



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

YAGO PABLO RODRIGUES BUENO

**ANÁLISE MECÂNICA DA COSTELA E DA CAIXA TORÁCICA HUMANA:
IMPLEMENTAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)**

TERESINA, PIAUÍ

2021

YAGO PABLO RODRIGUES BUENO

ANÁLISE MECÂNICA DA COSTELA E DA CAIXA TORÁCICA HUMANA:
IMPLEMENTAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Projeto apresentado à Banca Examinadora como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso do Curso Superior de Bacharelado em Engenharia Mecânica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.

Orientador: Prof. M^e. Ricardo Cardoso Soares

TERESINA, PIAUÍ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Bueno, Yago Pablo Rodrigues

B928a Análise mecânica da costela e da caixa torácica humana : implementação pelo método de elementos finitos (MEF) / Yago Pablo Rodrigues Bueno. - 2021. 109 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica)
- Instituto Federal do Piauí, Campus Teresina Central, 2021.

Orientador : Prof. Me. Ricardo Cardoso Soares.

1. Método de Elementos Finitos (MEF). 2. Costela. 3. Tórax. 4. Pectus Carinatum. I. Título.

CDD - 620

Elaborado por Sindya Santos Melo CRB 3/1085

YAGO PABLO RODRIGUES BUENO

ANÁLISE MECÂNICA DA COSTELA E DA CAIXA TORÁCICA HUMANA:
IMPLEMENTAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Projeto apresentado à Banca Examinadora
como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso do Curso Superior de Bacharelado em Engenharia Mecânica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.

Aprovado pela banca examinadora em _____.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. M^e. Ricardo Cardoso Soares

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí -
IFPI

Prof. Dr. Hudson Chagas dos Santos

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí -
IFPI

Prof. Dr. Helder Pontes Gomes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí -
IFPI

TERESINA, PIAUÍ

2021

Aos meus pais e à minha irmã.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me sustentar e dar forças em todos os momentos difíceis.

À minha mãe, Lindalva Bueno, por todo o seu carinho e amor que me inspiram. Ao meu pai, Tito Bueno, pelo exemplo de disciplina, dedicação e perseverança. À minha irmã, Yara Bueno, minha inspiração nos estudos.

Aos meus professores do ensino fundamental e médio, em especial, ao professor Libonato Rocha e sua esposa Sra. Glória, os quais serei eternamente grato por toda a ajuda, ao professor Edson, por despertar em mim a paixão pela matemática e ao coordenador Filipe Monteiro, pelo auxílio na fase mais difícil da minha vida.

Aos meus amigos Aldeci, Andrew, Felipe, João Victor, Rodrigo, Thiago e Welberth Kennedy, por todo o apoio e pela amizade de longa data.

Aos meus colegas e amigos da graduação, em especial ao Francisco e Sávio, os quais faltam palavras para agradecer, à Ana Carolina, Bruno, Fernanda e Olzires.

Aos professores do curso de Engenharia Mecânica do Instituto Federal do Piauí pelo conhecimento, em especial aos professores Me. Abimael Melo, Dr. Armystron Araújo, Dr. Helder Pontes, Dr. Hudson Santos e Me. Ricardo Soares.

Ao meu orientador e mestre, no sentido mais nobre da palavra, Ricardo Soares por todos os conselhos, ensinamentos, dedicação e compartilhamento de conhecimento que levarei para a vida.

*"A vida intelectual dissemos nós, é heroísmo: quereis que o heroísmo não custasse?
As coisas valem na proporção que custam. Adiai para mais tarde o êxito, o louvor, não
talvez o louvor dos homens, mas o louvor de Deus e o da sua corte, que farão da
vossa consciência o seu profeta."
(Antonin-Dalmace Sertillanges)*

RESUMO

Desde o século XX, com o desenvolvimento da computação e técnicas numéricas para a resolução de equações diferenciais parciais, trabalhos com o intuito de prever o comportamento mecânico do tórax humano têm sido desenvolvidos. Esta parte do corpo humano é especialmente relevante, pois abriga e protege órgãos vitais como o coração e pulmões, além disso, deformidades do tipo *pectus carinatum*, muitas vezes corrigida de forma mecânica, podem surgir durante a adolescência. Desta forma, o presente trabalho tem por finalidade desenvolver e avaliar o uso de elementos de viga para a simulação desta estrutura, com o desenvolvimento das equações diferenciais pela teoria da Mecânica do Contínuo e simetrização da geometria por meio da teoria de viga de Timoshenko, resolvendo-as por métodos variacionais e chegando às matrizes de rigidez para duas funções de forma. A avaliação dos elementos foi feita por meio da comparação das soluções numéricas com resultados experimentais presentes em trabalhos já desenvolvidos, mostrando-se compatíveis para uma razão entre a área cortical e a trabecular do osso de 0,15, como esperado. Para este valor, o anel da costela 4 apresentou uma força máxima de, aproximadamente, 50 N para um deslocamento de 25 mm para o primeiro elemento e de 22 mm para o segundo, ambos com o surgimento de uma força de, aproximadamente, 6 N na direção normal, força esta não observada em outros anéis como o da costela 5, também em acordo com os dados experimentais. No caso de deformidades do tipo *pectus carinatum*, observou-se uma deformação total de, aproximadamente, 15 mm para uma pressão inicial de correção de 60 kPa (aproximadamente 8,7 psi), também próximo aos resultados experimentais. Portanto, o presente estudo mostrou-se promissor para a análise do comportamento mecânico do tórax humano, podendo ser utilizado e aperfeiçoado para análises consistentes de fenômenos que o envolvem.

Palavras-chaves: MEF, Costela, Tórax, *Pectus Carinatum*.

ABSTRACT

Since the 20th century, with the development of technique and numerical techniques for solving partial differential equations, works with the aim of predicting the mechanical behaviour of the human thorax have been developed. This part of the human body is crucial, as it protects vital organs such as the heart and lungs, furthermore, deformities such as *pectus carinatum*, often mechanically corrected, can appear during adolescence. Thus, the present work has to develop and evaluate the use of beam elements for a structural simulation, with the development of differential equations by the theory of Continuum Mechanics and geometry symmetrization through the Timoshenko beam theory, solving them by variational methods and arriving at stiffness matrices for two shape functions. The evaluation of the elements was made by comparing the numerical solutions with experimental results present in papers already developed, showing compatibility for a cortical and trabecular area ratio of 0.15, as expected. For this value, rib ring 4 has a maximum force of approximately 50 N for a displacement of 25 mm for the first element and 22 mm for the second, both with the appearance of a force of approximately 6 N in the normal direction, not observed in other rings such as rib 5, also in agreement with the experimental data. In the case of deformities of the type *pectus carinatum*, a total deformation of approximately 15 mm was observed for an pressure of initial correction of 60 kPa (8.7 psi, approximately), also close to the experimental results. Thus, the present study proved to be promising for an analysis of the mechanical behavior of the human thorax, which can be used and improved for consistent analysis of phenomena that involve it.

Key-words: FEM, Rib, Thorax, *Pectus Carinatum*.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Dispersão em relação à média (a) e à uma regressão linear (b).	24
Figura 2 – Força e momento agindo em um ponto P.	26
Figura 3 – Eixos coordenados e vetor de tensão.	27
Figura 4 – Movimento de um meio contínuo.	28
Figura 5 – Representação da curvatura de uma viga.	29
Figura 6 – Modelos físicos comuns para quatro tipo de deformações.	32
Figura 7 – Tipos de simetria.	33
Figura 8 – Caixa torácica humana.	36
Figura 9 – Geometria da costela humana.	37
Figura 10 – Geometria ondulada da costela humana.	38
Figura 11 – Representação da seção transversal da costela humana.	39
Figura 12 – Seção transversal da costela humana obtida por QCT.	39
Figura 13 – Seção transversal da costela humana.	40
Figura 14 – Comportamento mecânico da costela em teste.	40
Figura 15 – Configuração do experimento de Agnew et al. (2015).	41
Figura 16 – Configuração do experimento de Kindig et al. (2010).	41
Figura 17 – Comportamento mecânico da cartilagem costal em teste: a) Forças de reação; b) Configuração do experimento.	43
Figura 18 – Deformação do tipo <i>pectus carinatum</i> : a) Tomografia computadorizada; b) Ângulo de desvio do esterno.	44
Figura 19 – Método de compressão para correção da deformidade do tipo <i>pectus carinatum</i>	45
Figura 20 – Medição de força requerida para correção do <i>pectus carinatum</i>	46
Figura 21 – Fluxograma de tratamento para correção do <i>pectus carinatum</i>	47
Figura 22 – Medição subjetiva da elasticidade da caixa torácica.	48
Figura 23 – Redução na pressão necessária para correção (PC) do <i>pectus carinatum</i>	48
Figura 24 – <i>Shape functions</i> para elementos com dois nós (a) e três nós (b).	53
Figura 25 – Aplicação do domínio físico para o bi-unitário.	54
Figura 26 – Pesos para os respectivos pontos de integração.	54
Figura 27 – Fluxograma de desenvolvimento e validação do modelo numérico.	57
Figura 28 – Graus de liberdade do elemento e sistemas de coordenadas.	58
Figura 29 – Condições de contorno e forças externas aplicadas.	60
Figura 30 – Condições de contorno e forças externas aplicadas.	60
Figura 31 – Fluxograma da geração da malha.	62
Figura 32 – Partição do conjunto de pontos G_d	63

Figura 33 – Variação da curva para um passo Δx_1	65
Figura 34 – Sistema de coordenadas local e simbologia adotados.	66
Figura 35 – Deslocamentos no plano de normal $\hat{e}_2$	68
Figura 36 – Representação do comportamento axial.	71
Figura 37 – Sistema de coordenadas local e global com as respectivas bases ortonormais.	85
Figura 38 – Coeficientes de correlação.	88
Figura 39 – Momentos de inércia e área em função do comprimento normalizado.	89
Figura 40 – Resultados teóricos para o corpo de prova Hrb30.	90
Figura 41 – Resultados teóricos para o corpo de prova Hrb30.	91
Figura 42 – Coeficientes de correlação para (a) nenhuma partição e (b) 6 partições no domínio.	92
Figura 43 – Malhas geradas para a costela 5, em vermelho sem partições e em azul com 6 partições (dimensões em mm).	92
Figura 44 – Forças e deslocamentos obtidos para o anel da costela 4 no (a) plano e (b) na direção normal.	93
Figura 45 – Deslocamentos do anel da costela 4 em (a) três dimensões, (b) no plano e_2e_3 e (c) no plano e_1e_2	94
Figura 46 – Forças e deslocamentos obtidos para o anel da costela 5 no (a) plano e (b) na direção normal.	95
Figura 47 – Deslocamentos das costelas 2-6 para a PIC de 60 kPa em: (a) três dimensões; (b) no plano e_2e_3 ; (c) no plano e_1e_2	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades utilizadas e suas respectivas incertezas.	59
Tabela 2 – Função indicadora para as respectivas propriedades.	93

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método de Elementos Finitos
TC	Tomografia Computadorizada
PIC	Pressão Inicial de Correção
MRI	Imagem por Ressonância Magnética (<i>Magnetic Resonance Imaging</i>)
PC	<i>Pectus Carinatum</i>
BMI	Índice de Massa Corporal (<i>Body Mass Index</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

$D^k u$	k-ésima derivada direcional de u
T	Aplicação linear de transformação
$Q(p)$	Quadrado dos resíduos da aproximação de curvas
$\mu_i(p)$	Função aproximadora
$S_{y/x}$	Erro padrão
S_t	Tendência central
r	Coeficiente de correlação
f_i	Força aplicada na porção i
ΔS^*	Área infinitesimal
$t_i^{(\hat{n})}$	Tensão aplicada na direção n
V	Volume
ρ	Densidade
b_i	Força de campo
v_i	Campo de velocidade
i, j, k	Coeficientes da notação de Einstein, quando não especificados
$\hat{e}_i$	Bases canônicas do sistema de coordenadas ortonormal
σ	Escalar de tensão
I, II_σ, III_σ	Invariantes de tensão
$tr(\cdot)$	Traço de uma matriz
$det(\cdot)$	Determinante de uma matriz
ε_{ijk}	Operador de Levi-Civita
u_i	Deslocamento na direção i
ε_{ij}	Deformação infinitesimal
γ_{ij}	Deformação angular

θ	Ângulo de curvatura de uma viga
ψ	Ângulo de curvatura de uma viga devido ao esforço cisalhante
V_c	Esforço cisalhante em um plano
G	Módulo de cisalhamento
A	Área da seção transversal
K_s	Coeficiente de cisalhamento
C_{ijkl}	Tensor de elasticidade
δ_{ij}	Delta de Kronecker
λ, μ	Constantes de Lamé
ν	Coeficiente de Poisson
$\partial\Omega$	Bordo da geometria ou contorno
L^p	Espaço de Lebesgue
$\ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$	Norma L^p
$W^{m,p}$	Espaço de Sobolev
H^m	Espaço de Hilbert
Ω	Domínio em análise
w	Função teste
L_i	Polinômio de Lagrange
k	Matriz de rigidez local
K	Matriz de rigidez global
d	Graus de liberdade
Π	Potencial elástico
$grad$	Gradiente de um vetor
H	Operador Hessiano
R_{area}	Razão entre a área cortical e a área total da seção transversal da costela

A_{cort}	Área cortical da seção transversal da costela
A_{total}	Área total da seção transversal da costela
U_e	Conjunto dos deslocamentos experimentais
U_n	Conjunto dos deslocamentos numéricos
$\mathbf{1}_u$	Função indicadora dos deslocamentos
G_d	Conjunto de pontos que descrevem a geometria
x	Vetor de coordenadas
V_x	Taxa de variação das coordenadas da geometria
V_θ	Taxa de variação angular da geometria
$\Delta \tilde{x}_e$	Variação de coordenadas
G_λ	Conjuntos particionados de pontos da geometria
a	Coeficientes do polinômio
$\tilde{r}$	Campo vetorial da geometria
$\hat{l}$	Vetor unitário
l_i	Cosseno diretor relativo a direção i
L_e	Comprimento do elemento e
M_i	Momento atuando em torno da direção i
I_i	Momento de inércia em na direção i
N_t	Esforço normal
$N_\cdot$	Função de forma
ξ	Coordenada do sistema bi-unitário
c	Graus de liberdade da função teste
p	Carregamento distribuído no elemento
Γ	Contorno em 1 dimensão
T_i	Torque agindo na direção i
e_{ij}	Matriz de transformação do sistema local para o global

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	OBJETIVOS	20
1.1.1	OBJETIVO GERAL	20
1.1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	20
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS E MÉTODOS NUMÉRICOS	21
2.1.1	Equações Diferenciais	21
2.1.2	Aplicações Contínuas e Diferenciáveis	22
2.1.3	Método de Mínimos Quadrados	23
2.2	PRINCÍPIOS DE MECÂNICA DO CONTÍNUO	24
2.2.1	Análise de Tensões	25
2.2.2	Análise de Deformações	28
2.2.3	Relações Constitutivas	31
2.3	ANATOMIA, PROPRIEDADES E COMPORTAMENTO MECÂNICO DA COSTELA HUMANA	36
2.4	ANOMALIAS E DEFORMAÇÕES TORÁCICAS	43
2.5	O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	49
2.5.1	Métodos de Resíduos Ponderados	51
2.5.2	Métodos Variacionais	55
3	METODOLOGIA	57
3.1	GEOMETRIA E MALHA	61
3.2	MATRIZ DE RIGIDEZ E FORÇAS NODAIS	66
3.2.1	Análise Cinemática e de Equilíbrio	66
3.2.2	Rigidez ao Deslocamento Axial	70
3.2.3	Rigidez à Flexão no Plano de Normal $\hat{e}_1$	72
3.2.4	Rigidez à Flexão no Plano de Normal $\hat{e}_3$	78
3.2.5	Rigidez à Rotação de Torção	83
3.3	MONTAGEM DOS ELEMENTOS	84
3.4	PÓS-PROCESSAMENTO	87
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	88
4.1	VALIDAÇÕES E CONFRONTAÇÕES DE RESULTADOS	88
4.1.1	Experimento 1	88
4.1.2	Experimento 2	91

4.2	ANÁLISE DO PROCESSO DE CORREÇÃO DA DEFORMIDADE DO TIPO <i>PC</i>	95
5	CONCLUSÕES	97
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	99
	REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

Como afirma Graaff (2001), a caixa torácica, parte formada por 12 pares de costelas e 12 vértebras posteriores, tem uma importância singular na proteção de estruturas de como o coração, pulmões, artérias e nervos de extrema importância. Dados do *National Automotive Sample System* e do *Fatality Analysis Sampling System* do ano de 2015 mostram que fraturas na cabeça e no tórax representaram grande parte das fatalidades ocorridas em acidentes de veículos automotores. Em crianças, fraturas no tórax são a maior causa de mortes nestas ocasiões, o que se reduz com o aumento da idade, mostrando uma correlação significativa entre a anatomia e rigidez torácica, que variam ao decorrer do tempo, com resultados fatais em acidentes (SCHAFMAN, 2015). Devido a isto, é necessário um vasto e fundamentado conhecimento teórico sobre o comportamento mecânico desta região no projeto e testes de veículos automotores, em especial no projeto de cintos de segurança e de sistemas de proteção.

Além disso, esta região é submetida a esforços mecânicos severos em ocasiões como o procedimento de reanimação cardiopulmonar, no qual a região próxima ao coração é comprimida de forma cíclica, com a existência de casos de fraturas no esterno, costela e cartilagem costal que podem comprometê-lo, como mostra Deliliga et al. (2019). Também relacionado à saúde, quando na adolescência, deformações torácicas do tipo *pectus excavatum* e *pectus carinatum* podem surgir ou começar a se desenvolver, agravando-se durante todo o período de crescimento (FRASER et al., 2020). A segunda, em especial, consiste na protusão do esterno devido ao crescimento acentuado da cartilagem costal, afetando 1 em 500-1500 crianças, como mostram Cobben, J. e Dijk (2014) e Stephenson e Bois (2008), sendo um dos seus principais tratamentos por meio do uso de uma órtese compressora dinâmica torácica (CDT) que, aproveitando-se dos efeitos viscoelásticos e viscoplásticos da cartilagem costal e costela, há a sua remodelagem após um período de tratamento que pode chegar a anos (BUGAJSKI et al., 2018).

Modelagens do tórax que envolvem o método de elementos finitos têm sido estudadas desde o século XX, principalmente no que tange as aplicações na indústria automotiva. Trabalhos como o de Sundaram e Feng (1977), que analisa o comportamento do tórax à carregamentos estáticos porém sem o detalhamento matemático destes, Deng, Kong e Ho (1999), que estuda possíveis falhas no osso devido à cargas de impacto, e Lizée et al. (1998), que aplica elementos finitos no desenvolvimento de cintos de segurança, já no final do século XX se atentaram a essa necessidade e desenvolveram estudos direcionados a aplicações em veículos. Estudos mais recentes, como Tong et al. (2021), que avalia os efeitos do impacto de volantes na caixa torácica

utilizando MEF, mostram a relevância do assunto, que ainda se encontra na fronteira de desenvolvimento e aplicação da engenharia.

Ademais, Jiang et al. (2014) avaliou o processo de reanimação cardiopulmonar em crianças de 10 anos, que por possuírem uma menor rigidez torácica estão mais susceptíveis a fraturas durante este procedimento. Grindle et al. (2021), também desenvolveu um modelo de elementos finitos, agora com o intuito de avaliar o risco e consequências de acidentes que envolvem veículos automotores e pedestres, também mostrando a atualidade e importância deste tipo de análise.

No caso de deformidades ósseas e sua recuperação, encontra-se a maior lacuna bibliográfica. Em procedimentos cirúrgicos para a correção das deformidades do tipo *pectus excavatum*, Chang et al. (2008) avaliou a correção pelo procedimento de Nuss e Xie et al. (2017) utilizou o MEF para a customização deste procedimento, prevendo de forma aproximada os resultados pós-cirúrgicos. Na correção de deformidades ósseas do tipo *pectus carinatum* pelo procedimento de compressão torácica, trabalhos ainda não foram desenvolvidos.

Além disso, de forma mais geral, trabalhos também avaliam, experimentalmente, a resposta da caixa torácica e da costela quando submetida a carregamentos frontais. Schafman (2015) e Agnew et al. (2015) estudaram a resposta da costela a carregamentos dinâmicos e Kindig et al. (2010) analisou o comportamento de anéis de costela e da caixa torácica completa aplicando carregamentos frontais quase estáticos, ambos em *ex vivo*.

Desta forma, mostra-se necessário o aperfeiçoamento e o desenvolvimento de técnicas para análise do comportamento mecânico do tórax e das costelas humanas, principal componente de segurança destas estruturas, com aplicabilidade em diversas áreas que vão desde a automotiva até a médica e cirúrgica, com uma importância crucial para a saúde e segurança.

Neste sentido, o presente trabalho visa analisar esta parte do corpo humano do ponto de vista mecânico, através do desenvolvimento de um modelo físico e numérico que descreva de forma consistente a reação da costela e da caixa torácica a solicitações mecânicas, comparando-o com o experimento de Schafman (2015) e Agnew et al. (2015) (denominado experimento 1), para a avaliação do modelo aplicado à costela, e com o experimento de Kindig et al. (2010) (denominado experimento 2), para a avaliação do modelo aplicado à anéis de costela, validando o uso e aplicações do modelo desenvolvido e contribuindo, assim, com a análise dos problemas descritos acima.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem por finalidade avaliar a resposta mecânica da costela e da caixa torácica a solicitações frontais quase estáticas, considerando um comportamento linear do osso.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver as equações de equilíbrio que descrevem um elemento de viga com 6 graus de liberdade;
- Avaliar o uso de funções de forma consistentes e comparar os elementos delas derivados com um elemento de viga convencional;
- Validar os elementos por meio da comparação da deflexão com estudos experimentais presentes na literatura;
- Obter as deflexões na estrutura;
- Avaliar o comportamento da caixa torácica na correção de deformidades do tipo *pectus carinatum* para uma pressão inicial de correção.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS E MÉTODOS NUMÉRICOS

2.1.1 Equações Diferenciais

Segundo Evans (1998), uma equação diferencial parcial (EDP) é aquela que envolve uma função desconhecida de duas ou mais variáveis e suas respectivas derivadas parciais, diferentemente de uma equação diferencial ordinárias (EDO). Dessa forma, uma EDP pode ser escrita da forma

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x \in U), \quad (2.1)$$

chamada de equação diferencial parcial de k^{nd} ordem, em que U é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k-1} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$.

Assim, conforme o formato da Equação 2.1, ela pode ser classificada como:

1. EDP linear, se for da forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad (2.2)$$

sendo homogênea se $f \equiv 0$;

2. EDP semilinear, se for da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0; \quad (2.3)$$

3. EDP quase-linear, se for da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0; \quad (2.4)$$

4. EDP não linear, se das derivadas de ordem superior de forma não linear .

Embora muitos avanços tenham sido feitos na resolução analítica de EDPs, como o uso de transformadas diferenciais, a redução em duas ou mais equações diferenciais ordinárias e outros, essas soluções são limitadas à algumas equações e aplicações (AYAZ, 2004; OLVER; ROSENAU, 1986). Como afirma Evans (1998), a resolução analítica de uma EDP pode ser descrita pelas características do chamado problema bem-posto (conceito introduzido por Hadamard (1902)), que são a garantia de existência da solução, a sua unicidade e dependência contínua das variáveis de

entrada, sendo esta especialmente importante para problemas em física pois garante a ligação real da solução com a sua causa descrita por meio da equação diferencial. Esta verificação pode ser feita por meio do teorema de Banach-Nečas-Babuška (NEČAS, 1962; BABUŠKA; AZIZ., 1972) e o Lema de Lax-Milgram (LAX; MILGRAM, 1954).

Entretanto, ainda segundo Evans (1998), essas condições são raramente atendidas por completo quando trata-se da sua resolução direta. Em problemas físicos, a não diferenciabilidade contínua e até mesmo a não continuidade impedem a determinação de soluções clássicas. Em contrapartida, as chamadas soluções fracas ou generalizadas alcançam os requisitos do problema bem-posto. Tais soluções, implicam na redução da suavidade das funções (diferenciabilidade limitada e menor), limitando o espaço funcional na qual elas pertencem, porém com a garantia de sua existência.

2.1.2 Aplicações Contínuas e Diferenciáveis

Dada a importância crucial da diferenciabilidade e continuidade das funções ou aplicações no estudo das equações diferenciais tanto para as soluções analíticas quanto numéricas, como no método de elementos finitos (MEF) para as soluções e geração de malha, faz-se de estrita necessidade o conhecimento dessas condições e propriedades (DURAND; PANTOJA-ROSETO; OLIVEIRA, 2019; BIE; CUI; LI, 2018). Assim, segundo Lima (1999), no espaço Euclidiano, sendo $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, esta é dita contínua no ponto $a \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

A continuidade é um fenômeno local, como percebe-se pela relação 2.5, portanto se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua então, para $Y \subset X$, a restrição $F|_Y$ é uma aplicação contínua. Um teorema importante, demonstrado por Lima (1999), é que a composta de duas aplicações contínuas é contínua.

Outro conceito importante é o de conjunto compacto. Um conjunto compacto é um conjunto fechado e limitado, sendo um conjunto fechado aquele que contém todos os seus pontos aderentes (pontos que são limite de uma sequência de pontos do conjunto). Dessa forma, o corolário de Weierstrass mostra que toda função real contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ atinge seu máximo e mínimo em K , já que a sua imagem $f(K)$ é compacta (teorema). Além disso, o teorema de Lindelöf diz que, dado um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, toda cobertura aberta $X \subset \cup A_\lambda$ admite uma subcobertura enumerável $X \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_i}$, sendo esta finita pelo teorema de Borel-Lebesgue (LIMA, 1999).

Quanto à diferenciabilidade, uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de

forma que

$$f(a+v) - f(a) = T \cdot v + r(v) \quad e \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0, \quad (2.6)$$

em que $(a+v) \in U$ e, sendo f diferenciável,

$$T \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a). \quad (2.7)$$

Assim, atendendo às condições mostradas na Equação 2.6 e na Equação 2.5, há a garantia dos requisitos mínimos para a modelagem matemática do problema, em especial na geração da sua geometria.

2.1.3 Método de Mínimos Quadrados

A computação naturalmente é descontínua. O caráter binário das operações computacionais, em qualquer escala, naturalmente discretiza os problemas e dados por meio de instruções (algoritmos) e sinais de controle, como explica Rajamaran (2018). Dessa forma, qualquer leitura de dados por meio de sinais digitais irá devolver um conjunto enumerável de pontos discretos, havendo a necessidade da generalização desses dados para um conjunto conexo não enumerável.

Neste sentido, os métodos para ajuste de curvas a pontos discretos são divididos em duas classes gerais: regressão e interpolação. Os métodos de regressão se adéquam a problemas em que há um erro considerável nos dados, aproximando uma curva que não necessariamente toca os pontos, segundo Chapra (2008). Dentro desta categoria de ajuste de curvas, o método dos mínimos quadrados é uma forma robusta para aproximar curvas contínuas e diferenciáveis a pontos discretos, aumentando a precisão com o aumento do número de dados, conforme Dembinski, Schmelling e Waldi (2019), dependendo diretamente da qualidade do modelo que está sendo aplicado (HOSE; HANSS, 2018).

Assim, esse método consiste em minimizar os resíduos ε_i gerados pela diferença entre os valores medidos y_i e os valores pertencentes à função aproximada $\mu(p)$, de forma que

$$\varepsilon_i = y_i - \mu_i(p), \quad (2.8)$$

e a solução $\hat{p}$ que minimiza os resíduos ao quadrado,

$$Q(p) = \sum_{i=1}^k (y_i - \mu_i(p))^2, \quad (2.9)$$

é tomada como os coeficientes mais adequados para a aproximação da curva, conforme explica Hose e Hanss (2018).

Essa minimização é obtida pelas derivadas parciais de $Q(p)$ em relação à cada coeficiente da função a ser ajustada. Como explica Chapra (2008), a qualidade da

aproximação pode ser avaliada por meio do erro padrão, dado por

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{Q(p)}{n-2}}, \quad (2.10)$$

podendo, também, ser medida por meio da comparação entre a tendência central S_t dos dados, tendo-se o coeficiente de correlação expresso por

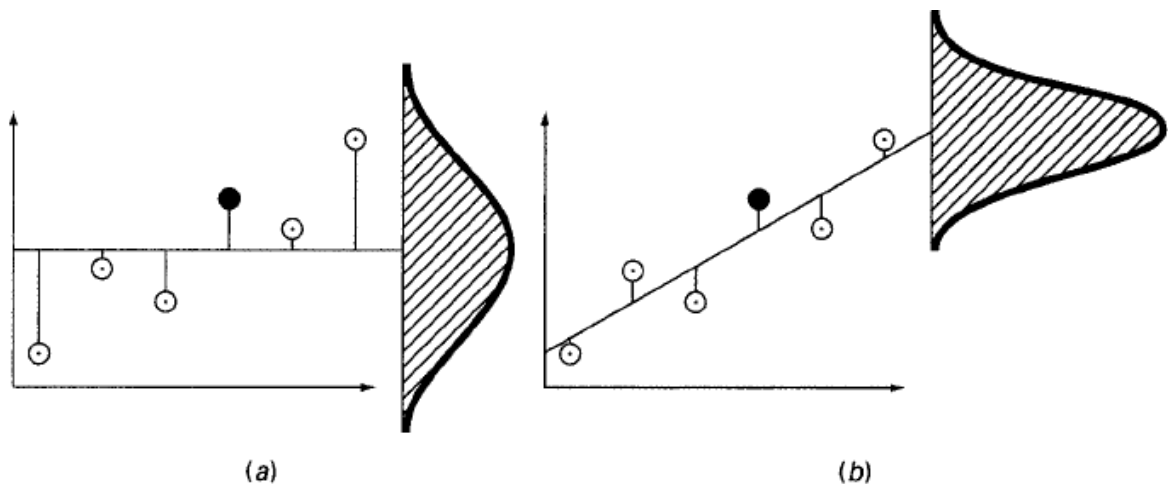
$$r = \sqrt{\frac{S_t - Q(p)}{S_t}}, \quad (2.11)$$

sendo a tendência central expressa por

$$S_t = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y}). \quad (2.12)$$

Essa relação expressa o quanto os valores estão dispersos em torno da curva que está sendo ajustada, comparando-os com a dispersão inicial. A Figura 1 demonstra a influência da curva na dispersão dos valores.

