



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS ANGICAL DO PIAUÍ
CURSO LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

EDUARDO JORGE NUNES SOARES JUNIOR

AVALANCHES DE PILHAS GRANULARES EM CÉLULA 2D

ANGICAL - PI

2018

EDUARDO JORGE NUNES SOARES JUNIOR

AVALANCHES DE PILHAS GRANULARES EM CÉLULA 2D

Trabalho de Conclusão de Curso monografia apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura plena em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus Angical do Piauí.

Orientador: Prof. Msc. Orlando da Silva Ribeiro.
Coorientador: Esp. Humberto dos Santos Dias.

ANGICAL

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S676a Soares Junior, Eduardo Jorge Nunes
Avalanches de pilhas granulares em célula 2D / Eduardo Jorge Nunes Soares Junior
- 2018.
65 p. : il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Angical, Licenciatura em Física, 2018.

Orientador : Prof Me. Orlando da Silva Ribeiro .

Coorientador : Prof Esp. Humberto dos Santos Dias .

1. Criticalidade auto-organizada. 2. Descargas de grãos. 3. Silo bidimensional.
I.Título.

CDD 530

EDUARDO JORGE NUNES SOARES JUNIOR

AVALANCHES DE PILHAS GRANULARES EM CÉLULA 2D

Trabalho de Conclusão de Curso monografia
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura plena em
Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí. Campus Angical do Piauí.

Aprovada em: 02/04/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc. Orlando da Silva Ribeiro (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Msc. Rodrigo dos Santos Almeida
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Alberto Silva Pereira dos Santos
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Aos pais, amigos e familiares

AGRADECIMENTOS

- A meu pai Eduardo Jorge Nunes Soares e minha mãe Ana Maria Rocha Neta Soares, que sempre acreditaram na minha capacidade de conseguir alcançar esse sonho, e sempre estiveram ao meu lado em todos os momentos da minha vida, devo minha vida a eles;
- A minhas irmãs Renata Lorena Rocha Soares Monteiro e Clara Eduana Rocha Soares que já possuem formação superior e me inspiraram a concluir esse trabalho;
- A Antônia Nizete do Nascimento que a tenho como irmã e que ajudou na minha educação básica me auxiliando nas atividades escolares;
- A minha namorada Beatriz Rosa Pereira de Sousa pela cumplicidade e participação na carreira acadêmica, agradeço a ela e sua família pela pelo carinho e por me dar abrigo quando em muitos períodos do curso fiquei sem transporte para assistir as aulas;
- A Gilmar Soares da Silva e toda sua família, pela amizade e também acolhida na cidade de Angical nos primeiros anos de curso;
- A minha avó Maria Pereira dos Santos Rocha, pelos ensinamentos de caráter e de humildade;
- Agradeço ao professor Orientador Orlando da Silva Ribeiro que depositou sua confiança para com esse trabalho, além das aulas e dos ensinamentos de vida;
- Agradeço ao professor Alberto Pereira, pois suas contribuições para conclusão desse trabalho foram de fundamental importância.
- Agradeço ao professor, Valdemiro da Paz Brito pela motivação na escolha tema e pelo auxílio durante a execução do experimento em uma celular 2D;
- Ao professor Humberto dos Santos Dias, pelos ensinamentos relacionados ao cálculo;
- Ao meu professor de Cálculo Diferencial com uma variável, Douglas Enison Cardoso da Silva; pela amizade e por ter se comprometido a me ensinar matemática no contraturno do curso de física;
- Ao professor Jose Deuzimar Uchôa; que contribuiu muito na minha formação ministrando aulas de Cálculo Integral com uma variável e me ensinou as bases para a execução de experimentos nos laboratórios de física do IFPI campus Angical do Piauí;

- Ao professor Rodrigo dos Santos Almeida, por ter me motivado ainda mais a estudar física e compartilhar dos sua amizade e sabedoria;
- Ao professor Liberalino Meneses pelos ensinamentos sobre física e por ter sido meu professor em grade parte do curso;
- Ao professor Juraci que ministrou Libras tanto pela grade do curso como também pelo curso básico de Libras, me tornando mais capacitado para enfrentar o mercado de trabalho;
- Agradeço ao professor Wemerson Jose de Alencar, pela amizade e pela contribuição na minha formação no curso de física e também no programa de bolsa de iniciação à docência (PIBID);
- Aos professores: Ozeano Costa, José Edilson Costa da Silva, Samara Viana, Samara Rodrigues; Renata Freitas; Leônia Eulalio Dantas Luz Costa; Cleire Amaral; sou muito grato pela contribuição de todos para minha formação;
- Agradeço ao Instituto Federal do Piauí (IFPI), campus Angical, por me dar condições de concluir o curso de Licenciatura em Física.
- Agradeço a Universidade Federal do Piauí (UFPI), localizada em Teresina capital do Piauí, por ter me recebido e me fornecido o material necessário para execução experimental.
- Agradeço aos meus amigos de curso, David Barbosa Lima da Cruz pela parceria no PIBID (programa de bolsa de iniciação à docência), na minha trajetória durante o curso, e também ao Heison Gomes da Silva, pela amizade;
- Aos amigos da vida acadêmica, Daniel Rosa, Daniel Carlos, Higuino Rafael, Higinio de Moraes, Francisco Alves, Elivelton , Andressa Sousa, Leciano Aislan, Silvestre da Rocha, Franciane Ribeiro, Fernando Ribeiro, Mayara Rodrigues, Ricardo Patrese, Josenaira Gonsalves, Francisca Camila, John Lennon, Thamyres Rossi, Aurisleny Lopes; Frankyn silva e a todos meus colegas de sala;

“O homem é do tamanho do seu sonho”.

Fernando Pessoa.

RESUMO

Fenômenos físicos que se encontram fora do equilíbrio e que fogem a uma ordem de organização, são conhecidos como caóticos, ou desordenados pelo fato de não se obter um resultado preciso com relação ao seu comportamento, o estudo de sistemas complexos e imprevisíveis, exibe características que estão ligadas ao conceito de criticalidade auto-organizada do inglês (*SELF-ORGANIZED CRITICALITY-SOC*), ou *SOC*, que foi publicado por Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld, ("BTW") em 1987, no *Physical Review Letters*, considerado um dos mecanismos pelos quais a complexidade surge na natureza, no momento em que partes de um sistema se afastam lentamente do seu estado de equilíbrio, ficando sujeito as interações locais existentes entre suas partes de maneira espontânea, utilizando-se desse conceito foi feita uma investigação da existência da criticalidade auto-organizada através de descargas de grãos metálicos por meio de um orifício no fundo de um silo bidimensional. Com a atenção voltada para a transição de congestionamento, que acontece durante a passagem do fluxo de partículas, podendo mudar de um regime de bloqueio para um estado contínuo de escoamento infinito.

Palavras-chave: criticalidade auto-organizada 1. Descargas de grãos 2. Silo bidimensional 3.

