



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS URUÇUÍ
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WILDSON BORGES DE ARAÚJO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA
ABORDAGEM POR MEIO DA TEORIA DOS GRAFOS

URUÇUÍ-PI

2022

WILDSON BORGES DE ARAÚJO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM
POR MEIO DA TEORIA DOS GRAFOS

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí, *Campus Uruçuí*.

Orientador: Prof. Me. Felipe Morais Peixoto

URUÇUÍ-PI

2022

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM POR MEIO DA TEORIA DOS GRAFOS

Wildson Borges de Araújo¹
Felipe Morais Peixoto²

RESUMO

No que se refere ao ensino de matemática, a busca por metodologias de ensino que venham a auxiliar os(as) professores(as), quanto a levar os conteúdos de maneira atrativa, vem crescendo de forma considerável. Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar uma investigação sobre as contribuições do método de resolução de problemas por meio da Teoria de Grafos para o processo de aprendizagem significativa dos alunos do ensino Fundamental e Médio. Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, baseando-se em publicações científicas, para apresentar discussões acerca da importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da matemática, apresentando a estrutura de resolução de problemas segundo Polya. Logo após, foi feita uma contextualização histórica sobre a Teoria de Grafos, exibindo os primeiros problemas que deram origem a esta teoria, bem como a sugestão de problemas de otimização, dentre outros, que são resolvidos tendo como base a Teoria de Grafos. Com isso, espera-se levar para a comunidade docente, uma discussão desta metodologia de ensino, que apesar de já ser discutida a bastante tempo, ainda é pouco utilizada nos dias atuais. Espera-se ainda que a discussão sobre a Teoria de Grafos, possa despertar o interesse por pesquisas futuras no âmbito desta temática, levando assim para os alunos esta ferramenta de resolução de problemas.

Palavras-chave: resolução de problemas; teoria de grafos; ensino da matemática.

ABSTRACT

With regard to the teaching of mathematics, the search for teaching methodologies that will help teachers, in terms of taking the content in an attractive way, has been growing considerably. In this way, the objective of this work is to present an investigation on the contributions of the method of solving problems through Graph Theory for the process of meaningful learning of students in Elementary and High School. Therefore, a bibliographic research was carried out, based on scientific publications, to present discussions about the importance of problem solving in the teaching and learning process of mathematics, presenting the problem solving structure according to Polya. Soon after, a historical contextualization of Graph Theory was made, showing the first problems that gave rise to this theory, as well as the suggestion of optimization problems, among others, which are solved based on Graph Theory. With this, it is expected to take to the teaching community, a discussion of this teaching methodology, which despite being discussed for a long time, is still little used nowadays. It is also expected that the discussion on Graph Theory can arouse interest in future research on this topic, thus bringing this problem-solving tool to students.

Keywords: problem solving; graph theory; mathematics teaching.

Data de aprovação: 12/07/2022 (data de apresentação do TCC)

¹ Discente do Curso de Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI Campus Uruçuí. E-mail: nosdliwborges@gmail.com.

² Docente Me. do Curso de Licenciatura em Matemática pelo o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI Campus Uruçuí. E-mail: felipe.peixoto@ifpi.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

No que tange ao ensino de matemática, é crescente a busca por métodos que venham a auxiliar os professores, quanto a levar os conteúdos de forma atrativa, de maneira expressiva, de tal modo, que haja uma aprendizagem significativa. Segundo Pontes (2019, p.3), “no contexto atual, o ensino de matemática na educação básica requer uma quebra de paradigmas na sua forma de apresentar seus conteúdos. As novas formas para o ensino e aprendizagem eficiente de matemática surgiram para melhorar o entendimento desta ciência.” Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), uma dessas formas é a resolução de problemas de matemática, onde afirma que “o processo de ensino e aprendizagem na matemática se desenvolve de forma mais proveitosa a partir da utilização de propostas de resolução de problemas matemáticos.” (BRASIL, 1998)

Desta forma, o método de resolução de problemas, que desde a antiguidade tem registrado sua importância no currículo da Matemática, apresenta-se como um método que pode levar para os alunos ideias que vão além de debater conceitos já prontos, pois através da resolução de problemas, o professor pode está apontando caminhos e instigando o seu aluno, para que o mesmo elabore seu modelo de resolução, ou seja, fazendo com que a partir de dados previamente apresentados, eles tenham a capacidade de resolver os problemas matemáticos, por conta própria.

Portanto, em meio a grandes mudanças no ensino da matemática, buscando melhores maneiras de desenvolver o pensar matemático do aluno, acredita-se que a Teoria dos Grafos aliada com o método de resolução de problemas, traz forte impacto nesse desenvolvimento, não apenas os deixando presos a ideias e modelos já prontos. O fato de não se deparar com tal conteúdo nos anos que antecedem o ensino superior, faz questionar a tamanha relevância do mesmo, já que, o tema trabalhado tem um grande leque de atuações dentro do cotidiano, facilitando o estudo e o trabalho, não somente na matemática, mas também em outras áreas afins.

Diante disso, vale ressaltar, que além de ter posse dos dados apresentados em um problema matemático, o aluno deve ter conhecimento de técnicas que o auxiliem em tal tarefa. Para tanto, dentre as várias técnicas de resolução de problemas existentes, optou-se, neste trabalho, pela Teoria de Grafos, pois geralmente os alunos agregam a Matemática, somente aos conceitos algébricos, o que acabam limitando o estudo dos problemas (MALTA, 2008). Portanto, ao longo desta pesquisa, buscou-se reunir dados com a finalidade de responder ao seguinte questionamento: Como a Teoria de Grafos aliada a resolução de problemas pode contribuir com o ensino de Matemática?