Figura 1 – Dispersão em relação à média (a) e à uma regressão linear (b).



Fonte: Chapra (2008)

Portanto, o aumento da correlação dá-se com o aumento da suavidade da curva, ou seja, da sua diferenciabilidade, e com o aumento do número de pontos n , reduzindo os resíduos ε_i , fatos demonstrados detalhadamente por Durbin e Watson (1950).

2.2 PRINCÍPIOS DE MECÂNICA DO CONTÍNUO

Segundo Oliver e Saracibar (2017), um meio contínuo pode ser entendido como um conjunto finito de partículas que pode ser estudado macroscopicamente, isto é,

sem considerar possíveis descontinuidades presentes na escala microscópica, que são de natureza assintótica porém convertíveis com uma certa razoabilidade para um comportamento contínuo, como demonstra Blanc, Bris e Lions (2002). Essa formulação permite descrever matematicamente as propriedades desse meio como funções contínuas, assim, nesse espaço funcional, Mase, Smelser e Rossmann (2020) define a Mecânica do Contínuo como a modelagem cinemática e mecânica do comportamento dos materiais, permitindo a sua descrição de forma linear e não linear.

Essa modelagem apresenta diversas vantagens, podendo descrever comportamentos complexos não incluídos em outras formulações. Devido à essas características, tal abordagem é adotada em diversas áreas como Mecânica dos Fluídos, Eletromagnetismo, Mecânica dos Sólidos entre outras (WELLER et al., 1998). Em especial, no comportamento dos sólidos esta abordagem engloba, com as devidas adaptações e considerações, os fenômenos lineares, não lineares e de fratura, podendo incluir efeitos de tamanho, cisalhamento de ordem maior e inúmeros outros, dependendo do grau de fidelidade requerido (THAI et al., 2017; OLIVER et al., 2002).

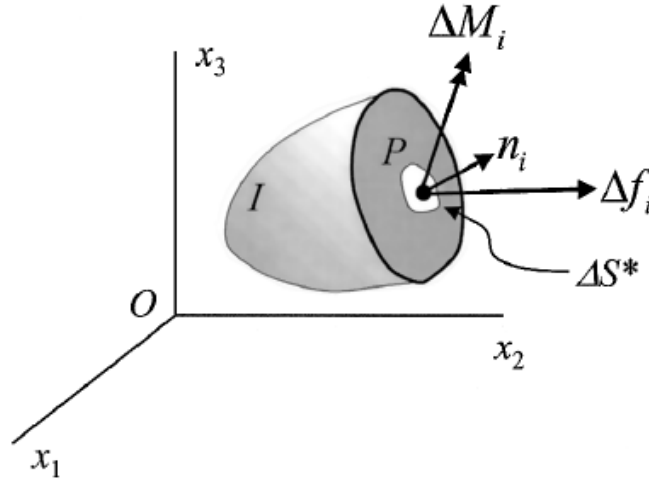
2.2.1 Análise de Tensões

Tensão é um conceito presente em diversas áreas relacionado a um desequilíbrio de um estado inicial de energia mínima para algum outro estado. No caso de sólidos, esta grandeza representa uma medida de intensidade de uma força, dependendo do meio que ela é aplicada, sendo nula quando as forças presentes no corpo forem somente as interatômicas (MASE; SMELSER; ROSSMANN, 2020). Assim, matematicamente, este modelo físico é representado como

$$\lim_{\Delta S^* \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S^*} = \frac{df_i}{dS^*} = t_i^{(\hat{n})}, \quad (2.13)$$

sendo a tensão em uma direção arbitrária n , causada por uma força Δf_i em uma área ΔS^* , ambos infinitesimais, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Força e momento agindo em um ponto P.



Fonte: Mase, Smelser e Rossmann (2020).

Através da segunda lei de Newton, considerando a mudança de momento linear causada pelas forças de superfície e de corpo, tem-se

$$\int_S t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV, \quad (2.14)$$

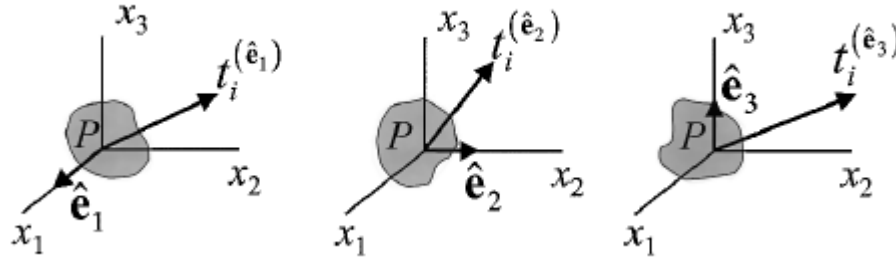
em que b_i são as forças de campo que agem no corpo, v_i o campo de velocidade entre duas porções e ρ a densidade do material.

Como percebe-se nas equações acima, uma vez aplicada uma força, infinitas tensões se desenvolvem em um corpo, dependendo da área de análise e da superfície em que ela é tomada, representada pelo vetor normal n (1º postulado de Cauchy), fazendo-se necessária a padronização de direções de forma a determinar as componentes de interesse (OLIVER; SARACIBAR, 2017; SHAMES; COZZARELLI, 1998). Para isso, arbitra-se um eixo de coordenadas fixo em que o vetor de tensão pode ser representado como

$$t^{(\hat{e}_i)} = t_j^{(\hat{e}_i)} \hat{e}_j, \quad (2.15)$$

utilizando-se a notação de Einstein, na qual $(i = 1, 2, 3)$ representa os planos coordenados e $(j = 1, 2, 3)$ representa as direções, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Eixos coordenados e vetor de tensão.



Fonte: Mase, Smelser e Rossmann (2020).

Define-se, então, um valor escalar para tensão dado por σ_{ji} , de forma que

$$t_i^{(\hat{e})} = \sigma_{ji} e_j, \quad (2.16)$$

representado na forma tensorial por

$$\begin{bmatrix} t_1^{(\hat{e})} & t_2^{(\hat{e})} & t_3^{(\hat{e})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A partir de um elemento tetraédrico, aplicando o equilíbrio estático (Equação 2.14), chega-se na relação de simetria e no tensor de tensão de Cauchy, em que

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}. \quad (2.18)$$

Além disso, por este método obtém-se a relação fundamental de equilíbrio, de tal forma que

$$\begin{cases} \nabla \sigma + \rho b = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \end{cases}. \quad (2.19)$$

Entretanto, nem sempre as direções de interesse nas quais o vetor de tensão encontra-se na mesma direção do vetor normal da superfície coincidem com as bases canônicas adotadas. Geometrias complexas, carregamentos assimétricos, condições de contorno e diversos outros fatores podem influenciar na direção principal (ROSENDAHL et al., 2019; WU et al., 2017). A determinação dessas direções principais em um tensor de segunda ordem constitui, fundamentalmente, um problema de autovalores e autovetores, onde para uma solução não-trivial chega-se a equação característica expressa por

$$\sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0, \quad (2.20)$$

em que os coeficientes I_σ , II_σ e III_σ são conhecidos como primeiro, segundo e terceiro invariantes, respectivamente, dados por

$$I_\sigma = \sigma_{ii} = \text{tr} \sigma, \quad (2.21)$$

$$II_\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \frac{1}{2} [(\text{tr} \sigma)^2 - \text{tr}(\sigma^2)], \quad (2.22)$$

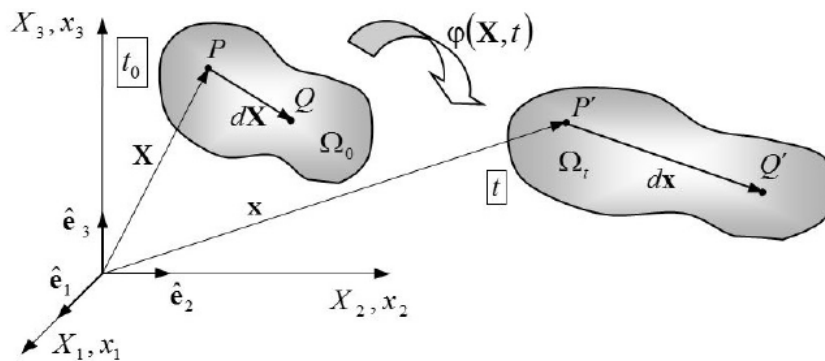
$$III_\sigma = \varepsilon_{ijk} \sigma_{1i} \sigma_{2j} \sigma_{3k} = \det \sigma. \quad (2.23)$$

A partir desses invariantes é possível analisar de maneira apropriada o comportamento de um material ou meio sob tensão através da separação do tensor de tensão em deviatórico, onde há a mudança do formato ou desvio de entropia, e hidrostático, onde há somente a mudança de volume, conforme explica Acheson (2003). Sendo, assim, muitos critérios de falha derivados desses coeficientes, em especial para materiais isotrópicos nos quais não há a mudança das propriedades do material conforme há a alteração na direção normal $\hat{n}$, como mostram os trabalhos de Liu, Gao e Liu (2012) e Podgórski (1985).

2.2.2 Análise de Deformações

O estudo de deformação, diferentemente do estudo de deslocamento, trata do movimento relativo de partículas pertencentes a um corpo. A formulação matemática deste modelo baseia-se no movimento de um meio contínuo, descrito por uma aplicação contínua e diferenciável $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Movimento de um meio contínuo.



Fonte: Oliver e Saracibar (2017).

Por meio da definição do tensor gradiente de deformação, pela derivação da aplicação φ , e dos campos de deslocamentos U dados pela subtração das novas posições em Ω_t pelas posições iniciais em Ω_0 , considerando deslocamentos infinitesimais,

chega-se no tensor de deformação infinitesimal, representado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.24)$$

e na notação de engenharia

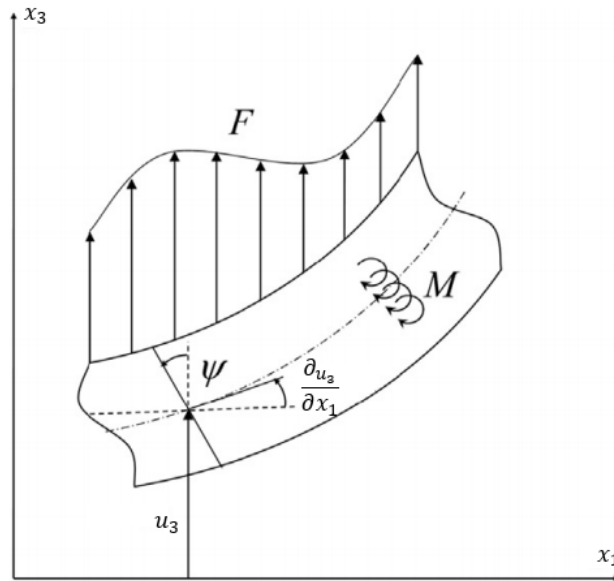
$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Com o detalhe para a simetria deste tensor e as direções e tensões principais que podem se encontradas de forma análoga à descrita na subseção 2.2.1.

Também por meio da análise cinemática, alguns corpos de geometria bem definida, podem ser modelados de forma simplificada. Como mostram Timoshenko e Goodier (1951), nos problemas chamados elementares, como são os casos de vigas e barras prismáticas, valendo-se do princípio da superposição, em que satisfeitas as condições de equilíbrio, equações de compatibilidade e condições de contorno, os efeitos gerados por diferentes causas podem ser somados.

Esta simplificação dá-se por meio da adição de equações que resumem o comportamento da estrutura nos eixos ortogonais ao eixo normal em análise, como mostra Kahrobaian, Asghari e Ahmadian (2014), sendo empregada a análise de curvatura de uma porção da viga, mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Representação da curvatura de uma viga.



Fonte: Adaptado de Kahrobaian, Asghari e Ahmadian (2014).

Tal variação é proporcional aos esforços que estão sendo aplicados. Em especial, a variação de ângulo é um ponto crucial na análise pois esta pode alterar-se ao

decorrer seção transversal. Uma formulação simplificada, chamada Bernoulli-Euler, desconsidera esta variação, atribuindo o ângulo de flexão somente à variação da curvatura da linha neutra, ou seja,

$$\theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (2.26)$$

entretanto, Timoshenko (1921) propõe que este ângulo também varia com o esforço cisalhante que age na seção, de forma que,

$$\theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \psi, \quad (2.27)$$

sendo esta uma formulação mais precisa e amplamente utilizada em problemas dinâmicos e estáticos (ZOHOO; KAKAVAND, 2013; DAVIS.; HENSHELL; WARBURTON, 1972). Narayanaswami e Adelman (1974) afirmam que a inclusão desses efeitos do cisalhamento transversal é essencial em elementos que modelam placas finas, vigas curtas, ou alguns painéis sanduíche.

A simplificação acima citada consiste em tomar a análise em planos neutros, ou seja, aqueles em que os efeitos dos carregamentos em outros planos são negligenciáveis. Desta forma, pode-se expressar a equação 2.24 como

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -c_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}, \quad (2.28)$$

para o caso de uma viga de Euler-Bernoulli e

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -c_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \psi \right), \quad (2.29)$$

para uma viga de Timoshenko valendo de forma análoga para ε_{ij} .

Timoshenko (1921) propôs uma variação linear entre o ângulo de deformação da seção transversal e o esforço cisalhante no plano, de forma que

$$V_c = \left(GAK_s \psi - \frac{du_3}{dx_1} \right), \quad (2.30)$$

em que o ângulo ψ pode ser modelado por meio da expansão da formulação de Bernoulli-Euler, como mostra Wang (1995), sendo

$$\psi = \frac{du_3}{dx_1} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \quad (2.31)$$

obtendo os fatores C_1 , C_2 e C_3 de acordo com as condições de contorno. A diz respeito a área da seção transversal, G o módulo de cisalhamento transversal e K_s o coeficiente de cisalhamento, dependendo da seção transversal. Cowper (1966) desenvolveu a expressão

$$K_s = \frac{2(1+\nu)I}{\frac{\nu(I_1-I)}{2} - \frac{A}{I} \iint x(X+xy^2)dx dy}, \quad (2.32)$$

computando-o para diferentes geometrias, obtendo, assim, os coeficientes necessários para a modelagem desse tipo de viga.

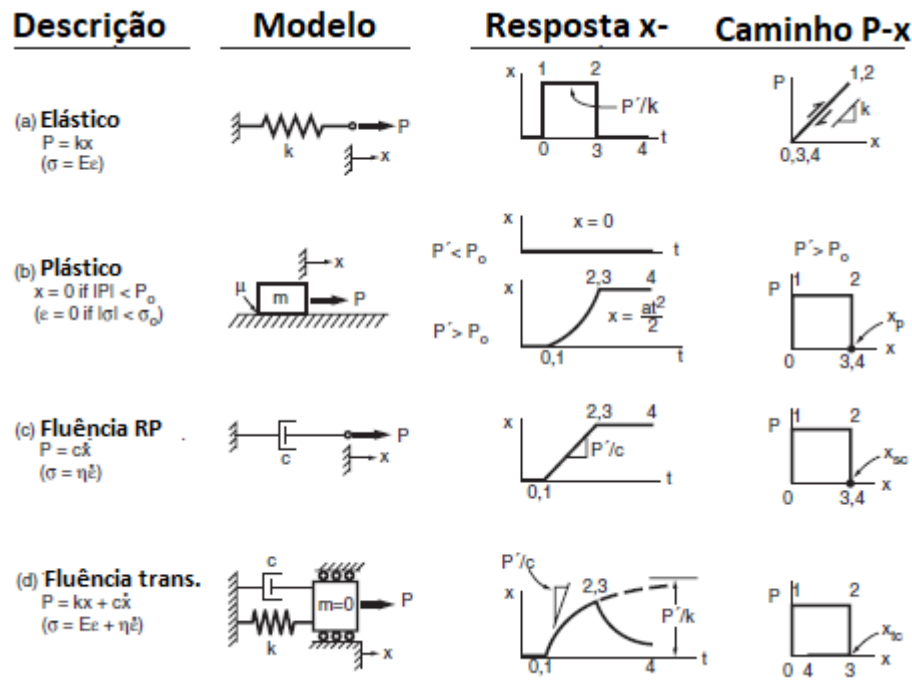
Várias abordagens diferentes podem ser tomadas para a modelagem de elementos de viga que consideram a deformação devido ao esforço cisalhante transversal. Elementos clássicos, nos quais os efeitos de carregamentos que causam respostas de natureza diferentes são separados e considerados sem interligação são consolidados, como desenvolvido por Severn (1970). Entretanto, Luo (2008) desenvolveu um elemento que interliga os efeitos descritos por diferentes equações diferenciais. Tais abordagens matemáticas serão melhor detalhadas adiante.

2.2.3 Relações Constitutivas

As subseções anteriores ainda não se referiram ao material, com a modelagem física e matemática não dependendo diretamente deste. Porém, a descrição do problema está incompleta, pois a resolução das equações acima citadas não é possível sem a adição de uma outra relação. Esta resposta vem do comportamento do material, que irá reagir de forma diferente aos esforços dependendo de sua microestrutura, que por sua vez é particular a cada tipo de material e é alterada com diversos fatores externos (DOWLING; KRAL; KAMPE, 2020).

Em suma, a tensão e a deformação se relacionam por meio de um modelo matemático que descreve o comportamento do material, fornecendo uma relação adicional e tornando o problema solucionável. Alguns modelos básicos são o elástico, plástico e de fluência, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Modelos físicos comuns para quatro tipo de deformações.



Fonte: Adaptado de Dowling, Kral e Kampe (2020).

Em meios contínuos, portanto, uma relação linear entre tensão e deformação chamada lei de Hooke pode ser estabelecida para alguns materiais. Para uma base ortonormal, como a descrita nas seções anteriores, esta relação é representada por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.33)$$

podendo C_{ijkl} referir-se à rigidez elástica, constantes elásticas ou módulo de elasticidade, sendo um tensor de quarta ordem em um espaço tridimensional com 81 componentes, conforme Constantinescu e Korsunsky (2007).

Em contrapartida, por meio da simetria do tensor de deformações é possível verificar que

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad (2.34)$$

e, de forma similar, pela simetria do tensor de tensão, verifica-se que

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad (2.35)$$

reduzindo o número de variáveis a 36.

Uma terceira relação de simetria pode ser imposta, de forma que

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad (2.36)$$

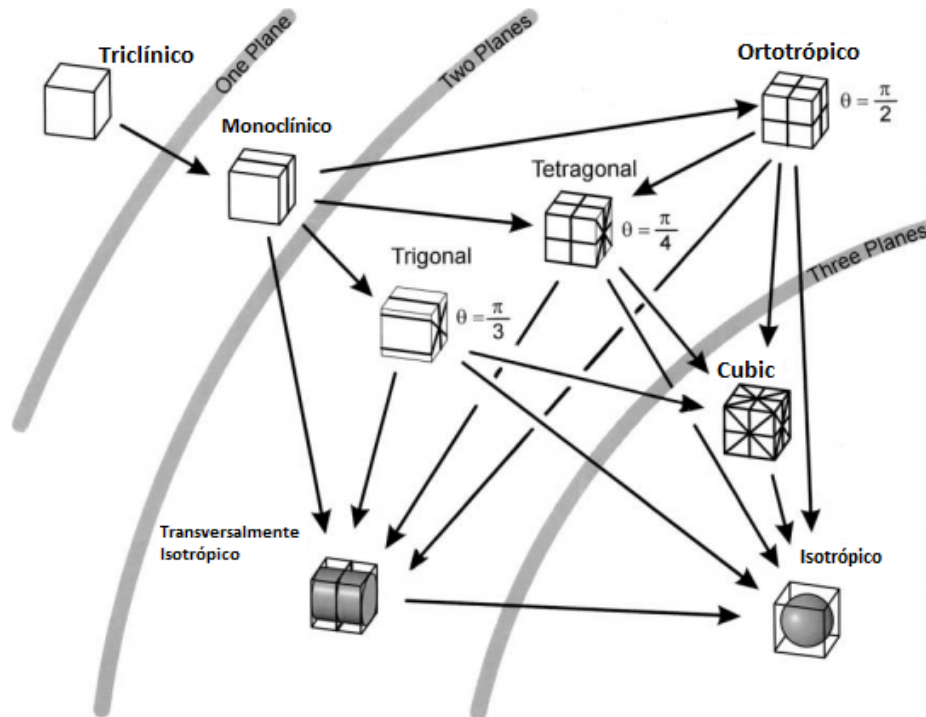
tornando o tensor positivo definido com 21 constantes distintas.

Na notação matricial, esta relação pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3323} & C_{2323} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3323} & C_{2312} & C_{3112} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Outro fator que influencia na quantidade de variáveis do tensor de elasticidade é a simetria do material. Chadwick, Vianello e Cowin (2001) demonstram que existem 8 tipos de simetria, como mostra a Figura 7 com suas gerações por meio da introdução de planos.

Figura 7 – Tipos de simetria.



Fonte: Adaptado de Chadwick, Vianello e Cowin (2001).

Para cada simetria os tensores de elasticidade se reduzem a:

1. Triclínico: Neste material não há transformação devido à simetria, e consequentemente, não há simetria inerente ao material;

2. Monoclinico

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ \cdot & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & C_{45} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{55} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix}; \quad (2.38)$$

3. Tetragonal

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

4. Trigonal

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ \cdot & C_{11} & C_{13} & 0 & -C_{15} & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & -C_{15} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}; \quad (2.40)$$

5. Ortotrópico

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{55} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix}; \quad (2.41)$$

6. Transversalmente isotrópico

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{55} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}; \quad (2.42)$$

7. Isotrópico

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}; \quad (2.43)$$

8. Cúbico

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Estes coeficientes são determinados principalmente por métodos experimentais clássicos, nos quais o material é submetido a carregamentos controlados nas direções de interesse, obtendo o seu comportamento, tal como Masias et al. (2019). Além disso, técnicas de análise de vibrações, por meio da detecção dos modos de vibração, conforme Mah e Schmitt (2002), análise acústica do material por meio da velocidade de propagação da onda em seu interior, de acordo com Santoni et al. (2017), análise por ultrassom, como desenvolve Lang (1970), e outras técnicas têm sido desenvolvidas e aplicadas para mensurar estes coeficientes.

Para materiais isotópicos, as componentes do tensor de tensão ainda podem ser desenvolvidos analiticamente e expressos em termos das constantes λ e μ conhecidas como constantes de Lamé, de modo que

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}], \quad (2.45)$$

obtendo-se a relação constitutiva

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{ll} + 2\mu \epsilon_{ij}. \quad (2.46)$$

Dessas duas constantes derivam -se o módulo de Young ou módulo de elasticidade do material, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson, dados, respectivamente, por

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (2.47)$$

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.48)$$

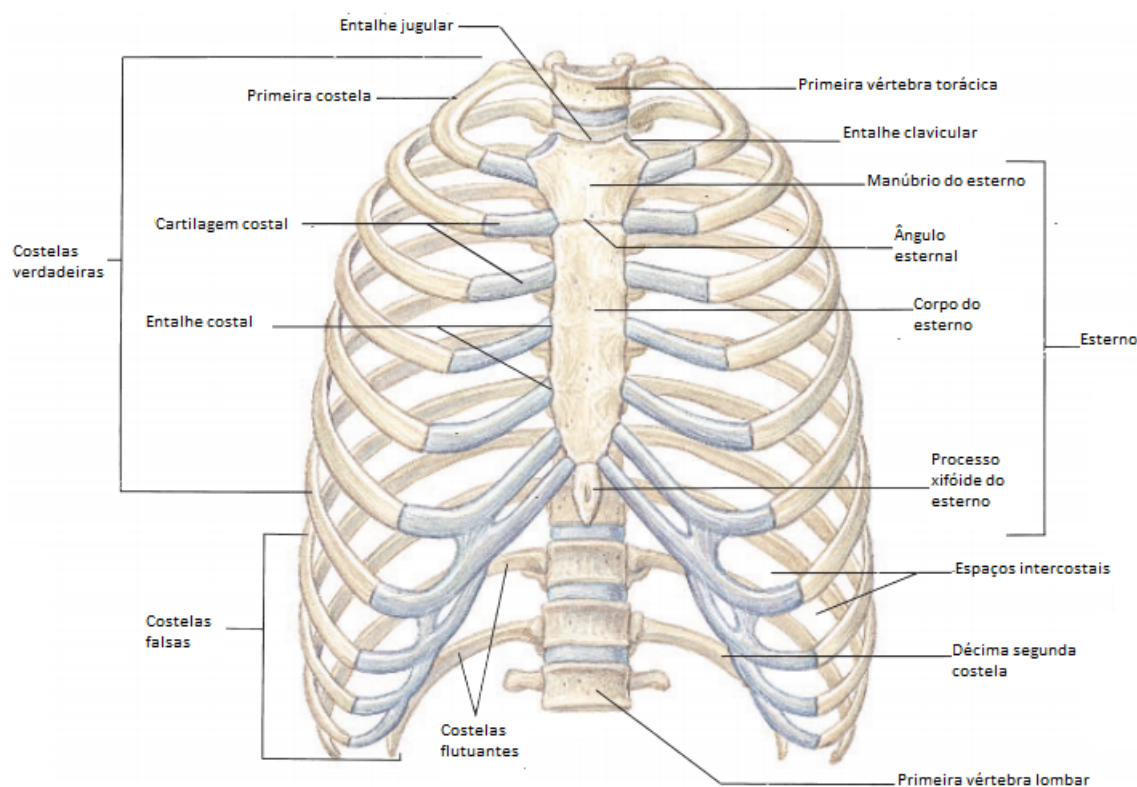
$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.49)$$

Estas constantes são de extrema importância para diversos fenômenos, como a velocidade da propagação de trincas em sólidos, mostrado por Crampin (1984), a estabilidade de sistemas elásticos e viscoelásticos e outros (BENIANI; TAOUAF; BENAÏSSA, 2018).

2.3 ANATOMIA, PROPRIEDADES E COMPORTAMENTO MECÂNICO DA COSTELA HUMANA

O tórax é a porção do tronco localizada acima do abdômen e abaixo da cabeça e pescoço composta por ossos, órgãos e tecidos. A caixa torácica, parte formada por 12 pares de costelas e 12 vértebras posteriores, tem uma importância singular na proteção de estruturas cruciais, como o coração, pulmões, artérias e nervos de extrema importância (GRAAFF, 2001). A Figura 8 mostra essa região.

Figura 8 – Caixa torácica humana.



Fonte: Adaptado de Graaff (2001).

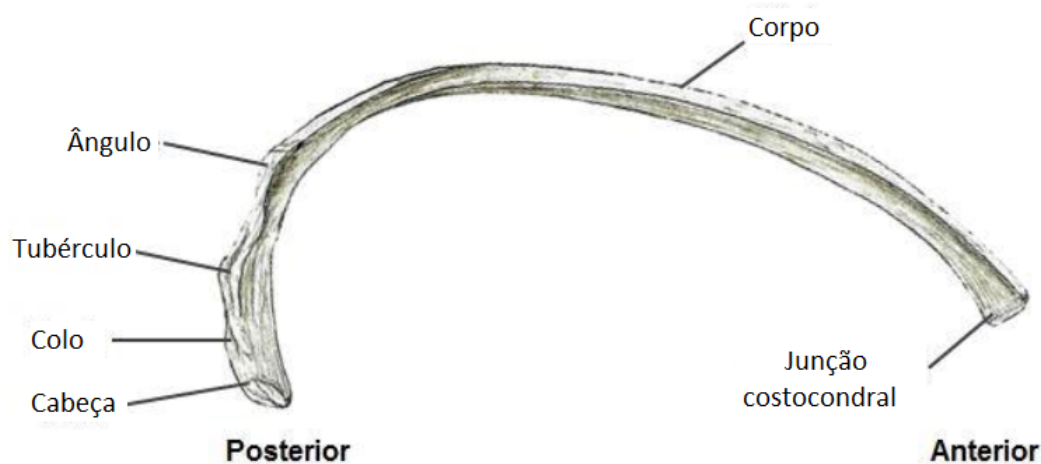
As costelas são numeradas da parte superior à inferior, indo de 1 a 12. As costelas 1-7 articulam-se por meio da cartilagem costal, que por sua vez é ligada ao

esterno. As costelas 8-10 articulam-se por meio da cartilagem costal em sua parte superior e, por fim, as costelas 11-12 são as chamadas costelas flutuantes pois não articulam-se com a cartilagem na parte anterior (frontal), conforme Schafman (2015) e Cormier et al. (2005). Vale ressaltar a proximidade geométrica entre as costelas 3-7 além das propriedades de resistência bem definidas, como mostra Kindig et al. (2010).

A geometria dessas costelas e, conseqüentemente, da caixa torácica representa uma importante característica que influencia diretamente no seu comportamento mecânico, como foi descrito nos capítulos anteriores. Esta geometria varia de indivíduo para indivíduo, havendo sua formação e mudanças significativas nas idades de 4 meses a 15 anos, além de uma complexa relação entre a idade, sexo, estatura e índice de massa corporal (BMI) (SANDOZ et al., 2010; SHI et al., 2014). Durante esse período, deformidades e anomalias como *pectus carinatum* podem surgir, começando na infância e se agravando durante todo o período de crescimento, principalmente na adolescência (FRASER et al., 2020). Tal anomalia será detalhada adiante.

As costelas possuem a geometria de um arco com a rotação de sua seção transversal em torno do próprio eixo, podendo ser dividida nas regiões da cabeça, pescoço e eixo, de acordo com Schafman (2015) como mostrado a Figura 9.