ABSTRACT

Physical phenomena that are out of balance and that escape an order of organization are known as chaotic, or disordered by the fact that an accurate result is not obtained in relation to their behavior, the study of complex and unpredictable systems, exhibits characteristics that (SELF-ORGANIZED CRITICALITY-SOC), or SOC, which was published by Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld ("BTW") in 1987 in the Physical Review Letters. one of the mechanisms by which complexity arises in nature, when parts of a system slowly move away from its state of equilibrium, being subject to local interactions between its parts spontaneously, using this concept was made an investigation of the existence of self-organized criticality by discharging metallic grains through a hole in the bottom of a two-dimensional silo. With attention focused on congestion transition, which occurs during the passage of the particle flow, being able to change from a blocking regime to a continuous state of infinite flow

Keywords: self-organized criticality 1. Grain Downloads 2. Two-dimensional silo 3.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1	– Engolfamento	p.14
Figura 3.1	– O pente de Cantor.....	p.20
Figura 3.2	– A curva de Koch.....	p.20
Figura 3.3	– Triângulo de Sierpinski.....	p.21
Figura 4.1	– Pilha de areia.....	p.23
Figura 5.1	– Diagrama de fases de um líquido simples.....	p.27
Figura 5.2	– Isotermas nas vizinhanças de um ponto crítico.....	p.32
Figura 6.1.	– Distribuição do tamanho das avalanches, definida como a descarga entre dois engarrafamentos consecutivos.....	p.36
Figura 6.2	– Gráficos da probabilidade $JN(d)$ em função de d	p.37
Figura 6.3	– Função de distribuição acumulada.....	p.40
Figura 6.4	– A evolução das avalanches.....	p.41
Figura 7.1	– Silo de acrílico formado por placas paralelas e base retangular de largura $w = 165d$	p.42
Figura 7.2	– Fotografia de algumas esferas usadas para formar a pilha, com diâmetro $d = 3mm$	p.43
Figura 7.3	– Ímã acoplado a uma barra de metal.....	p.43
Figura 7.4	– Lâmina com aberturas de tamanhos variáveis em seu centro.....	p.43
Figura 7.5	– Lâmina com (duas) aberturas diferentes em escala real.....	p.44
Figura 7.6	– Calculadora científica.....	p.44
Figura 7.7	– Mini balança de precisão.....	p.44
Figura 7.8	– Lâmina de papel Vergê.....	p.45

Figura 7.9	– Vareta composta por raios metálicos.....	p.45
Figura 7.10	– Lupa.....	p.45
Figura 7.11	– Garrafa pet cortada ao meio.....	p.46
Figura 8.1	– Pilha logo depois da adição de todos os grãos.....	p.48
Figura 8.2	– Arco de bloqueio formado por 9(nove) esferas.....	p.48
Figura 8.3	– Pilha logo após um evento catastrófico.....	p.49
Figura 9.1	– Gráfico da formação de arcos por avalanche de grãos.....	p.53
Figura 9.2	– Função distribuição $f(s)$ em função da quantidade de grãos escoados s	p.54
Figura 9.3	– Gráfico da função de distribuição acumulada para valores de w_0	p.55
Figura 9.4	– Gráfico da probabilidade $J_n(d)$ em função de d , para que o fluxo trave antes que N esferas caiam	p.56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p.13
2	TEORIA DO CAOS E TEORIA DETERMINISTA	p.16
2.1	TEORIA DO CAOS	p.16
2.2	TEORIA DO DETERMINISMO.....	p.18
3	CONTRIBUIÇÃO DOS FRACTAIS PARA A CIÊNCIA DO CAOS.....	p.20
4	MATERIAIS GRANULARES, CRITICALIDADE AUTO – ORGANIZADA	p.23
5	TRASIÇÃO DE FASE, ESTADO CRITICO E TRANSIÇÃO DE ENGARRAMENTO.....	p.25
5.1	ESTADO FÍSICO DA MATÉRIA E TRANSIÇÃO DE FASE.....	p.25
5.2	TRANSIÇÃO DE ENGARRAFAMENTO.....	p.33
6	DESCRIÇÃO DO MODELO A SER COMPARADO.....	p.35
6.1	DESCRIÇÃO DO SILO 2D.....	p.36
6.2	CONCLUSÕES	p.41
7	DISCRIÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL.....	p.42
8	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.....	p.47
9	RESULTADOS.....	p.50
9.1	TABELAS.....	p.50
9.2	ANÁLISE DOS DADOS	p.52
10	CONCLUSÕES E EXPECTATIVAS.....	p.58
	REFERENCIAS.....	p.59
	APÊNDCE A – LEIS DE POTENICA.....	p.62

1. INTRODUÇÃO

Fenômenos físicos que se encontram fora do equilíbrio e que fogem a uma ordem de organização, são conhecidos como caóticos [16], ou desordenados pelo simples fato de não se obter um resultado preciso com relação ao seu comportamento, a consequência disso é que eles podem muitas vezes passar despercebidos ao entendimento humano, pois a princípio sua análise, pode parecer algo trivial, no entanto, esse tipo de estudo oculta um alto grau de complexidade, e que apenas depois de investigados a fundo são compreendidos de fato.

Alguns problemas vêm desafiando a ciência a bastante tempo, como o funcionamento do sistema imunológico, a evolução das espécies, e a origem da vida. Esses questionamentos despertaram grande interesse no mundo científico e foi a partir desses temas que foi criado um novo ramo da física chamado teoria dos sistemas complexos [27], onde o grande desafio é encontrar padrões e classes de universalidade. Para tal objetivo, a teoria e sua formulação matemática ainda se encontram em desenvolvimento, apoiando-se em simulações computacionais, para modelar e reproduzir problemas que apresentam dificuldades para ser abordados no mundo real.

Um exemplo de sistema complexo que exhibe um comportamento intrigante, são os silos que são estruturas de armazenamento de material granuloso, que tem como principal função evitar a perda da quantidade de grãos durante um longo período de tempo, já que o mesmo facilita o processo de colheita, limpeza e secagem, controle de insetos e prevenção contra fungos, os mesmos são facilmente encontrados em fazendas e indústrias de exportação. Essas estruturas exibem um comportamento que foge a sua simplicidade, tendo como a imprevisibilidade uma de suas características. Esse adjetivo é atribuído não por acaso, já que um fato real relacionado ao mesmo vem colocando a segurança de pessoas em risco [33].

Tudo ocorre por que durante o transporte de retirada de grãos do silo, o fluxo é interrompido [33]. No momento em que ocorre a passagem do material armazenado através de um orifício, é possível verificar a presença de um arco de bloqueio. Essa falha na descarga dos grãos, pode induzir pessoas a entrarem na estrutura e se sobreporem aos grãos para aplicarem uma força sobre os mesmos, na tentativa de fazer com que o processo de escoamento seja retomado, entretanto, isso não seria

uma boa ideia, porque se trata de um sistema que pode se auto-organizar sem a necessidade de agentes externos, pois a transição sólido-líquido apresentada por materiais granulares pode ocorrer devido a um caráter de interação repulsiva entre os grãos, dependendo somente da densidade e da tensão a qual é submetido o material, e quando essa tensão ultrapassa um determinado valor, o material volta a escoar [18], não sendo possível prever o momento em que uma avalanche vai acontecer.