Assim, objetivou-se com essa pesquisa, analisar as potenciais contribuições do método de resolução de problemas por meio da Teoria de Grafos para o processo de aprendizagem significativa dos alunos do ensino Fundamental e Médio. Para tanto, buscou-se de maneira específica analisar os conceitos que regem os métodos de resolução de problemas e conhecer a Teoria de grafos, através de estudos de sua definição e de problemas históricos relacionados a mesma, para a partir daí apresentar propostas de problemas a serem resolvidos, a luz da Teoria de Grafos.

2 METODOLOGIA

O presente estudo se trata de uma pesquisa bibliográfica, onde segundo Severino (2013, p.106) “é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas

anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados.”

Desta forma, a partir da escolha do tema, foi realizado um levantamento bibliográfico preliminar acerca da importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da matemática, apresentando a estrutura de resolução de problemas segundo Polya. A partir daí, foi feita uma contextualização histórica sobre uma das possíveis soluções para a problemática, a Teoria de Grafos, exibindo os primeiros problemas que deram origem a esta teoria, bem como a sugestão de problemas de otimização, dentre outros, que são resolvidos tendo como base a Teoria de Grafos.

Com isso, no capítulo que segue serão apresentadas discussões sobre a resolução de problemas no ensino de matemática, bem como, as etapas de resolução de problemas propostas por George Pólya. No quarto capítulo, é proposta uma contextualização histórica sobre a Teoria de Grafos, exibindo os primeiros problemas que deram origem a esta teoria. O quinto capítulo, caracteriza-se pela apresentação de sugestões de problemas de otimização, dentre outros, que são resolvidos tendo como base a Teoria de Grafos. No último capítulo são apresentadas considerações acerca da contribuição do estudo realizado, bem como, a posposta de estudos posteriores a respeito desta temática.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Experiências acerca do ensino da Matemática, no ensino fundamental e médio, nos revelam a grande dificuldade dos professores, quando se trata de propor problemas aos alunos de maneira a despertar neles a curiosidade para solucionar tal problema, para que os mesmos sintam prazer em estudar, em buscar métodos, para assim, apresentar uma solução do problema. Isso, se deve ao fato que na maioria dos casos, os professores não propõem aos seus alunos um real problema, pois o que é oferecido aos alunos, são questões que põem em prática, repetitivamente, um determinado modelo de resolução, apresentado pelo professor.

Isso acaba por desenvolver nos alunos uma formulação errônea, sobre a aprendizagem matemática, e este é debate que se arrasta há bastante tempo, segundo D’Ambrósio, (1989, p. 15), “alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor.” Isso nos leva a perceber que apesar de já ter sido observado há bastante tempo, este problema ainda se faz presente nos dias atuais, nos levando a necessidade de buscar métodos que venham solucionar esta problemática.

Frente a isso, gera-se discussões acerca das vantagens do ensino da Matemática, tendo como base a resolução de problemas, de qual é o papel do professor e qual é o papel do aluno, qual a dinâmica a ser seguida por ambos para que haja uma aprendizagem significativa. Onuchic e Allevato (2011), salienta que:

O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário. Chamamos a esse processo de trabalho de uma forma Pós Polya de ver resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.81).

Assim, nota-se que não se trata do professor ser o centro do ensino, onde somente o mesmo apresenta conteúdo e o aluno, tem apenas que concordar e reproduzir os métodos apresentados, mas, de uma construção conjunta do conhecimento, onde professor e aluno trabalham juntos, obtendo-se assim, resultados satisfatórios.

No entanto, indaga-se, sobre qual é a estrutura correta de um problema, para que ele consiga realmente trabalhar a criticidade, a imaginação e o pensar matemático dos alunos. E não obstante a isso Romanatto (2004 apud ONUCHIC, 2012), nos apresenta uma sequência a ser observada pelos professores, ao elaborarem problemas, para saber, se realmente trata-se de um problema significativo:

- a) Isso é um problema? Por quê?
- b) Que tópicos da Matemática poderiam ser abordados nesse problema?
- c) Para que níveis escolares ele poderia ser indicado?
- d) Que diferentes abordagens poderiam ser aplicadas objetivando sua solução?
- e) Que problemas secundários (já conhecidos, mal conhecidos ou desconhecidos) poderiam surgir no decorrer do processo?
- f) Quais as estratégias ou os caminhos que poderiam ser percorridos para se chegar à solução? (processo de resolução)
- g) Qual é a resposta desse problema? Ela é única?
- h) Como observar a razoabilidade da resposta obtida?
- i) Como relacionar o problema dado com aspectos econômicos, sociais e culturais?

Com isso, antes de mais nada, antes de propor um problema em sala de aula, o professor deve se questionar se tal problema, obedece a sequência acima, se verdadeiramente teremos uma aprendizagem significativa a partir deste problema.

3.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO POLYA

Diante das discussões apresentadas acima, observamos o quão rico é o método de resolução de Problemas matemáticos, no despertar do pensar matemático dos alunos. Contudo, o professor não deve se preocupar somente em elaborar um belo problema, e propor a seus alunos, deve-se também apresentar aos seus alunos, quais são as etapas a serem seguidas, para obter êxito neste processo de resolução. Assim, apresentaremos uma sequência elaborada por George Pólya, nascido em Budapeste, na Hungria, no ano de 1887, foi o primeiro matemático a exibir um modelo que se baseia em etapas, no processo de resolução de um problema matemático (NERES; CORREA, 2018).