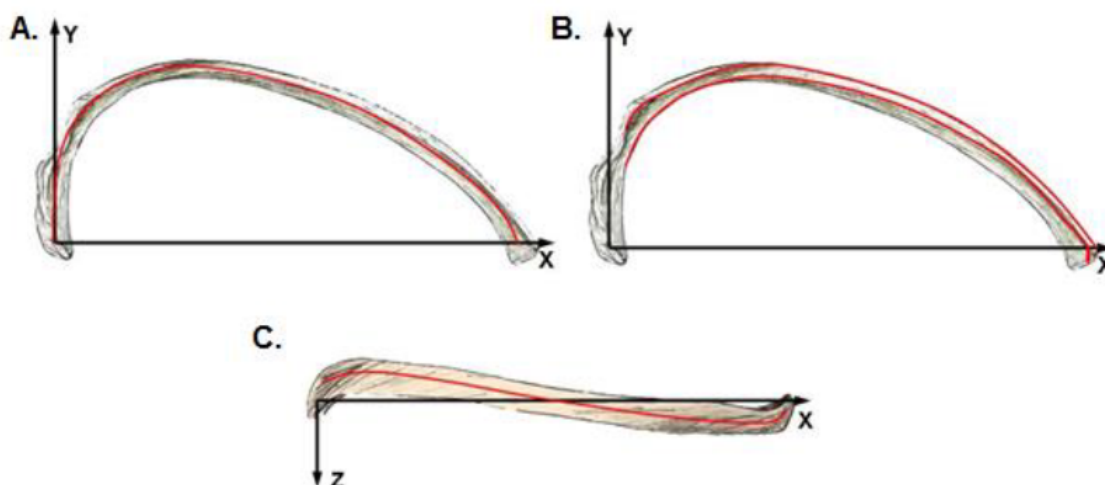
Figura 9 – Geometria da costela humana.



Fonte: Adaptado de Schafman (2015).

Além disso, no plano ZX mostrado na Figura 10 também há uma variação de curvatura que contribui para o surgimento de esforços torcionais (CHARPAIL et al., 2014).

Figura 10 – Geometria ondulada da costela humana.

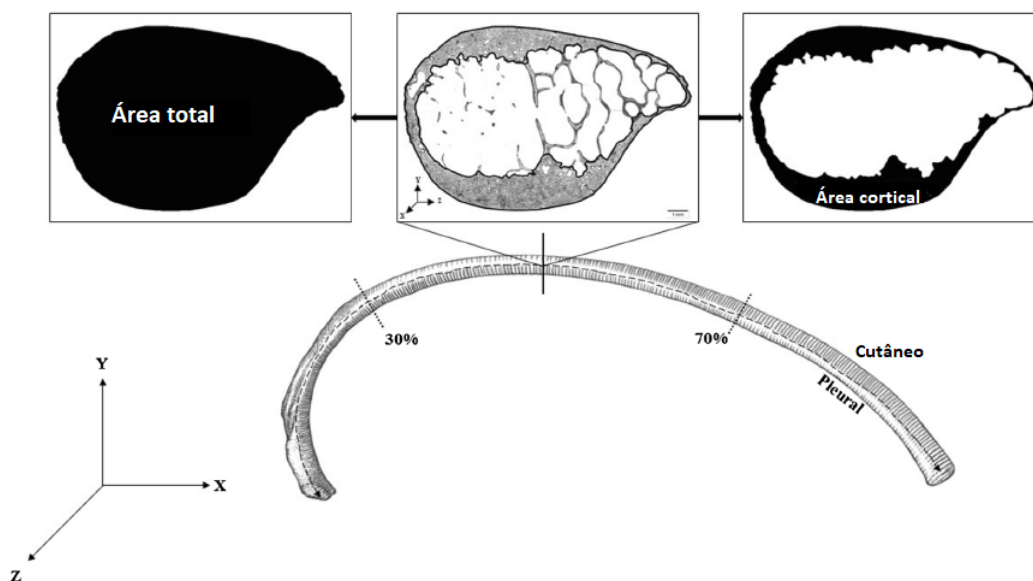


Fonte: Schafman (2015).

Dado o caráter individual do formato da costela e sua extrema importância para diversas análises, vários métodos para sua determinação têm sido desenvolvidos, como o uso de radiografias biplanares para a determinação da curvatura, como mostra Aubert et al. (2014), escaneamento 3D por meio de tomografia computadorizada (CT) e ressonância magnética (MRI), obtendo resultados e geometrias precisos (MITTON et al., 2008), além da modelagem estatística baseada em bancos de dados existentes, também mostrando resultados precisos, principalmente no estudo teórico e desenvolvimento de metodologias de análise (HOLCOMBE; WANG; GROTEBERG, 2016; HOLCOMBE et al., 2020).

Como material, este osso é fundamentalmente um compósito de estrutura complexa, tornando modelagens e análises igualmente difíceis. Macroscopicamente ele é formado por duas partes primárias, a parte cortical, mais densa e resistente, e trabecular, parte interna porosa formada por finas estruturas ósseas, como ilustra a Figura 11 (MURACH et al., 2017). Além disso, mecanismos internos de auto-reparação atuam no fechamento de micro-trincas e na reconstrução óssea (SCHAFMAN, 2015). Do ponto de vista de comportamento mecânico, este material é considerado como viscoelástico, entretanto estes efeitos viscosos são minoritários podendo, em situações específicas nas quais a taxa de deformação são baixas (quase-estática), serem negligenciados tornando a sua modelagem como um material elasto-plástico possível (CARTER; HAYES, 1976).

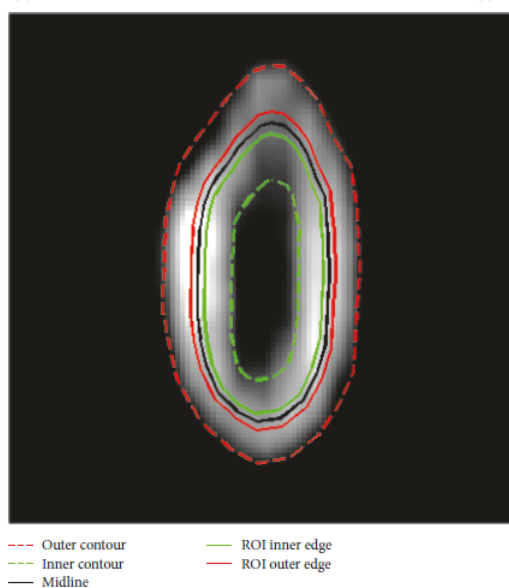
Figura 11 – Representação da seção transversal da costela humana.



Fonte: Murach et al. (2017).

Entretanto, embora este seja formado por duas partes, trabalhos também mostram que a geometria da seção transversal pode ser, aproximadamente, uma elipse com a parte trabecular imperceptível em tomografia computadorizada, como mostra a Figura 12 (ZHU et al., 2017).

Figura 12 – Seção transversal da costela humana obtida por QCT.

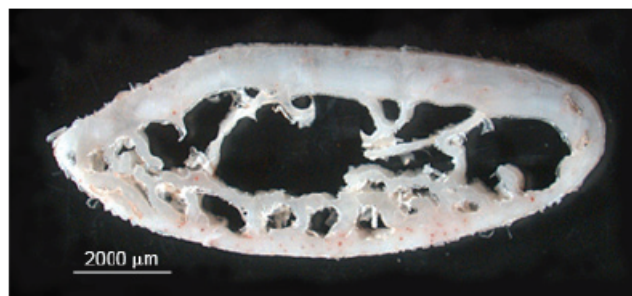


Fonte: Adaptado de Zhu et al. (2017).

Também mostrado por Pezowicz e Glowacki (2012), através do corte da seção

transversal de uma costela, mostrado na Figura 13.

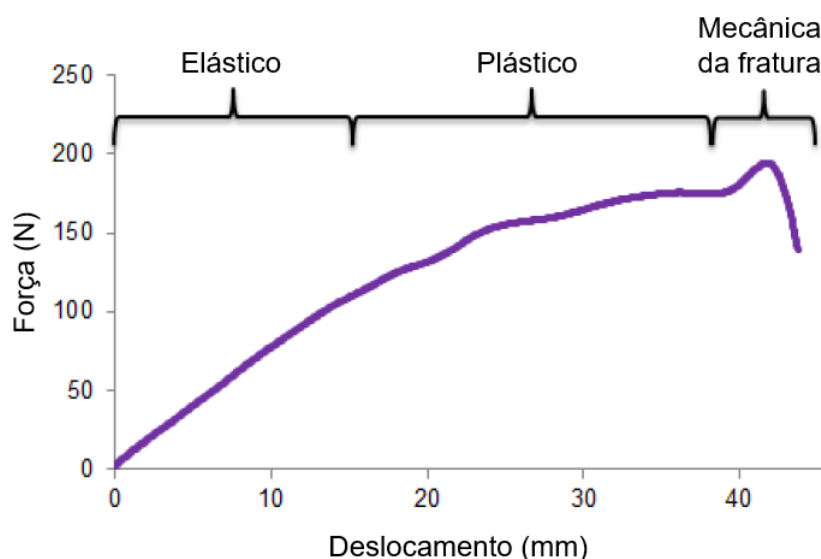
Figura 13 – Seção transversal da costela humana.



Fonte: Pezowicz e Glowacki (2012).

Portanto, apesar da geometria e constituição complexas, estas podem ser simplificadas em alguns casos, com as devidas ressalvas. Isto é mostrado por meio de seu comportamento elasto-plástico previsível, dependendo da situação, estudado experimentalmente por Schafman (2015) e Agnew et al. (2015), com o comportamento mecânico e as teorias que o regem resumidos na Figura 14.

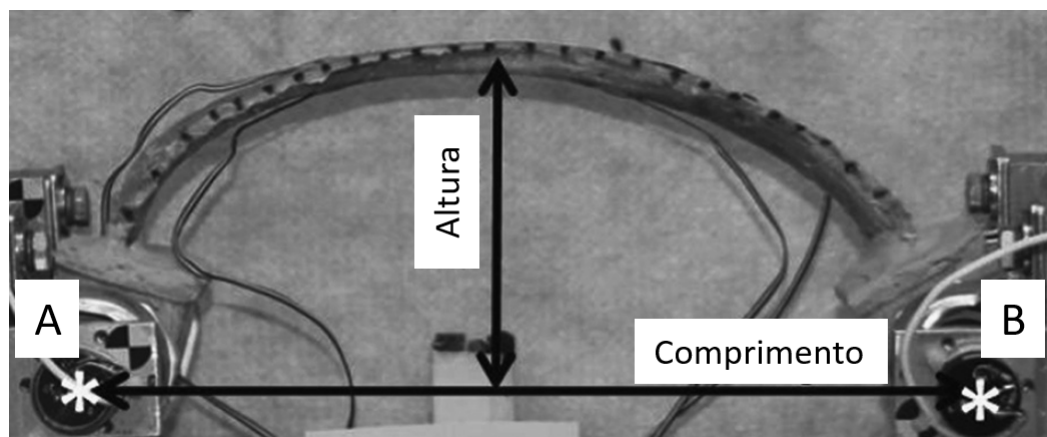
Figura 14 – Comportamento mecânico da costela em teste.



Fonte: Adaptado de Schafman (2015).

A configuração deste experimento é mostrada na Figura 15, em que a costela é posicionada no aparato mostrado, fixado no ponto A, com a aplicação de uma carga no ponto B simulando um impacto frontal.

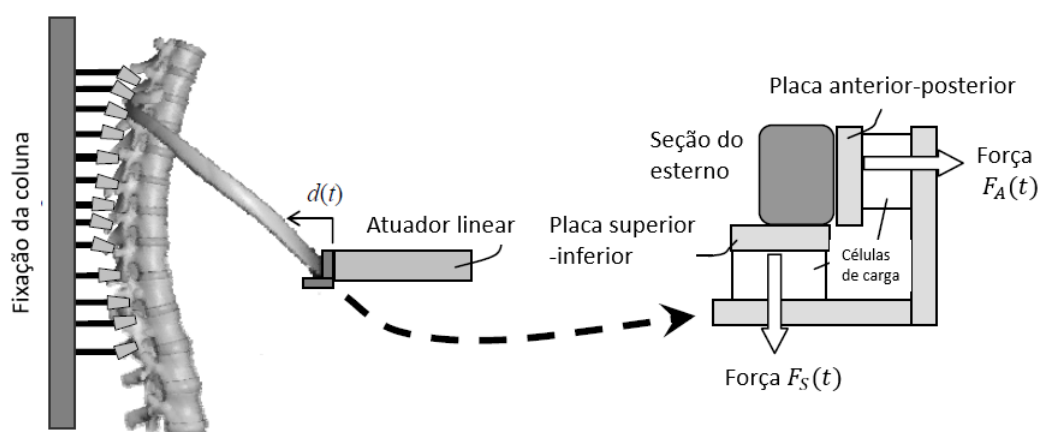
Figura 15 – Configuração do experimento de Agnew et al. (2015).



Fonte: Adaptado de Agnew et al. (2015).

Kindig et al. (2010) também analisa experimentalmente a costela humana, avaliando o comportamento da estrutura torácica completa e de anéis da costela, como mostrado na Figura 16, em que há a aplicação de um deslocamento horizontal no esterno com a medição das forças de reação por meio de células de carga. Estas reações são transformadas para o plano da costela e a direção normal a este plano. Os resultados por ele obtidos mostram um comportamento aproximadamente linear para esta estrutura completa.

Figura 16 – Configuração do experimento de Kindig et al. (2010).



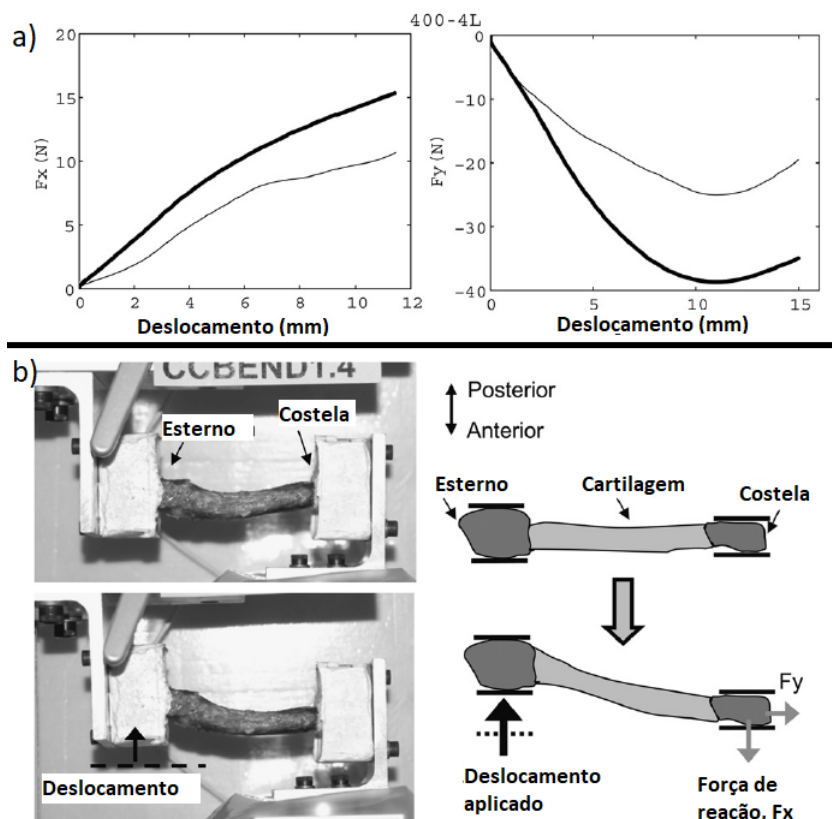
Fonte: Adaptado de Kindig et al. (2010).

Assim, o caráter linear do seu comportamento inicial permite a determinação do módulo de elasticidade, sendo muitos estudos destinados à sua medição. Experimentalmente, Pezowicz e Glowacki (2012) encontrou valores entre 3 e 8 GPa, dependendo da costela e da idade, observando-se um aumento significativo na rigidez após os 16 anos de idade. Sainia, Dischera e Kumarb (2019), para teste estáticos e dinâmicos

em ossos bovinos encontrou valores entre 2,6 GPa e 4,5 GPa. Além disso, métodos alternativos têm sido desenvolvidos para a estimativa dessas propriedades mecânicas, como o uso de dimensões fractais, mostrado por Kvelázquez-Ameijide et al. (2020), chegando a valores médios entre 15 GPa e 20 GPa, dependendo da dimensão, e métodos não destrutivos usando ultrassom, tal como Mitton et al. (2014), que chegou a valores entre 6 GPa e 10 GPa dependendo da velocidade do sinal, métodos de indentação *in vivo*, como o *osteoprobe indentation*, modelado através do Método de Elementos Finitos (MEF) por Idkaidek e Jasiuk (2019), encontrando valores entre 4 e 18,6 GPa. Katzenberger et al. (2020), além do módulo de Young, também encontra valores para a tensão de escoamento e ruptura, sendo o primeiro entre 50 e 150 MPa e o segundo entre 40 e 100 MPa, havendo uma diminuição em ambas com o aumento da idade. Por fim, Zysset (2003) faz uma revisão das propriedades do osso trabecular, compilando valores para densidade, as constantes de Lamé e coeficiente de Poisson. Dessa forma, análises experimentais e teóricas mostram a possibilidade da modelagem do osso como um material elástico linear, com as propriedades conhecidas.

Além do osso, outro material presente na caixa torácica e de extrema importância é a cartilagem costal. Este material, apesar de possuir um baixo módulo de elasticidade quando comparado ao osso, também pode ser modelado como linear para certos deslocamentos. A Figura 17 mostra alguns resultados obtidos por Forman e Kent (2011) juntamente com a configuração dos testes, nos quais a cartilagem foi submetida a deslocamentos, com a medição das forças de reação.

Figura 17 – Comportamento mecânico da cartilagem costal em teste: a) Forças de reação; b) Configuração do experimento.



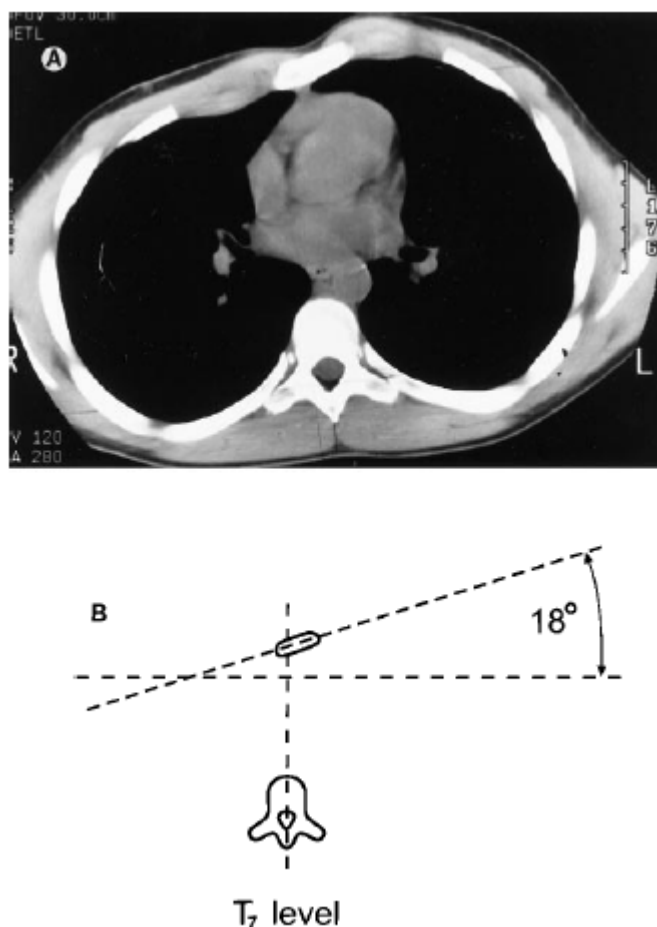
Fonte: Adaptado de Forman e Kent (2011).

Assim, os valores do módulo de elasticidade medidos pelo método de indentação ficaram entre 8,7 e 11 MPa, variando com o grau de calcificação da cartilagem que, em casos críticos, pode chegar a ordem de 1-10 GPa (FORMAN; KENT, 2011; LAU et al., 2008).

2.4 ANOMALIAS E DEFORMAÇÕES TORÁCICAS

Como explicado anteriormente, durante o período de crescimento deformações ósseas mais severas podem ocorrer, caracterizando-se como anomalias. Dois tipos de anomalias ocorrem com maior frequência, as dos tipos *pectus excavatum* e *pectus carinatum*, mostrada na Figura 18, sendo esta ultima uma protusão do esterno devido ao crescimento acentuado da cartilagem costal. Esta deformidade acentua-se geralmente no período da adolescência, afetando 1 em 500-1500 crianças (COBBEN; J.; DIJK, 2014; STEPHENSON; BOIS, 2008).

Figura 18 – Deformação do tipo *pectus carinatum*: a) Tomografia computadorizada; b) Ângulo de desvio do esterno.



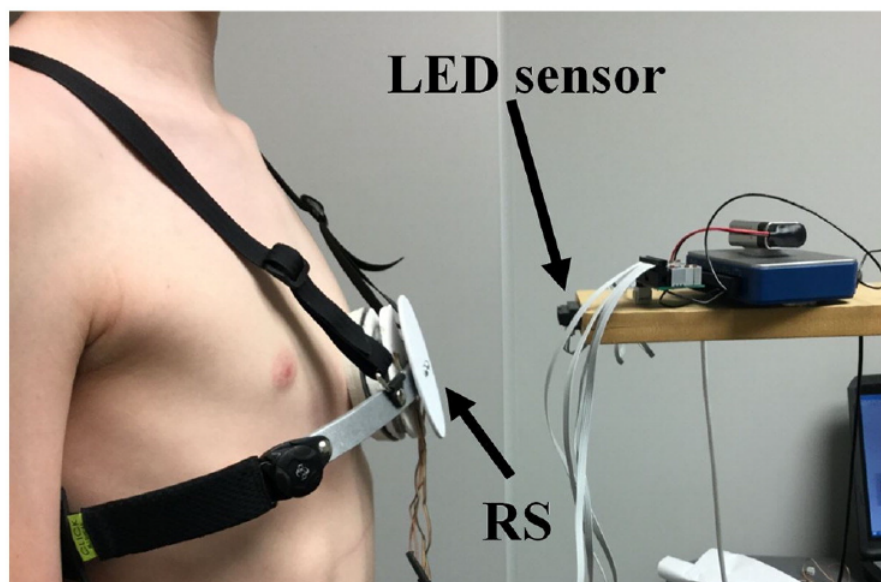
Fonte: Egan et al. (2000).

Tais deformações apresentam problemas estéticos que causam constrangimento social e, em casos severos, podem causar limitações no desempenho cardiopulmonar e dor na região do peito, como mostram Cahill, Lees e Robertson (1984) e Egan et al. (2000). Assim, são dois os métodos principais para a minimização ou extinção destes contrapontos, o método cirúrgico e o método de compressão por meio de uma órtese. O primeiro envolve uma série de técnicas mais invasivas como o procedimento de Ravitch no qual as porções mais deformadas da cartilagem costal são removidas e substituídas por pequenas barras, e o procedimento de Nuss, em que há a inserção de um barra fixada nas costelas que introduz esforços no esterno o fazendo acomodar-se no local correto, procedimento otimizado e avaliado pelo MEF por Neves et al. (2015) para o *pectus carinatum* e por Chang et al. (2008) para o *pectus excavatum*, a fim de evitar complicações secundárias como escoliose (WEBER, 2005; NUSS et al., 2002).

O segundo método é considerado o mais conservativo e menos invasivo, neste há o uso de uma órtese que comprime o peito na região protuberante, como mostra a

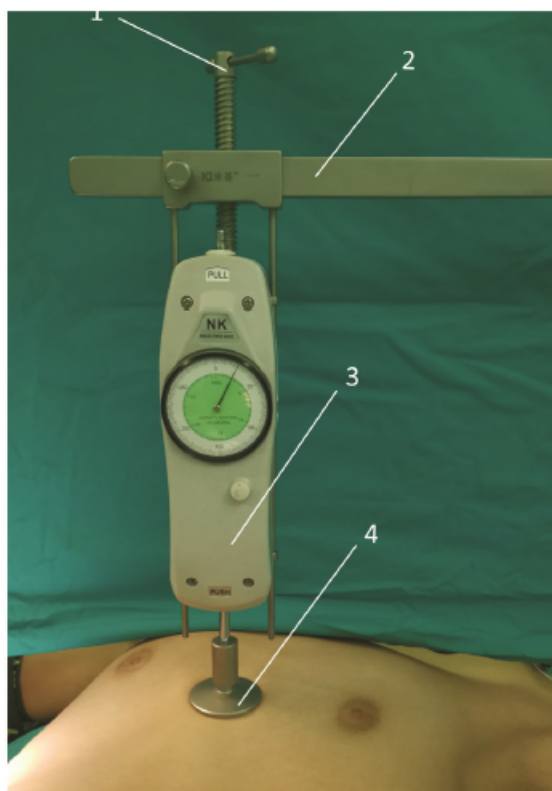
Figura 19, no caso do *pectus carinatum*, e aproveitando-se dos efeitos viscoelásticos da cartilagem costal e costela, há a sua remodelagem após um período de tratamento que pode chegar a anos (BUGAJSKI et al., 2018).

Figura 19 – Método de compressão para correção da deformidade do tipo *pectus carinatum*.



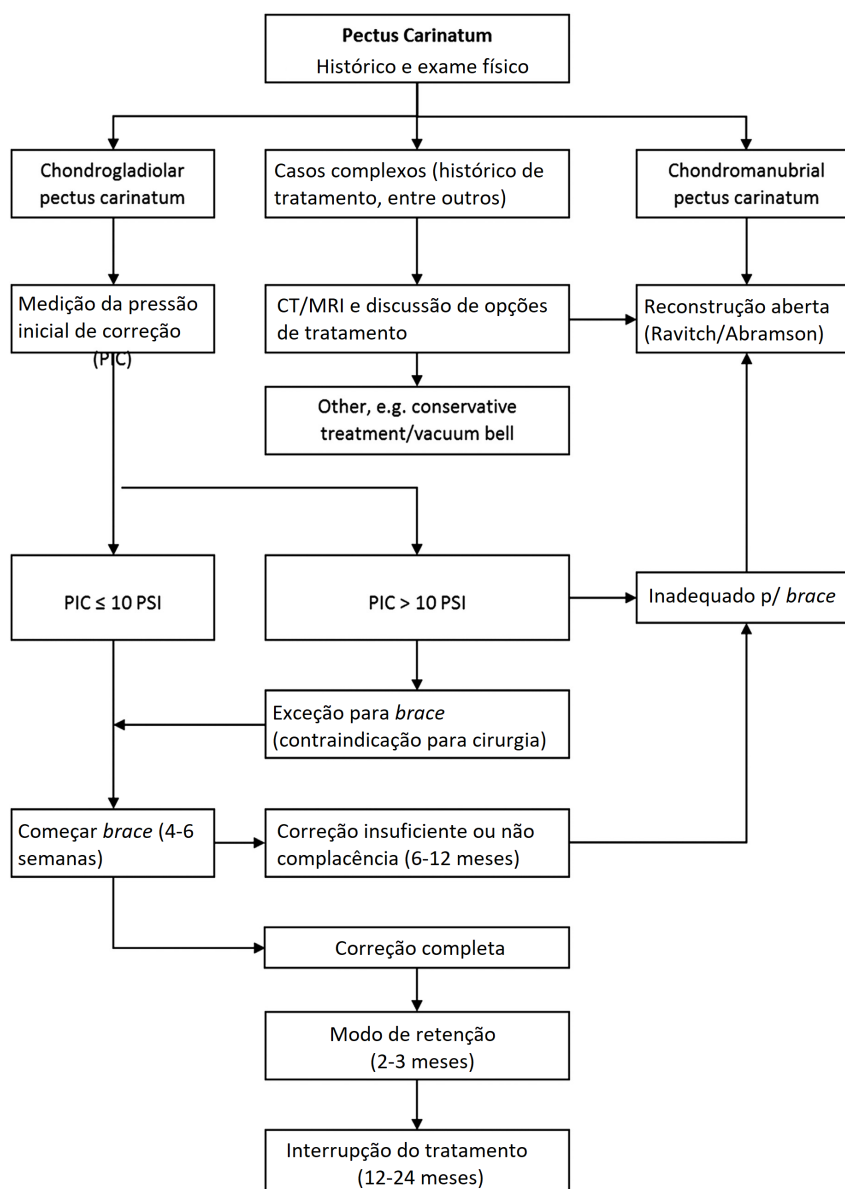
Fonte: Bugajski et al. (2018).

Apesar de ser considerado um método menos invasivo, este procedimento possui alguns problemas e limitações. Tal tratamento necessita o uso contínuo do compressor dinâmico de tórax (CDT), sendo os resultados diretamente ligados ao tempo de uso diário, de forma que quanto maior esse for em menor tempo haverão resultados, conforme mostra Fraser et al. (2020). Associado a esse uso constante da órtese CDT, forças de relativa grande magnitude são necessárias para a remodelagem do osso, podendo chegar a valores na ordem de 69,3 N, medidos por Chen et al. (2018), por meio do aparato mostrado na Figura 20.

Figura 20 – Medição de força requerida para correção do *pectus carinatum*.

Fonte: Chen et al. (2018).

Associados, esses dois fatores influenciam na não complacência do paciente para com o tratamento, uma vez que sintomas com desconforto, dor, problemas e ferimentos de pele podem surgir (KANG et al., 2014). A complacência, por sua vez, afeta o resultado do tratamento, já que nos pacientes não complacentes há o menor uso da órtese, obtendo resultados até 7 vezes menos expressivos do que aqueles que aderem ao uso da CTD (WONG et al., 2014). Além disso, complicações mais severas devido à aplicação de forças exacerbadas podem ocorrer, sendo a principal a hipercorreção em que há um recuo exagerado do esterno e das costelas, podendo afetar órgãos e comprometer as funções cardiorrespiratórias (HAJE; HAJE, 2006). Outro importante fator é a não resposta ao tratamento, no qual não há reposicionamento significativo do esterno com o uso da órtese CTD, podendo chegar a esta conclusão após 6-12 meses de uso (BEER et al., 2017). A Figura 21 mostra o fluxograma de tratamento da deformidade do tipo *pectus carinatum*, com o detalhe da pressão inicial de correção máxima de 10 psi para a órtese CTD, sugerido por Beer et al. (2017) com base no trabalho de Martinez-Ferro, Fraire e Bernard (2008).

Figura 21 – Fluxograma de tratamento para correção do *pectus carinatum*.

Fonte: Adaptado de Beer et al. (2017).

Pelos fatores descritos acima, os pontos de decisão cruciais para a determinação do procedimento adequado de correção são a análise das imagens obtidas por CT e MRI e a análise e medição da pressão inicial de correção (PIC). Atualmente, a determinação destes fatores é subjetiva na grande maioria dos casos por meio do procedimento descrito por Lee et al. (2008), em que há a compressão com a palma da mão da região de protusão enquanto a coluna é segurada pela outra mão, sentindo a elasticidade da caixa torácica, como mostra a Figura 22.