Se uma pessoa tomar a decisão de entrar no silo, ela deve estar devidamente equipada e auxiliada por outra que tenha um bom conhecimento sobre o que pode acontecer nesse tipo de manejo com grãos, pois a mesma estará sujeita a menor das perturbações, correndo o risco de ficar presa entre o material e morrer sufocada caso não haja um resgate imediato, para esse tipo de acidente é dado o nome de engolfamento [33]. E apesar de não ser comum, requer muita atenção, como é mostrado pela figura abaixo:

Figura 1.1: Engolfamento.



Fonte: retirada de [33].

A representação da problemática se torna importante para o estudo de sistemas complexos e imprevisíveis, e exhibe características que estão ligadas ao conceito de criticalidade auto-organizada do inglês (*SELF-ORGANIZED CRITICALITY-SOC*), ou *SOC*, que foi publicado por Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld, ("BTW") em 1987, no *Physical Review Letters* [22], considerado um dos mecanismos pelos quais a complexidade surge na natureza, no momento em que partes de um sistema se afastam lentamente do seu estado de equilíbrio, ficando

sujeito as interações locais existentes entre suas partes de maneira espontânea, o conceito de criticalidade ainda está ligado a descrição de uma classe de sistemas dinâmicos próximos a um ponto crítico, esse ponto apresenta conceitos de grande importância na física, já que o mesmo serve para descrever o comportamento de uma dada substância localizada em uma fronteira de fase onde a matéria possui mais de um estado físico em equilíbrio, e que próximo a esse ponto, a declaração da existência de qualquer estado é imprevisível, em outras palavras o sistema evolui de forma que suas características se tornam imprevisíveis, ligando esse estudo a outros, como por exemplo a teoria do Caos, que será melhor explicado na sessão seguinte.

E para contemplar de forma análoga a problemática envolvendo silos em fazendas será proposta nesse (trabalho de conclusão de curso), ou TCC, uma investigação da existência da criticalidade auto-organizada através de descargas de grãos metálicos por meio de um orifício no fundo de um silo bidimensional. Com a atenção voltada para a transição de congestionamento que acontece durante a passagem do fluxo de partículas, que pode mudar de um regime de bloqueio para um estado contínuo de escoamento infinito. Tomando como referencial as análises de avalanches de materiais granulares, é possível verificar um tamanho de saída crítica onde não existe a possibilidade de congestionamento.

Diante dessas observações muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos para melhorar a compreensão desse estudo, dentre eles se encontra o de engarrafamento e segregação em empilhamentos abertos de grãos, que foi elaborado por [18], que utilizou simulações computacionais, através do estudo de dinâmica molecular, dados esses que serão submetidos a verificação e comparação dos resultados feitos de maneira experimental.

2. TEORIA DO CAOS E TEORIA DETERMINISTA

2.1 TEORIA DO CAOS

O estudo sobre comportamentos caóticos de sistemas dinâmicos não lineares, teve um desenvolvimento importante nas últimas décadas, pois princípios fundamentais abordados nessa teoria se tornaram úteis para a evolução dos conhecimentos sobre sistemas complexos e sistemas auto-organizados [16].

O estudo do Caos, refere-se a pequenas alterações nas condições iniciais de um sistema, que pode levar a ordem aleatória de acontecimentos improváveis. Essa descoberta foi impulsionada por Edward Lorenz, um matemático e meteorologista Norte Americano. Que tentou prever as condições do clima analisando três variáveis: temperatura, pressão atmosférica e velocidade do vento. Porém, por mais que ele buscasse a precisão em suas equações, só conseguiu prever o clima em um curto intervalo de tempo [7].

Tal fato, o inspirou a formular o efeito borboleta, que em outras palavras diz que o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode ocasionar um tornado no Texas, afirmou Lorenz durante o 139º encontro da Sociedade Americana para o Avanço da Ciência (AAAS) [7]. Suas descobertas intensificaram os estudos a respeito da teoria do caos.

No ano de 1970, muitos físicos estavam condicionados a resolver problemas em que pequenas mudanças produziam resultados já esperados, ou simplesmente lógicos, que na física são chamados de lineares, porém, uma vasta gama de eventos, não só meteorológicos como também biológicos, econômicos e assim por diante, não apresentavam esse tipo de padrão determinado. Esses problemas em que as equações não envolvem taxas fixas de mudanças, e que pequenos desvios podem ter consequências irreparáveis, são chamados de processos “não-lineares”, um exemplo clássico e a formação de Vortex, fenômeno muito comum na natureza, onde o seu conceito está ligado a relação entre forças que se divergem e se auto - organizam em torno de um atrator, no entanto, os Vortex aparecem se apresentam através de inúmeros fenômenos [4], podendo ser observados por golfinhos, baleias, gêiseres e muitos outros, mas sem uma explicação precisa de como o fenômeno ocorre.

Um outro exemplo de sistemas não-lineares e que facilita seu entendimento, é o problema dos três corpos, pois Isaac Newton conseguir a façanha de calcular a

interação entre 2(dois) corpos celestes de uma forma simples e elegante, como exemplo, o movimento de um planeta em volta do Sol. Utilizando a equação da gravitação Universal, porém, se a esse sistema fosse adicionado outro planeta, os três corpos (Sol e dois planetas) interagindo mutuamente enquanto se movem, essa tarefa seria mais difícil, o físico Pierre Simon Laplace que entre os anos de 1749 e 1827 tentou descrever o funcionamento do sistema solar dando ênfase as irregularidades nas orbitas de alguns planetas ele identificou as ressonâncias planetárias como um sistema geral que produz resultados a longo termo, mas que, essas perturbações se compensam, levando a perturbações periódicas na inclinação e excentricidade de alguns planetas, e essas análises apesar de importantes foram consideradas muito robustas e o estudo a respeito da estabilidade do sistema solar ficou em aberto, até Henri Poincaré (1854 - 1912), deu solução para um modelo envolvendo três corpos da seguinte maneira primeiro ele considerou dois corpos, sendo primários, que movem-se entre si seguindo uma solução do problema para 2 corpos e depois ele propôs uma terceira massa infinitesimal, que se move sob a influência gravitacional dos primários, mas que não afeta o movimento destes, dando uma visão para o problema envolvendo três corpos, através desse trabalho e de outros, que Poincaré chegou a descoberta da ciência do caos, pois ele teve a façanha de compreender que o problema dos 3 (três) corpos apresentava uma solução caótica, onde as orbitas planetárias possuem uma dependência sensível as condições iniciais [23 - 24].