As etapas apresentadas por Pólya, foram os seguintes:

1ª - Compreensão do Problema -. O primeiro passo é entender o enunciado e para isso é importante fazer perguntas, pois a resposta para essas perguntas pode ser o meio para esse fim. Perguntas como: qual é a incógnita? Ou seja, o que se quer resolver? O que deve ser calculado? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Ou seja, quais são as condições que possuímos e que podemos usar. É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a incógnita? Existem condições redundantes ou contraditórias? Faça uma figura. Introduza notação adequada. Separe as condições em partes. Estas perguntas são necessárias para a compreensão das informações contidas no enunciado.

2ª - Fazer a relação entre os dados e a incógnita. Nesta etapa, é importante fazer as seguintes perguntas. Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de uma forma um pouco diferente? Neste momento devemos buscar uma relação entre o que você está se propondo resolver e algum outro

correlato já resolvido, e que possa servir de orientação para a construção da sua solução. Conhece algum problema correlato? Caso você encontre um semelhante ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo analisando os caminhos percorridos até a sua solução e verificando as adaptações necessárias para fazer o seu. Considere a incógnita? Caso não exista nenhuma atividade parecida, divida o que você está trabalhando em partes, fazendo a conexão entre a incógnita e os dados correspondentes, inclusive criando incógnitas auxiliares para cada parte (PÓLYA, 2006, p. 4-7, apud, NERES; CORREA, 2018).

Logo que cumpridas estas duas etapas, e não sendo encontrado um método de resolução para o determinado problema, deve-se atingir a 3ª etapa, que se trata de reformular as hipóteses, procurando assim um novo método de resolução. E na 4ª etapa, deve ser feita uma revisão de todo o caminho percorrido no processo de formação da resolução alcançada, objetivando verificar se a solução alcançada, vem de encontro ao problema proposto (NERES; CORREA, 2018).

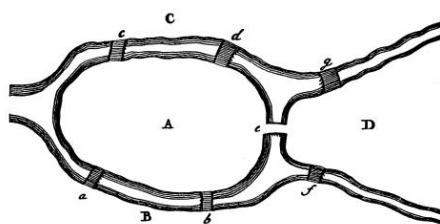
4 TEORIA DE GRAFOS: CONTEXTO HISTÓRICO E DEFINIÇÃO

Ao trabalhar com o método de Resolução de Problemas, no processo de ensino de matemática, podemos nos questionar, a real eficácia deste método, e sua real importância no processo de formação do pensar matemático. No entanto, dados históricos apontam, que Grandes Teorias surgiram exatamente, através de indagações feitas sobre determinado problema do cotidiano daquela época. Tal fato, pode ser confirmado por Duarte (2000, p.98), ao afirmar que:

O reconhecimento de que a resolução de problemas ocupa um lugar central no desenvolvimento da Matemática não é uma ideia nova. A verdade é que a resolução de problemas nunca foi atribuída a importância merecida. Não devemos esquecer que foi ao procurar (e a encontrar) a solução para o “quebra-cabeças” provinciano das pontes de Königsberg que Euler lançou, sem o saber, os fundamentos da Teoria dos Grafos (DUARTE, 2000, p.98).

Há aproximadamente 300 anos atrás, a população da cidade de Königsberg, antigo território da Prússia, questionavam entre si, a possibilidade de sair de uma das regiões de terra da cidade, passar uma única vez pelas sete pontes que ligavam as regiões da cidade, e retornar para a região de origem. Frente a isso, segundo Malta (2008), foi enviado para Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático e físico, o seguinte problema: “Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?”

Figura 01: As sete pontes de Königsberg.

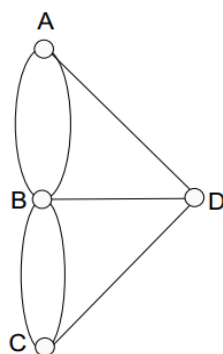


Fonte: Silva (2013).

Ainda segundo Malta (2008), relatos apontam que Euler teria resolvido o problema que lhe foi confiado, concluindo que não era possível realizar o passeio. Mas, ele também

apresentou uma conjuntura geral do caso. Isso se evidência a partir da modelagem do problema, que resultou em uma estrutura, que conhecemos hoje, como Grafo. Nesta estrutura cada região de terra da cidade de Königsberg foi representada por um vértice, e cada ponte que ligava estas regiões por linhas, denominadas arestas.

Figura 02: Representação por Grafo do problema das 7 pontes de Königsberg.



Fonte: Malta (2008).

A partir daí, foram surgindo diversos problemas que foram modelados pela Teoria de Grafos, relatos apontam que no ano de 1856, Sir W. R. Hamilton teria criado um jogo, conhecido como “Icosian Game”, uma estrutura com 20 cidades, em uma representação achatada de um dodecaedro. O problema criado por Hamilton a partir desta estrutura era o de sair da cidade de Londres, uma das cidades representadas na estrutura criada por ele, percorrer todas as outras cidades uma única vez e retornar para Londres. Como mostra a Figura 03 a seguir:

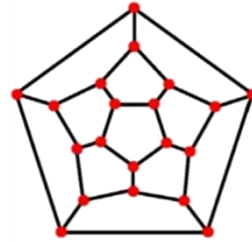
Figura 03: Icosian Game.



Fonte: Icosiano, (s.d.).

Realizando uma modelagem do problema, a partir da Teoria de Grafos, onde cada cidade é representada por um vértice, e o caminho que ligava as cidades, por uma aresta, obtemos a seguinte estrutura

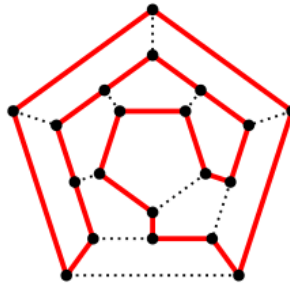
Figura 04: Representação por grafo do Jogo Icosian Game.



Fonte: Icosiano, (s.d.).

