em Física com uso do método experimental empregado. Como perspectivas do trabalho, tentamos na análise do movimento vertical de queda de um corpo em um fluido, determinar se a força de resistência tem dependência com v ou v^2 , no entanto, devido a não possibilidade de modelagem, esses dados ainda estão sendo analisados.

Referências

- 1 BALL, M. *Arduino Sketch to manage high resolution - high speed linear encoders*. Toronto: <<http://arduinoopi.blogspot.com/2014/04/arduino-sketch-to-manage-high.html>>, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 61.
- 2 PIRES, A. S. T. *Evolução das ideias da Física*. 2. ed. São Paulo: Livraria da física, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- 3 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 16, 18 e 22.
- 4 SORIANO, H. L. *Introdução à dinâmica das estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 16, 19, 34 e 41.
- 5 MARION, J. B. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 17, 19, 20, 53, 56, 59 e 60.
- 6 SILVEIRA, S.; GIRARDI, M. Desenvolvimento de um kit experimental com Arduino para o ensino de Física Moderna no Ensino Médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Scielo, v. 39, 2017. ISSN 1806-1117. Citado na página 17.
- 7 VALENTIN, M. B. et al. Aquisição de imagens ultrassônicas como experimento didático. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Scielo, v. 40, 2018. ISSN 1806-1117. Citado na página 17.
- 8 CAVALCANTE, M.; RODRIGUES, C. M.; PONTES, L. Novas tecnologias no estudo de ondas sonoras. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 30, n. 3, 2013. ISSN 2175-7941. Citado na página 17.
- 9 DIONISIO, G.; SPALDING, L. E. S. Visualização da forma de onda e conteúdo harmônico da corrente elétrica alternada em eletrodomésticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Scielo, v. 39, 2017. ISSN 1806-1117. Citado na página 17.
- 10 CORDOVA, H.; TORT, A. C. Medida de g com a placa arduino em um experimento simples de queda livre. *Rev. Bras. Ensino Fís*, v. 38, n. 2, 2016. ISSN 806-1117. Citado na página 17.
- 11 VALENTIN, M. B. et al. Investigação do fenômeno ilha de calor urbana através da utilização da placa Arduino e de um sítio oficial de meteorologia. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Scielo, v. 39, 2017. ISSN 1806-1117. Citado na página 17.
- 12 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da física, 2007. Citado na página 18.
- 13 FEYNMAN, R. P. *Lições de Física: Mecânica*. Porto Alegre: Bookman, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 18, 23, 44 e 49.
- 14 THOMPSON, W. T. *Teoria Da Vibração Com Aplicações*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. Citado 5 vezes nas páginas 19, 27, 35, 41 e 53.

- 15 MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Rio de Janeiro: International Student, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 20, 36 e 54.
- 16 RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 21, 22, 23, 30, 41, 49 e 52.
- 17 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Fluidos, oscilações e ondas, calor*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 21, 38 e 48.
- 18 MARCHEWKA, A.; ABBOTT, D. S.; BEICHNER, R. J. Oscillator damped by a constant-magnitude friction force. *American Association of Physics Teachers.*, 2004. Citado na página 22.
- 19 ALMEIDA, M. P. de; COSTA, U. M. S. Exemplo de histerese com um sistema de massa-mola. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, 2000. Citado na página 22.
- 20 MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas à física*. 2. ed. Ponta Grossa: UEPG, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 27, 38 e 45.
- 21 STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado na página 29.
- 22 GILAT, A.; SUBRAMANIAAM, V. *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: Uma introdução com aplicações usando o matlab*. Porto Alegre: Bookman, 2008. Citado na página 30.
- 23 FERNANDES, E. M. da G. P. *Computação numérica*. 2. ed. Braga: Universidade de Minho, 1997. Citado na página 30.
- 24 SYMON, K. R. *Mecânica*. 5. ed. São Paulo: Campus, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 49, 50, 52 e 60.
- 25 BRACEWELL, R. *The Fourier Transform and its Applications*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2000. Citado na página 53.
- 26 TONIDANDEL, D.; ARAUJO, A. A função delta revisitada: De heaviside a dirac. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, 2015. Citado na página 54.
- 27 FILHO, J. R. dos S. *A função delta de Dirac*. Santa Catarina - UFSC, 2013. Citado na página 56.
- 28 E.BUTKOV; CARVALHO, J. B. P. F. de. *Física matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: LCT, 1988. Citado na página 58.
- 29 FILHO, J. B.; OLIVEIRA, E. C. de; PAVAO, M. G. Uma revisão sobre funções de green dependentes do tempo. *Revista de Ensino de Física*, v. 6, 1984. Citado na página 58.
- 30 TURCHETTI, V. A. *Estudo de Encoders Ópticos Baseados no Efeito Moiré e Projeto de um Kit de Encoder Didático*. Campinas - UNICAMP, 2007. Citado na página 61.
- 31 CARVALHO, H. de S. *Oscilador Harmônico Amortecido: Um estudo utilizando a plataforma Arduino*. Parnaíba: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.