E foi a tentativa de solucionar problemas como esse, que levaram Lorenz a demonstrar que suas observações eram aplicáveis a qualquer tipo de sistema físico, e não apenas aquele especificamente em questão, e para tanto ele se utilizou da tecnologia para demonstrar que se todas as variáveis do sistema fossem calculadas corretamente, poderiam ser usadas para apresentar a evolução do mesmo, no que ele chamou de Atrator [9]. Onde um sistema pode ser descrito por vários atratores diferentes. Um exemplo simples é o relógio de pendulo, o qual caba pôr para, se for colocado para oscilar com uma amplitude inicial muito pequena, e acaba por oscilar de forma estável se a amplitude for demasiadamente grande. Os atratores dividem-se em 4(quatro) grandes grupos: Pontos, Ciclos limite, Toros Limite e Atratores Estranhos [25].

2.2 TEORIA DO DETERMINISMO

As observações físicas citadas anteriormente, poderiam ser tratadas como absurdas para físicos como Isaac Newton, que descreveu com precisão a mecânica ligada ao movimento dos corpos e as interações entre forças no planeta Terra [11]. Onde essa precisão conseguiu inspirar outros físicos como o francês Pierre Simon Laplace que.

“Hipotetizou inteligência capaz de saber cada átomo que existe e suas leis, segundo ele, se essa inteligência fosse ampla o suficiente para submeter esses dados a análise, ela englobaria em uma formula única os movimentos dos maiores corpos do universo e dos menores átomos, e para tal inteligência nada seria incerto e o próprio futuro assim como o passado estariam evidentes aos seus olhos” [29].

Assim como Newton fez com o movimento, o Físico Alemão Albert Einstein disse em uma de suas célebres frases, “Deus não joga dados” [31]. E deu sequência a uma série de ideias contrárias a ciência do caos e em apoio ao determinismo. No entanto apesar de ser um apoiador das ideias da mecânica clássica, ele é considerado por muitos como o pai da mecânica quântica ou física probabilística.

A física clássica, está ligada a análise de fenômenos a física clássica descreve com boa aproximação fenômenos macroscópicos e dadas as condições iniciais para o problema, podemos determinar o presente, passado e futuro de forma precisa, pois suas características são apresentadas de maneira invariável. E por esse motivo é chamada de determinística [21]. Já a Física Probabilística, engloba estudos que vão além do mundo macroscópico, ou seja, alguns eventos podem ser analisados a olho nu, enquanto outros fenômenos compreendem ao universo microscópico, que está ligado a observação físicas que necessitam de equipamentos para ampliar o campo de visão do observador, e de maneira geral, seus resultados tem como característica a representação de maneira estatística, não prevendo com total precisão os fenômenos, diferente do que acontece na mecânica clássica, no entanto, por mais que haja diferença na apresentação dos resultados e nas limitações entre as ciências, as duas mecânicas são bem eficientes para elucidar eventos ligados a natureza, e por tanto uma ciência pode ser considerada o caso limite da outra [21].

A ciência do caos, por sua vez, encontra dificuldade de ser compreendida no mundo físico, já que os resultados obtidos através das observações de seus eventos

são apresentados de maneira imprevisível, devido a existência de pequenas mudanças nas condições iniciais do sistema, e pelo fato dessa ciência não ser regida por conceitos de ordem, pois os acontecimentos analisados em um sistema caótico só exibem características determinísticas em um curto intervalo de tempo [12], pois, essa ciência além de não se adequar as características determinísticas e estatísticas, ela pode ser analisada através de princípios fundamentais da termodinâmica, que é uma área da física de grande importância para outros campos da ciência, e através da sua segunda lei termodinâmica, encontra-se o postulado atribuído ao físico Britânico, Lord Kelvin, que afirmou ser impossível uma transformação num sistema isolado, cujo único resultado seja transformar em trabalho toda a energia retirada de uma fonte sob a forma de calor, e que tem em todos os seus pontos à mesma temperatura, através dessa lei também encontra-se o enunciado de físico Polonês, Rudolf Clausius, que afirmou ser impossível uma transformação em um sistema isolado, cujo único resultado seja transferir energia sob a forma de calor de um corpo, a uma dada temperatura, para outro corpo, a temperatura superior, e que posteriormente com avanços da termodinâmica Clausius estabeleceu o conceito de entropia como uma definição de estado e a formulação da segunda lei como um princípio da máxima entropia, onde em processos termodinâmicos tidos como espontâneos e isolados(que não a tocam de energia com o meio externo), a entropia é caracterizada como o grau de desordem do sistema, e que em outras palavras a evolução do mesmo acontece apenas em direção a uma desordem [20], por tanto, a ciência do Caos apesar de não está em toda consonância com a segunda lei da termodinâmica ela à viola, já que a evolução dos seus fenômenos depois de um curto intervalo de tempo, acontecem de maneira imprevisível ou desordenadas.

3. CONTRIBUIÇÃO DOS FRACTAIS PARA A CIÊNCIA DO CAOS

Tentar encontrar respostas para fenômenos não-lineares é bastante convidativo no mundo físico, porém traz muitas dificuldades, e usar de artifícios matemáticos para explicar o universo, não é algo que causa surpresa, pois nas últimas décadas aconteceram investigações cujo tema central foi a construção e o estudo de entidades geométricas, onde tais entidades foram chamadas de fractais [2], pelo seu iniciador, o Matemático *Benoit Mandelbrot*, estudo que contribuiu de forma grandiosa para a ciência do Caos.

Quando um corpo que apresenta uma ampliação exata da geometria de suas partes recebe o nome de fractal geométrico [24], investigados a fundo no início do século XX, para mostrar objetos matemáticos interessantes, para além das curvas e superfícies regulares da geometria tradicional, como por exemplo:

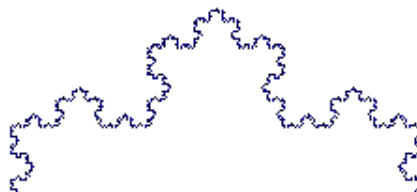
Figura 3.1: O pente de Cantor



Fonte: retirada de [24]

O pente de Cantor é o conjunto resultante da remoção sucessiva do terço central de um segmento de reta. A geometria fractal ainda pode ser apresentada através da curva de Koch, que é construída a partir de um triângulo equilátero onde cada curva corresponde a um dos lados do triângulo equilátero é auto semelhante [24]

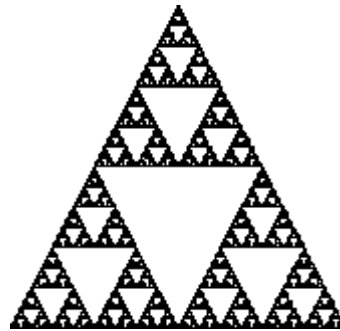
Figura 3.2: A curva de Koch



Fonte: retirada de [24]

Outra forma bem interessante é o triângulo de *Sierpinski* que pode ser definido como o conjunto resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro, quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos iguais [24].