Em uma das possíveis soluções deste jogo, que pode ser observado na figura 05, é possível notar que não é preciso passar por todas as arestas para que se encontre a solução.

Figura 05: Uma solução do problema proposto no jogo.



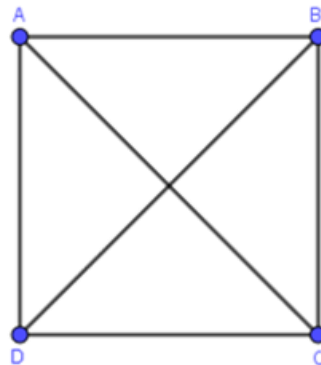
Fonte: Algoritmo TSP do Papai Noel, 2012.

Desta forma, a luz de Lucchesi (1979) e de Feofiloff, Kohayakawa e Wakabayashi (2011), apresenta-se a definição e os conceitos básicos da Teoria de Grafos, para facilitar a compreensão da resolução dos problemas propostos no próximo capítulo.

Definição. Um grafo G trata-se de um conjunto finito V de elementos chamados vértices, um conjunto finito A de elementos chamados arestas, e uma função de incidência φ que associa a cada aresta de G um par ordenado de vértices, não necessariamente distintos, de G , chamados de extremos.

Podemos representar os Grafos por meio de Diagramas, onde os vértices são representados por pontos e as arestas por uma linha ligando os pontos que representam seus extremos. A título de exemplo, na figura 05 a seguir, apresentamos um Grafo G , constituído dos Vértices A, B, C e D e suas respectivas arestas.

Figura 06: Grafo ABCD

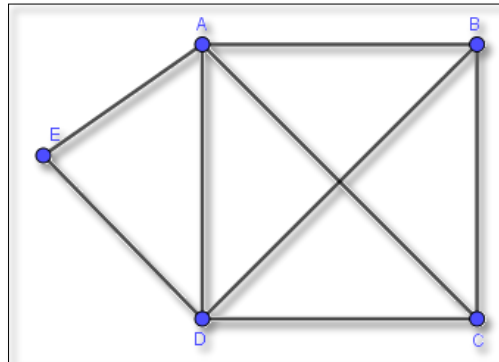


Fonte: Autores (2022).

O **grau** $g(V)$ de um vértice V de um Grafo G é a quantidade de arestas que incidem em V , sendo que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do Grafo.

Um Grafo é considerado **conexo**, se, para qualquer par de vértices (X,Y) , existir um caminho, com extremos X e Y , ou seja, não é preciso que os vértices X e Y , estejam ligados diretamente, para o Grafo ser considerado conexo, mas deve existir um trajeto que consiga partir de um deles e chegar ao outro. Caso não exista este caminho, o Grafo será considerado desconexo ou não conexo.

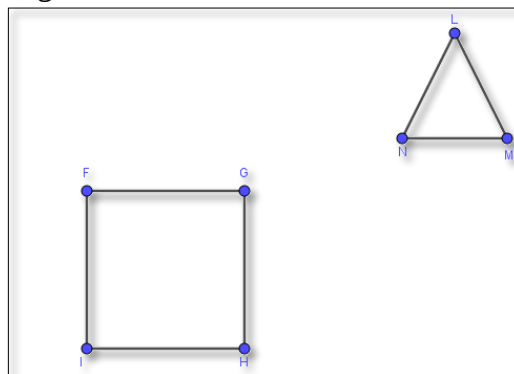
Figura 07: Grafo conexo ABCDE.



Fonte: Autores (2022)

Observe na figura 07, que o Grafo ABCDE é conexo, pois existe um caminho possível para interligar dois vértices quaisquer deste Grafo.

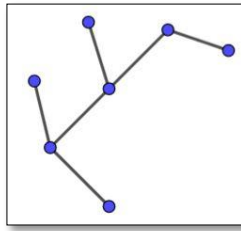
Figura 08: Grafo desconexo FGHILMN.



Fonte: Autores (2022)

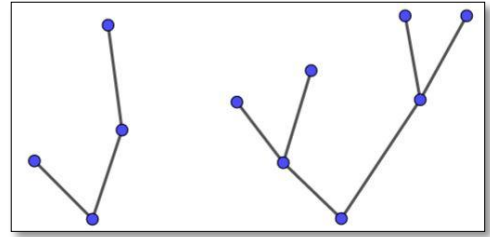
Já na figura 08, podemos observar que o Grafo FGHILMN é desconexo, pois apesar de existir um caminho que interliga dois quaisquer dos vértices F, G, H, I e de existir um caminho possível para interligar dois quaisquer dos vértices L, M, N , não existe um caminho que consiga interligar o conjunto de vértices $FGHI$ ao conjunto de vértices LMN , fazendo com que esta estrutura, represente um Grafo desconexo.

Figura 09: Estrutura de uma árvore



Fonte: Autores (2022)

Figura 10: Estrutura de uma Floresta



Fonte: Autores (2022)

Dentre as estruturas de Grafos, temos que as mais frequentes são as árvores, que são os Grafos Conexos sem Ciclos, sendo que um grafo que tem as árvores como componentes conexas é chamado de floresta, como podemos observar nas figuras 09 e 10.

5 PROBLEMAS PROPOSTOS

Neste Capítulo, apresenta-se a posposta de dois problemas elaborados tendo como base a sequência de Romanatto (2004 apoud ONUCHIC, 2012), para organização de um problema significativa, sendo utilizado para resolução de tais problemas, a Teoria dos Grafos, embasados nas etapas de resolução de um problema, apresentados por Polya.