-
- 32 SILVA, R. A. *Programando Microcontroladores PIC: Linguagem c*. São Paulo, 2006. Citado na página 62.
- 33 MCROBERTS, M. *Arduíno Básico*. São Paulo: Novatec, 2011. Citado na página 63.
- 34 RENNA, R. B. D.; PAIVA, L. de M. *Tópicos Especiais em Eletrônica II: Introdução ao microcontrolador arduíno*. Niterói - RJ, 2014. Citado na página 63.
- 35 SOUZA, F. Timers do atmega328 no arduino. *Plataforma Embarcados*, 2015. Citado na página 63.
- 36 PURDUM, P. J. *Beginning C for Arduino: Learn c programming for the arduino and compatible microcontrollers*. New Concord: Apress, 2012. Citado na página 63.
- 37 STEVENSON, K. J. Review of originpro 8.5. *Journal of the american chemical society*, 2011. Citado na página 64.
- 38 ULABY, F. T. *Eletromagnetismo para engenheiros*. Porto Alegre: Bookman, 2007. Citado na página 74.
- 39 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física: Eletromagnetismo*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. Citado na página 75.
- 40 CARDOSO, J. R. *Engenharia eletromagnética*. São Paulo: Campus Elsevier, 2011. Citado na página 75.
- 41 CRARSUL, C. de Radioamadores de Rio do S. *Conhecimentos básicos de eletrônica e eletricidade*. Rio Grande do Sul: CRARSUL, 1998. Citado na página 75.

Apêndices

APÊNDICE A – Visão Geral do MATLAB

O Matlab derivado de Matrix Laboratory (Laboratório de Matrizes) é uma linguagem de desenvolvimento e de programação avançada na qual constitui pacotes de programas que pode ser usado como solução de uma infinidade de problemas científicos, dentre eles, solução de equações algébricas lineares e não lineares, equações diferenciais ordinárias e parciais, computação numérica, modelagens, simulações, análise de dados, processamento, traçado de gráficos e desenvolvimento de algoritmos. O programa possui uma linguagem usada em computação técnica, ele opera numa linguagem de programação de alto-nível em um ambiente interativo, possui versão para Linux, Windows e Mac. O programa é amplamente utilizado em universidades e faculdades em cursos introdutórios e avançados em matemática, ciência e, especialmente, em engenharia. Na indústria, esse programa é usado em pesquisa, desenvolvimento e projeto. O programa usa extensivamente a notação matricial, o dado incrementado consiste numa matriz de valores.

Esse software é próprio para as áreas técnicas e científicas, tem funções de tratamento numérico de alto desempenho, capazes de resolver problemas computacionais técnicos de forma mais eficiente do que as tradicionais linguagens de programação. Além do ambiente interativo, outra facilidade do Matlab é a possibilidade de execução de arquivos texto contendo uma sequência de instruções definidas pelo usuário. Os arquivos possuem extensão ‘.m’, podem ser criados e editados dentro ou fora do seu ambiente. O programa não é gratuito, no entanto, no site da MathWorks, <https://www.mathworks.com/>, existe uma versão teste disponível com tempo de uso de um mês, de posse dessa versão fizemos nossas simulações.

O programa pode ser usado para executar uma única declaração ou um conjunto de declarações, denominada arquivo de escrita, *script file*, esse proporciona uma capacidade excelente de construção de gráficos e programação, pode ser utilizado também na resolução de cálculos simples mediante a digitação de uma instrução na entrada do programa. O Matlab tem uma quantidade grande de funções embutidas, tais como: raiz quadrada de x (*sqrt(x)*), seno de x (*sen(x)*), logaritmo de x na base 10 (*log10(x)*), função gama de x (*gamma(x)*).