Figura 3.3: Triângulo de Sierpinski



Fonte: retirada de [24]

Além de várias outras formas, o fractal pode ser encontrado na própria natureza por exemplo: na couve flor, nos brócolis, em um relâmpago, até mesmo no sistema arterial do coração [24]. Pois essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial, que pode ser considerada característica. Estes entes constituem uma imagem de si própria em cada uma de suas partes, propriedade essa conhecida como autossimilaridade [12].

É possível afirmar que essa geometria está intimamente ligada a teoria do Caos [12]. As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas, fornece uma certa ordem ao Caos, razão de ser às vezes, considerada como sua linguagem, que busca padrões dentro de sistemas por vezes difíceis de serem interpretados, como por exemplo: terremotos e avalanches.

Em 1978, *Mandelbrot* publicou um livro chamado de *Fractais: Form, Change and Dimension* [12], um livro que apresentava formas geométricas bem ilustrativas, algo que chamou a atenção do físico *Christopher Scholtz*, um professor da Universidade de *Columbia*, localizada no Norte dos Estados Unidos, um bom lugar para se estudar terremotos, ele se especializava no estudo de forma e estrutura que apresentava a terra sólida. Parecia que tudo que *Scholtz* precisava estava reunido em um único livro, e isso fez com que ele não parasse de pensar em fractais, para descrever, classificar e medir os pedaços de seu mundo científico, pois, foi a percepção dessa geometria que ajudou vários cientistas que estudavam a maneira

pela qual as coisas se fundiam, se separavam e se fragmentavam.

A teoria do fractal através da autossimilaridade descreveu os terremotos da seguinte maneira, um terremoto em maior escala é apenas um terremoto pequeno que pode ser ampliado de tamanho, e seu padrão não se modifica se observado em escalas diferentes, no entanto é difícil romper o hábito de pensar nas coisas em termos do seu tamanho ou duração [12]. Seria como visualizar a superfície euclidiana de um capô de fusca, aparentemente seria possível ver uma superfície lisa praticamente sem imperfeições, porém se fosse mudada a maneira de observar a imagem para uma forma mais ampliada por exemplo, certamente poderia ser visualizada várias ondulações na tampa do *Volkswagen*.

Assim como *Scholtz* estudava os terremotos, pode-se pensar também no estudo de avalanches, como modelo de formas e estruturas de terra sólida [12] , por exemplo se grãos de arroz forem sobrepostos em sequência sobre uma mesa, após algum tempo esse processo iria gerar uma pilha de grãos, pois esta não cresceria para sempre, e em algum momento os grãos iriam ocasionar um desmoronamento, e a adição de um grão a mais poderá ou não ter um caráter especial, o grão em questão criaria três situações prováveis de acontecimentos, na primeira: o grão pode levar a pilha a uma avalanche total, na segunda apenas alguns grãos desmoronam da pilha, gerando uma pequena avalanche em menor escala, na terceira situação provável, a avalanche não acontece, demonstrando um comportamento Caótico [13].

A realidade é que, se pode prever a frequência das avalanches, mais não quando ela irá ocorrer ou o seu tamanho. Um fato surpreendente é que avalanches maiores podem ocorrer com menor frequência que as menores [27]. E ainda mais surpreendente é que existe uma lei de potência para explicar esse acontecimento, pois dobrando o tamanho da avalanche, essa se torna duas vezes menos frequente. É difícil de compreender que a aparente complexidade de uma pilha de grãos colapsa na simplicidade de uma lei de potência, essa lei é dita na física como a relação entre 2 (dois) escalares, por exemplo x e y , atribuindo uma constante de proporcionalidade a e o expoente k ambos constantes, podendo ser escrito por:

$$y = ax^k \quad (1)$$

Esse conceito é tratado de forma mais ampla no **apêndice A** deste trabalho.

4. MATERIAIS GRANULARES, CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA.

O avanço no estudo de formas geométricas fez com que o campo de materiais granulares fosse elevado a um outro patamar, antes restrito aos círculos de engenharia, devido as suas várias aplicações e ao seu uso constante em diversos setores da indústria. Esses materiais podem ser definidos como aglomerados de sólidos, onde o tamanho das partículas varia de poucos micrometros a muitos metros [18]. Cimento, areia, argila, brita, cascalho e arroz são modelos de materiais granulares.

A criticalidade auto-organizada demonstrada por alguns sistemas, pode ser apresentada através de formas que parecem totalmente desconexas. Exemplos dessa criticalidade pode ser observada na dinâmica de placas tectônicas, no mercado de capitais e no tráfego de veículos em rodovias. E foi com o aprofundamento no estudo sobre materiais granulares que se tornou possível verificar os impactos produzidos da criticalidade em várias áreas do conhecimento [18].

Figura 4.1: pilha de areia



Fonte: retirada de [10]

O modelo da pilha de areia, pode ser considerado como exemplo de sistema complexo, pois tal modelo foi desenvolvido por Per Bak [19], para demonstrar o surgimento da criticalidade auto-organizada, e mostrar que apenas conhecer as propriedades do grão, tamanho, massa e formato, não é suficiente para determinar o momento em que uma avalanche vai ocorrer. Pois a medida em que os grãos são adicionados a pilha, E mesma ganhar altura suficiente para ultrapassar o tamanho da base, os deslizamentos de grãos em proporções maiores irão acontecer envolvendo todo o sistema, e não apenas vizinhos locais, até que surja uma forma de organização.

A pilha entrara em um estado conhecido como estacionário, pois, à medida em que grãos entram no sistema é proporcional à medida em que eles saem do sistema, e isso ocorre por causa de uma inclinação constante da pilha, chamada de ângulo de estabilidade, não sendo possível prever o tamanho e a intensidade das avalanches, devido a possível existência de interações de deslizamentos locais, que podem gerar ou não grandes avalanches envolvendo todo o sistema, esse estado é caracterizado como criticalidade auto-organizada [19].

Esse mesmo pensamento pode ser comparado a uma floresta, cuja rede de árvores forma um estado crítico, onde uma pequena faísca pode se alastrar de modo a destruir toda floresta, ou destruir um pequeno número de árvores, ou não ter efeito algum [13].

5. TRANSIÇÃO DE FASE, ESTADO CRÍTICO E TRANSIÇÃO DE ENGARRAFAMENTO

5.1 ESTADOS FÍSICOS, TRANSIÇÃO DE FASE, ESTADO CRÍTICO

A análise da passagem do estado físico de uma substância para outro estado, a princípio pode parecer algo trivial, porém nem tudo é o que parece. Tomando como modelo o comportamento de um gás ideal submetido a uma mudança de fase, se durante a mudança de estado, o gás ficar exposto a influência de meios externos, as observações dos resultados ficarão comprometida, já que a mudança de uma condição física para outra está ligada a uma variação descontínua nas suas propriedades, devido a alteração infinitesimal proporcionada pelo ambiente na qual ela se encontra [6].