Problema 1: Nove cidades, sendo elas enumeradas de 1 a 9, serão interligadas entre si, por meio de estradas, porém, o critério usado para que uma cidade seja ligada a outra é dada da seguinte maneira:

Seja dada uma cidade C_m , representada pelo número m e outra cidade C_n , representada pelo número n , só será possível ligar tais cidades, se e somente se, $m + n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja $m + n$ é múltiplo de 2.

Portanto, será possível sair da cidade C_1 e chegar à cidade C_8 ?

SOLUÇÃO:

A princípio, podemos concluir que não haverá uma estrada ligando à cidade C_1 a cidade C_8 , pois sabe-se que o resultado da soma $1+8$ não é múltiplo de 2. No entanto, o problema não nos questiona quanto a ter uma ligação direta entre as cidades C_1 e C_8 , mas, sobre poder sair da cidade C_1 e poder chegar até a cidade C_8 .

Sendo assim, iremos utilizar a Teoria de grafos para analisar se é possível ou não realizar tal trajeto.

Percebe-se que para o resultado da soma de dois números seja múltiplo de 2, o número resultante do mesmo deve ser par. Portanto, segue abaixo uma tabela com todas as somas, representadas pelos respectivos números de cada cidade, assim estabelecendo todos os pares de povoados que serão conectados.

Quadro 01: Somas possíveis das numerações das cidades.

CIDADES	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
C_1	-	1+2=3	1+3=4	1+4=5	1+5=6	1+6=7	1+7=8	1+8=9	1+9=10
C_2		-	2+3=5	2+4=6	2+5=7	2+6=8	2+7=9	2+8=10	2+9=11
C_3			-	3+4=7	3+5=8	3+6=9	3+7=10	3+8=11	3+9=12
C_4				-	4+5=9	4+6=10	4+7=11	4+8=12	4+9=13
C_5					-	5+6=11	5+7=12	5+8=13	5+9=14
C_6						-	6+7=13	6+8=14	6+9=15
C_7							-	7+8=15	7+9=16
C_8								-	8+9=17
C_9									-

Fonte: Autores (2022)

Observação: considerando que o percurso da cidade C_1 até a cidade C_3 é igual ao percurso da cidade C_3 até a cidade C_1 , determinados trajetos foram suprimidos da tabela, para facilitar a visualização, e assim, a resolução do problema.

Observando a tabela 01, note que ao somar o número ímpar representante de uma cidade, ao número par representante de outra cidade, sempre obtemos uma situação que não satisfaz o problema. Isso se deve ao fato de que ao somar um número par, da forma $2k$ com $k \in \mathbb{N}$, com um número ímpar da forma $2k + 1$ com $k \in \mathbb{N}$, resulta em:

$$2k + (2m + 1) = 2(k + m) + 1, \text{ com } k, m \in \mathbb{N},$$

Ou seja, o resultado sempre vai ser um número ímpar, que não atende ao problema.

No entanto, ao tomarmos como o primeiro número da adição ímpar, só será possível obter um resultado par, se e somente se o segundo número da adição também for ímpar. Isso se deve pelo fato de que ao somar um número ímpar, da forma $2t + 1$ com $t \in \mathbb{N}$, com um outro número ímpar, da forma $2n + 1$ com $n \in \mathbb{N}$,

$$(2t + 1) + (2n + 1) = 2(t + n) + 2 = 2(t + n + 1), \text{ com } t, n \in \mathbb{N},$$

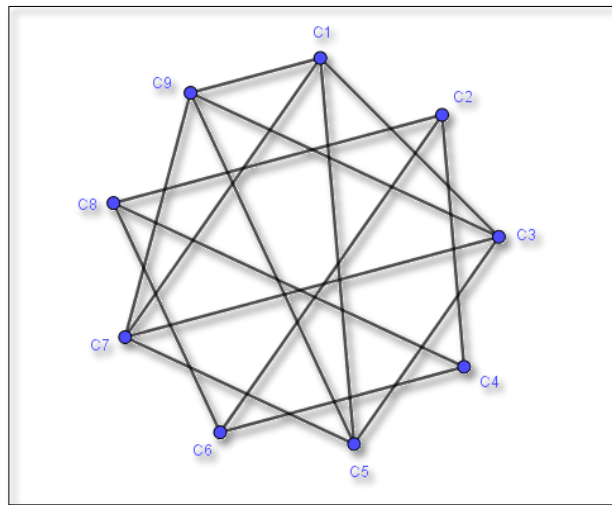
Obtemos sempre um número par, atendendo o problema.

Do mesmo modo, se o primeiro número da adição for par, só será possível obter um resultado par, se e somente se o segundo número da adição também for par, ou seja, dado um número da forma $2x$ com $x \in \mathbb{N}$, e um da forma $2y$ com $y \in \mathbb{N}$, temos que:

$$2x + 2y = 2(x + y) \text{ com } x, y \in \mathbb{N}.$$

Diante disso, vamos apresentar a seguir, um Grafo, contendo todas as ligações entre as cidades que satisfazem o problema.

Figura 11: Grafo das ligações entre os pares de povoados



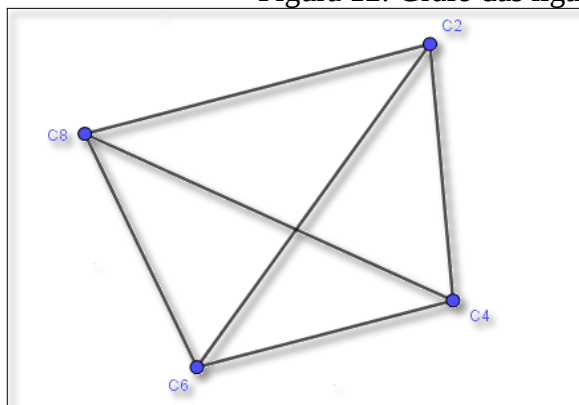
Fonte: Autores (2022).