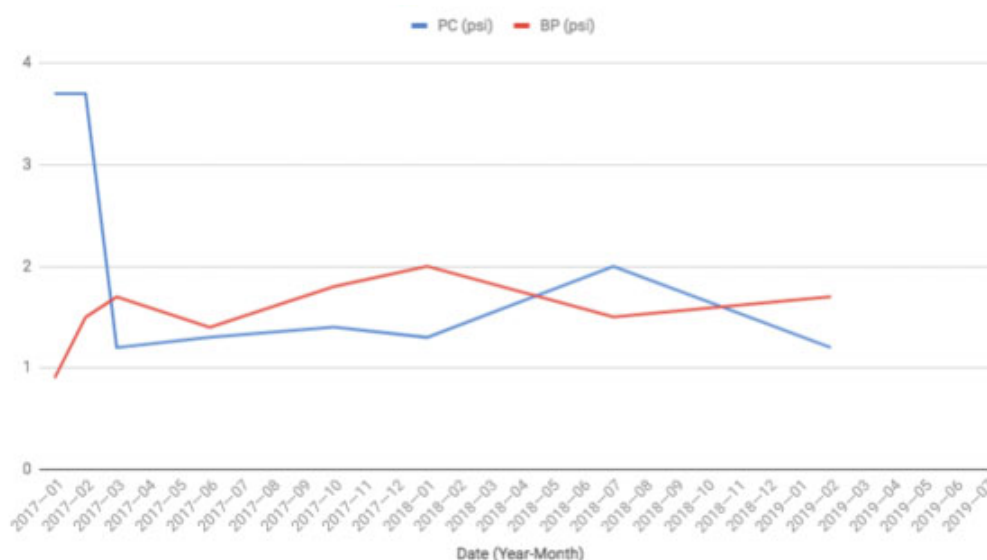
Figura 22 – Medição subjetiva da elasticidade da caixa torácica.



Fonte: Lee et al. (2008).

A posição e configuração inicial da órtese são determinadas pela geometria da protusão, podendo ser necessário o uso de vários CTDs e o reposicionamento e calibração da força após um tempo de uso, algo também feito de forma subjetiva e determinante no resultado final do tratamento (LEE et al., 2008; EMIL et al., 2017).

Outro aspecto que influencia diretamente no seguimento deste método de intervenção é o caráter dinâmico do carregamento devido à respiração, que causa a movimentação das costelas e o aumento e diminuição do volume da caixa torácica, fato que pode influenciar na significativa redução na pressão de correção ao longo do tratamento, fato mostrado na Figura 23 de Orrick et al. (2019).

Figura 23 – Redução na pressão necessária para correção (PC) do *pectus carinatum*.

Fonte: Orrick et al. (2019).

Trabalhos tais como Warliah, Rohman e Rusmin (2012) e Didier et al. (2007) modelam os deslocamentos das costelas e a variação de volume da caixa torácica devido à respiração, porém até o presente momento esses efeitos não foram ligados ao processo de compressão dinâmica torácica.

2.5 O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos é uma poderosa técnica que usa redes não estruturadas para a resolução aproximada de muitas equações diferenciais parciais (ANDERSON et al., 2021). Este é um método estudado exaustivamente nas últimas décadas, tanto teoricamente, do ponto de vista matemático, quanto em aplicações práticas, com a sólida fundamentação e comprovação de eficácia em diversos problemas, em especial naqueles que envolvem EDPs de segunda ordem classificadas como parabólicas, elípticas e hiperbólicas (CIARLET, 1978; JOHNSON, 1987).

Esta técnica de resolução é a mais popular devido à sua fácil implementação e alta flexibilidade, tanto na discretização do problema quanto na adaptação à geometria a ser estudada (WANG et al., 2019). Como explicado na seção 2.2, as equações diferenciais parciais descritas por meio de um espaço funcional contínuo regem diversos fenômenos em mecânica dos fluídos, sólidos, Eletromagnetismo, vibrações e acústica e diversas outras áreas, sendo a sua resolução analítica impossível, na grande maioria dos casos, aplicando-se o MEF para a solução destes problemas (FENG et al., 2018).

Em mecânica dos sólidos, suas aplicações são de extrema importância pois permitem a resolução de problemas que envolvem as três teorias majoritárias presentes nestes casos. A primeira, elasticidade linear, encontra-se altamente desenvolvida por meio de técnicas e algoritmos para a resolução dos mais diversos problemas, tanto estáticos quanto dinâmicos (HUGHES, 1987; LOGAN, 2007). A segunda, plasticidade e fenômenos não lineares, também pode ser totalmente resolvida por dessa técnica, como mostram Wriggers (2008) e Belytschko, Liu e Moran (2001). Por fim, os problemas regidos ou descritos pela mecânica da fratura com a propagação de trincas, que encontra-se no estado da arte deste método no estudo do comportamento dos sólidos, também vêm sido solucionada por meio deste método (SONG; OOI; NATARAJAN, 2018).

Assim, a vasta literatura técnica existente, a fácil implementação dados os níveis de processamento computacional existentes na atualidade, alinhados com a generalidade deste método o fazem ser apropriado para os mais diversos problemas que envolvem deformação de sólidos. Nestes casos, em geral, os problemas são descritos da forma

$$\text{Encontre } u \in S, \{u(0) = u_0 \text{ e } u(\partial\Omega_u) = u_g \text{ ou } t(\partial\Omega_t) = t\}, \quad (2.50)$$

na qual S é um espaço funcional de dimensão infinita, u é a variável de interesse, no caso o deslocamento na forma escalar ou vetorial, $\partial\Omega_u$ a chamada fronteira de Dirichlet, em que há a aplicação ou especificação da condição de contorno da variável de interesse e $\partial\Omega_t$ a fronteira de Neumann, em que há a especificação da derivada da variável de interesse, no caso, a especificação de uma tração t . Estas condições são dadas para uma certa equação diferencial que rege o problema, além da equação constitutiva, como especificado na seção 2.2.

Como também já descrito, a resolução clássica deste problema torna-se impossível em grande parte dos casos, sendo necessária a truncagem da solução em domínios $u^h \in S^h \subset S$, no qual há a limitação do espaço funcional para um subconjunto de S pertencente ao espaço de Hilbert, garantindo a sua existência.

Na prática, a restrição e seu funcionamento parte de espaços de Lebesgue e Sobolev. Dada uma EDP em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com uma dimensão $d \geq 1$, um contorno de Lipzchitz $\partial\Omega$ e os espaços funcionais definidos sobre Ω , o espaço de Lebesgue de Ω é definido como

$$L^p(\Omega) := \{ \|v\|_{L^p(\Omega)} < \infty \}, \quad (2.51)$$

tal que $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lebesgue-mensurável, conceito similar em algumas propriedades com a continuidade de uma função, como explica Rudin (1987), e equipada com a norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ definida por

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.52)$$

Partindo destes conceitos, o espaço de Sobolev é definido como

$$W^{m,p}(\Omega) := \{ v \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in A_d^m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \}, \quad (2.53)$$

com $\partial^\alpha v$ denotando a derivada em relação às bases cartesianas de $\mathbb{R}^d$, e

$$A_d^m := \{ \alpha \in \mathbb{N}^d \mid |\alpha|_{l^1} \leq m \}, \quad (2.54)$$

isto é, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço funcional pertencente à $L^p(\Omega)$ no qual suas derivadas de ordem até m também o pertencem, garantindo a diferenciabilidade (Sobolev) e a continuidade (Lebesgue) neste espaço. Por fim, o espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$ é definido como o espaço $L^2(\Omega)$ equipado com o produto escalar

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} := \sum_{\alpha \in A_d^m} (\partial^\alpha v, \partial^\alpha w)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.55)$$

algo importante para a formulação de Galerkin que será descrita posteriormente (BRENNER; SCOTT, 2008; PIETRO; ERN, 2010).

O método de elementos finitos consiste, portanto, de forma geral, na derivação da forma forte (diferencial) de uma EDP para a forma fraca (integral), seguida da limitação do espaço funcional da resolução à espaços contidos nos de Hilbert, com a partição do domínio Ω em subdomínios Ω^e de forma que

$$\bar{\Omega} = \cup \bar{\Omega}^e, \quad (2.56)$$

onde

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad (2.57)$$

é o fecho do conjunto Ω e, com a aplicação das condições de contorno, é possível solucionar a EDP inicial integrando-o ao longo dos subdomínios. São dois os conjuntos de técnicas principais para a resolução, por meio de resíduos ponderados, utilizando-se da teoria citada acima para simplificação da EDP, e métodos variacionais, valendo-se do potencial elástico e conservação de energia.

2.5.1 Métodos de Resíduos Ponderados

Como descrito, este método vale-se da teoria matemática para a resolução da EDP, possuindo vantagens em relação à outros métodos de resolução. Na classe de problemas de vibrações, em especial não lineares, Bhashyam e Prathap (1980) explica que este método é mais adequado para a obtenção dos autovalores que determinam os modos de vibração. Em problemas estáticos, este método também é largamente utilizado e eficaz, tanto para formulações para obtenção de tensões, como desenvolvido por Chen e Xie (2016), como métodos baseados na deformação, a exemplo Gracie, Wang e Belytschko (2008). Também em formulações baseadas na cinemática, como no deslocamento de vigas, este procedimento mostra-se computacionalmente robusto com a fácil generalização e automatização dos processos necessários (EIDSVIK; SCHJOLBERG, 2018; BASHIR; AHMAD, 2016).

Assim, conforme Fish e Belytschko (2007), este método consiste em, dada uma equação diferencial do tipo

$$c_1 \frac{D^2 f_1}{D^2 x_1} - c_2 = 0, \quad (2.58)$$

multiplicar-la por uma função peso ou, matematicamente, uma função teste arbitrária w , seguido pela integração ao longo do domínio Ω . No caso de equações diferenciais parciais em três dimensões, utiliza-se o teorema de Green, que pode ser expressado por

$$\int_{\Omega} w \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w \cdot \vec{q} \, d\Omega \quad (2.59)$$

e no caso de problema unidimensionais utiliza-se a regra do produto para chegar na forma fraca do problema. Fish e Belytschko (2007) mostram a equivalência entre ambas as formas.

A resolução a partir da forma fraca dá-se por meio da discretização dos domínios, como descrito na seção anterior. Em cada domínio, são aproximadas funções testes w^h e soluções tentativas u^h , sendo que

$$u^h \in S^h = \{u^h \in H^1(\Omega) \mid u^h(0) = u_0\}, \quad (2.60)$$

e,

$$w^h \in V^h = \{w^h \in H^1(\Omega) \mid w^h(0) = 0\}. \quad (2.61)$$

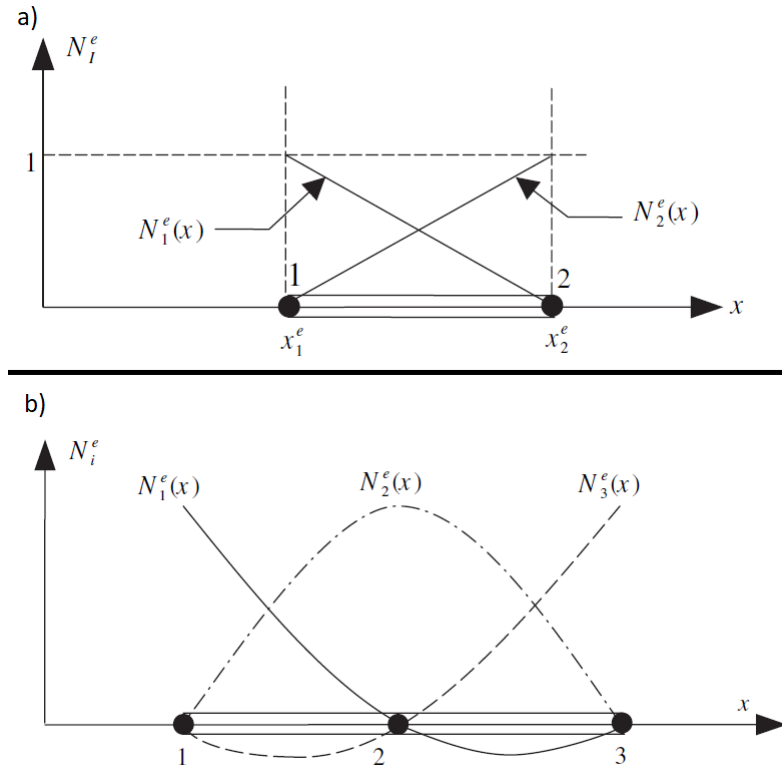
Em geral, para ambas aproximam-se polinômios devido à facilidade no controle da suavidade, que dependerá do número de nós em um elemento. Esta classe de funções também garante a convergência, sobre certas condições, e a integração analítica e numérica, com fortes bases matemáticas (ZENISK, 1973; STRANG, 1973). Desta forma, funções do tipo

$$\theta^e = \alpha_0^e + \alpha_1^e x + \alpha_2^e x^2 + \dots, \quad (2.62)$$

são tomadas e, no caso de elementos com dois nós, por exemplo, a solução irá convergir com uma função linear. Estas equações podem ser representadas na forma

$$\theta^e(x) = N^e(x)d^e, \quad (2.63)$$

sendo $N^e(x)$ as chamadas funções de forma (*shape functions*), dependendo, como explicado, da ordem da equação a ser solucionada e do número de nós no elemento, e d^e os coeficientes do polinômio. A Figura 24 mostra as funções de forma para um elemento unidimensional com dois nós (linear) e três (quadrática).

Figura 24 – *Shape functions* para elementos com dois nós (a) e três nós (b).

Fonte: Adaptado de Fish e Belytschko (2007).

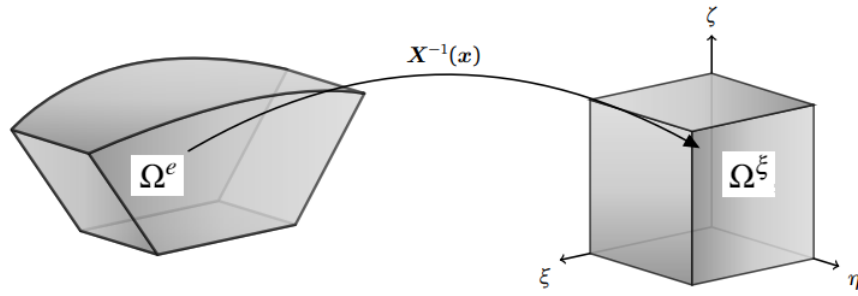
Uma classe especial de polinômios bastante utilizada em problemas tri, bi e unidimensionais são os polinômios de Lagrange, dados por

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad (2.64)$$

sendo um método de interpolação computacionalmente robusto, podendo ser implementado com o mesmo número de operações aritméticas que a forma Newtoniana, demonstrado por Werner (1984).

Assim, para a integração numérica, a quadratura de Gauss é a escolha natural pois é a técnica mais eficiente para esta operação quando equipadas com funções polinomiais, explicado por Fish e Belytschko (2007). Para isto, o domínio físico (Ω^e) é transformado por uma aplicação $X = X(\tilde{x}) : \Omega^{\tilde{x}} \rightarrow \Omega^e$, para um domínio bi-unitário onde a quadratura gaussiana é aplicada, mostrado na Figura 25 (ROSA, 2014).

Figura 25 – Aplicação do domínio físico para o bi-unitário.



Fonte: Adaptado de Rosa (2014).

A integração numérica, portanto, para um ponto ξ_l e n_{gp} pontos de integração é dada por

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{n_{gp}} g(\xi_l) w_l, \quad (2.65)$$

em que os pesos w_l podem ser obtidos selecionando os pontos ξ_l , lembrando que este método integra de forma exata um polinômio de ordem $p \leq 2n_{sd} - 1$. A Tabela da Figura 26 mostra os pesos para os pontos de integração.

Figura 26 – Pesos para os respectivos pontos de integração.

n_{gp}	Location, ξ_i	Weights, W_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
3	± 0.7745966692 0.0	0.555 555 5556 0.888 888 8889
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.347 854 8451 0.652 145 1549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0	0.236 926 8851 0.478 628 6705 0.568 888 8889
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.171 324 4924 0.360 761 5730 0.467 913 9346

Fonte: Fish e Belytschko (2007).

Torna-se, assim, possível a integração da forma fraca por meio da Eq. 2.65,

obtendo-se valores que podem ser organizados em sistemas lineares possíveis e determinados, após a montagem e quando aplicadas as condições de contorno, podendo ser representados na forma matricial-vetorial, geralmente como

$$[K]\{d\} = \{f\}, \quad (2.66)$$

com d sendo os coeficientes para os respectivos graus de liberdade do elemento e K é uma matriz chamada esparsa (possui um grande número de zeros) podendo ser resolvido por métodos diretos, como os descritos por Davis, Rajamanickam e Sid-Lakhdar (2016), ou por métodos iterativos, mostrados por Young (1971). Assim sendo, obtém-se, no caso de problemas que envolvem elasticidade, os deslocamentos e posteriormente as deformações e tensões por meio dos métodos descritos na seção 2.2.

2.5.2 Métodos Variacionais

Outro campo de métodos amplamente utilizado, em especial em problemas que envolvem elasticidade e mecânica clássica, é o baseado em princípios de Cálculo de Variações. Estes concretizam-se, essencialmente, como problemas de otimização, estando definidos em espaços de funções de dimensão infinita, como explicado anteriormente, e diferenciando-se desses problemas clássicos pelo fato da função objetivo ser descrita por um operador integral, explicado por Leitão (2001).

Como explica Courant (1943), apesar da ligação entre os problemas de valores de contorno de equações diferenciais parciais e cálculo de variações ser um problema central em análise após os estudos de Gauss e W. Thompson, somente com os trabalhos dos físicos Rayleigh e Ritz aplicações práticas destes estudos foram desenvolvidas e demonstradas. Rayleigh (1886) foi primeiro a usar a ideia de aproximar funções simples em problemas variacionais obtendo um número finito de parâmetros, porém somente com as publicações de Ritz (1908) e Ritz (1909) essas ideias foram difundidas, com a resolução de problemas de vibração em placas que, antes de Ritz, não haviam sido tratados de forma satisfatória.

Desta forma, como mostra Ritz (1908), este método consiste em, dada uma função de aproximação w para um elemento n , da forma

$$w_n = \psi_0 + a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots + a_n \psi_n, \quad (2.67)$$

e um potencial J a ser minimizado por variação,

$$J = \int_a^b f(x, w, w', w'', \dots, w^{(o)}) dx, \quad (2.68)$$

a sua minimização, ao substituir a Equação 2.67 na Equação 2.68, se reduz às derivadas do potencial em relação aos coeficientes a serem encontrados igualada a zero, de

forma a encontrar os pontos críticos, sendo

$$\frac{\partial J_n}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial J_n}{\partial a_2} = 0, \dots \frac{\partial J_n}{\partial a_n} = 0. \quad (2.69)$$

Método generalizável para 3 dimensões, desde que haja a existência de um potencial, como dito. Em problemas que envolvem elasticidade, este potencial é, naturalmente, o potencial elástico, que é dado, através da análise da conservação de energia, por

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \{u\}^T \{F\} d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega} \{u\}^T \{t\} d\partial\Omega - \{D\}^T \{P\}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

sendo que o integrando da primeira integral diz respeito à energia U_0 necessária para deformar uma unidade de volume, chamada energia de deformação. As duas integrais em sequência referem-se ao trabalho realizado por uma força de corpo F e por uma tração t . Por fim, a ultima integral representa o trabalho realizado uma força ou momento especificado, no caso, escrito como um deslocamento D (respectivo grau de liberdade) multiplicado por seu valor P , conforme Cook et al. (2004).

A variação e minimização deste campo de funções dá-se pelo método há pouco discutido, denominado Rayleigh-Ritz pelas contribuições de ambos os físicos. Vale ressaltar que o procedimento da Equação 2.69 computa pontos críticos, sendo estes de mínimo somente em funções f convexas, ou seja, em que

$$f(a+v) - f(a) \geq \langle \text{grad} \cdot f(a), v \rangle \quad (2.71)$$

nas quais a forma quadrática Hessiana atende à

$$H \cdot f(x) \geq 0, \quad (2.72)$$

sendo o operador H expresso por, dado um vetor $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

$$Hf(x) \cdot v^2 = \sum_{i,j}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \alpha_i \alpha_j, \quad (2.73)$$

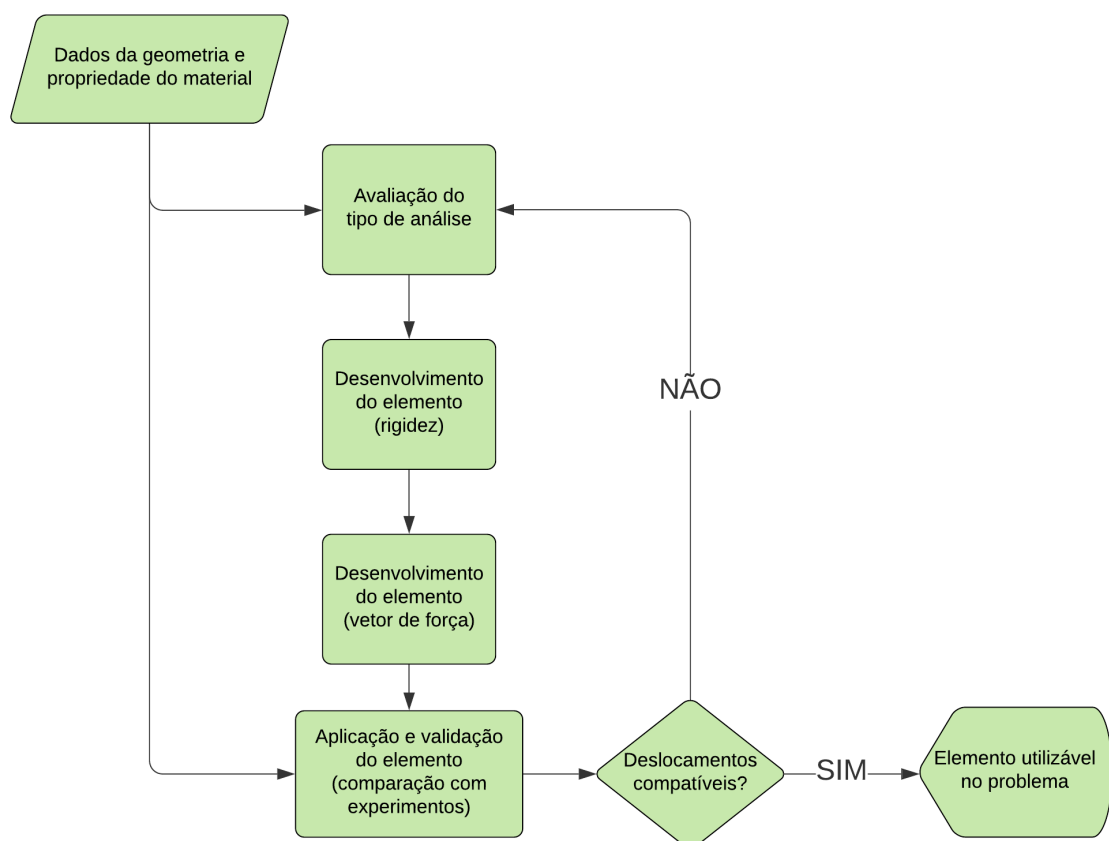
como demonstra Lima (1999).

No caso da Equação 2.70, as características dos tensores que nela estão garantem a sua convexidade, fazendo com que os pontos críticos encontrados sejam, necessariamente, pontos de mínimo, demonstrado por Brigadnov (2015).

3 METODOLOGIA

Para a resolução do problema descrito, elementos de viga gerais (tridimensionais) foram desenvolvidos. Esta escolha deu-se pela maior simplicidade de implementação computacional, além das características geométricas, já descritas, do objeto de estudo. A Figura 27 mostra os processos para desenvolvimento e análise do modelo.

Figura 27 – Fluxograma de desenvolvimento e validação do modelo numérico.

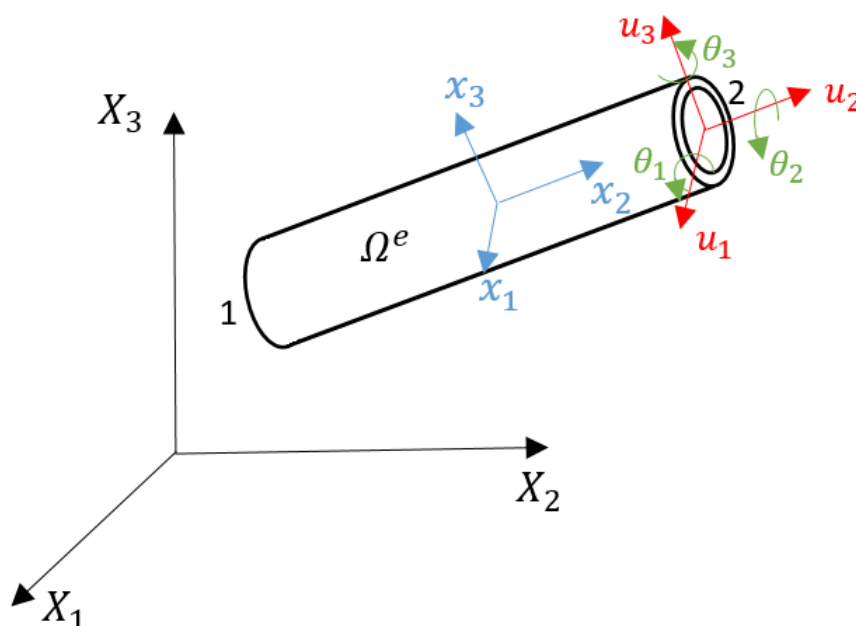


Fonte: Autoria própria (2021).

Como primeiro passo, os dados da geometria foram tomados com base em modelos de CAD disponíveis de forma gratuita, com as propriedades do osso tomadas de acordo com os trabalhos citados na seção 2.3. Como percebe-se nesta mesma seção, a costela possui uma geometria de tal forma que seu comprimento é muito maior do que a dimensão máxima de sua seção transversal, além desta não se alterar de forma significativa no eixo da costela, aproximando-se à uma elipse. Além do mais, a resistência proveniente da parte interna (trabecular) do osso foi desconsiderada, avaliando-o com uma geometria anelar vazada, levando em consideração os trabalhos

citados na seção 2.3 que demonstram essa possibilidade. Outro fator importante a se considerar é a torção gerada pelo caráter ondulado da costela, decidindo-se, assim, utilizar um elemento com 6 graus de liberdade em cada nó, sendo três de deslocamentos angulares (dois devido à flexão e um devido à torção) e três de deslocamentos lineares, como mostra a Figura 28.

Figura 28 – Graus de liberdade do elemento e sistemas de coordenadas.



Fonte: Autoria própria (2021).

Devido ao comportamento observado nos experimentos citados, considerou-se o osso cortical como um material isotrópico. A modelagem, também devido à literatura experimental disponível, foi realizada de forma a simular somente o comportamento linear do osso, valendo-se dos resultados experimentais e considerando a variação estatística dos seus valores. Para a cartilagem costal idem.

Portanto, a princípio, as considerações a seguir foram tomadas:

- Seção transversal vazada, variável mas sem mudanças bruscas que concentrem tensões ao decorrer do comprimento;
- Osso cortical como material isotrópico;
- Cartilagem costal como material isotrópico;
- Comportamento linear, considerando pequenas deformações;
- Modelagem como meio contínuo, desconsiderando porosidades;

Desta forma, vários módulos de elasticidade foram analisados, de acordo com seus respectivos trabalhos, mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades utilizadas e suas respectivas incertezas.

Trabalho	Idade	E (GPa)	Tensão de Escoamento
Pezowicz e Glowacki (2012)	10-15	$2,79 \pm 1,34$	-
Pezowicz e Glowacki (2012)	16-22	$7,44 \pm 2,85$	-
Saini, Discher e Kumar (2019)	-	$4,27 \pm 0,45$	-
Velázquez-Ameijide et al. (2020)	-	16 ± 7	110 ± 50
Katzenberger et al. (2019)	17-99	15 ± 4	82 ± 38

Com isso, a influência da área cortical, citada por Murach et al. (2017), foi avaliada por meio de

$$R_{area} = \frac{A_{cort}}{A_{total}}, \quad (3.1)$$

em que A_{cort} é a área do osso cortical e A_{total} a área da seção transversal considerando seu contorno externo, variando-se a R_{area} em valores próximos aos observados na literatura.

Desenvolvendo-se, portanto, os elementos através cinemática de uma viga, que será detalhada adiante, com sua respectiva formulação para cada grau de liberdade e seu respectivo comportamento associado à estrutura. A verificação da validade do elemento foi feita de acordo com os resultados experimentais de Schafman (2015), Agnew et al. (2015) (denominado experimento 1, mostrado na Figura 15) e Kindig et al. (2010) (denominado experimento 2, mostrado na Figura 16), considerando-se satisfatório quando, dado o conjunto de deslocamentos experimentais U_e e o conjunto de deslocamentos numéricos U_n ,

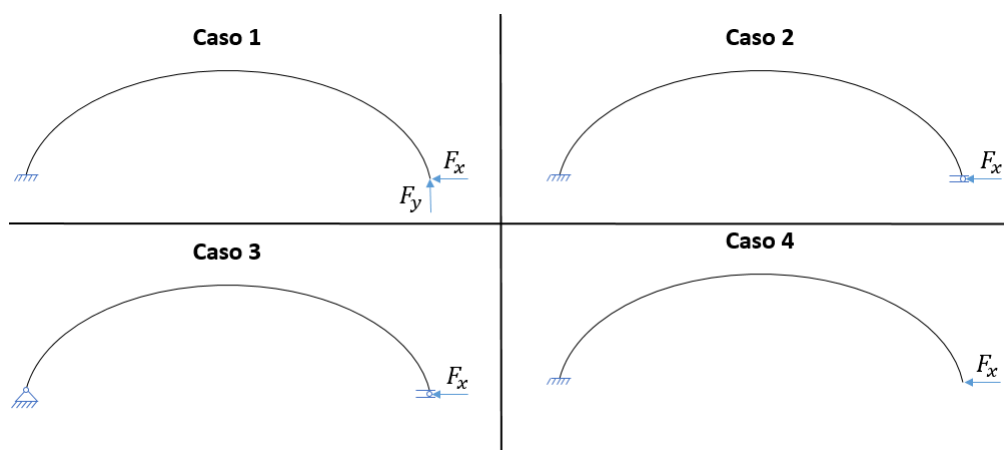
$$U_e \cap U_n \neq \emptyset, \quad (3.2)$$

ou seja, os dados experimentais estão inclusos no intervalo dos dados obtidos por MEF, considerando os erros das propriedades utilizadas. Essa indicação foi feita por meio de uma função indicadora $\mathbf{1}_u$, definida como

$$\begin{cases} \mathbf{1}_u = 1, & \text{se } U_e \cap U_n \neq \emptyset \\ \mathbf{1}_u = 0, & \text{se } U_e \cap U_n = \emptyset \end{cases}. \quad (3.3)$$

Ressaltando que, para o experimento 1, devido à não especificação detalhada do equipamento utilizado, foram simuladas 4 condições de contorno e carregamentos diferentes, mostradas na Figura 29.