Essas transições podem ser verificadas através de muitos exemplos presentes no dia-a-dia, porém, aqui será adotado como modelo de substância a ser observada à água, por se tratar do meio mais comum para ser observado, e por que ela tem características importantes além das várias aplicações em seus três estados: sólido, líquido e gasoso [6]. Exemplos como o de uma garrafa contendo água, sendo retirada de um refrigerador, depois de sofrer a passagem do líquido para o sólido, denominado de solidificação, e após algum tempo, ser colocada na condição de repouso, pode-se verificar novamente uma mudança, no entanto agora do sólido para o líquido, no processo conhecido como fusão [26]. Outras transições podem ser representadas através do preparo de alimentos, que para serem consumidos necessitam da adição da água, onde a mesma precisa estar no seu estado de ebulição, condição em que ocorre a mudança do estado líquido para o estado gasoso [3].

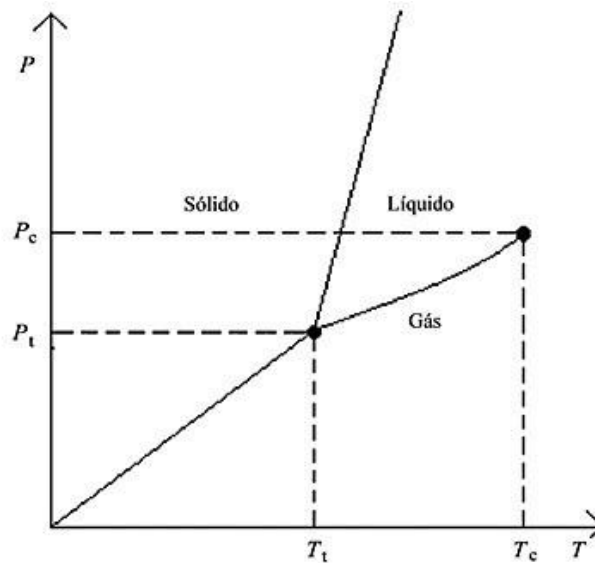
A passagem entre uma fase e outra é tratada como descontínua, quando a mesma está associada a uma mudança microscópica, considerando a condição de vapor d'água, onde as moléculas se localizam umas distantes das outras, e a interação entre elas são significativamente fracas. Se sua densidade for pequena, pode ser utilizado o modelo de gás ideal, que pressupõe que a interação seja desprezível. Mas, no entanto, é sabido que no cotidiano o contato delas com o ambiente externo é constante, e por essa razão não deve ser desprezada [6].

Retornando ao exemplo da garrafa sendo retirada do refrigerador, se for submetido a ela um aumento de temperatura, as partículas do gelo, irão se agitar com uma frequência maior, quebrando a organização entre elas, e passando a ocupar parte do recipiente que as contém, dessa observação é possível notar que o material pode se comportar de maneiras diferentes dependendo do seu estado, já que essa é uma característica que meios sólidos não a possui, porque ao contrário de outros estados, ele exibe uma forma de organização bem definida, onde suas moléculas estão dispostas sobre uma rede cristalina, e não possuem liberdade de locomoção umas em relação as outras, ainda podendo exibir sua estrutura molecular de muitas maneiras distintas, pois algumas fases cristalinas da água são acessíveis apenas a pressões muito altas [6].

Entender as alterações no comportamento de uma substancia é imaginar que existe diferentes formas que ela pode assumir. E existem várias condições que podem alterar a maneira pela qual sua estrutura está organizada, dentre elas os processos termodinâmicos envolvendo pressão e temperatura, onde as mesmas podem estar sendo utilizadas através de condições já estabelecidas por meio de medidas experimentais, como no exemplo da temperatura de ebulição da água, que pode ser verificada com temperatura de 100°C (cem graus célsius), e a pressão de 100000Pa (cem mil pascais). Esses dados são de grande utilidade para resolver problemas de medidas termodinâmicas [28], pois se o valor da pressão for diminuído, as moléculas do líquido encontrarão mais facilidade para escapar do material e se transformarem em vapor. Não sendo necessário elevar tanto a temperatura para que a água entre em ebulição.

Considerando o diagrama de fases de um fluido simples em termos dos campos termodinâmicos, com valores de pressão iguais a: P_t (Pressão no ponto triplo) e p_c (pressão no ponto crítico) e valores de temperatura iguais a: T_t (temperatura no ponto triplo) e T_c (temperatura no ponto crítico). Esses parâmetros se tornam importantes para determinar as condições de estado do fluido mais adiante. As curvas apresentadas no gráfico a seguir são chamadas de fronteiras de fase, e indicam a coexistência de fases com densidades diferentes mais com o mesmo valor dos campos termodinâmicos [28]. E a região delimitada através das linhas no plano cartesiano servem para identificar as formas físicas do material.

Figura 5.1: Diagrama de fases de um líquido simples



Fonte: Retirada de (28).

A coexistência de dois estados físicos diferentes, pode ser encontrada utilizando valores específicos de pressão e de temperatura, por exemplo, para uma temperatura $0,01^{\circ}\text{C}$, pode-se calcular um valor correspondente a pressão de 600Pa , para delimitar um ponto entre o sólido e líquido [28], ou explicar o conceito de pressão de vapor, que é a pressão que um gás exerce na coexistência entre as partículas do gás e do líquido ou entre as do gás e do sólido. Pode-se ainda determinar que mais de uma fase coexista em um único ponto, o que significa dizer que nesse ponto da fronteira existem duas frações de estados distintos, mas que permanecem em equilíbrio, não havendo variações para nem uma das partes [20].

Uma dada fronteira pode coexistir com duas ou mais fases pacificamente, entender seu funcionamento se torna de grande valia, devido sua grande generalização e obtenção de dados do modelo para fins comparativos. No ponto P_t e T_t [19], indicado na Figura 5.1 do diagrama, há uma coexistência de três fases distintas com valores diferentes para as densidades termodinâmicas. O ponto triplo da água pura é dado por $T_t = 2,73,16\text{k}$ e $P_t = 4,58\text{mmHg}$, [28] é utilizado atualmente como padrão para escala Kelvin de temperatura. Para esses valores encontra-se localizado o ponto triplo da matéria, é nesse ponto que uma substância pode se apresentar de forma sólida, líquida e gasosa sem sofrer qualquer alteração de equilíbrio.

O diagrama ainda exhibe outro ponto bem estabelecido, no ponto P_c e T_c que representa o fim da coexistência de fases, no caso da água na temperatura crítica é

da ordem de $647,15K$ (seiscentos e quarente e sete, quinze Kelvin) e $217,7atm$ (duzentos e dezessete atmosferas) [20]. Esse ponto é chamado de ponto crítico, localizado na fronteira entre o líquido e o gás, indicando que há um limite de estado nesse ponto, pois ao passo em que se aumenta a pressão e temperatura nas mesmas proporções caminhando para o termino da coexistência de fases, o líquido se torna menos denso, e ao se aproximar desse ponto, não haverá mais diferença entre líquido e gás, e a substancia em questão será tratada apenas como um fluido já que as duas fases se tornaram indistinguíveis uma da outra [27]. Essa definição se torna importante, pois ao passar uma substancia de um estado para o outro, por meio da fronteira de fase, a mudança ocorre sem problemas, porém, o mesmo não acontece passando pelo ponto crítico, já que no ponto em questão não existe mais diferença entre um líquido e um gás.