Nota-se que, mesmo sendo possível encontrar uma solução para o problema, por meio desta representação por Grafo, ainda se torna difícil apresentar este possível caminho, para sair da cidade C_1 e chegar a cidade C_8 , devido aos cruzamentos entre as arestas desta estrutura.

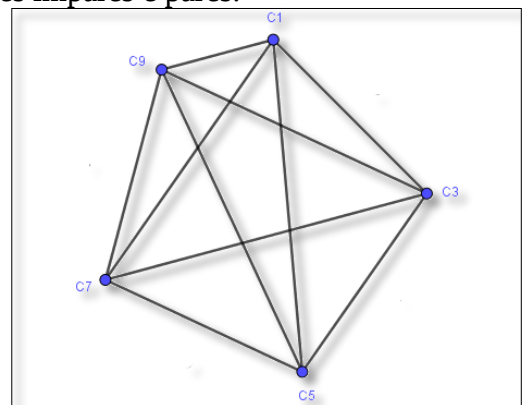
Assim, considerando a terceira e a quarta etapa da sequência de resolução de um problema, apresentada por Polya, já que esta representação não facilita a visualização de uma possível solução, faremos uma revisão dos dados apresentados, para modelar a estrutura de um Grafo que nos possibilite a construção de uma solução mais clara para o problema.

Observando que as cidades correspondentes aos números pares, só é possível se conectar a uma outra cidade também correspondente de um número par, e que uma cidade correspondente de um número ímpar, também só é possível se conectar com outra cidade também correspondente de um número ímpar, iremos representar essa estrutura em um Grafo, de forma diferente da figura 11, buscando assim uma melhor visualização.

Figura 12: Grafo das ligações ímpares e pares.



Fonte: Autores (2022)



Fonte: Autores (2022)

Observando que a estrutura representada acima, é um Grafo não conexo, já que não existe nenhum caminho que ligue as cidades C_2, C_4, C_6 e C_8 as cidades C_1, C_3, C_5, C_7 e C_9 , nos mostrando assim, que não é possível sair da cidade C_1 e chegar na cidade C_8 , pois não há nenhuma estrada que ligue uma cidade ímpar a uma cidade par, assim tornando impossível encontrar tal rota.

Problema 2: Moradores de um município, vem sofrendo com as péssimas estradas de chão que ligam sete povoados deste município. Pensando em solucionar o problema que afeta os moradores, o prefeito resolve pavimentar as estradas, assim melhorando a locomoção dos mesmos. Alegando a falta de recursos, o prefeito busca o trajeto que possa ligar todos os povoados e que possa gerar menos despesas para os cofres da prefeitura. A seguir, é apresentada uma tabela com os custos, em milhões de reais, para interligar cada par de povoados por uma estrada pavimentada.

Quadro 02: Custo da obra entre cada povoado

POVOADOS	A	B	C	D	E	F	G
A	0	3,52	-	-	4,12	7,39	-
B		0	6,08	-	-	4,47	-
C			0	3,61	-	3,61	-
D				0	-	4,0	5,0
E					0	6,71	7,07
F						0	4,12
G							0

Fonte: Autores (2022).

Observação: considerando que a distância do Povoado A até o Povoado B é igual a distância do Povoado B até o Povoado A, determinadas distâncias foram suprimidas da tabela, para facilitar a visualização, e assim, a resolução do problema.

Diante dos dados apresentados acima, determine qual percurso gera menos despesas aos cofres da prefeitura, de modo que se consiga interligar os sete povoados por estradas pavimentadas.

Solução: O método utilizado para resolução deste problema, será o algoritmo de Kruskal, componente da Teoria dos Grafos.

O algoritmo de Kruskal, posposto por Joseph B. Kruskal, busca uma árvore geradora mínima, para um grafo conexo valorado. Isso significa, que é gerada uma árvore que conecte todos os vértices, onde a soma dos pesos das arestas, resulta em um valor minimizado (ALVES, 2016).

Este algoritmo cria florestas geradoras, sendo que cada árvore da floresta tem como início uma aresta de menor peso, e ao adicionar mais arestas, conecta-se as mesmas, seguindo o mesmo critério, determinando uma árvore geradora mínima.

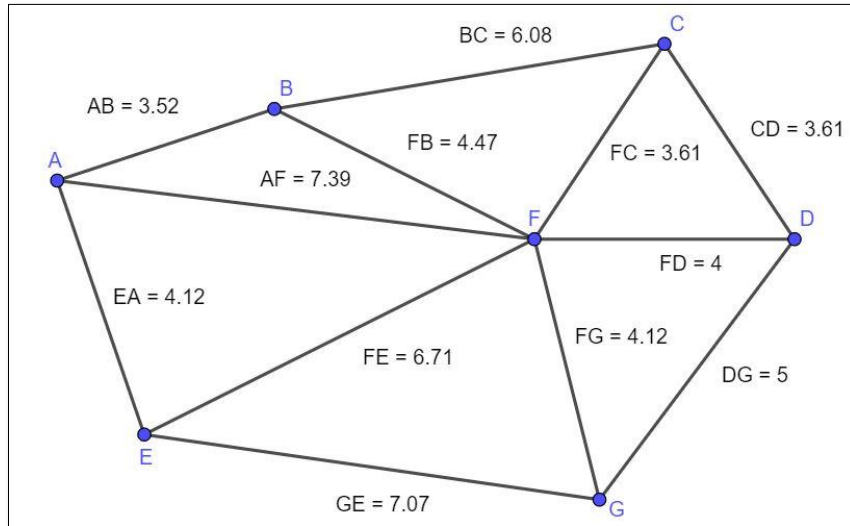
O Algoritmo de Kruskal segue os seguintes passos:

1. Ordenar cada aresta valorada de forma crescente;
2. Adiciona a aresta de custo mínimo a floresta geradora. Se a aresta adicionada gera um ciclo, então a mesma é rejeitada;
3. As arestas serão adicionadas até todos os vértices serem interligados.