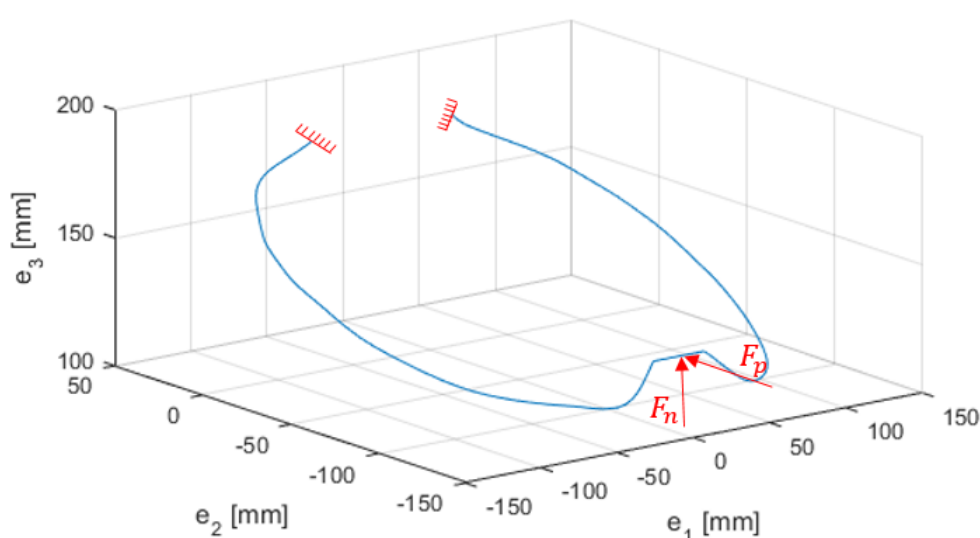
Figura 29 – Condições de contorno e forças externas aplicadas.



Fonte: Autoria própria (2021).

Para o experimento 2, o anel da costela foi analisado de forma a apresentar deslocamentos, no ponto de aplicação da força, somente na direção $\hat{e}_2$, conforme o experimento em comparação. Para isso, foram avaliadas as forças no plano (F_p) e normal (F_n), juntamente com a deflexão no seu ponto de aplicação. Os suportes foram considerados como rígidos no encaixe com a coluna vertebral. A representação da simulação é mostrada na Figura 30.

Figura 30 – Condições de contorno e forças externas aplicadas.



Fonte: Autoria própria (2021).

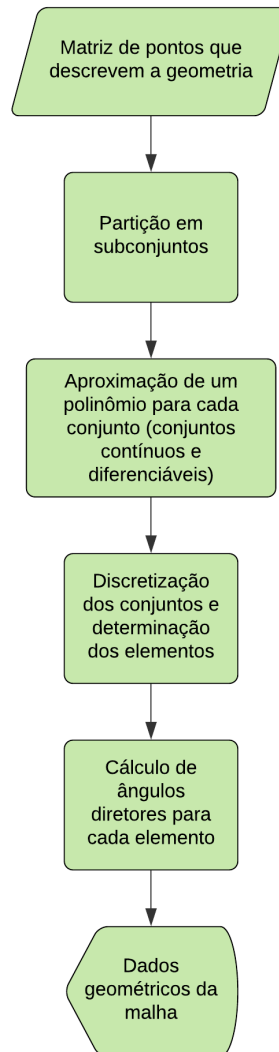
A seguir, atendida a condição imposta para a validação, procedeu-se a análise do comportamento de um modelo simplificado da caixa torácica no processo de compressão torácica para correção de deformidades do tipo *pectus catinatum*.

Considerou-se, de forma hipotética, um paciente de 15 anos, com uma deformação torácica baseada na observada no estudo de Egan et al. (2000), avaliando a aplicação de uma força na região protuberante por meio de uma órtese circular, observando a PIC e a deflexão máxima da caixa torácica, bem como a deformação local na região da protusão.

3.1 GEOMETRIA E MALHA

A metodologia adotada para a obtenção da geometria foi desenvolvida de modo a simular a captação automatizada dos pontos por meio de radiografias bi-planares, TC, RM, e outros métodos, juntamente com algoritmos de leitura de imagens, escopo não abordado neste trabalho porém acoplável ao método aqui descrito, consistindo nos processos presentes no fluxograma da Figura 31.

Figura 31 – Fluxograma da geração da malha.



Fonte: Autoria própria, 2021.

Primeiro, a matriz de pontos foi obtida de forma teórica, os aproximando manualmente para o acompanhamento da geometria obtida em CAD, com o retorno de um conjunto enumerável de pontos $G_d \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^n$, da forma

$$G_d = [x_{d_{1n}}, x_{d_{2n}}, x_{d_{3n}}], \quad (3.4)$$

em que, $x_{d_{1n}}, x_{d_{2n}}$ e $x_{d_{3n}} \in \mathbf{R}$, ou seja,

$$G_d = \begin{bmatrix} x_{d_{11}} & x_{d_{12}} & x_{d_{13}} \\ x_{d_{21}} & x_{d_{22}} & x_{d_{23}} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{d_{n1}} & x_{d_{n2}} & x_{d_{n3}} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

A fim de aumentar ao máximo o coeficiente de correlação, expresso pela Equação 2.11, dividiu-se os dados de entrada em subconjuntos por meio da cisão não trivial de G_d , de forma a reduzir ao máximo a variação entre dois pares de coordenadas consecutivos, ou seja, minimizando a diferença

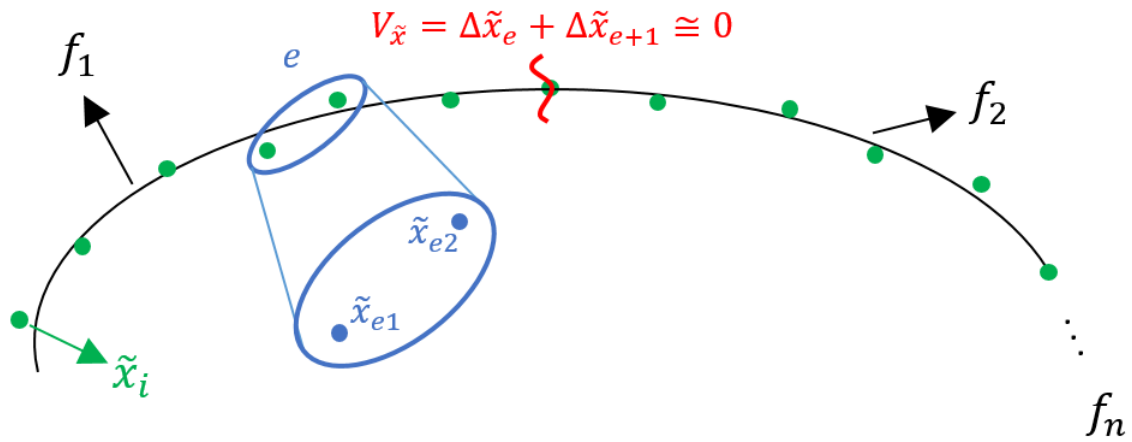
$$V_x = \Delta\tilde{x}_e - \Delta\tilde{x}_{e+1}, \quad (3.6)$$

representando, Δx_e , a variação da coordenada x para em elemento e formado por dois valores consecutivos seus contidos em G_d , sendo

$$\Delta\tilde{x}_e = \tilde{x}_{e2} - \tilde{x}_{e1}, \quad (3.7)$$

reduzindo a suavidade requerida para a função de aproximação e aumentando a correlação, dando prioridade para partições em locais de inflexão. A Figura 33 mostra um exemplo desse processo, sendo em vermelho o local da partição, em verde são pontos a serem generalizados, em preto a função a ser aproximada para cada partição e em azul um elemento inicial e .

Figura 32 – Partição do conjunto de pontos G_d .



Fonte: Autoria própria (2021).

Em que $\tilde{x}$ é um vetor que contém as coordenadas que descrevem a geometria. Vale ressaltar que a variação desses vetores também é causada pela variação do tamanho do elemento, devendo avaliar-se essa condição para cada plano. Este problema pode ser contornado pela avaliação dos ângulos, de forma que

$$V_\theta = \tilde{\theta}_e - \tilde{\theta}_{e+1}, \quad (3.8)$$

deve ser mantido o mais constante possível, fazendo a partição do domínio quando $\theta_i \approx 0$.

Como mostra a Figura 33, o ponto de partição deve pertencer aos conjuntos a serem divididos, reduzindo, assim, a descontinuidade gerada pela divisão. Portanto, o conjunto G_d , será dado por

$$G_d = \cup_{i=1}^{\lambda} \{G_{\lambda_i}\}, \quad (3.9)$$

sendo λ o número de divisões.

Desta forma, foram aproximadas curvas f_{λ} para cada conjunto de pontos G_{λ} por meio do método de regressão por mínimos quadrados (seção 2.1), utilizando-se uma função polinomial devido à facilidade de implementação e do maior controle da diferenciabilidade. Para isso, foram avaliados polinômios de diferentes ordens e sua influência no fator de correlação, além da importância da partição do domínio para o seu aumento. No caso de validação para o experimento 1, este método não foi aplicado devido à aproximação planar da estrutura.

Considerando esta função polinomial, a Eq. 2.9 torna-se

$$Q(p) = \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}^2 - \dots - a_n x_{ni}^n)^2, \quad (3.10)$$

sendo a os coeficientes dos polinômios e x os pontos das abscissas e y os pontos das ordenadas. Verifica-se facilmente que,

$$\frac{\partial Q(p)}{\partial a_n} = -2 \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}^2 - \dots - a_n x_{ni}^n) x_{ni}^n, \quad (3.11)$$

igualando-se todas as derivadas à zero para a minimização dos resíduos, chegando na forma matricial-vetorial expressa por

$$\{y\} - [Z]\{a\} = 0, \quad (3.12)$$

sendo resolvida por eliminação de Gauss, obtendo os fatores a_n do polinômio de grau n . Para o caso tridimensional, foram aproximadas curvas de forma independentes, ou seja

$$x_2(x_1) = \sum_{l=0}^n a_{y_l} x_1^l, \quad (3.13)$$

e

$$x_3(x_1) = \sum_{l=0}^n a_{z_l} x_1^l, \quad (3.14)$$

sendo o conjunto de pontos generalizado G_p podendo ser expresso pelo campo vetorial

$$\tilde{r}(t) = x_1(t)\hat{e}_1 + x_2(t)\hat{e}_2 + x_3(t)\hat{e}_3, \quad (3.15)$$

em que a variação de $r(t)$ com t pode ser expressa por

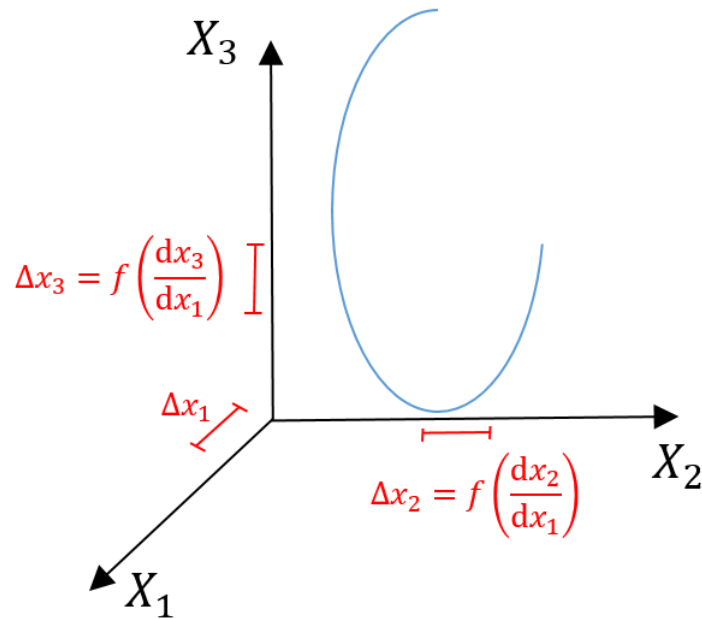
$$\frac{d\tilde{r}(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dx_2(t)}{dt}\hat{e}_2 + \frac{dx_3(t)}{dt}\hat{e}_3. \quad (3.16)$$

Esta análise é garantida pela continuidade e diferenciabilidade das funções polinomiais no intervalo de interpolação, atendendo aos critérios já descritos. Assim, substituindo as Equações 3.13 e 3.14 em 3.16 e t por x , tem-se

$$\frac{d\tilde{r}(x)}{dt} = (1)\hat{e}_1 + \left(\sum_{l=1}^n a_{y_l} l x_1^{l-1} \right) \hat{e}_2 + \left(\sum_{l=1}^n a_{z_l} l x_1^{l-1} \right) \hat{e}_3. \quad (3.17)$$

Isto significa que, parametrizando x e variando-o com um passo Δx_1 , este continuará o mesmo na direção $\tilde{e}_1$, já nas demais ele irá variar de acordo com a inclinação da curva, representada pela derivada na devida direção. Essa propriedade foi utilizada para ao aumento natural dos elementos nos pontos em que a geometria é uniforme e/ou não há fenômenos de grande interesse ou influência. A Figura 33 mostra o exemplo da discretização variando x_1 com um incremento constante, no qual os incrementos nos demais eixos será uma função da curvatura.

Figura 33 – Variação da curva para um passo Δx_1 .



Fonte: Autoria própria (2021).

Sendo assim, a discretização do domínio possível tomando este passo Δx_1 contido no domínio de continuidade das funções aproximadas, isto é

$$[x_1, x_2, x_3]_\lambda \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 \in [\inf G_\lambda, \sup G_\lambda], x_2 = f_y(x_1) \text{ e } x_3 = f_z(x_1), \quad (3.18)$$

controlando o número de elementos em cada partição e gerando a malha.

Também vale ressaltar a possibilidade de um controle mais refinado da malha, baseado na curvatura, ou seja, em que

$$\Delta x_1 = f\left(\frac{dx_2(x_1)}{dx_1}, \frac{dx_3(x_1)}{dx_1}\right), \quad (3.19)$$

isto é, o passo varia de acordo com a taxa de variação da curva, algo não aplicado neste trabalho.

Obtendo-se, deste modo, o domínio Ω_e discretizado para cada elemento. A direção destes elementos pode ser avaliada por meio dos cossenos diretores, formando estes um vetor unitário na mesma direção do elemento. Este pode ser computado por

$$\hat{l} = l_1 \hat{e}_1 + l_2 \hat{e}_2 + l_3 \hat{e}_3, \quad (3.20)$$

sendo l_i é o cosseno diretor em relação ao eixo $i = 1, 2, 3$, dado por

$$l_i = \frac{x_{i2} - x_{i1}}{L_e}, \quad (3.21)$$

em que o subscrito 1 refere-se ao nó compartilhado com o elemento anterior ao em análise, o subscrito 2 ao compartilhado com o posterior, como mostrado na Fig. 28. L_e diz respeito ao comprimento do elemento, expresso por

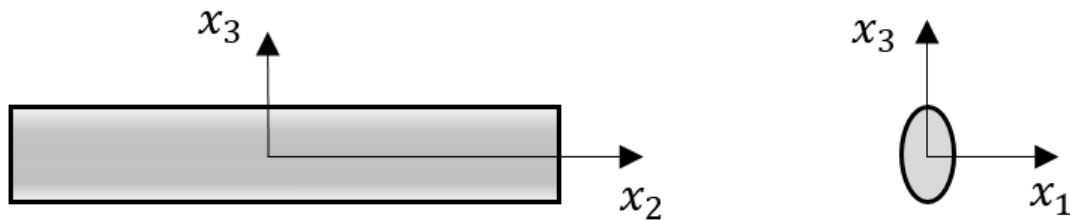
$$L_e = \sqrt{(x_{12} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{21})^2 + (x_{32} - x_{31})^2}. \quad (3.22)$$

Tendo, portanto, os dados necessários para cada elemento Ω_e , podendo descrever suas propriedades em relação ao sistema de coordenadas global partindo de seus cossenos diretores, como será desenvolvido adiante.

3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ E FORÇAS NODAIS

Com a geometria definida, a modelagem matemática da estrutura foi feita considerando as simplificações de uma viga com os graus de liberdade mostrados na Figura 28. A Figura 34, mostra detalhadamente o sistema de coordenadas adotado, considerando carregamentos atuantes nas direções x_1 , x_2 e x_3 e a possibilidade da atuação de torque em torno de x_2 .

Figura 34 – Sistema de coordenadas local e simbologia adotados.



Fonte: Autoria própria (2021).

3.2.1 Análise Cinemática e de Equilíbrio

Para isso, a eq. 3.3 pode ser escrita como

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0, \quad (3.23)$$

para o plano de normal $\hat{e}_1$, valendo de forma análoga para os demais. Considerando a análise em um plano, como descrito na seção 2.2, e integrando ao decorrer da seção transversal, tem-se

$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + F_3 \right) dA + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_A \sigma_{32} dA = 0, \quad (3.24)$$

em que a primeira integral diz respeito aos esforços internos devidos à aplicação de uma carga p que, no caso da viga, a flete e a segunda integral refere-se a força de cisalhamento V_c na seção transversal, ou seja,

$$V_c = \int_A \sigma_{32} dA, \quad (3.25)$$

e

$$q = \int_A \left(\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + F_3 \right) dA, \quad (3.26)$$

assim, reescrevendo a Equação 3.24, chega-se a

$$\frac{\partial V_c}{\partial x_2} + q = 0. \quad (3.27)$$

Da mesma forma, multiplicando-se a Equação 3.23, tomada no plano de norma $\hat{e}_2$ por x_2 e integrando, tem-se

$$\int_A x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 \right) dA + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_A x_3 \sigma_{22} dA = 0, \quad (3.28)$$

em que agora a segunda integral refere-se ao momento fletor na seção transversal, sendo

$$M_1 = - \int_A x_3 \sigma_{22} dA, \quad (3.29)$$

aplicando o teorema da divergência na Equação 3.28 e substituindo a integral do momento, é possível verificar que

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2} + Q = 0. \quad (3.30)$$

Das Equações 3.30 e 3.27 é possível verificar que

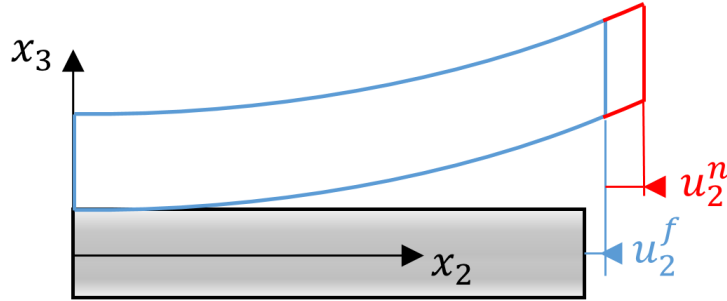
$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_2^2} + q = 0, \quad (3.31)$$

tendo, assim, as equações de equilíbrio adaptadas para uma viga, levando em conta suas devidas simplificações.

A Equação 2.29, apresenta a simplificação para a deformação devido à flexão, por meio da análise cinemática. Vale lembrar que, considerando a presença de

esforços axiais, esta deformação também serão a eles devidas. A Figura 35 ilustra este comportamento.

Figura 35 – Deslocamentos no plano de normal $\hat{e}_2$.



Fonte: Autoria própria (2021).

Desta forma, o deslocamento total pode ser expresso por

$$u_2 = u_2^f + u_2^n, \quad (3.32)$$

com a deformação podendo ser expressa por

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_2^n - x_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \psi \right) \right), \quad (3.33)$$

considerando uma viga de Timoshenko, devido à geometria em estudo. Pela Eq. Equação 2.33, tem-se

$$\sigma_{22} = C_{22kl} \varepsilon_{kl}. \quad (3.34)$$

Substituindo a Equação 3.34 na Equação 3.29 e considerando um material isotrópico, devido aos fatores apontados na seção 2.3, tem-se

$$\begin{aligned} -M_1 = & \int_A x_3 C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dA + \int_A x_3 C_{12} \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} dA - \int_A x_3^2 C_{12} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) dA \\ & + \int_A x_3 C_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dA, \end{aligned} \quad (3.35)$$

em que a primeira integral diz respeito à deformação ε_{11} , a segunda e terceira à ε_{22} e a quarta à ε_{33} . Tomando o sistema de coordenadas local solidário aos eixos principais de inércia, é possível afirmar que

$$\int_A x_3 dA = 0, \quad (3.36)$$

e

$$I_3 = \int_A x_3^2 dA, \quad (3.37)$$

o que torna as duas primeiras integrais iguais a zero e, considerando uma parede fina em relação ao comprimento do osso, é razoável afirmar que

$$\int_A x_3 C_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dA \approx 0, \quad (3.38)$$

sendo o momento expresso por

$$M_1 = C_{12} I_3 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right), \quad (3.39)$$

aproximando que causas diferentes possuem efeitos diferentes que podem ser sobrepostos e que o módulo de elasticidade é constante ao decorrer da seção transversal. Das Equações 3.31 e 3.39 chega-se a

$$C_{12} I_3 \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \frac{\partial \psi^3}{\partial x_2^3} \right) - p = 0. \quad (3.40)$$

De forma análoga, tomando o plano de normal $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$ é possível encontrar as equações cinemáticas para a viga, de forma que

$$M_2 = \int_A (\sigma_{21} x_3 - \sigma_{21} x_1) dA, \quad (3.41)$$

$$M_3 = \int_A x_1 \sigma_{22} dA, \quad (3.42)$$

isto é, o equilíbrio da viga em relação ao momento é dado pelas Equações 3.29, 3.42 e 3.41. Além disso, pelas equações de equilíbrio é possível verificar que, analisando os efeitos das solicitações axiais separadamente,

$$N_t = \int_A \sigma_{22} dA, \quad (3.43)$$

no qual N_t diz respeito à tração agindo no elemento de área em análise. E, por fim,

$$V_c = \int_A \sigma_{12} dA, \quad (3.44)$$

sendo 6 as equações diferenciais que descrevem o comportamento mecânico da viga desenvolvidas por meio do processo acima a partir do equilíbrio tomado em planos, chegando-se a

$$EA \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} - f_{x_2} = 0, \quad (3.45)$$

$$K_s GA \left(\frac{d^2 u_3}{dx_2^2} - \frac{d\theta_1}{dx_2} \right) - f_{x_3} = 0, \quad (3.46)$$

$$K_s GA \left(\frac{d^2 u_1}{dx_2^2} + \frac{d\theta_3}{dx_2} \right) - f_{x_1} = 0, \quad (3.47)$$

$$EI_1 \frac{d^2 \theta_1}{dx_2^2} - K_s GA \left(\frac{du_3}{dx_2} - \theta_1 \right) - f_{x_3} = 0, \quad (3.48)$$

$$EI_3 \frac{d^2 \theta_3}{dx_2^2} - K_s GA \left(\frac{du_1}{dx_2} - \theta_3 \right) - f_{x_1} = 0, \quad (3.49)$$

$$K_s G(I_3 + I_1) \frac{d^2 \theta_2}{dx_2^2} + T_2 = 0, \quad (3.50)$$

sendo estas as formas fortes que descrevem o problema. Vale ressaltar que, para o momento e esforço cisalhante as formas fortes são expressas pelas equações diferenciais 3.31 e 3.30, com as equações logo acima sendo desenvolvidas por manipulações matemáticas munidas das simplificações já citadas. Portanto o problema pode ser descrito como

$$\text{Encontre } \tilde{u} \text{ e } \tilde{\theta} \in \mathbf{R}^3 \mid \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0, \tilde{u}(L) = \tilde{u}_l \text{ e } \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}(L) = \tilde{\theta}_l, \quad (3.51)$$

em que $\tilde{u}$ e $\tilde{\theta}$ são vetores do $\mathbf{R}^3$. A derivação das formas fortes pode ser feita por meio dos métodos descritos na seção 2.5, tanto desenvolvendo as equações diferenciais aproximando funções teste, como por meio do balanço de energia dado pela Equação 2.70.

Neste trabalho, em sua maioria, as formas discretizadas foram obtidas por meio da técnica de resíduos ponderados de Galerkin, valendo-se de uma formulação isoparamétrica e resolvendo as equações para as componentes normais, transversais e para as rotações. As formulações foram feitas considerando elementos com dois nós, porém com funções de forma clássicas e interligadas, que consideram a interdependências dos esforços.

3.2.2 Rigidez ao Deslocamento Axial

Para a resolução da equação diferencial 3.45, considera-se uma função $w \in V$, tal que

$$V = \{w \mid w(0) = 0\}, \quad (3.52)$$

e $u \in S$, em que

$$S = \{u \mid u(0) = u_0\}, \quad (3.53)$$

em que os espaços funcionais S e V são de dimensão infinita, como já explicado.

Assim, multiplicando-se a Equação 3.45 pela função teste e integrando sobre o domínio Ω , tem-se

$$\int_{\Omega} wEA \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} d\Omega - \int_{\Omega} wA f_2 d\Omega = 0, \quad (3.54)$$

em que, integrando por partes, chega-se a forma fraca

$$\int_{\Omega} w_{,x_2} EA \frac{du_2}{dx_2} d\Omega = \int_{\Omega} w A f_2 d\Omega + w(L^e) t A. \quad (3.55)$$

A resolução da forma fraca, procede-se então reduzindo os espaços funcionais à espaços de Hilbert, atendendo às condições 2.60 e 2.61, tendo

$$\int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h EA \frac{du_2^h}{dx_2} d\Omega^e = \int_{\Omega^e} w^h A f_2 d\Omega^e + w^h(L^e) t A. \quad (3.56)$$

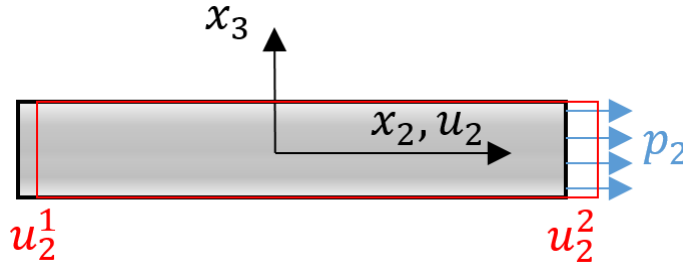
Assim, as funções que atendem esses requisitos para o problema bem posto podem ser expressas por

$$u_{2_e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) d_e^A, \quad (3.57)$$

$$w_e^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A, \quad (3.58)$$

em que e representa a partição Ω^e do domínio, A o nó do elemento, numerado de acordo com o grau de liberdade local indo de um até o número de nós no elemento que, no caso, são dois. A Fig. 37 mostra a representação desse comportamento.

Figura 36 – Representação do comportamento axial.



Fonte: Autoria própria (2021).

As funções de forma $N_n^A(x_2(\xi))$ foram tomadas como polinômios de Lagrange sem considerar outras influências, e conforme (LUO, 2008), considerando os efeitos da acoplagem das equações diferenciais que aproximam o comportamento da viga. A obtenção dessas chamadas funções de forma consistentes pode ser feita por meio da substituição dos polinômios nas EDOs de equilíbrio e a sua resolução parcial. Assim, as funções de forma consistentes são

$$N_n^1(\xi) = 1 - \xi, \quad (3.59)$$

$$N_n^2(\xi) = \xi, \quad (3.60)$$

sendo o mapeamento do domínio físico para o bi-unitário dado por

$$\xi(x_2) = \frac{x_2}{L^e}. \quad (3.61)$$

Neste caso, utilizou-se o método de Bubnov-Galerkin no qual as funções de forma testes são iguais a função a ser encontrada. Assim, a forma fraca, portanto, é escrita da forma

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A \right) EA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) d_e^A \right) d\xi = \\ \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A \right) A f_2 d\xi + \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A \right) (L^e) t A, \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que a primeira integral representa a rigidez axial e as integrais após a igualdade representam as forças nodais. Essa expressão pode ser escrita na forma matricial-vetorial, sendo

$$c^T k d = c^T f_n^e, \quad (3.63)$$

ou seja,

$$[k_{axial}] \{d\} = \{f_n^e\}. \quad (3.64)$$

Sendo, para ambas funções de forma, a matriz de rigidez expressa por

$$k_{axial} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L^e} & -\frac{EA}{L^e} \\ -\frac{EA}{L^e} & \frac{EA}{L^e} \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Vale ressaltar que para a obtenção dessas expressões, considerou-se que a área e o módulo de elasticidade são constantes ao decorrer do elemento. Para isso, foi considerado o valor médio da área em um elemento.

O vetor de força, para um carregamento normal distribuído ao decorrer do elemento, é dado por

$$f_n^e = \begin{bmatrix} -\frac{p_x L^e}{2} \\ -\frac{p_x L^e}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Deste modo, a equação diferencial axial se reduz à forma matricial-vetorial acima, onde d são os graus de liberdade que, devido às funções de forma, retornam os deslocamentos nessa direção.