Para produzir um gráfico em Matlab, definimos um vetor de valores da variável independente t , e um vetor de valores da variável dependente x correspondentes aos valores de t , a construção do gráfico se dá por meio do comando *plot (t,x)*. O matlab tem várias funções baseadas na utilização do método Runge-Kutta, que podem ser usados para obter

a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Das configurações do programa nota-se que uma equação diferencial ordinária de ordem n deve ser convertida em um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem antes de usar funções do Matlab, a função residente *ode23* implementa uma combinação de métodos de Runge-Kutta de segunda ordem e terceira ordem, ao passo que a função *ode45* tem como base uma combinação de métodos de Runge-Kutta de quarta ordem e quinta ordem. Para resolver um sistema de equações diferenciais de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ usando a função *ode23* o comando a ser incrementado seria: $[t, x] = \text{ode}('dfunc', tspan, x_0)$.

Onde 'dfunc' é o nome da função $m - file$ cuja entrada deve ser t e x e saída um vetor coluna que representa $\frac{dx}{dt}$, ou seja, $f(t, x)$. É interessante comentar que o número de linhas no vetor coluna corresponde ao número de equações de primeira ordem. Deve conter no vetor 'tspan' os valores inicial e final da variável independente 't'. No vetor 'x₀' contém os valores iniciais de $x(t)$. Ao iniciar o software, temos o ambiente da Figura 45.

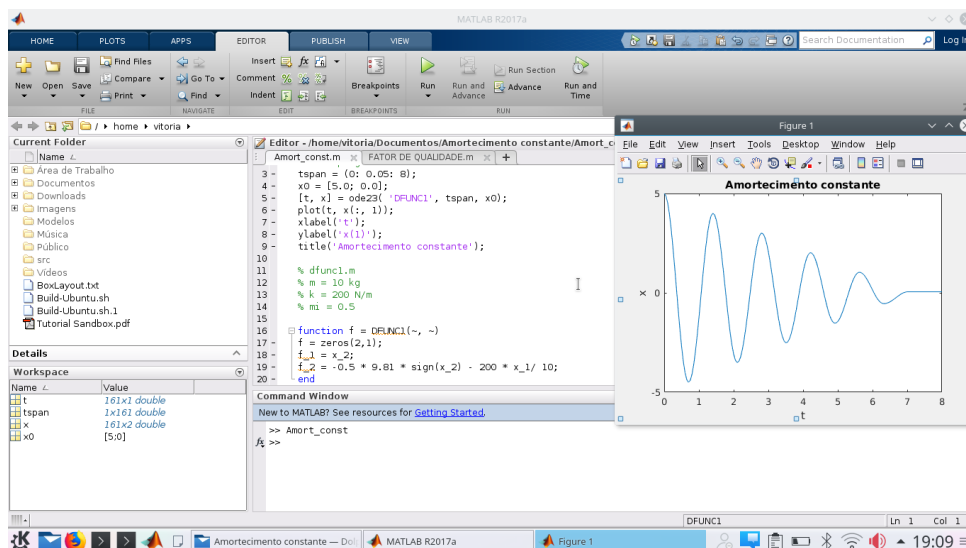


Figura 45: Interface do Matlab, exemplificação de uma rotina em matlab, ao lado o resultado gráfico gerado. *Fonte:* Autoria própria

Essa é a interface do software na qual adotamos para simular as soluções encontradas através das equações diferenciais, na Figura 45, temos um exemplo de programação para resolver o problema numérico de uma equação diferencial com descontinuidade, daí nota-se o incremento da metodologia de Runge-Kutta na programação em Matlab utilizada na solução do amortecimento constante. O Matlab possui diversas funções cuja solução numérica resolve problemas de várias áreas da física, problemas de potenciais eletrostático governados pela equação de Laplace, a equação de Duffing que descreve a dinâmica caótica, o movimento de sistema de dois e três corpos e problemas de hidrodinâmica são alguns dos problemas de Física Computacional trabalhados com programação no Matlab.

APÊNDICE B – Conhecendo o Arduino

O Arduino foi criado em 2005 por um grupo de pesquisadores na Itália com o objetivo de elaborar um dispositivo barato, funcional e fácil de programar, sendo dessa forma acessível a estudantes e projetistas das áreas de ciência e tecnologia. Além disso, o projeto introduziu o conceito de hardware livre, o que significa que qualquer indivíduo poderia montar, modificar, melhorar e personalizar o Arduino em seus projetos. Dessa forma se deu a criação de uma placa composta por um microcontrolador Atmel e circuitos de entrada/saída analógico e digital, a placa pode ser facilmente conectada à um computador por uma porta USB e programada via IDE (Ambiente de Desenvolvimento Integrado) utilizando uma linguagem baseada em C/C^{++} .