Desta forma, considerando a definição do Algoritmo de Kruskal apresentada, modelaremos os dados apresentados no quadro 02, para que possamos utilizar este algoritmo.

Modelando os dados tabelados do problema em um Grafo valorado conexo, onde cada povoado é representado por um vértice, e cada estrada que interliga estes povoados, é representada por uma aresta valorada, temos:

Figura 13: Grafo do problema



Fonte: Autores (2022)

Seguindo o primário passo do algoritmo, abaixo segue o Quadro 03 com os custos, para interligar cada par de povoados por uma estrada pavimentada, organizados de forma crescente.

Quadro 03: dados dispostos em ordem crescente

CONEXÃO	CUSTOS
AB	3,52 milhões
CF	3,61 milhões
CD	3,61 milhões
FD	4,0 milhões
EA	4,12 milhões
FG	4,12 milhões
FB	4,47 milhões
DG	5,0 milhões
BC	6,08 milhões
EF	6,71 milhões
GE	7,07 milhões
AF	7,39 milhões

Fonte: Autores (2022)

Dando continuidade à resolução, de acordo com o segundo e terceiro passo do algoritmo, foram adicionadas as arestas de menor peso, ligando todos os vértices, assim formando a floresta geradora mínima. Portanto, para melhor visualização, observa-se o Quadro 04 com as conexões entre os pares de povoados em ordem crescente, mostrando as conexões

que foram adicionadas a floresta e as conexões que geram ciclos e que foram descartadas da mesma.

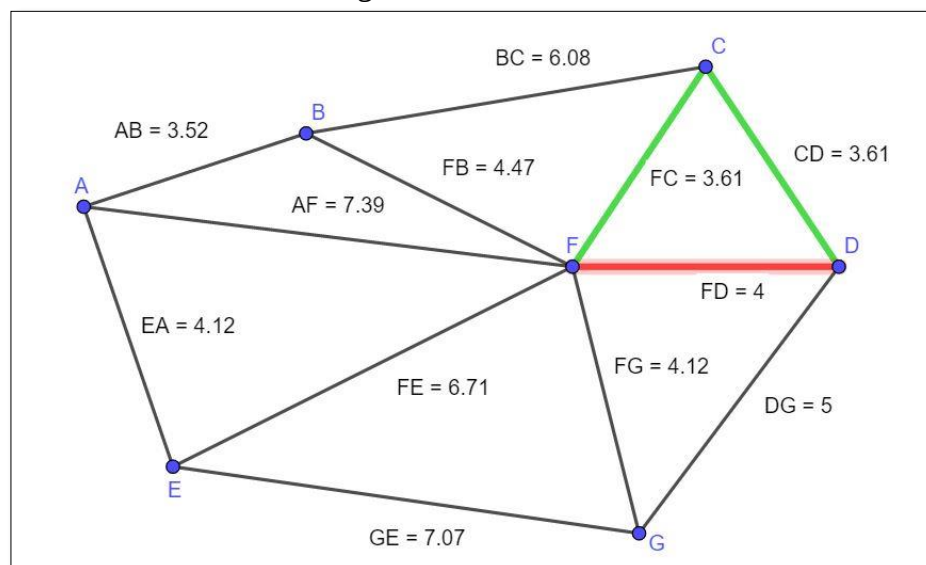
Quadro 04: Conexões entre os povoados em ordem crescente

CONEXÃO	CUSTOS	COMENTÁRIO
AB	3,52 milhões	OK
CF	3,61 milhões	OK
CD	3,61 milhões	OK
FD	4,0 milhões	GERA CICLO CFD
EA	4,12 milhões	OK
FG	4,12 milhões	OK
FB	4,47 milhões	OK
DG	5,0 milhões	GERA CICLO FCDG
BC	6,08 milhões	GERA CICLO FCB
EF	6,71 milhões	GERA CICLO CBAEF
GE	7,07 milhões	GERA CICLO ABCFGE
AF	7,39 milhões	GERA CICLO CBAF

Fonte: Autores (2022)

A título de exemplo, na figura abaixo, ilustramos uma parte do grafo, que contém o ciclo CFD, mostrando que a pavimentação do percurso que liga o povoado F ao povoado D, representado pela aresta tonalizada na cor vermelha, será um gasto desnecessário, já que os mesmos estão ligados através do percurso que vai do povoado F ao povoado C e do povoado C ao povoado D, representadas pelas arestas de menor peso, destacadas na cor verde.