3.2.3 Rigidez à Flexão no Plano de Normal $\hat{e}_1$

As Equações 3.46 e 3.48 podem ser solucionadas de forma semelhante. Assim, para a primeira, seguindo o processo descrito para os graus de liberdade axiais, chega-se às formas fracas

$$\int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \frac{d^2 u_3}{dx_2^2} d\Omega - \int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \frac{d\theta_1}{dx_2} d\Omega = \int_{\Omega} w f_2 d\Omega + w \bar{m}|_{\Gamma_m^{\hat{e}_1}} + w \bar{v}|_{\Gamma_v^{\hat{e}_1}}, \quad (3.67)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_{,x_2} EI_1 \frac{d^2 \theta_1}{dx_2^2} d\Omega - \int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \frac{du_3}{dx_2} d\Omega + \int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \theta_1 d\Omega = \int_{\Omega} w A f_2 d\Omega \\ + w \frac{d\theta_1}{dx_2} \Big|_{\Gamma_v^{\partial 1}} - w \hat{v} \Big|_{\Gamma_v^{\partial 1}} + w u_{30} \Big|_{\Gamma_u^{\partial 1}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Novamente, limita-se o espaço funcional à espaços de Hilbert por meio das condições 2.60 e 2.61, sendo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \frac{d^2 u_3^h}{dx_2^2} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \frac{d\theta_1^h}{dx_2} d\Omega^e = \int_{\Omega^e} w^h f_2 d\Omega^e + w^h \bar{m} \Big|_{\Gamma_m^{\partial 1}} \\ + w^h \bar{v} \Big|_{\Gamma_v^{\partial 1}}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h EI_1 \frac{d^2 \theta_1^h}{dx_2^2} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \frac{du_3^h}{dx_2} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \theta_1^h d\Omega^e = \\ \int_{\Omega^e} w^h A f_2 d\Omega^e + w^h \frac{d\theta_1}{dx_2} \Big|_{\Gamma_v^{\partial 1}} - w^h \hat{v} \Big|_{\Gamma_v^{\partial 1}} + w^h u_{30} \Big|_{\Gamma_u^{\partial 1}}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

lembrando que θ_1 , de forma geral, matematicamente, possui as mesmas características de u_3 , seguindo seus mesmos passos de resolução. Foram tomadas as funções da forma

$$u_{3_e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{f1}^A(x_2(\xi)) d_e^A, \quad (3.71)$$

$$\theta_{1_e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A, \quad (3.72)$$

$$w_e^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A, \quad (3.73)$$

em que d_e^A representa os graus de liberdade de deslocamento, no caso, u_3 nos nós 1 e 2 e $d_{\theta_e}^A$ os graus de liberdade relacionados à rotação.

As funções de forma, desconsiderando a interdependência da rotação e do deslocamento axial, foram tomadas como polinômios de Lagrange da forma

$$N_{f1}^1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi), \quad (3.74)$$

$$N_{f1}^2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi), \quad (3.75)$$

$$N_{v1}^1 = \frac{L^e}{8}(1 - \xi)^2(2 + \xi), \quad (3.76)$$

$$N_{v1}^2 = \frac{L^e}{8}(1 + \xi)^2(2 - \xi), \quad (3.77)$$

com as respectivas funções de forma para as de teste e lembrando que o mapeamento entre os domínios não se altera em relação à análise axial. O elemento gerado por essas funções de forma foi denominado EI1.

Ao considerar a correlação entre esses graus de liberdade, as funções consistentes podem ser escritas como

$$u_{3e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{f1u}^A(x_2(\xi))d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1u}^A(x_2(\xi))d_{\theta_e}^A, \quad (3.78)$$

$$\theta_{1e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{f1v}^A(x_2(\xi))d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1v}^A(x_2(\xi))d_{\theta_e}^A, \quad (3.79)$$

sendo este elemento denominado de EI2, em que, para o deslocamento transversal u_3 , tem-se

$$N_{f1u}^1 = \beta_{\hat{e}_1}(2\xi^3 - 3\xi^2 + \alpha_{\hat{e}_1}\xi + 1 - \alpha_{\hat{e}_1}), \quad (3.80)$$

$$N_{f1u}^2 = \beta_{\hat{e}_1}(-2\xi^3 + 3\xi^2 - \alpha_{\hat{e}_1}\xi), \quad (3.81)$$

$$N_{v1u}^1 = L^e \beta_{\hat{e}_1} \left[\xi^3 + \left(\frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_1} - 2 \right) \xi^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_1} \right) \xi \right], \quad (3.82)$$

$$N_{v1u}^2 = L^e \beta_{\hat{e}_1} \left[\xi^3 - \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_1} \right) \xi^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_1} \right) \xi \right], \quad (3.83)$$

e, para a rotação θ_1 ,

$$N_{f1v}^1 = \frac{6\beta_{\hat{e}_1}}{L^e}(\xi^2 - \xi), \quad (3.84)$$

$$N_{f1v}^2 = \frac{6\beta_{\hat{e}_1}}{L^e}(-\xi^2 + \xi), \quad (3.85)$$

$$N_{v1v}^1 = \beta_{\hat{e}_1} [3\xi^2 + (\alpha_{\hat{e}_1} - 4)\xi + 1 - \alpha_{\hat{e}_1}], \quad (3.86)$$

$$N_{v1v}^2 = \beta_{\hat{e}_1} [3\xi^2 - (\alpha_{\hat{e}_1} + 2)\xi], \quad (3.87)$$

em que os parâmetros $\alpha_{\hat{e}_1}$ e $\beta_{\hat{e}_1}$ carregam propriedades geométricas, em relação ao plano de normal $\hat{e}_1$, e do material, expressos por

$$\alpha_{\hat{e}_1} = \frac{12EI_1}{K_s GA(L^e)^2}, \quad (3.88)$$

e

$$\beta_{\hat{e}_1} = \frac{1}{1 - \alpha_{\hat{e}_1}}. \quad (3.89)$$

Assim, as equações 3.69 e 3.70 tornam-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f1}^A(\xi) d_e^A \right) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{v1}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) f_2 d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) EI_1 \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{v1}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f1}^A(\xi) d_e^A \right) d\xi \\
 & + \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{v1}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) A f_2 d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

para o caso em que as funções de interpolação são desacopladas e

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f1_u}^A(x_2(\xi)) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1_u}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f1_v}^A(x_2(\xi)) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1_v}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) f_2 d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) EI_1 \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f1_v}^A(x_2(\xi)) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1_v}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f1_u}^A(x_2(\xi)) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1_u}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & + \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f1_v}^A(x_2(\xi)) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v1_v}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
 & = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) A f_2 d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

para o caso em que funções de forma consistentes são consideradas. Lembrando que, nesta análise, pré-carregamentos ou pré-tensões e tensões internas inerentes ao osso foram desconsideradas, daí a negligência dos termos referentes às deformações e tensões iniciais.

As equações acima podem, então, ser representadas na forma matricial-vetorial

$$[k_{flexao_{\hat{e}_1}}]\{d_f\} = \{f_{f1}^e\}, \quad (3.94)$$

na qual d_f é um vetor do $\mathbf{R}^4$ da forma $[u_3^1, \theta_1^1, u_3^2, \theta_1^2]^T$, com dois nós e dois graus de liberdade em cada um. A matriz de rigidez obtida é dada por

$$k_{flexao_{\hat{e}_1}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Para o primeiro caso, os coeficientes da matriz de rigidez são dados por

$$k_{1,1} = -k_{1,3} = \frac{12EI_1}{(1 + \psi_1)(L^e)^3}, \quad (3.96)$$

$$k_{1,2} = k_{1,4} = \frac{6EI_1}{(1 + \psi_1)(L^e)^2}, \quad (3.97)$$

$$k_{2,2} = \frac{(4 + \psi_1)EI_1}{L^e(1 + \psi_1)}, \quad (3.98)$$

$$k_{2,3} = -\frac{6EI_1}{(1 + \psi_1)(L^e)^2}, \quad (3.99)$$

$$k_{2,4} = \frac{(2 - \psi_1)EI_1}{L^e(1 + \psi_1)}, \quad (3.100)$$

$$k_{3,3} = \frac{12EI_1}{(1 + \psi_1)(L^e)^3}, \quad (3.101)$$

$$k_{3,4} = -\frac{6EI_1}{(1 + \psi_1)(L^e)^2}, \quad (3.102)$$

$$k_{4,4} = \frac{(4 + \psi_1)EI_1}{L^e(1 + \psi_1)}, \quad (3.103)$$

em que ψ_1 é dado por

$$\psi_1 = \frac{12EI_1}{K_s GA(L^e)^2}. \quad (3.104)$$

Já para o segundo, estes são expressos por

$$k_{1,1} = -k_{1,3} = \frac{12K_s GAEI_1(12EI_1 + K_s GA(L^e)^2)}{L^e(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.105)$$

$$k_{1,2} = k_{1,4} = \frac{6K_s GAEI_1(12EI_1 + K_s GA(L^e)^2)}{(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.106)$$

$$k_{2,2} = \frac{4EI_1[(K_s GA)^2(L^e)^4 + 3K_s GA(L_e)^2EI_1 + 36EI_1^2]}{L^e(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.107)$$

$$k_{2,3} = -\frac{6K_s GAEI_1(12EI_1 + K_s GA(L^e)^2)}{(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.108)$$

$$k_{2,4} = \frac{-2EI_1[-(K_s GA)^2(L^e)^4 - 30K_s GA(L_e)^2EI_1 + 72(EI_1)^2]}{L^e(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.109)$$

$$k_{3,3} = \frac{12K_s GAEI_1(12EI_1 + K_s GA(L^e)^2)}{L^e(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.110)$$

$$k_{3,4} = -\frac{6K_s GAEI_1(12EI_1 + K_s GA(L^e)^2)}{(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.111)$$

$$k_{4,4} = \frac{4EI_1[(K_s GA)^2(L^e)^4 + 3K_s GA(L_e)^2EI_1 + 36EI_1^2]}{L^e(12EI_1 - K_s GA(L^e)^2)^2}, \quad (3.112)$$

ressaltando que k é positiva definida e simétrica, ou seja,

$$k_{ij} = k_{ji}. \quad (3.113)$$

Para as integrais que representam os esforços atuantes, considerando um carregamento distribuído da forma

$$f_2(\xi) = q_{11}(1 - \xi) + q_{12}\xi, \quad (3.114)$$

tem-se

$$f_{f1}^e = \begin{bmatrix} \frac{7q_{11}^e + 3q_{12}^2}{20} L^e \\ \left(\frac{q_{11}^e}{20} + \frac{q_{12}^e}{20} \right) L^{e2} \\ \frac{3q_{11}^e + 7q_{12}^2}{20} L^e \\ - \left(\frac{q_{11}^e}{20} + \frac{q_{12}^e}{20} \right) L^{e2} \end{bmatrix}, \quad (3.115)$$

sendo, portanto, definido o comportamento do osso à flexão no plano de normal $\hat{e}_1$. Lembrando que, para a presente análise, considera-se que o osso possui rigidez e inércia suficientes para evitar as tensões σ_{11} e σ_{33} ligadas diretamente à flexão e que, no plano em estudo, a tensão σ_{22} pode ser modelada como uma função linear da distância entre o ponto de análise e a linha neutra.

3.2.4 Rigidez à Flexão no Plano de Normal $\hat{e}_3$

As equações 3.47 e 3.49 podem ser solucionadas igual à descrita na seção anterior, tendo as equações a mesma configuração por descreverem o mesmo comportamento. Assim, para a primeira, seguindo este processo, chega-se às formas fracas

$$\int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \frac{d^2 u_1}{dx_2^2} d\Omega - \int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \frac{d\theta_3}{dx_2} d\Omega = \int_{\Omega} w f_2 d\Omega + w\bar{m}|_{\Gamma_m^{\hat{e}_3}} + w\bar{v}|_{\Gamma_v^{\hat{e}_3}}, \quad (3.116)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_{,x_2} EI_1 \frac{d^2 \theta_3}{dx_2^2} d\Omega - \int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \frac{du_1}{dx_2} d\Omega + \int_{\Omega} w_{,x_2} K_s GA \theta_3 d\Omega = \int_{\Omega} w A f_1 d\Omega \\ + w \frac{d\theta_3}{dx_2} \Big|_{\Gamma_v^{\hat{e}_3}} - w\hat{v} \Big|_{\Gamma_v^{\hat{e}_3}} + w u_{10} \Big|_{\Gamma_u^{\hat{e}_3}}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Limitando-se o espaço funcional à espaços de Hilbert por meio das condições 2.60 e 2.61, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \frac{d^2 u_1^h}{dx_2^2} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \frac{d\theta_3^h}{dx_2} d\Omega^e = \int_{\Omega^e} w^h f_1 d\Omega^e + w^h \bar{m} \Big|_{\Gamma_m^{\hat{e}_3}} \\ + w^h \bar{v} \Big|_{\Gamma_v^{\hat{e}_3}}, \end{aligned} \quad (3.118)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h EI_1 \frac{d^2 \theta_1^h}{dx_2^2} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \frac{du_3^h}{dx_2} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h K_s GA \theta_1^h d\Omega^e = \int_{\Omega^e} w^h A f_2 d\Omega^e \\ + w^h \frac{d\theta_1}{dx_2} \Big|_{\Gamma_v^{\hat{e}_1}} - w^h \hat{v} \Big|_{\Gamma_v^{\hat{e}_1}} + w^h u_{30} \Big|_{\Gamma_u^{\hat{e}_1}}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

em que as funções de forma são representadas por

$$u_{1e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{f3}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A, \quad (3.120)$$

$$\theta_{3e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3}^A(x_2(\xi)) d_{\theta_e}^A, \quad (3.121)$$

$$w_e^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A, \quad (3.122)$$

no qual $d_{\theta_e}^A$, neste caso representa os graus de liberdade relativos a u_1 nos nós 1 e 2 e $d_{\theta_e}^A$ os graus de liberdade relacionados à θ_3 .

As funções de forma tomadas para este caso são similares às da seção anterior, ou seja,

$$N_{f3}^1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi), \quad (3.123)$$

$$N_{f3}^2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi), \quad (3.124)$$

$$N_{v3}^1 = \frac{L^e}{8}(1 - \xi)^2(2 + \xi), \quad (3.125)$$

$$N_{v3}^2 = \frac{L^e}{8}(1 + \xi)^2(2 - \xi), \quad (3.126)$$

com o mapeamento entre o domínio físico e o bi-unitário sendo também semelhante.

No segundo caso, as funções consistentes são equivalentes, com a mudança dos fatores $\alpha_{\hat{e}_1}$ e $\beta_{\hat{e}_1}$, de forma que

$$u_{1_e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{f3_u}^A(x_2(\xi))d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3_u}^A(x_2(\xi))d_{\theta_e}^A, \quad (3.127)$$

$$\theta_{3_e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_{f3_v}^A(x_2(\xi))d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3_v}^A(x_2(\xi))d_{\theta_e}^A, \quad (3.128)$$

em que, para o deslocamento transversal u_1 , tem-se

$$N_{f3_u}^1 = \beta_{\hat{e}_3}(2\xi^3 - 3\xi^2 + \alpha_{\hat{e}_1}\xi + 1 - \alpha_{\hat{e}_3}), \quad (3.129)$$

$$N_{f3_u}^2 = \beta_{\hat{e}_3}(-2\xi^3 + 3\xi^2 - \alpha_{\hat{e}_3}\xi), \quad (3.130)$$

$$N_{v3_u}^1 = L^e \beta_{\hat{e}_3} \left[\xi^3 + \left(\frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_3} - 2 \right) \xi^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_3} \right) \xi \right], \quad (3.131)$$

$$N_{v3_u}^2 = L^e \beta_{\hat{e}_3} \left[\xi^3 - \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_1} \right) \xi^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha_{\hat{e}_3} \right) \xi \right], \quad (3.132)$$

e, para a rotação θ_3 ,

$$N_{f3_v}^1 = \frac{6\beta_{\hat{e}_3}}{L^e}(\xi^2 - \xi), \quad (3.133)$$

$$N_{f3_v}^2 = \frac{6\beta_{\hat{e}_3}}{L^e}(-\xi^2 + \xi), \quad (3.134)$$

$$N_{v3_v}^1 = \beta_{\hat{e}_3} [3\xi^2 + (\alpha_{\hat{e}_3} - 4)\xi + 1 - \alpha_{\hat{e}_3}], \quad (3.135)$$

$$N_{v3_v}^2 = \beta_{\hat{e}_3} [3\xi^2 - (\alpha_{\hat{e}_3} + 2)\xi], \quad (3.136)$$

com os parâmetros $\alpha_{\hat{e}_3}$ e $\beta_{\hat{e}_3}$ carregam propriedades geométricas, agora em relação ao plano de normal $\hat{e}_3$, e do material, expressos por

$$\alpha_{\hat{e}_3} = \frac{12EI_3}{K_s GA (L^e)^2}, \quad (3.137)$$

e

$$\beta_{\hat{e}_3} = \frac{1}{1 - \alpha_{\hat{e}_3}}. \quad (3.138)$$

Assim, as Equações 3.118 e 3.117 tornam-se

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f3}^A(\xi) d_e^A \right) d\xi \\ & - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{v3}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\ & = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) f_1 d\xi, \end{aligned} \quad (3.139)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) EI_3 \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{v3}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\ & - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f3}^A(\xi) d_e^A \right) d\xi \\ & + \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{v3}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\ & = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) A f_2 d\xi, \end{aligned} \quad (3.140)$$

para o caso em que as funções de interpolação são desacopladas e

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f3_u}^A(\xi) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3_u}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\ & - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f3_v}^A(\xi) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3_v}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\ & = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) f_3 d\xi, \end{aligned} \quad (3.141)$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) EI_1 \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f3_v}^A(\xi) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3_v}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
& - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f3_u}^A(\xi) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3_u}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
& + \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) K_s GA \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_{f3_v}^A(\xi) d_e^A + \sum_{A=1}^{Nel} N_{v3_v}^A(\xi) d_{\theta_e}^A \right) d\xi \\
& = \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) c_e^A \right) A f_3 d\xi,
\end{aligned} \tag{3.142}$$

para o caso em que funções de forma consistentes são consideradas.

As equações acima são representadas na forma matricial-vetorial por

$$[k_{flexao_{\hat{e}_3}}] \{d_{f3}\} = \{f_{f3}^e\}, \tag{3.143}$$

na qual d_f é um vetor do $\mathbf{R}^4$ da forma $[u_1^1, \theta_3^1, u_1^2, \theta_3^2]^T$, com dois nós e dois graus de liberdade em cada um. A matriz de rigidez obtida é dada por

$$k_{flexao_{\hat{e}_3}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}. \tag{3.144}$$

Para o primeiro caso, os coeficientes da matriz de rigidez são dados por

$$k_{1,1} = -k_{1,3} = \frac{12EI_3}{(1 + \psi_3)(L^e)^3}, \tag{3.145}$$

$$k_{1,2} = k_{1,4} = \frac{6EI_3}{(1 + \psi_3)(L^e)^2}, \tag{3.146}$$

$$k_{2,2} = \frac{(4 + \psi_3)EI_3}{L^e(1 + \psi_3)}, \tag{3.147}$$

$$k_{2,3} = -\frac{6EI_3}{(1 + \psi_3)(L^e)^2}, \tag{3.148}$$

$$k_{2,4} = \frac{(2 - \psi_3)EI_3}{L^e(1 + \psi_3)}, \tag{3.149}$$

$$k_{3,3} = \frac{12EI_3}{(1 + \psi_3)(L^e)^3}, \tag{3.150}$$

$$k_{3,4} = -\frac{6EI_3}{(1 + \psi_3)(L^e)^2}, \tag{3.151}$$

$$k_{4,4} = \frac{(4 + \psi_3)EI_3}{L^e(1 + \psi_3)}, \quad (3.152)$$

em que ψ_3 é dado por

$$\psi_3 = \frac{12EI_3}{K_sGA(L^e)^2}. \quad (3.153)$$

Já para o segundo, estes são expressos por

$$k_{1,1} = -k_{1,3} = \frac{12K_sGA EI_3(12EI_3 + K_sGA(L^e)^2)}{L^e(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}, \quad (3.154)$$

$$k_{1,2} = k_{1,4} = \frac{6K_sGA EI_3(12EI_3 + K_sGA(L^e)^2)}{(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}, \quad (3.155)$$

$$k_{2,2} = \frac{4EI_3[(K_sGA)^2(L^e)^4 + 3K_sGA(L^e)^2EI_3 + 36EI_3^2]}{L^e(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}, \quad (3.156)$$

$$k_{2,3} = -\frac{6K_sGA EI_3(12EI_3 + K_sGA(L^e)^2)}{(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}, \quad (3.157)$$

$$k_{2,4} = \frac{-2EI_3[-(K_sGA)^2(L^e)^4 - 30K_sGA(L^e)^2EI_3 + 72(EI_3)^2]}{L^e(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}, \quad (3.158)$$

$$k_{3,3} = \frac{12K_sGA EI_3(12EI_3 + K_sGA(L^e)^2)}{L^e(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}, \quad (3.159)$$

$$k_{3,4} = -\frac{6K_sGA EI_3(12EI_3 + K_sGA(L^e)^2)}{(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}, \quad (3.160)$$

$$k_{4,4} = \frac{4EI_3[(K_sGA)^2(L^e)^4 + 3K_sGA(L^e)^2EI_3 + 36EI_3^2]}{L^e(12EI_3 - K_sGA(L^e)^2)^2}. \quad (3.161)$$

Para as integrais que representam os esforços atuantes, considerando um carregamento distribuído da forma

$$f_3(\xi) = q_{31}(1 - \xi) + q_{32}\xi, \quad (3.162)$$

tem-se

$$f_{f3}^e = \begin{bmatrix} \frac{7q_{31}^e + 3q_{32}^e}{20} L^e \\ \left(\frac{q_{31}^e}{20} + \frac{q_{32}^e}{20} \right) L^{e2} \\ \frac{3q_{31}^e + 7q_{32}^e}{20} L^e \\ - \left(\frac{q_{31}^e}{20} + \frac{q_{32}^e}{20} \right) L^{e2} \end{bmatrix}, \quad (3.163)$$

sendo, portanto, definido o comportamento do osso à flexão no plano de normal $\hat{e}_3$. As considerações tomadas para o plano $\hat{e}_3$ valem para essa análise.

3.2.5 Rigidez à Rotação de Torção

Matematicamente, o comportamento do material à torção pode ser modelado de forma semelhante ao comportamento axial, porém com termos que representam as propriedades relacionadas à mudança de ângulo. Desta forma a Eq. 3.50, multiplicada por uma função teste w , integrando sobre o domínio e utilizando a integração por partes, torna-se

$$\int_{\Omega} w_{,x_2}^h K_s G (I_3 + I_1) \frac{d^2 \theta_2}{dx_2^2} d\Omega = \int_{\Omega} w T_2 d\Omega + w G J \theta_0. \quad (3.164)$$

Aplicando as condições 2.60 e 2.61, tem-se

$$\int_{\Omega} w_{,x_2}^h K_s G (I_3 + I_1) \frac{d^2 \theta_2}{dx_2^2} d\Omega = \int_{\Omega} w_{,x_2}^h T_2 d\Omega + w G J \theta_0, \quad (3.165)$$

em que as funções escolhidas que atendem esses requisitos são expressas por

$$\theta_{2e}^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) d_{\theta_{2e}}^A, \quad (3.166)$$

$$w_e^h = \sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A, \quad (3.167)$$

no qual as funções de forma são exatamente iguais às do GDL axial, ou seja,

$$N_n^1(\xi) = 1 - \xi, \quad (3.168)$$

$$N_n^2(\xi) = \xi. \quad (3.169)$$

Neste caso, também utilizou-se o método de Bubnov-Galerkin no qual as funções de forma testes são iguais a função a ser encontrada. Assim, a forma fraca é escrita da forma

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A \right) K_s G (I_3 + I_1) \frac{d}{dx_2} \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(\xi) d_{\theta_{2e}}^A \right) d\xi = \\ \int_{-1}^1 \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A \right) T_2 d\xi + \left(\sum_{A=1}^{Nel} N_n^A(x_2(\xi)) c_e^A \right) G J \theta_0, \end{aligned} \quad (3.170)$$

em que a primeira integral representa a rigidez torcional e as integrais após a igualdade representam as forças nodais. Essa expressão pode ser escrita na forma matricial-vetorial, sendo

$$c^T k_{torcao} d = c^T f_t^e, \quad (3.171)$$

ou seja,

$$[k_{torcao}] \{d\} = \{f_t^e\}. \quad (3.172)$$

Sendo, para ambas funções de forma, a matriz de rigidez expressa por

$$k_{torcao} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L^e} & -\frac{GJ}{L^e} \\ -\frac{GJ}{L^e} & \frac{GJ}{L^e} \end{bmatrix}. \quad (3.173)$$

O vetor de força, para um carregamento torcional da forma

$$T_2(\xi) = m_{21}(1 - \xi) + m_{22}\xi, \quad (3.174)$$

chega-se ao vetor de força

$$f_n^e = \begin{bmatrix} \frac{2m_{21}+m_{22}}{6}L^e \\ \frac{m_{21}+2m_{22}}{6}L^e \end{bmatrix}. \quad (3.175)$$

Lembrando que, novamente, desconsideram-se carregamentos iniciais ou tensões residuais. Pode ser demonstrado que os processos de resolução aqui descritos atendem aos requisitos de um problema bem posto descrito na seção , por meio do Lema de Lax-Milgram nela citado. O erro gerado pelo enfraquecimento da solução e discretização do problema pode ser estimado por meio da norma L^2 da solução, não o feito aqui devido ao desconhecimento da solução exata.

3.3 MONTAGEM DOS ELEMENTOS

A resolução das EDOs de equilíbrio por meio da separação em diferentes causas geram soluções independentes para seus efeitos. Assim, agrupando-as, por meio da união dos domínios dos graus de liberdade na forma

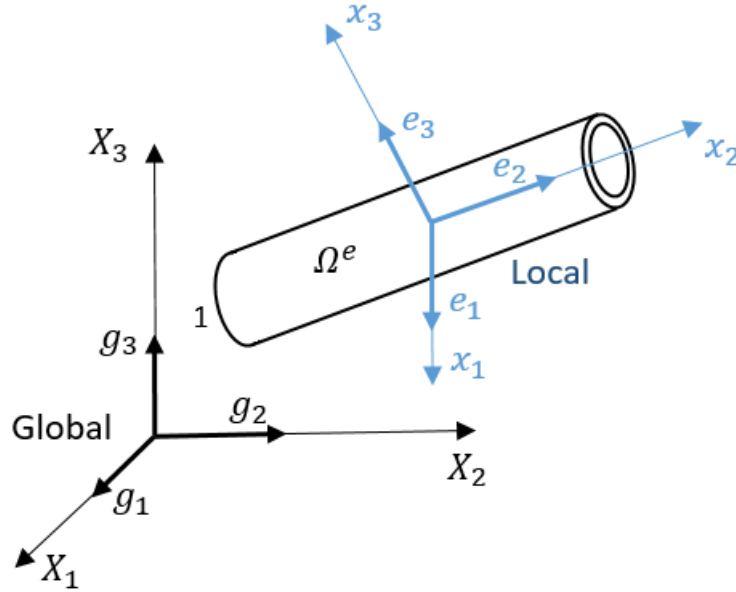
$$d^e = \cup_{i=1}^{ef} d_i^e, \quad (3.176)$$

em que ef representa o número de fenômenos separáveis, no caso, 4. Desta forma, para cada elemento um total de 12 parâmetros ($d^e \in \mathbf{R}^{12}$) devem ser determinados para a descrição do comportamento. Portanto, a forma matricial-vetorial completa fica

$$\begin{bmatrix} [k_{axial}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{flexao_{\hat{e}_1}}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [k_{flexao_{\hat{e}_2}}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k_{torcao}] \end{bmatrix} \{d^e\} = \begin{bmatrix} \{f_{axial}^e\} \\ \{f_{flexao_{\hat{e}_1}}^e\} \\ \{f_{flexao_{\hat{e}_2}}^e\} \\ \{f_{torcao}^e\} \end{bmatrix}. \quad (3.177)$$

A definição e o desenvolvimento desta forma discretizada para cada elemento Ω^e foi feita baseada em um sistema de coordenadas ortonormal local, com a integração por meio do mapeamento do domínio físico ao bi-unitário sendo baseada neste, porém na geometria da costela há a mudança no ângulo de cada elemento, como mostrado anteriormente. Este problema pode ser contornado por meio de uma transformação linear de $\mathbf{R}^{12} \times \mathbf{R}^{12} \rightarrow \mathbf{R}^{12} \times \mathbf{R}^{12}$ que representa a matriz de rotação.

Figura 37 – Sistema de coordenadas local e global com as respectivas bases ortonormais.



Fonte: Autoria própria (2021).

Em relação ao sistema de coordenadas global, o sistema local pode ser escrito como

$$e_1 = e_{11}\hat{g}_1 + e_{12}\hat{g}_2 + e_{13}\hat{g}_3 \quad (3.178)$$

$$e_2 = e_{21}\hat{g}_1 + e_{22}\hat{g}_2 + e_{23}\hat{g}_3 \quad (3.179)$$

$$e_3 = e_{31}\hat{g}_1 + e_{32}\hat{g}_2 + e_{33}\hat{g}_3, \quad (3.180)$$

em que o primeiro subscrito representa a direção em relação ao sistema local e o segundo ao global. Tomando um sistema local com a coordenada $\hat{e}_1$ alinhada ao eixo axial do elemento, esta pode ser expressa pelos ângulos diretores deste, dados pela equação 3.20.

Por meio do produto escalar entre os vetores $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_3$, tem-se

$$e_{31} = \frac{e_{12}}{\sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2}}, \quad e_{32} = -\frac{e_{11}}{\sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2}}, \quad e_{33} = 0, \quad (3.181)$$

e, pelo produto vetorial entre e_2 e e_3 , que resulta em e_1 , chega-se a

$$e_{21} = e_{32}e_{13}, \quad e_{22} = -e_{31}e_{13}, \quad e_{23} = e_{31}e_{12} - e_{32}e_{11}. \quad (3.182)$$

Aplicando estas relações aos deslocamentos tem-se a matriz de transformação

$$T^e = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix}, \quad (3.183)$$

onde T é expresso por

$$T = e_{ij}. \quad (3.184)$$

Assim, em relação ao sistema global, a matriz de rigidez torna-se

$$k_g^e = T^{eT} k^e T^e, \quad (3.185)$$

sendo k_g^e a matriz de rigidez de cada elemento transformada para o sistema de coordenadas global.