Atualmente no mercado existe uma variedade de modelos de placas Arduino, por vez a placa a ser usada nos projetos individuais de cada pesquisador depende da finalidade do projeto a ser desenvolvido, o número de portas necessárias, memória e poder de processamento, pois cada modelo possui especificações técnicas próprias, características eletromecânica e funcionais distintas, as mais comuns a título de compra no comercio são: Arduino Nano, Leonardo, Mega, Uno e Due. Na Figura 46, exemplifica-se um modelo de placa Arduino, essa por sua vez foi a placa Arduino utilizada para o desenvolvimento desse trabalho.

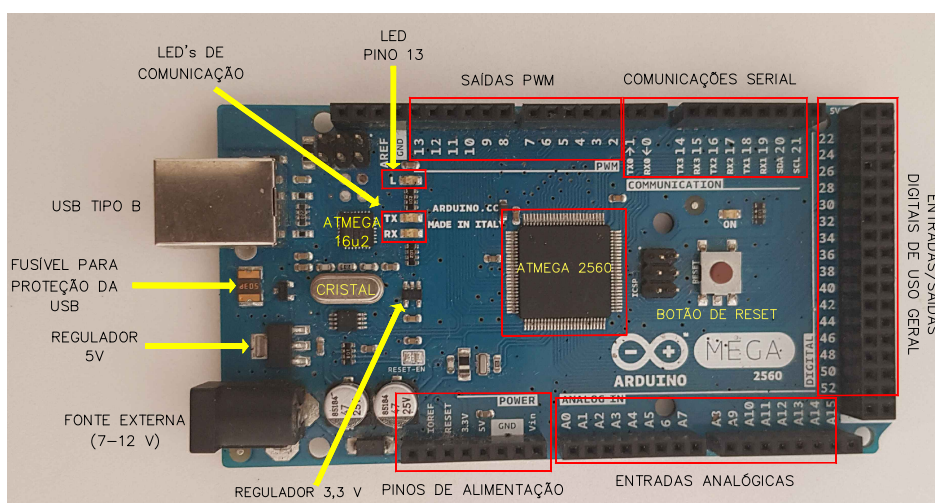


Figura 46: Modelo de Placa Arduino - Arduino Mega. *Fonte:* Autoria própria

A placa Arduino Mega tem como microcontrolador o Atmega 2560, essa placa possui em seu interior 54 portas digitais, 16 portas analógicas, sua tensão de operação é 5V, roda a um clock de 16 MHz, possui 256 kB de flash onde 8 kB são utilizados pelo *bootloader*, 8kB de RAM e 4kB de EEPROM. Sua alimentação pode ser feita pela USB ou alimentação externa por fonte externa de tensões na faixa de 7 a 12V. Esse modelo possui uma grande quantidade de portas de entrada e saída, assim como um vasto espaço de memória.

Para escrever um programa em Arduino o usuário precisa conectá-lo ao computador por meio de um cabo USB e utilizar o ambiente de programação chamado IDE, nesse a pessoa digita o programa, faz os testes e transfere o programa para o dispositivo quando o código não acusar mais nenhum eventual erro. O IDE do Arduino consiste numa aplicação multiplataforma escrita em Java derivada dos projetos *Processing* e *Wiring*. Esse ambiente é esquematizado para produzir a programação, nele inclui um editor de código com recursos de sintaxe sendo capaz de compilar e carregar programas na placa com um simples click. No site oficial do Arduino, <https://www.arduino.cc/en/Main/Software>, é possível efetuar o download da IDE gratuitamente. Na imagem abaixo temos o ambiente de desenvolvimento com um programa carregado.