A aparência das diferentes fases da matéria facilita a compreensão sobre suas propriedades como por exemplo: a água no seu estado líquido é visivelmente diferente do seu estado sólido, ou ainda pode ser classificada pelas diferenças de organização interna. Já que a análise do estudo de uma transição de fase pode ser feita por meio de descobertas experimentais de um conjunto de valores termodinâmicos, em que parâmetros de uma transição líquido-gás, feita em 1822 por *Chales Cagniard de la Tour* [14], caracterizou um trio de valores para a transição entre a fase líquida e gasosa do álcool, através de temperatura, pressão e volume.

E subsequentemente, o físico e químico, Irlandês *Thomas Andrews*, em 1863 [14], mostrou através de experimentos, que um grande número dos fluidos, nas fases líquida e gasosa, onde as mesmas podem ser continuamente transformadas uma na outra em torno de um mesmo ponto, em um tipo de transições de fase que ele chamou de contínuas por essa razão. *Andrews* observando o CO_2 , definiu o ponto em que tal fato pode ser observado, classificando-o como ponto crítico, uma noção primitiva para a atribuição de um trio de valores termodinâmicos.

Em 1873 *Josiah Willard Gibbs* [14], apresentou o diagrama de fases, um gráfico continha variáveis termodinâmicas como pressão e temperatura em diferentes regiões correspondentes a diferentes fases, tal gráfico serviu para dar uma nova definição sobre ponto crítico, e na região onde duas fases coexistem ele denominou de “curva de coexistência de fase”, e para *Gibbs*, a definição mais satisfatória de ponto um crítico é dada como localização em um diagrama de fase onde a curva de coexistência de

fase termina, pois essa definição mostrou ser aplicável um grande número de sistemas de fluidos e imãs.

No mesmo ano o físico *Johannes Diderik van der Waals* [14], chegou a primeira equação de estado, uma representação matemática de um sistema em termos de suas propriedades termodinâmicas, neste caso, mais especificamente direcionada para fluidos no ponto crítico.

No caso do ponto crítico para dos materiais magnéticos a temperaturas críticas só foram realizadas posteriormente por *Pierre Curie*, em 1895, onde o mesmo foi localizado primeiramente por meio de uma derivada usando a teoria de *Pierre Weiss* de ferromagnetismo [14].

Avanços experimentais importantes na observação da transição de fase de uma substância foram realizadas por *Kamerlingh Onnes*, em 1910 [14], em Leiden, na Holanda, ele foi o primeiro a liquefazer hélio, resfriando sua fase gasosa usando hidrogênio líquido e o comprimindo abaixo de 100atm de pressão.

O físico Holandês, *Willem Hendrik Keesom* [14], que estudou com *Van der Waals* e foi assistente de *Kamerlingh Onnes*, no ano de 1900, observando experimentalmente pesquisas em hélio, ele forneceu dados importantes para a primeira classificação de transição de fase, a descontinuidade de uma segunda derivada de energia livre. Em 1920 ele concretiza de forma definitiva sua descoberta, e em 1932 *Keesom* observa uma transição incomum no hélio líquido. E essa descoberta levantou questões sobre quantos tipos deferentes de fase podiam existir ou ser classificadas.

Em 1933, o físico Australiano *Paul Ehrenfest* [14] deu início ao primeiro esquema que aborda de maneira abrangente a classificação de uma transição de fase, que também pode ser denominado de "a classificação de *Ehrenfest*. Onde a classificação de transição de fase do hélio foi considerada como uma "transição de segunda ordem", e a fase ordinária transita em "transições de primeira ordem". Ele considerava as mudanças de fase por meio do comportamento da energia livre como uma função de outras variáveis termodinâmicas, classificando as transições de fase pela menor derivada da energia livre que é descontínua na zona de transição.

Ehrenfest chamou de transições de fase de primeira ordem as que mostravam uma descontinuidade na primeira derivada da energia livre com respeito a algumas variáveis [14]. Podendo citar como exemplo as transições de sólido, líquido e gás,

porque envolvem uma alteração descontínua em densidade, que é o inverso da primeira derivada da energia livre com referência pressão.

As transições de fase de segunda ordem são contínuas ao longo da transição na primeira derivada da energia livre com referência ao campo externo, porém, exibem descontinuidade na segunda derivada [14]. Onde essas englobam as transições de fase ferromagnéticas, que representa a primeira derivada da energia livre com relação à intensidade do campo magnético aplicado, aumenta continuamente a começa de zero com forme o grau de agitação das moléculas é diminuída abaixo da temperatura de Curie. A suscetibilidade magnética, na segunda derivada, altera de forma descontínua, por meio da classificação Ehrenfest, podendo apresentar, transições de fase de terceira, quarta, e de ordens maiores.

É muito comum observar fenômenos críticos através de estudos sobre termodinâmica ou eventos que apresentam comportamentos singular na região crítica, com divergências que podem ser caracterizadas por expoentes críticos, ou ainda em algumas grandezas que apresentam caráter de universalidade, mostrado por valores de expoentes críticos iguais, a teoria de Van der Waal, para análise de fluido, e a de Pierre Curie para ferro magnetismo [27], são teorias clássicas, que fornecem valores múltiplos indicando uma universalidade para expoentes críticos, essas teorias ganharam maior destaque em 1960, graças a criação de técnicas para realização de experiencias próximas ao ponto crítico. O modelo das transições de fase contínuas e as transições de fase para ferromagnetismo, com relação a temperatura de Curie, onde $T_c = 1043K$. Nela o *spin* de cada átomo apresentam um comportamento peculiar a respeito do seu campo magnético local, pois acima de T_c , os *spins* apresentam um comportamento aleatório onde eles apontam em direções diferentes, e em um dado momento seus campos magnéticos se cancelam [26]. Já que, há temperaturas muito elevadas é muito difícil um arranjo de *spins* conseguir manter-se ordenados. Há simetria para valores de temperatura indica no momento em que a temperatura esta baixa, os *spins* se alinham espontaneamente e os campos magnéticos se somam produzindo um campo magnético macroscópico.

A teoria (uniaxiais) que prevê que fluidos e os imãs tem exatamente o mesmo comportamento crítico. Foi confirmada através de experimentos sofisticados que é considerado uma vitória para a física Teórica no século XX [26]. Esse caráter universal

também pode ser aplicado em transições de fase em fluidos complexos como: polímeros, cristais líquidos, gases e espumas entre muitos outros tipos de materiais.

Esse avanço na ciência deu início um grande número de investigações com respeito as interações microscópicas na determinação de expoentes críticos e funções de escalas, e as respostas para esses questionamentos foram dadas através de um grupo de renormalização, mostrando que para a mudança de uma escala, as equações que descreviam o sistema, também passam por uma transformação, restando apenas alguns aspectos ainda relevantes [26].