Isto posto, para a resolução aproximada do problema completo é necessária a montagem por meio da sobreposição dos elementos. Matematicamente, as equações que representam a forma fraca discretizada em um elemento Ω^e são possuem a garantia da unicidade e existência da solução nos espaços de dimensão finita impostos. Além disso, considerando uma norma energética, utilizando a forma bilinear

$$a(w, u) = \int_{\Omega} w_{,x} E u_{,x} dx, \quad (3.186)$$

ou, na forma de dimensão finita,

$$a(w, w) = \sum_{i,j=1}^n k_{i,j} w_i^h w_j^h, \quad (3.187)$$

é possível demonstrar a propriedade de melhor aproximação para a resolução completa do problema. Isto é, as funções de aproximação são definidas como $w^h \neq 0$ se $x \in \Omega_e$ e $x \neq 0$, o que implica na sobreposição dos graus de liberdade em elementos vizinhos ($\bar{\Omega}^{e1} \cap \bar{\Omega}^{e2} \neq \emptyset$) para a garantia da transferência de energia entre estes e a validade da propriedade de melhor aproximação, que garante que a solução encontrada é aquela de menor norma energética entre todas as pertencentes ao espaço S^h . Desta forma, a título de exemplo, a Eq. 3.56 torna-se

$$\sum_e \int_{\Omega^e} w_{,x_2}^h E A \frac{du_2^h}{dx_2} d\Omega^e = \sum_e \int_{\Omega^e} w^h A f_2 d\Omega^e + w^h(L^e) t A, \quad (3.188)$$

valendo de forma análoga para as demais integrais discretizadas.

Portanto, os graus de liberdade em cada elemento foram organizados na forma

$$d^e = \{u_2^1, u_1^1, u_3^1, \theta_1^1, \theta_2^1, \theta_3^1, u_2^2, u_1^2, u_3^2, \theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2\}^T, \quad (3.189)$$

a fim de facilitar a implementação computacional, onde os 6 primeiros são iguais aos seis últimos do elemento anterior, se este existir, e assim sucessivamente.

Com isto obtém-se os deslocamentos em todos os nós na estrutura segmentada, ressaltando a aplicação das condições de contorno por meio da anulação dos respectivos graus de liberdade, e as condições de carregamento consideradas como fronteiras de Neumann.

3.4 PÓS-PROCESSAMENTO

Todo o sistema foi modelado no *software MATLAB*, obtendo-se os gráficos de deslocamento da estrutura, tanto considerando um costela, para a validação do método, como considerando a estrutura completa, formada pelas costelas, cartilagem costal e esterno.

Desta forma, foi possível comparar graficamente os dados teóricos e experimentais, assim como avaliar aplicações como o processo de recuperação de deformidades do tipo *pectus carinatum* e o processo de reanimação cardiopulmonar.

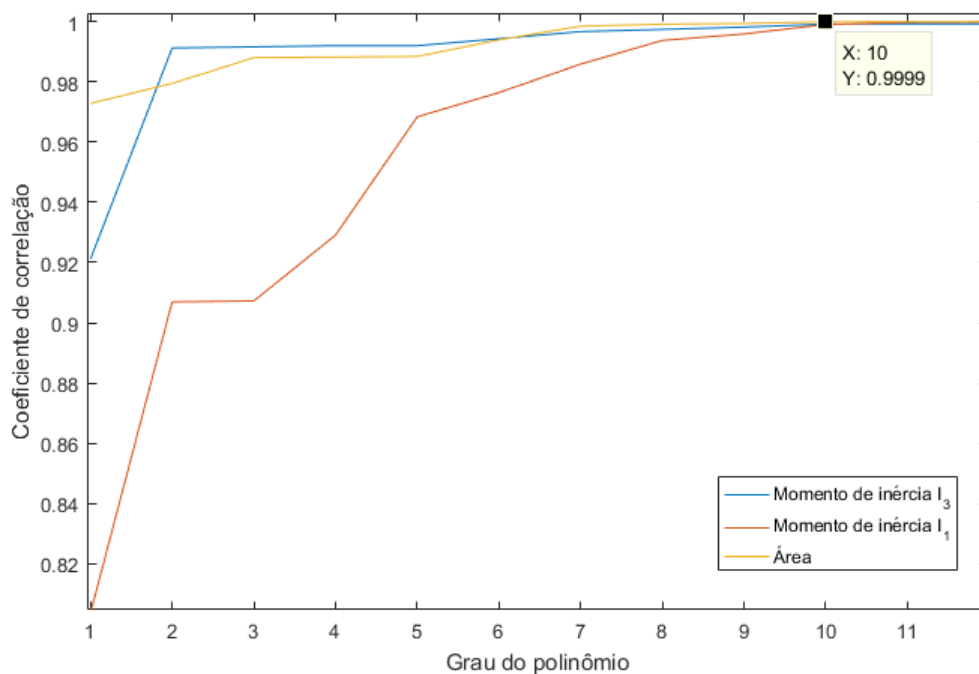
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 VALIDAÇÕES E CONFRONTAÇÕES DE RESULTADOS

4.1.1 Experimento 1

O primeiro teste de validação foi feito de acordo com os experimentos de Schafman (2015) e Agnew et al. (2015). A Figura 38 mostra a variação do coeficiente de correlação para os momentos de inércia I_1 , I_2 e para a área A .

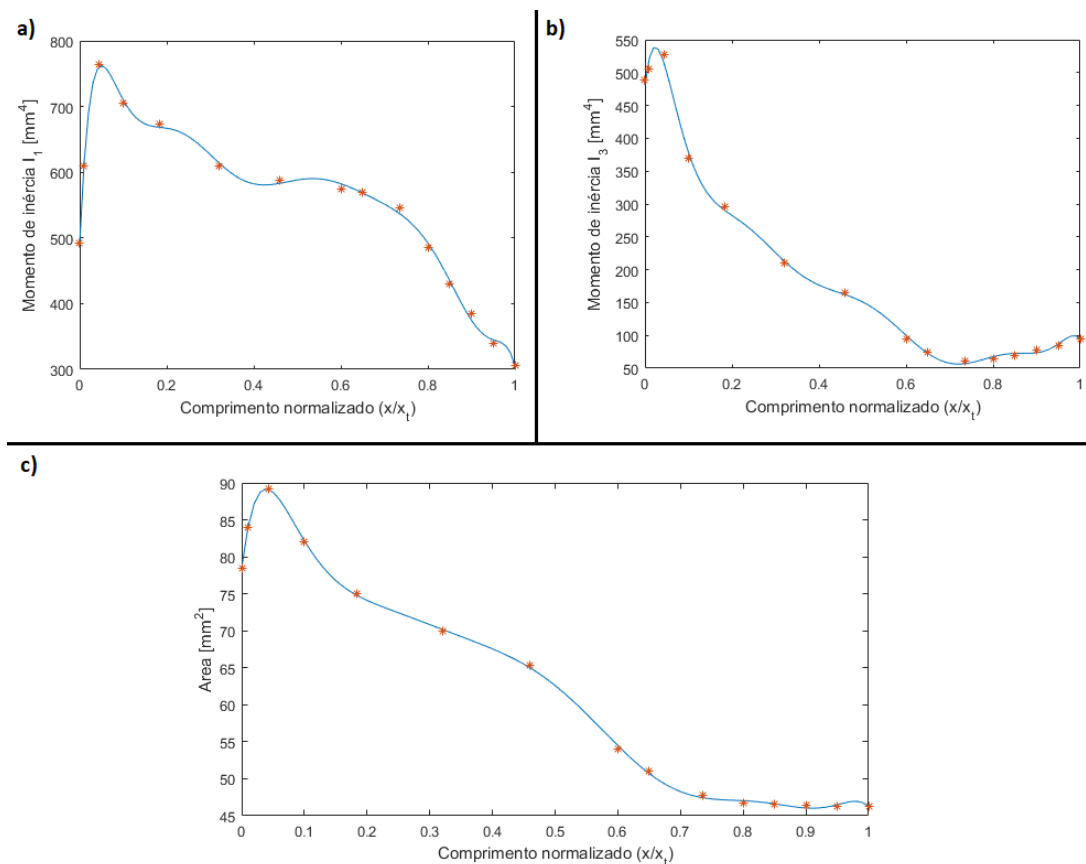
Figura 38 – Coeficientes de correlação.



Fonte: Autoria própria (2021).

Com isso obteve-se, para um polinômio de grau 10, um coeficiente de correlação de 0,9999. A Figura 39 mostra as curvas aproximadas para um $R_{area} = 1$, corrigido este fator para cada costela, onde em vermelho são os dados discretos e em azul a curva contínua aproximada para as propriedades geométricas.

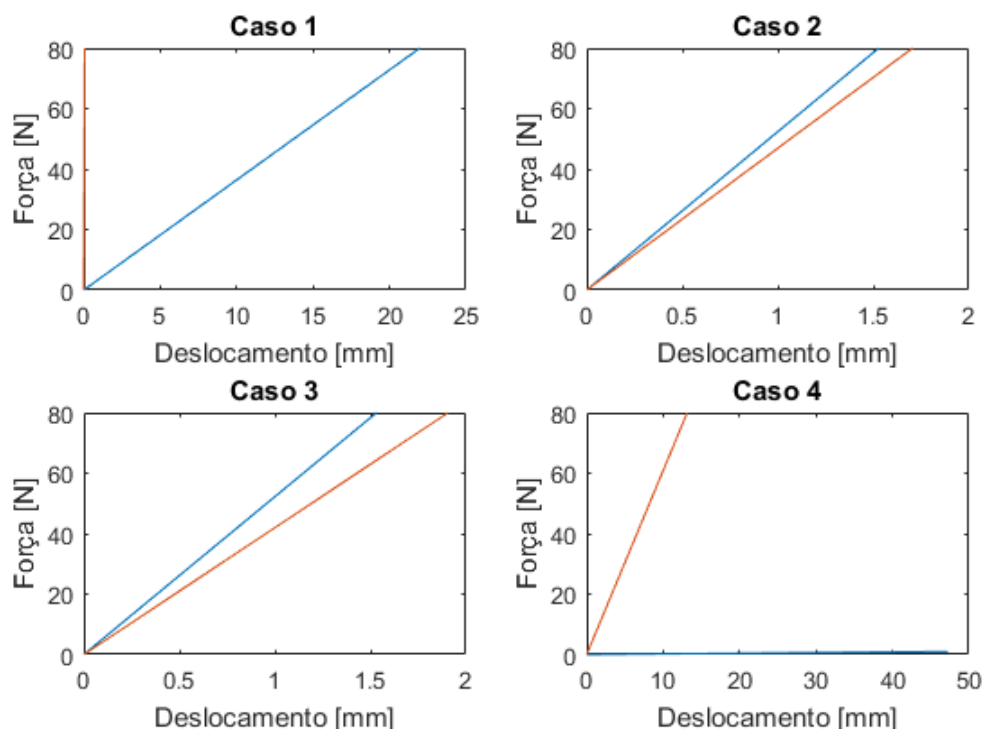
Figura 39 – Momentos de inércia e área em função do comprimento normalizado.



Fonte: Autoria própria (2021).

Nota-se que, como esperado, ao comprimento normalizado aproximar-se de 0 há um substantivo aumento no valor das propriedades geométricas devido à aproximação dos apoios na coluna, havendo uma maior rigidez natural. Desta forma, a Figura 40 mostra as forças e deslocamentos obtidos para as quatro considerações de condições de contorno no experimento realizado por Schafman (2015).

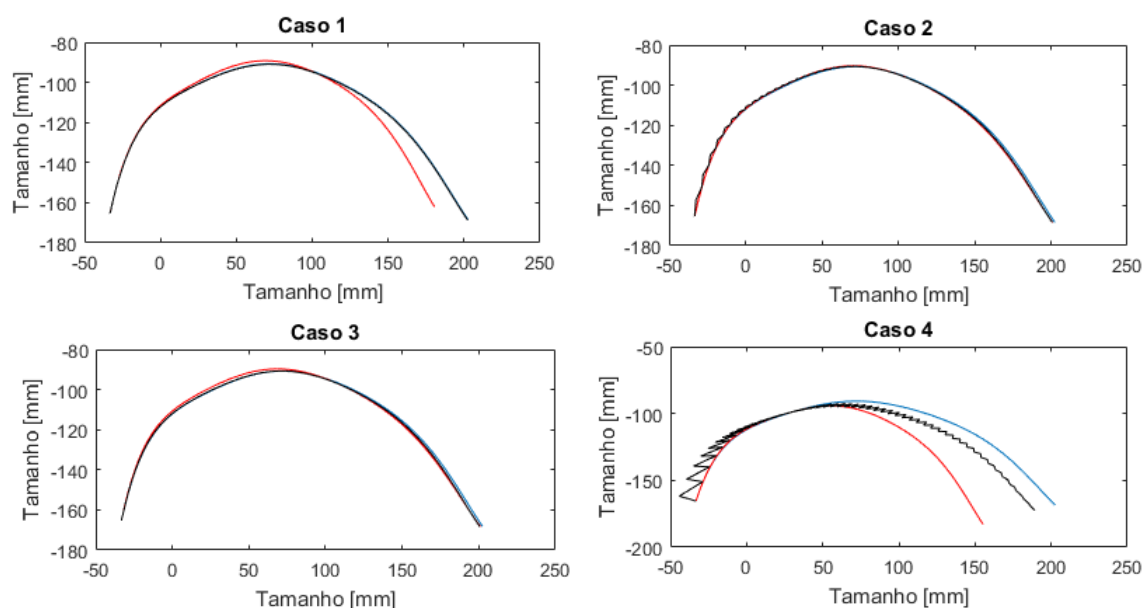
Figura 40 – Resultados teóricos para o corpo de prova Hrb30.



Fonte: Autoria própria (2021).

Considerando as propriedades de Katzenberger et al. (2020) e um $R_{area} = 0.4$, os casos 2 e 3, nos quais o deslocamento em y no apoio em que há a aplicação de uma força externa são restritos, os dois elementos se comportaram de maneira semelhante, porém com uma alta rigidez, em comparação com os dados experimentais. Neste caso, como os ensaios foram feitos em condições de carregamento dinâmicas com altas taxas de deformações, espera-se que nestas situações, devido às respostas viscoelásticas do osso, haja uma mudança significativa na rigidez. No caso 1, os resultados teóricos foram compatíveis com os experimentais para o elemento EI1, porém considerando um deslocamento horizontal no apoio em que há aplicação de força e esta, por sua vez, com duas componentes e sua resultante ortonormal ao apoio que sustenta a costela. Já no caso 4, o elemento EI2 mostrou-se compatível com os dados experimentais para a mesma condição do elemento. A Figura 41 mostra as costelas avaliadas deformadas.

Figura 41 – Resultados teóricos para o corpo de prova Hrb30.



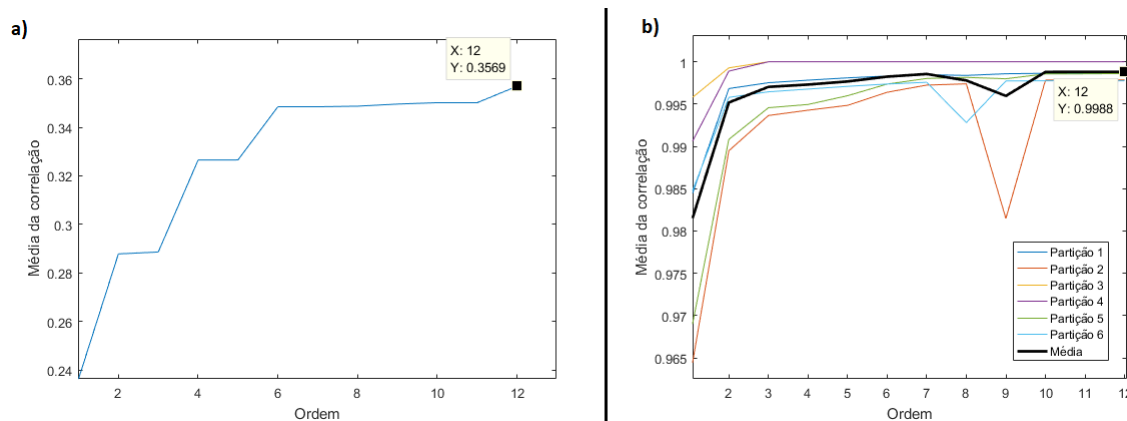
Fonte: Autoria própria (2021).

Observando-se que, para o elemento El2, devido à acoplagem dos graus de liberdade por meio da função de forma, há uma superposição de resultados nos nós, evidenciando a função de forma. Assim, para este experimento os resultados, em sua maioria, não se mostraram compatíveis ($1_u = 0$), algo esperado pelas condições experimentais.

4.1.2 Experimento 2

O segundo teste de validação, por sua vez, foi realizado a partir dos resultados de Kindig et al. (2010). Como neste caso a geometria é tridimensional, o método de partição do domínio foi aplicado a fim de aumentar a correlação, mostrando-se altamente eficiente. A exemplo, a Figura 42 mostra a variação da correlação para a aproximação sem a partição do domínio e com 6 partições, no caso da geração de malha para a costela 5.

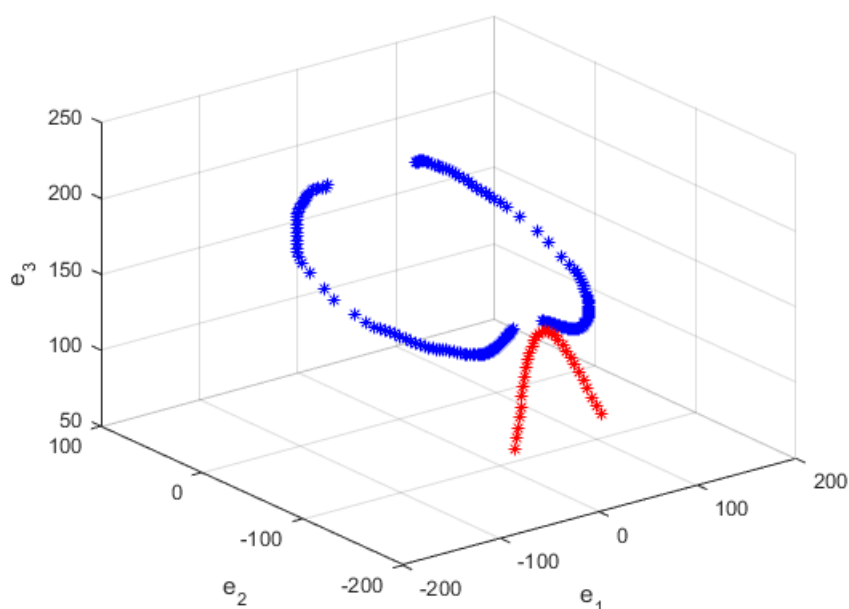
Figura 42 – Coeficientes de correlação para (a) nenhuma partição e (b) 6 partições no domínio.



Fonte: Autoria própria (2021).

Estes resultados mostram que o particionamento aumentou em 180% o coeficiente de correlação, impactando diretamente na geração da malha e imprescindível para a representação adequada da geometria, com a validação do indicador visivelmente possível, mostrada na Figura 43.

Figura 43 – Malhas geradas para a costela 5, em vermelho sem partições e em azul com 6 partições (dimensões em mm).



Fonte: Autoria própria (2021).

A partir da Figura 43 é possível perceber, também, o refinamento da malha nas partes anterior e posterior dos anéis de costela, demonstrando o método de discretização

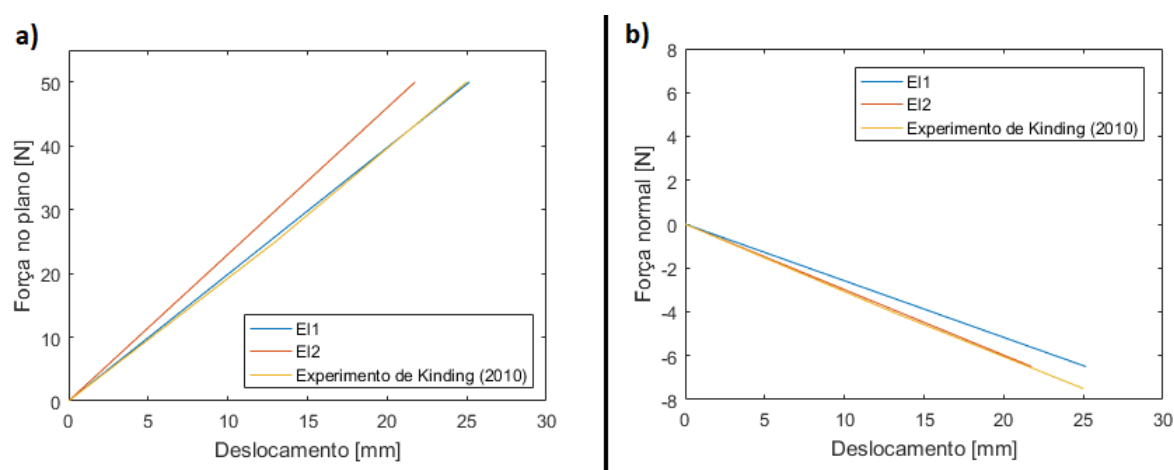
utilizado, detalhado anteriormente. Desta forma, a tabela abaixo mostra os intervalos nos quais a função indicadora igualou-se à um, considerando as propriedades listadas.

Tabela 2 – Função indicadora para as respectivas propriedades.

Trabalho	$\mathbf{1}_u = 1$	$\mathbf{1}_u = 0$
Pezowicz e Glowacki (2012)	-	-
Pezowicz e Glowacki (2012)	$0,06 \leq R_{area} \leq 0,13$	$R_{area} \in \{(0,1] - [0,06;0,13]\}$
Saini, Discher e Kumar (2019)	$0,12 \leq R_{area} \leq 0,15$	$R_{area} \in \{(0,1] - [0,12;0,15]\}$
Velázquez-Ameijide et al. (2020)	-	-
Katzenberger et al. (2019)	-	-

As propriedades de Pezowicz e Glowacki (2012) nas idades de 10-15 anos foram descartadas devido às características da população do experimento em comparação. Para Velázquez-Ameijide et al. (2020) e Katzenberger et al. (2020), o intervalo em que a função indicadora é igual a 1 apresenta um valor superior muito baixo, também sendo desconsiderado. Para as propriedades de Pezowicz e Glowacki (2012) nas idades de 15-22 anos, obteve-se para R_{area} contida no intervalo de 0,06 a 0,13, para Saini, Discher e Kumar (2019), no intervalo de 0,12 a 0,15. Estes resultados são compatíveis com as características das seções transversais da costela mostradas por Murach et al. (2017), Zhu et al. (2017) e, em especial, por Pezowicz e Glowacki (2012), mostrando a solidez dos resultados e compatibilidade das propriedades. Assim, A Figura 45 mostra as forças obtidas para o anel da costela 4, considerando $R_{area} = 0,15$ e $E = 3,85 \text{ GPa}$.

Figura 44 – Forças e deslocamentos obtidos para o anel da costela 4 no (a) plano e (b) na direção normal.

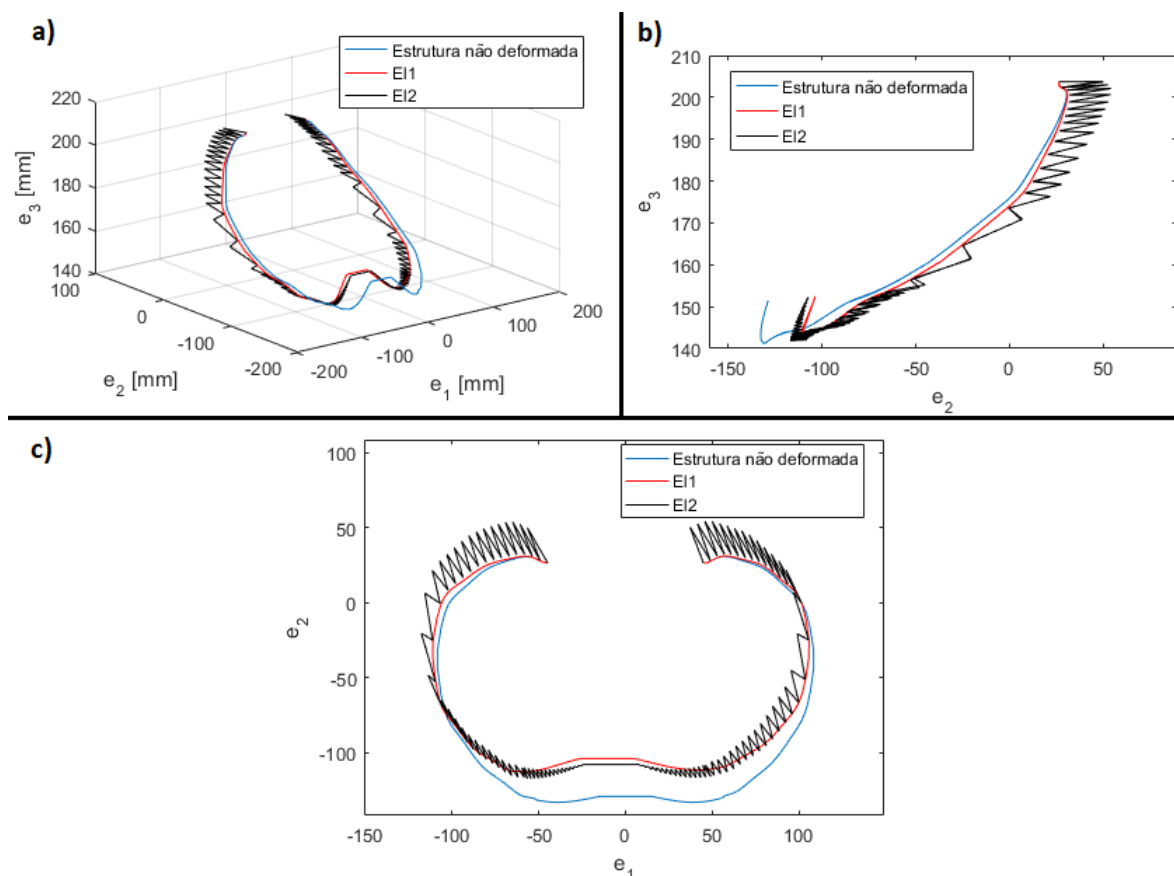


Fonte: Autoria própria (2021).

Nota-se que o elemento EI2 possui uma rigidez maior do que o elemento EI1, ambos apresentando, para o anel mostrado, resultados próximos aos experimentais,

sendo o EI1 mais próximo para a força no plano e o EI2 para a força normal. A Figura 45 mostra os deslocamentos obtidos para a costela 4.

Figura 45 – Deslocamentos do anel da costela 4 em (a) três dimensões, (b) no plano e_2e_3 e (c) no plano e_1e_2 .

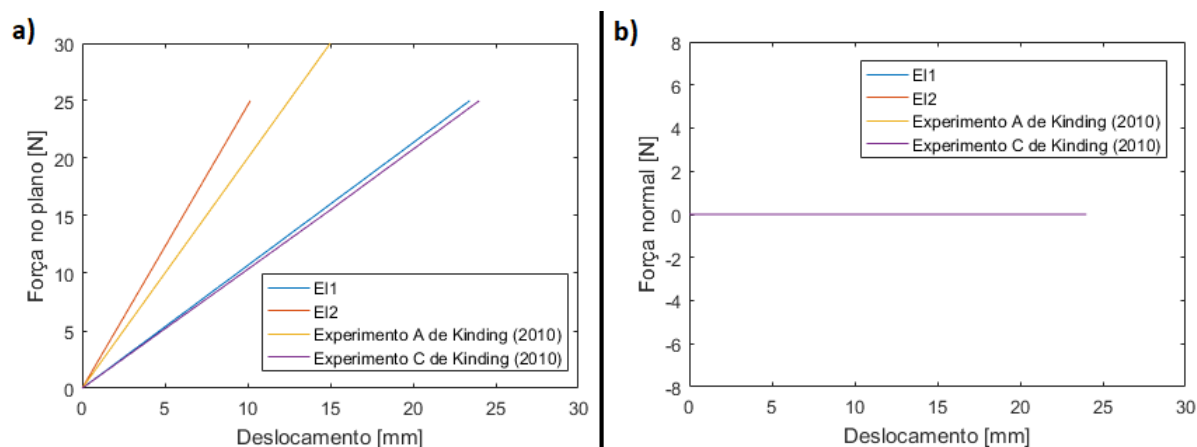


Fonte: Autoria própria (2021).

Nota-se, novamente, as características das funções de forma utilizadas, sendo que as funções de forma consistentes reduzem pela metade os nós com deslocamentos reais devido às suas características. Os deslocamentos também mostram a compatibilidade das suas direções com as encontradas experimentalmente por Kindig et al. (2010).

Para a costela 5 e inferiores os elementos se mostraram mais discrepantes, com o EI2 apresentando uma maior rigidez considerável, porém compatível com medições feitas por Kindig et al. (2010), como mostra a Figura 46.

Figura 46 – Forças e deslocamentos obtidos para o anel da costela 5 no (a) plano e (b) na direção normal.



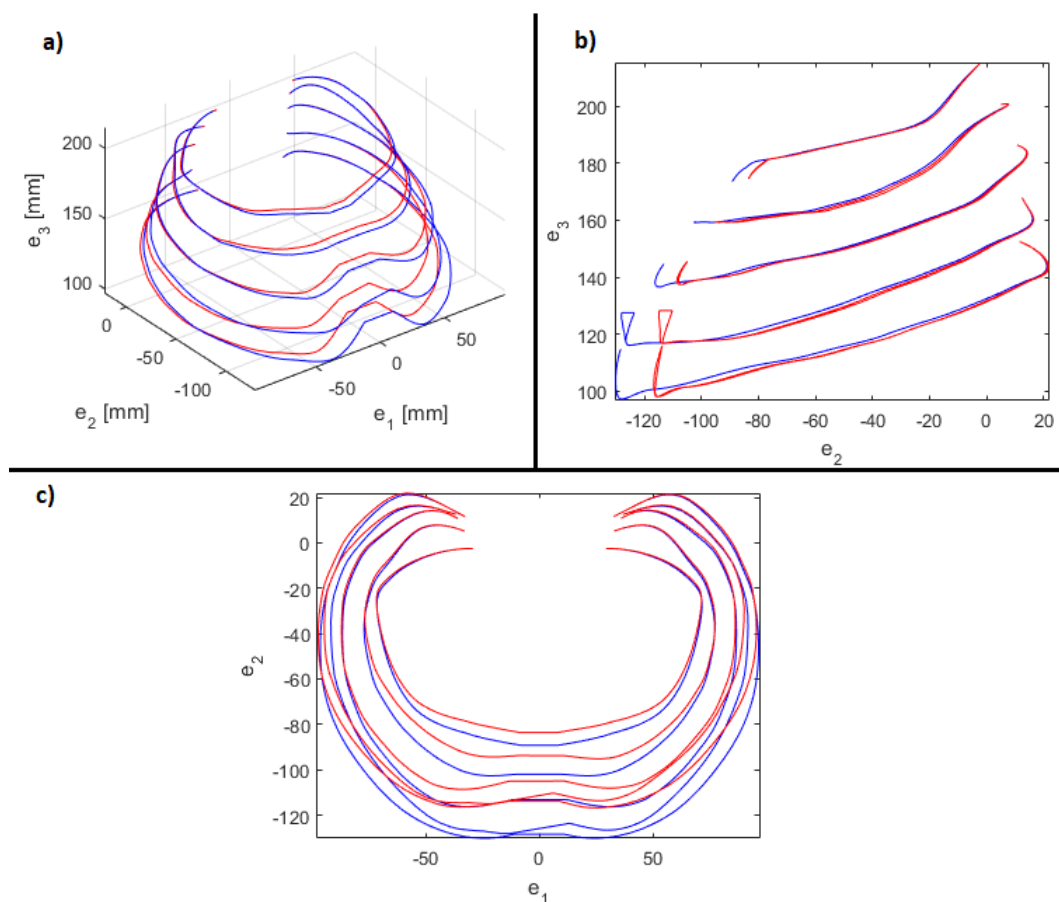
Fonte: Autoria própria (2021).