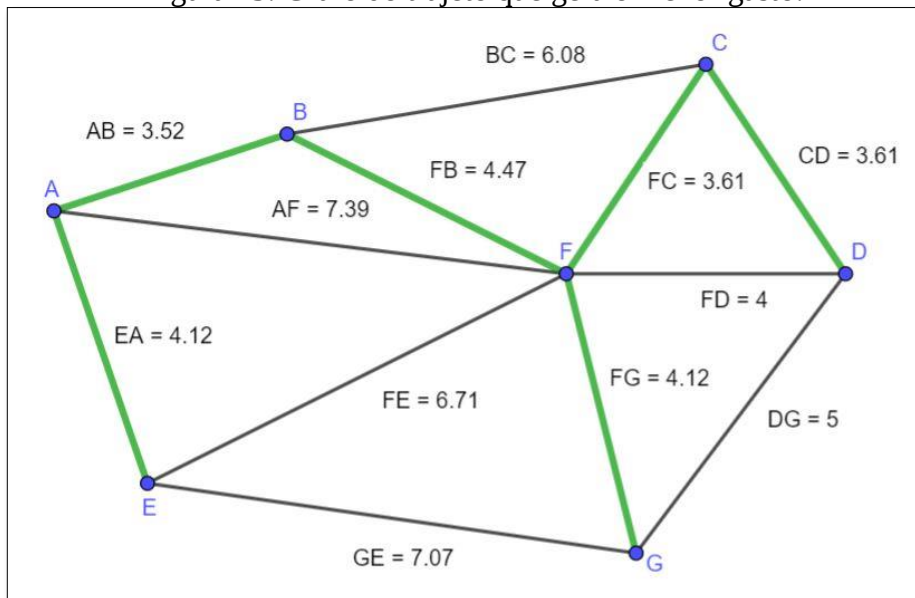
Figura 14: Grafo do Ciclo FCD.



Fonte: Autores (2022)

Desta forma, desconsiderando estes caminhos que geram ciclos, trazendo assim, prejuízo para a obra a ser feita, a seguir, é apresentado um grafo com a árvore geradora mínima, mostrando o trajeto que será gerado menor gasto para interligar os povoados.

Figura 15: Grafo do trajeto que gera o menor gasto.



Fonte: Autores (2022).

Portanto, seguindo o algoritmo de Kruskal, respeitando o processo demonstrado por ele, chegamos ao resultado, de que, o trajeto ilustrado no grafo acima, representada pelas arestas destacadas na cor verde, implicará uma despesa de 23,45 milhões de reais aos cofres da prefeitura, sendo assim o percurso mais econômico para a construção de estradas pavimentadas, que ligarão todos os sete povoados e assim solucionando o problema que nos fora proposto.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do desenvolvimento deste trabalho, acredita-se que o objetivo do mesmo foi alcançado, pois com base na apresentação de discussões acerca da importância da resolução de problemas no ensino de Matemática, pode-se mostrar uma estrutura de resolução a ser seguida pelos professores, para que os mesmos possam ter certeza se realmente estão discutindo problemas significativos, que possam contribuir no processo de formação de seus alunos. Vale ressaltar também a sequência de resolução de problemas proposta por Polya, que foi de grande valia no processo de resolução dos dois problemas propostos no corpo deste trabalho.

Contudo, também foi gratificante a discussão acerca da Teoria de Grafos, que surgindo a partir de uma situação problema, nos remete a importância do método de resolução de Problemas no ensino da Matemática, pois sem indagar os nossos alunos, sem provocar neles a necessidade de pensar, de procurar ferramentas matemáticas para resolver tal situação que lhes for proposta, dificilmente veremos o surgimento de novos algoritmos, de novas Teorias, nos levando a pensar que vivemos em uma sociedade onde não se fazem mais gênios como antigamente.

Frente a isso, com a apresentação de dois problemas, sendo um deles, um problema de otimização, pode-se proporcionar um método de resolução, baseado na Teoria de Grafos, que mesmo sendo uma teoria antiga, ainda é pouco conhecida, no entanto é uma ferramenta, que

nos apresenta uma Matemática que vai muita além da álgebra, remetendo assim, uma visão diferenciada dos problemas, e como nos problemas trabalhados, facilitando a resolução.

Portanto, com a realização deste trabalho, esperamos levar para a comunidade docente, uma discussão desta metodologia de ensino, que apesar de já ser discutida há bastante tempo, ainda é pouco utilizada nos dias atuais. Espera-se também que a discussão sobre a Teoria dos Grafos, possa despertar o interesse por pesquisas futuras no âmbito desta temática, levando assim para os alunos esta grande ferramenta de resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

- ALGORITMO TSP DO PAPAI NOEL. Isso é matemática. Disponível em: <https://thatsmaths.com/2012/12/20/santas-tsp-algorithm/> Acesso em: 08/06/2022
- ALVES, Adaias de Souza. **Teoria de Grafos: Algoritmo de Kruskal e Prim Aplicado em Análise de Dados**. 2016, Fortaleza. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2016.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília. MEC/SEF, 1998.
- D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. Temas e debates, v. 2, n. 2, p. 15-19, 1989.
- DUARTE, Jorge. **A resolução de problemas no ensino da matemática**. Educação & Comunicação, p. 97-100, 2000.
- FEOFILOFF, Paulo; KOHAYAKAWA, Yoshiharu; WAKABAYASHI, Yoshiko. **Uma introdução sucinta à teoria dos grafos**. 2011.
- ICOSIANO. Matemateca IMEUSP. Disponível em: <https://matemateca.ime.usp.br/acervo/icosiano.html> Acesso em: 08/06/2022
- LUCCHESI, Cláudio Leonardo. **Introdução à teoria dos grafos**. IMPA, 1979.
- MALTA, Gláucia Helena Sarmiento. **Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível**. Porto Alegre, 2008. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2008.
- NERES, Raimundo Luna; CORREA, Venâncio Barros. **Resolução de Problemas, segundo Pólya, para o ensino de probabilidade usando jogos de loteria**. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 20, n. 2, 2018.
- ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin**, p. 73-98, 2011.
- PONTES, Edel Alexandre Silva. **Método de polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica**. HOLOS, v. 3, p. 1-9, 2019.
- ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, 2012, 6.1: p. 299-311.
- SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SILVA, Tarcízio. Pontos, Linhas e Métricas: O Grafo de Königsberg. Tarcízio Silva, 2013. Disponível em: <https://tarciziosilva.com.br/blog/pontos-linhas-e-metricas-05-o-grafo-de-konigsberg/> Acesso em: 08/06/2022