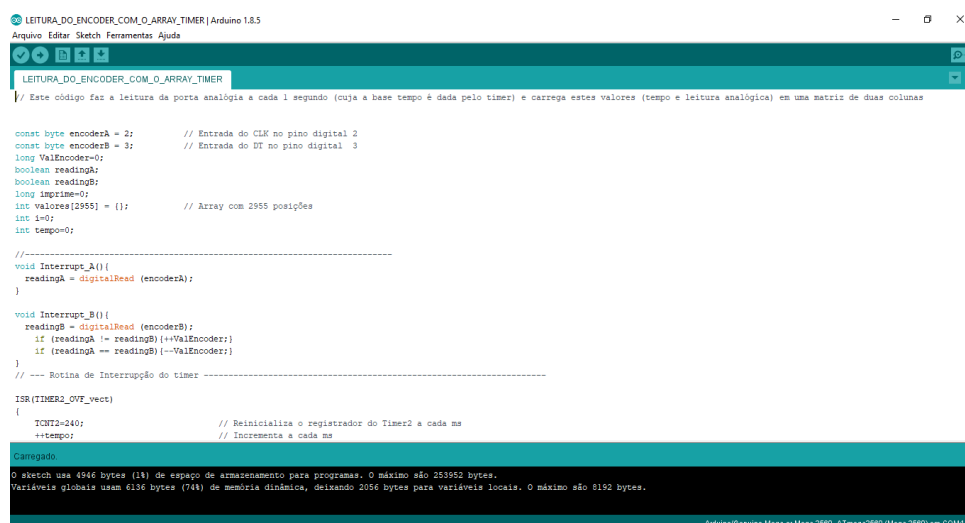


Figura 47: Ambiente de desenvolvimento integrado do Arduino. *Fonte:* Autoria própria

Agregar a tecnologia do software e hardware do Arduino promove liberdade de manipulação e desenvolvimento no meio investigativo de práticas de física, o projeto apresenta uma excelente ferramenta para experimentação em física e apropriado para a construção do conhecimento científico na área.

APÊNDICE C – Explorando o Origin Pro 8.5

O *Origin Pro 8.5* consiste em um software matemático, versátil, nele é possível construir as mais diversas espécies de gráfico, realizar facilmente várias tarefas matemáticas, cálculo estatístico, ajuste de curvas, pico e superfícies, regressão linear e polinomial, diferenciação e integração. Esse software é uma excelente ferramenta de auxílio ao campo científico de construção e análise de dados, é amplamente utilizado nas áreas de exatas nas quais trabalham com análise e apresentação de dados. Ao iniciar o software o usuário tem acesso a seguinte interface.

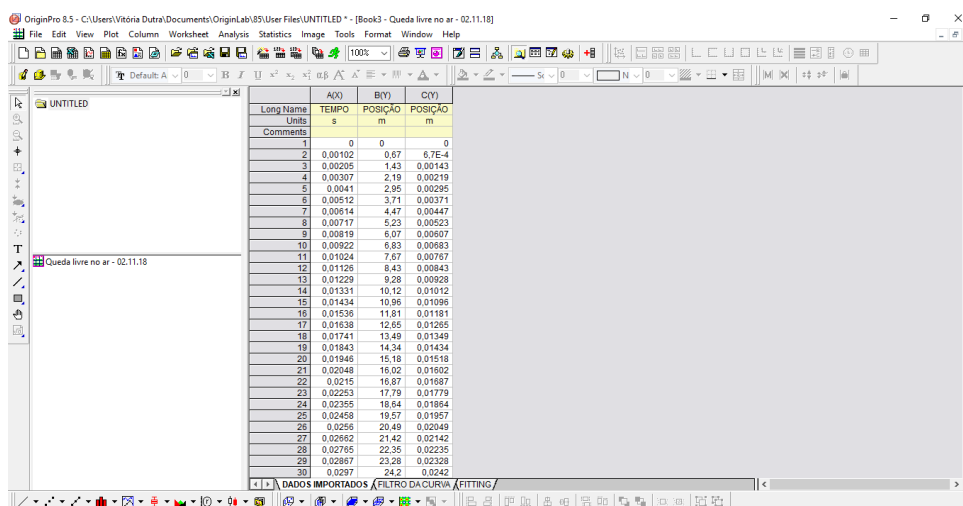


Figura 48: Interface do Origin, exemplificação de um projeto criado no software. *Fonte:* Autoria própria

Os gráficos criados em planilhas do próprio software podem ser interativamente exportados para os aplicativos do pacote Office, para serem processados com tratamento personalizado trabalhando em recursos visuais, o Origin se comunica facilmente com os aplicativos do pacote Office, conecta-se também ao MATLAB, LabVIEW ou cria rotinas personalizadas usando os scripts e linguagens C, Python.

A confecção gráfica permite a visualização de vários gráficos em uma única janela, com isso o seu uso em trabalhos técnicos e científicos contribui na análise simultânea de diversas variáveis existentes. O arquivo de projeto no Origin possui a extensão (.OPJ). A licença da ferramenta se encontra no site do OriginLab, <https://www.originlab.com/>, deste existe também a versão estudantil.