Desta forma, os resultados mostram que os elementos avaliados são compatíveis com os resultados experimentais para carregamentos quase estáticos.

4.2 ANÁLISE DO PROCESSO DE CORREÇÃO DA DEFORMIDADE DO TIPO *PC*

Na análise do processo de correção de deformidades do tipo *pectus carinatum*, observou-se uma maior influência da elasticidade do osso na deformação total, em comparação com a cartilagem. A Figura 47 mostra a deformação das costelas 2-6 para uma PIC de 60 kPa (aproximadamente 8,7 psi), considerando uma área circular de aplicação de força da órtese CDT, com 40 mm de diâmetro.

Figura 47 – Deslocamentos das costelas 2-6 para a PIC de 60 kPa em: (a) três dimensões; (b) no plano e_2e_3 ; (c) no plano e_1e_2 .



Fonte: Autoria própria (2021).

Os valores para as forças e o deslocamento total encontrados são compatíveis com o estudo quantitativo de Bugajski et al. (2018) e Chen et al. (2018). Nota-se, também, a deformação da área protuberante, que será decisiva no resultado final do tratamento. No caso simulado, em que as costelas 6 e 5 possuem uma pequena protusão, para a força aplicada a simulação mostrou uma deformação aguda nesta protusão, sendo muito afetada (localmente) pela rigidez da cartilagem, mostrando a importância do tratamento precoce, em que tanto esta quanto o osso ainda possuem uma pequena rigidez, aumentando as deformações locais, remodelando de forma mais eficiente a deformidade e reduzindo a PIC.

Desta forma, o método mostra-se promissor para a análise do comportamento da caixa torácica, até em casos complexos como de deformidades do tipo *pectus carinatum*, podendo ainda ser calibrado por meio de dados individuais dos pacientes, obtidos por exames e análises clínicas.

5 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi realizada a avaliação da resposta mecânica da costela humana e da caixa torácica quando solicitada frontalmente, análise importante em diversos aspectos. Para isso, elementos de viga com 6 graus de liberdade em cada nó foram desenvolvidos considerando funções de forma lineares, com dois nós em cada elemento, sem acoplar os efeitos da flexão em dois planos e os acoplando, gerando dois elementos. Nesta modelagem considerou-se o comportamento linear do osso para pequenas deformações, assim como a cartilagem, o modelando como um material de seção transversal vazada, possibilidade observada na bibliografia, e considerando a hipótese de Timoshenko. A validade destes elementos foi verificada por meio da comparação resultados experimentais presentes na bibliografia. Validados, os elementos foram aplicado, ainda de forma preliminar, no estudo da reação da caixa torácica à aplicação de uma pressão de correção para deformidades do tipo *pectus carinatum*.

Além disso, devido à complexidade da geometria e seu caráter individual dependendo do paciente, um método para a geração da malha baseado no método de mínimos quadrados a partir de pontos discretos que a descrevem de forma parcial foi desenvolvido, possibilitando, assim, o seu futuro uso acoplado à leitura de radiografias, tomografias computadorizadas e outros métodos de diagnóstico por imagem.

Desta forma, primeiramente, as propriedades geométricas da costela foram tomadas com o auxílio de modelos CAD existentes de forma gratuita na internet. Também para simular os dados de entrada como pontos discretos, estas propriedades foram generalizadas em todo o domínio da costela pelo método de mínimos quadrados. Observou-se, tanto para a área total da seção transversal quanto para os momentos de inércia, um aumento nos seus valores na região próxima à coluna vertebral, ponto de apoio. Este aumento observado, e esperado, mostra a otimização da geometria, com uma maior resistência e rigidez nos possíveis pontos de maior esforço, ao passo que tal rigidez não pode ser constante ao decorrer da costela devido à flexibilidade requerida para a respiração.

Para as propriedades mecânicas da costela e da cartilagem, recorreu-se à bibliografia, compilando estudos que realizam sua medição *in vivo* e em *ex vivo*. Neste passo encontrou-se a dificuldade da não existência de referências que avaliem as propriedades geométricas, mecânicas e o comportamento mecânico do objeto de estudo em um único corpo de prova, dificultando a análise e sendo necessário o cruzamento de dados para a validação.

Na modelagem física do problema, confrontando os resultados da simulação com o experimento 1, foi observado a alta influência das condições de contorno neste experimento de forma que há uma mudança significativa na rigidez observada na costela. Ainda assim, no caso 1, os resultados foram compatíveis para o elemento EI1, com uma rigidez de, aproximadamente, 3,48 N/mm, e no caso 4 para o elemento EI2, com uma rigidez de 5,33 N/mm, aproximadamente, dentro do intervalo de incerteza das propriedades mecânicas tomadas. Nos casos 2 e 3, ambos os elementos apresentaram uma rigidez cerca de 10 vezes acima dos valores experimentais (53,33 N/mm). Tal incompatibilidade mostra o caráter viscoelástico do osso e a impossibilidade da avaliação do seu comportamento para altas taxas de deformação pelo elemento aqui desenvolvido.

Para as confrontações com o experimento 2 foi aplicado o método de geração de malha com particionamento da matriz de pontos que descrevem a geometria, havendo um aumento de 180% no coeficiente de correlação, sendo a validade do método comprovada tendo por este coeficiente quanto visualmente. Nesta simulação, os valores de deslocamento foram compatíveis para R_{area} em torno de 0,15, valor esperado devido à pequena razão entre a área cortical e a área total da seção transversal do osso observada na bibliografia. Na simulação do anel da costela 4, observou-se o surgimento de uma força no plano normal ao da costela, também presente nas análises experimentais, chegando ao valor de, aproximadamente, 5 N para uma deflexão no ponto de aplicação da força de 25 mm.

Neste mesmo experimento, para o anel da costela 5, a força no plano normal ao da costela obtida não alcançou valores significativos, também em acordo com os dados experimentais. Para este anel os elementos apresentaram uma maior diferença na rigidez, porém esta maior diferença também foi observada em diferentes experimentos, apontando para a possibilidade da aproximação dos resultados do elemento EI2 (de maior rigidez) com uma população específica, ainda não avaliada de forma apropriada.

Por fim, o processo de correção de deformidades do tipo *pectus carinatum* foi avaliado simulando o início de tratamento para um paciente de 15 anos. Para isso foi aplicada uma PIC de 60 kPa (aproximadamente 8,7 psi), dentro dos valores máximos sugeridos pela bibliografia, em uma órtese circular de 40 mm de diâmetro, obtendo uma deflexão máxima da caixa torácica de aproximadamente 15 mm, estando de acordo com os estudos quantitativos deste processo de correção presentes na bibliografia. Também notou-se a alta influência da elasticidade do osso e, especialmente, da cartilagem costal na deformação local da protusão, ressaltando a importância do tratamento precoce desta deformidade, quando a elasticidade destes dois materiais ainda não é elevada.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Analisar o comportamento da caixa torácica completa, incluindo as costelas falsas;
- Desenvolver elementos de viga que considerem as parcelas temporais das equações diferenciais;
- Desenvolver um algoritmo para a leitura de tomografias computadorizadas e radiografias, gerando a malha pelo método aqui desenvolvido;
- Desenvolver elementos que considere relações constitutivas não lineares;
- Adicionar efeitos viscoelásticos e viscoplásticos aos elementos.

REFERÊNCIAS

- ACHESON, S. J. *Elementary Fluid Dynamics*. [S.l.]: Oxford Applied Mathematics and Computer Science, 2003. Citado na página 28.
- AGNEW, A. M. et al. The effect of age on the structural properties of human ribs. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, v. 41, p. 302–214, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 9, 19, 40, 41, 59 e 88.
- ANDERSON, R. et al. Mfem: A modular finite element methods library. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 81, p. 42–74, 2021. Citado na página 49.
- AUBERT, B. et al. 3d reconstruction of rib cage geometry from biplanar radiographs using a statistical parametric model approach. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering: Imaging and Visualization*, v. 4, n. 5, p. 281–295, 2014. Citado na página 38.
- AYAZ, F. Solutions of the system of differential equations by differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, v. 147, n. 1, p. 547–567, 2004. Citado na página 21.
- BABUŠKA, I.; AZIZ., A. K. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*, p. 1–359, 1972. Citado na página 22.
- BASHIR, M. N.; AHMAD, M. O. Development of numerical technique by galerkin approach of spectral element method for hybrid beam. *AIP Advances*, v. 6, n. 115107, 2016. Citado na página 51.
- BEER, S. A. de et al. The dynamic compression brace for pectus carinatum: Intermediate results in 286 patients. *The Annals of Thoracic Surgery*, v. 103, n. 6, p. 1742–1749, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. *Non Linear Finite Elements for Continua and Structures*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2001. Citado na página 49.
- BENIANI, A.; TAOUAF, N.; BENAÏSSA, A. Well-posedness and exponential stability for coupled lamé system with viscoelastic term and strong damping. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 75, n. 12, p. 4397–4404, 2018. Citado na página 36.
- BHASHYAM, G. R.; PRATHAP, G. Galerkin finite element method for non-linear beam vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 72, n. 2, p. 191–203, 1980. Citado na página 51.
- BIE, Y.; CUI, X.; LI, Z. A coupling approach of state-based peridynamics with node-based smoothed finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 331, n. 1, p. 675–700, 2018. Citado na página 22.
- BLANC, X.; BRIS, C. L.; LIONS, P. L. From molecular models to continuum mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 164, n. 1, p. 341–381, 2002. Citado na página 25.

- BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. [S.l.]: Springer, 2008. Citado na página 50.
- BRIGADNOV, I. Regularization of non-convex strain energy function for non-monotonic stress–strain relation in the hencky elastic–plastic model. *Acta Mech*, v. 226, p. 2681–2691, 2015. Citado na página 56.
- BUGAJSKI, T. et al. Bracing of pectus carinatum: A quantitative analysis. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 53, p. 1014–1019, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 18, 45 e 96.
- CAHILL, J. L.; LEES, G. M.; ROBERTSON, H. T. A summary of preoperative and postoperative cardiorespiratory performance in patients undergoing pectus excavatum and carinatum repair. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 19, n. 4, p. 430–433, 1984. Citado na página 44.
- CARTER, D. R.; HAYES, W. C. Bone compressive strength: the influence of density and strain rate. *Science*, v. 194, n. 4270, p. 1174–1176, 1976. Citado na página 38.
- CHADWICK, P.; VIANELLO, M.; COWIN, S. C. A new proof that the number of linear anisotropic elastic symmetries is eight. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 49, n. 1, p. 2471–2492, 2001. Citado na página 33.
- CHANG, P. Y. et al. Preliminary analysis of the forces on the thoracic cage of patients with pectus excavatum after the nuss procedure. *Clinical Biomechanics*, v. 23, p. 881–885, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 44.
- CHAPRA, S. C. *Applied Numerical Methods with MATLAB: for Engineers and Scientists*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- CHARPAIL, E. et al. Characterization of pmhs ribs: A new test methodology. *Stapp Car Crash Journal*, v. 49, n. 1, p. 183–198, 2014. Citado na página 37.
- CHEN, C. et al. Force required for correcting the deformity of pectus carinatum and related multivariate analysis. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 53, p. 1855–1857, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 96.
- CHEN, G.; XIE, X. A robust weak galerkin finite element method for linear elasticity with strong symmetric stresses. *Computational Methods in Applied Mathematics*, v. 16, n. 3, p. 389–408, 2016. Citado na página 51.
- CIARLET, P. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. [S.l.]: North-Holland, 1978. Citado na página 49.
- COBBEN, J. M.; J., O. R.; DIJK, F. van. Pectus excavatum and carinatum. *Eur J Med Genet*, v. 57, p. 414–417, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.
- CONSTANTINESCU, A.; KORSUNSKY, A. *Elasticity With Mathematica: An Introduction to Continuum Mechanics and Linear Elasticity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado na página 32.
- COOK, R. D. et al. *Concepts and Applications of Finite Element Method*. 4. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2004. Citado na página 56.

- CORMIER, J. M. et al. Regional variation in the structural response and geometrical properties of human ribs. *Annual Proceedings from the Association for the Advancement of Automotive Medicine*, v. 49, n. 1, p. 153–170, 2005. Citado na página 37.
- COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 49, p. 1–23, 1943. Citado na página 55.
- COWPER, G. R. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, v. 33, n. 2, p. 335–340, 1966. Citado na página 30.
- CRAMPIN, S. Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids. *Geophysical Journal International*, v. 76, n. 1, p. 135–145, 1984. Citado na página 36.
- DAVIS., R.; HENSHELL, R. D.; WARBURTON, G. B. A timoshenko beam element. *Journal of Sound and Vibration*, v. 22, n. 4, p. 475–487, 1972. Citado na página 30.
- DAVIS, T. A.; RAJAMANICKAM, S.; SID-LAKHDAR, W. M. A survey of direct methods for sparse linear systems. *Acta Numerica*, v. 25, p. 383–566, 2016. Citado na página 55.
- DELILIGA, A. et al. Cardiopulmonary resuscitation (cpr) complications encountered in forensic autopsy cases. *BMC Emergency Medicine*, v. 19, n. 23, p. 1–7, 2019. Citado na página 18.
- DEMBINSKI, H.; SCHMELLING, M.; WALDI, R. Application of the iterated weighted least-squares fit to counting experiments. *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research*, v. 940, n. 1, p. 135–141, 2019. Citado na página 23.
- DENG, Y.-C.; KONG, W.; HO, H. Development of a finite element human thorax model for impact injury studies. *SAE Technical Paper Series*, v. 1, p. 1–7, 1999. Citado na página 18.
- DIDIER, A.-L. et al. Breathing thorax simulation based on pleura behaviour and rib kinematics. *Information Visualisation - MediVis*, p. 35–40, 2007. Citado na página 49.
- DOWLING, N. E.; KRAL, M. V.; KAMPE, S. L. *Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue*. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- DURAND, R.; PANTOJA-ROSETO, B. G.; OLIVEIRA, V. A general mesh smoothing method for finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 158, n. 1, p. 17–30, 2019. Citado na página 22.
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least squares regression. *Biometrika*, v. 37, n. 3/4, p. 409–428, 1950. Citado na página 24.
- EGAN, J. a. D. J. et al. Compressive orthotics in the treatment of asymmetric pectus carinatum: A preliminary report with an objective radiographic marker. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 35, p. 1183–1186, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 61.
- EIDSVIK, O. A. N.; SCHJOLBERG, I. Finite element cable-model for remotely operated vehicles (rovs) by application of beam theory. *Ocean Engineering*, v. 163, p. 322–336, 2018. Citado na página 51.

- EMIL, S. et al. Success and duration of dynamic bracing for pectus carinatum: A four-year prospective study. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 52, p. 124–129, 2017. Citado na página 48.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. [S.l.]: American Mathematical Society, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- FENG, L. et al. Unstructured mesh finite difference/finite element method for the 2d time-space riesz fractional diffusion equation on irregular convex domains. *Applied Mathematical Modelling*, v. 59, p. 441–463, 2018. Citado na página 49.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A first Course in Finite Elements*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 51, 53 e 54.
- FORMAN, J. L.; KENT, R. W. Modeling costal cartilage using local material properties with consideration for gross heterogeneities. *Journal of Biomechanics*, v. 44, p. 910–916, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- FRASER, S. et al. Initial reduction of flexible pectus carinatum with outpatient manipulation as an adjunct to external compressive bracing: technique and early outcomes at 12 weeks. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 55, n. 7, p. 1347–1350, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 18, 37 e 45.
- GRAAFF, K. M. V. D. *Human Anatomy*. [S.l.]: W.C. Brown Publ, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 36.
- GRACIE, R.; WANG, H.; BELYTSCHKO, T. Blending in the extended finite element method by discontinuous galerkin and assumed strain methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 74, n. 11, p. 1645–1669, 2008. Citado na página 51.
- GRINDLE, D. et al. A detailed finite element model of a mid-sized male for the investigation of traffic pedestrian accidents. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, v. 235, n. 3, p. 300–313, 2021. Citado na página 19.
- HADAMARD, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, v. 13, n. 4, p. 49–52, 1902. Citado na página 21.
- HAJE, S. A.; HAJE, D. P. Overcorrection during treatment of pectus deformities with dcc orthoses: experience in 17 cases. *International Orthopaedics*, v. 30, p. 262–267, 2006. Citado na página 46.
- HOLCOMBE, S. A. et al. Comparing fe human body model rib geometry to population data. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, v. 19, n. 1, p. 2227–2239, 2020. Citado na página 38.
- HOLCOMBE, S. A.; WANG, S. C.; GROTEBERG, J. B. Modeling female and male rib geometry with logarithmic spirals. *Journal of Biomechanics*, v. 49, n. 13, p. 2995–3003, 2016. Citado na página 38.
- HOSE, D.; HANSS, M. Fuzzy linear least squares for the identification of possibilistic regression models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018. Citado na página 23.

HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1987. Citado na página 49.

IDKAIDEK, A.; JASIUK, I. Modeling of osteoprobe indentation on bone. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 90, p. 365–373, 2019. Citado na página 42.

JIANG, B. et al. Development of a 10-year-old paediatric thorax finite element model validated against cardiopulmonary resuscitation data. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, v. 17, n. 11, p. 1185–1197, 2014. Citado na página 19.

JOHNSON, . C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1987. Citado na página 49.

KAHROBAIYAN, M. H.; ASGHARI, M.; AHMADIAN, M. T. A timoshenko beam element based on the modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 79, p. 75–83, 2014. Citado na página 29.

KANG, D.-Y. et al. Factors affecting patient compliance with compressive brace therapy for pectus carinatum. *Interactive CardioVascular and Thoracic Surgery*, v. 19, p. 900–903, 2014. Citado na página 46.

KATZENBERGER, M. J. et al. Effects of sex, age, and two loading rates on the tensile material properties of human rib cortical bone. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 102, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 42, 90 e 93.

KINDIG, M. W. et al. Structural response of cadaveric ribcages under localized loading: stiffness and kinematic trends. *Stapp Car Crash Journal*, v. 54, n. 1, p. 337–380, 2010. Citado 7 vezes nas páginas 9, 19, 37, 41, 59, 91 e 94.

KVELÁZQUEZ-AMEIJIDE, J. et al. Prediction of mechanical properties of human rib cortical bone using fractal dimension. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, p. 1–11, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 93.

LANG, S. B. Ultrasonic method for measuring elastic coefficients of bone and results on fresh and dried bovine bones. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 17, n. 2, p. 101–105, 1970. Citado na página 35.

LAU, A. et al. Indentation stiffness of aging human costal cartilage. *Acta Biomater*, v. 4, p. 97–103, 2008. Citado na página 43.

LAX, P. D.; MILGRAM, A. N. Parabolic equations. *Annals of Mathematics Studies*, v. 33, p. 167–190, 1954. Citado na página 22.

LEE, S. Y. et al. Effect of the compressive brace in pectus carinatum. *European Journal of Cardio-thoracic Surgery*, v. 34, p. 146–149, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

LEITÃO, A. *Cálculo Variacional e Controle Ótimo*. 23º Colóquio Brasileiro de Matemática: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001. Citado na página 55.

LIMA, E. L. *Curso de análise vol.2*. 5. ed. Brasil, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 56.

- LIU, M.; GAO, Y.; LIU, H. A nonlinear drucker–prager and matsuoka–nakai unified failure criterion for geomaterials with separated stress invariants. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 50, n. 1, p. 1–10, 2012. Citado na página 28.
- LIZÉE, E. et al. Finite element model of the human thorax validated in frontal, oblique and lateral impacts : A tool to evaluate new restraint systems. *ICORBI Conference*, p. 527–543, 1998. Citado na página 18.
- LOGAN, D. L. *A First Course in the Finite Element Method*. [S.l.]: Thomson, 2007. Citado na página 49.
- LUO, Y. An efficient 3d timoshenko beam element with consistent shape functions. *Adv. Theor. Appl. Mech.*, v. 1, n. 3, p. 95–106, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 71.
- MAH, M.; SCHMITT, D. R. Experimental determination of the elastic coefficients of an orthorhombic material. *GEOPHYSICS*, v. 66, n. 4, p. 1217–1225, 2002. Citado na página 35.
- MARTINEZ-FERRO, M.; FRAIRE, C.; BERNARD, S. Dynamic compression system for the correction of *pectus carinatum*. *Semin Pediatr Surg*, v. 17, p. 194–200, 2008. Citado na página 46.
- MASE, G. T.; SMELSER, R. E.; ROSSMANN, J. S. *Continuum Mechanics for Engineers*. [S.l.]: CRC Press, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 27.
- MASIAS, A. et al. Elastic, plastic, and creep mechanical properties of lithium metal. *Journal of Materials Science*, v. 54, n. 1, p. 2585–2600, 2019. Citado na página 35.
- MITTON, D. et al. Non-destructive assessment of human ribs mechanical properties using quantitative ultrasound. *Journal of Biomechanics*, v. 47, n. 6, p. 1548–1553, 2014. Citado na página 42.
- MITTON, D. et al. 3d reconstruction of the ribs from lateral and frontal x-rays in comparison to 3d ct-scan reconstruction. *Journal of Biomechanics*, v. 41, n. 3, p. 703–710, 2008. Citado na página 38.
- MURACH, M. M. et al. Rib geometry explains variation in dynamic structural response: Potential implications for frontal impact fracture risk. *Annals of Biomedical Engineering*, v. 45, n. 9, p. 2159–2173, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 59 e 93.
- NARAYANASWAMI, R.; ADELMAN, H. M. Inclusion of transverse shear deformation in finite element displacement formulations. *AIAA Journal*, v. 12, n. 11, p. 1613–1614, 1974. Citado na página 30.
- NEČAS, J. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup.*, v. 16, p. 305–326, 1962. Citado na página 22.
- NEVES, S. C. et al. Finite element analysis of pectus carinatum surgical correction via a minimally invasive approach. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, v. 18, n. 5, p. 711–718, 2015. Citado na página 44.

- NUSS, D. et al. Review and discussion of the complications of minimally invasive pectus excavatum repair. *European Journal of Pediatric Surgery*, v. 12, p. 230–234, 2002. Citado na página 44.
- OLIVER, J. et al. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 69, n. 2, p. 113–136, 2002. Citado na página 25.
- OLIVER, X.; SARACIBAR, C. A. de. *Continuum Mechanics for Engineers: Theory and Problems*. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2017. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 28.
- OLVER, P. J.; ROSENAU, P. The construction of special solutions to partial differential equations. *PHYSICS LETTERS*, v. 11, n. 3, p. 107–112, 1986. Citado na página 21.
- ORRICK, B. A. et al. Successful brace treatment of pectus carinatum in osteogenesis imperfecta using the dynamic compression system. *European Journal of Pediatric Surgery Reports*, v. 7, n. 1, p. 117–120, 2019. Citado na página 48.
- PEZOWICZ, C.; GLOWACKI, M. The mechanical properties of human ribs in young adult. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, v. 14, n. 2, p. 53–60, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 39, 40, 41 e 93.
- PIETRO, D. A. D.; ERN, A. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado na página 50.
- PODGÓRSKI, J. General failure criterion for isotropic media. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 11, n. 2, p. 188–201, 1985. Citado na página 28.
- RAJAMARAN, V. *Computer Oriented Numerical Methods*. 4. ed. Índia, Deli: PHI Learning, 2018. Citado na página 23.
- RAYLEIGH, L. *Theory of Sound*. [S.l.: s.n.], 1886. Citado na página 55.
- RITZ, W. Ueber eine neue methode zur loesung gewisser variations probleme der mathematischen physik. *J. Reine Angew. Math.*, v. 135, p. 1–23, 1908. Citado na página 55.
- RITZ, W. Theorie der transversal schwingungen einer quadratischen platte mit freien raendern. *Annalen der Physik*, v. 38, p. 1–23, 1909. Citado na página 55.
- ROSA, J. N. de la. *High-Order Methods for Computational Astrophysics*. Tese (Doutorado) — University of Stuttgart, Institute of Aerodynamics and Gas Dynamics, Stuttgart, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- ROSENDAHL, P. et al. Equivalent strain failure criterion for multiaxially loaded incompressible hyperelastic elastomers. *International Journal of Solids and Structures*, v. 166, n. 1, p. 32–46, 2019. Citado na página 27.
- RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987. Citado na página 50.
- SAINIA, K.; DISCHERA, D.; KUMARB, N. Static and time-dependent mechanical response of organic matrix of bone. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 91, n. 1, p. 315–325, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 93.

- SANDOZ, B. et al. Quantitative geometric analysis of rib, costal cartilage and sternum from childhood to teenagehood. *Medical and Biological Engineering and Computing*, v. 51, n. 9, p. 971–979, 2010. Citado na página 37.
- SANTONI, A. et al. Determination of the elastic and stiffness characteristics of cross-laminated timber plates from flexural wave velocity measurements. *Journal of Sound and Vibration*, v. 400, n. 1, p. 387–401, 2017. Citado na página 35.
- SCHAFMAN, M. A. *Dynamic Structural Properties of Human Ribs in Frontal Loading*. Dissertação (Mestrado) — The Ohio State University, Graduate Program in Mechanical Engineering, Ohio, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 18, 19, 37, 38, 40, 59, 88 e 89.
- SEVERN, R. T. Inclusion of shear deflection in stiffness matrix for a beam element. *Journal Strain Analysis*, v. 5, n. 4, p. 239–241, 1970. Citado na página 31.
- SHAMES, I. H.; COZZARELLI, F. A. *Elastic and inelastic stress analysis*. [S.l.]: Taylor and Francis, 1998. Citado na página 26.
- SHI, X. et al. A statistical human rib cage geometry model accounting for variations by age, sex, stature and body mass index. *Journal of Biomechanics*, v. 47, n. 10, p. 2277–2285, 2014. Citado na página 37.
- SONG, C.; OOI, E. T.; NATARAJAN, S. A review of the scaled boundary finite element method for two-dimensional linear elastic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 187, p. 45–73, 2018. Citado na página 49.
- STEPHENSON, J. T.; BOIS, J. D. Compressive orthotic bracing in the treatment of pectus carinatum: the use of radiographic markers to predict success. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 43, p. 1776–1780, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.
- STRANG, G. Piecewise polynomials and the finite element method. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 79, n. 6, p. 1128–1137, 1973. Citado na página 52.
- SUNDARAM, S. H.; FENG, C. C. Finite element analysis of the human thorax. *Journal of Biomechanics*, v. 10, n. 8, p. 505–516, 1977. Citado na página 18.
- THAI, H.-T. et al. A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates. *Composite Structures*, v. 177, n. 1, p. 196–219, 2017. Citado na página 25.
- TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1951. Citado na página 29.
- TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921. Citado na página 30.
- TONG, F. et al. Finite element analysis of the human thorax. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, v. 21, n. 1, p. 505–516, 2021. Citado na página 18.
- WANG, C.-H. et al. Discontinuous finite element method for combined radiation-conduction heat transfer in participating media. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 108, p. 1–11, 2019. Citado na página 49.

- WANG, C. M. Timoshenko beam-bending solutions in terms of euler-bernoulli solutions. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 121, n. 6, p. 763–765, 1995. Citado na página 30.
- WARLIAH, L.; ROHMAN, A. S.; RUSMIN, P. H. Model development of air volume and breathing frequency in human respiratory system simulation. In: . Malaysia: Elsevier, 2012. p. 260–268. Citado na página 49.
- WEBER, T. Further experience with the operative management of asphyxiating thoracic dystrophy after pectus repair. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 40, p. 170–173, 2005. Citado na página 44.
- WELLER, H. G. et al. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, v. 12, n. 6, p. 620–631, 1998. Citado na página 25.
- WERNER, W. Polynomial interpolation: Lagrange versus newton. *Mathematics of Computation*, v. 43, n. 167, p. 205–217, 1984. Citado na página 53.
- WONG, K. E. et al. Evaluation of the treatment of pectus carinatum with compressive orthotic bracing using three dimensional body scans. *Journal of Pediatric Surgery*, v. 49, p. 924–927, 2014. Citado na página 46.
- WRIGGERS, P. *Non Linear Finite Element Methods*. [S.l.]: Springer, 2008. Citado na página 49.
- WU, S. et al. A generalized nonlinear failure criterion for frictional materials. *Acta Geotechnica*, v. 12, n. 6, p. 1353–1371, 2017. Citado na página 27.
- XIE, L. et al. Development of a computer-aided design and finite-element analysis combined method for customized nuss bar in pectus excavatum surgery. *Nature Scientific Reports*, v. 7, n. 3543, p. 1–14, 2017. Citado na página 19.
- YOUNG, D. M. *Iterative Solution of Large Linear Systems*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 1971. Citado na página 55.
- ZENÌSK, A. Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method. *Journal of Approximation Theory*, v. 7, p. 334–351, 1973. Citado na página 52.
- ZHU, Y. et al. In vivo assessment of elasticity of child rib cortical bone using quantitative computed tomography. *Applied Bionics and Biomechanics*, v. 2017, n. 1, p. 1–9, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 93.
- ZOHOOR, H.; KAKAVAND, F. Timoshenko versus euler–bernoulli beam theories for high speed two-link manipulator. *Scientia Iranica B*, v. 20, n. 1, p. 172–178, 2013. Citado na página 30.
- ZYSSET, P. K. A review of morphology–elasticity relationships in human trabecular bone: theories and experiments. *Journal of Biomechanics*, v. 36, p. 1469–1485, 2003. Citado na página 42.