Essas descobertas indicam a presença de mecanismos profundos, geralmente simples, ligados ao comportamento de sistemas críticos, direcionando cientista a investigarem e colocarem em evidencia semelhas entre problemas que se apresentavam de maneira muito diferentes [26]. Atualmente as descobertas realizadas no campo de fenômenos críticos possuem várias aplicações, como por exemplo para a física de polímeros é usa a ideia e método da teoria de fenômenos críticos como a teoria percolação, referente a fenômenos críticos geométricos aplicados a descrição das transições vítreas e dos geles.

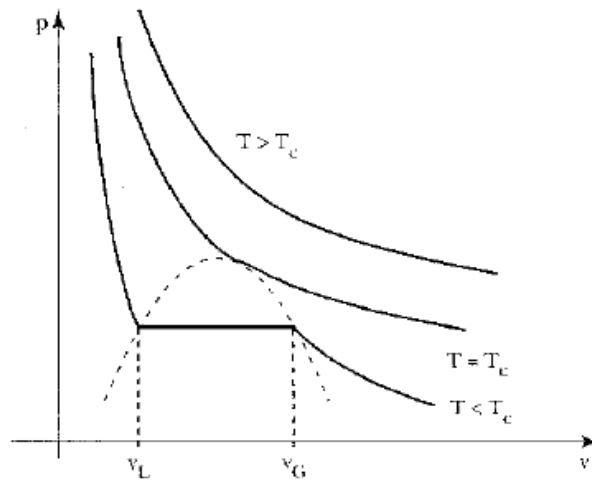
E foram os dados dessas experiencias somadas a resultados teóricos que levaram a comprovação de uma classe de universalidade. Em 1970, Kenneth Wilson [27] que propôs uma teoria de renormalização para incorporar essas ideias de lei de escala e a Universalidade dos expoentes críticos, trabalho que lhe rendeu um prêmio Nobel, onde calor específico, compressibilidade são exemplos de derivadas termodinâmicas que nas vizinhanças de um ponto crítico e exibem um comportamento singular, caracterizando o estado crítico da matéria.

E produzindo um expoente crítico para o fenômeno a partir do diagrama para $P - V$, (onde P é a pressão e $V = v/N$, sendo que V é volume específico igual a (v volume total e N o número de moles) [28]. Na coexistência de fase líquida-gasosa, abaixo do ponto crítico, a água possui densidade específica V_L , e a gasosa, é representada por V_G . Ao passo em que a temperatura se aproxima da região crítica, a diferença entre V_L e V_G , cai drasticamente, levando a uma condição de T_c igual a zero, e a partir desse comportamento é obtido o expoente crítico, que pode ser verificado a partir de [27].

$$V_L - V_G \approx \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta \quad (2)$$

A temperatura crítica depende do fluido que será analisado, o fator β , pode ser obtido a partir de experimentos, é aproximadamente igual a um terço para qualquer fluido [27]. Este é um expoente crítico que apresenta caráter universal.

Figura 5.2: isotermas nas vizinhanças de um ponto crítico



Fonte: Retirada de [28].

O gráfico indica que há um estágio de coexistência de duas fases para o volume específico V_L e V_G , para $T < T_c$, exibindo a coexistência, para uma dada pressão, de uma fase líquida V_L e uma fase gasosa V_G [28]. A medida que a temperatura T cresce, a diferença $\Psi = V_G - V_L$, fica menor, anulando-se finalmente no ponto crítico (definindo Ψ como a diferença de densidades, $\rho_L - \rho_G$, onde $\rho = 1/v$) acima da temperatura crítica, a pressão é uma função estável do volume específico. Dessa maneira o expoente crítico caracteriza o comportamento assintótico de Ψ quanto $T \rightarrow T_c$,

$$\Psi \sim B \approx \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta \quad (3)$$

Onde o parâmetro B e a temperatura crítica T_c não possuem características de universalidade, no entanto o expoente β é aproximadamente $1/3$ para quaisquer fluidos (ou no caso de grandezas análoga sem outros sistemas físicos).

5.2 TRANSIÇÕES DE ENGARRAFAMENTO

O estudo sobre transição de fase e ponto crítico, se tornam de grande importância para a compreensão de outro estudo, a transição de engarrafamento envolvendo muitos corpos, onde a análise dos mesmos está ligada as vibrações que existem entre-se, e a observação dessas perturbações se torna importante para entender as correlações de curto alcance existente entre cada componente do material e o deslocamento exponencial nas regiões próximos de um ponto crítico.

Os materiais granulares assim como várias substancias são compostas de átomos e moléculas, o que indica que os mesmos podem assumir vários estados para se ordenar, na passagem de uma fase sólida para líquida, é possível fazer alguns ajustes nas substancias, podendo observar uma interrupção no movimento dos grãos de forma brusca, e isso pode acontecer durante a mudança de um estado para outro, em razão da formação de estruturas coletivas que impedem o escoamento do material.

Nesse modelo é importante lembrar que os grãos ficam sujeitos a um desmoronamento que pode ocorrer devido a uma tensão existente entre os mesmos, pois a interação entre as partículas granulares é apresentada de forma repulsiva [18]. Levando a análise desse comportamento a outro patamar, já que a avalanche de grãos pode ocorrer por meio de outras variáveis além do modelo proposto pela presença de um agente externo como “vibrações”.

Outros estudos vêm sendo desenvolvidos de maneira experimental com a utilização de grãos confinados em silos, e a motivação para utilização desses experimentos é medir as descargas de grãos que passam por um orifício presente na parte central do equipamento, pois ao passar na base do silo é possível medir a tensão exercida pelo material e sua rigidez [18]. Para tanto é sabido, que diversos materiais possuem rigidez variadas, no entanto para que possam fluir, basta que tensões relativamente pequenas sejam atribuídas a esses materiais, que ora exercem o comportamento no estado sólido e ora no estado líquido, é o caso por exemplo de materiais granulares, coloides, emulsões, espumas entre outros [18].

Outro dado relevante para esse estudo, está ligado a variação da Temperatura e densidade, variáveis termodinâmicas que podem ser ajustadas para uma mudança de estado solido-liquido, pois, para o caso de materiais que antes escoavam com

facilidade [18]. Essa mudança pode fazer com que os mesmos passem a obter uma variação na tensão do material granular, que pode ser suficiente para criar um arco de bloqueio na passagem dos grãos, essa mudança de estado recebe o nome de transição de engarrafamento.

Muito pouco se sabe sobre o momento de formação dos arcos de bloqueio, e nos últimos anos com o avanço das técnicas experimentais, com estudo em laboratórios, com o desenvolvimento dos supercomputadores fazendo uso de simulações, tudo isso contribuiu de forma significativa no estudo sobre a ocorrência de bloqueio no fluxo de grãos que é proporcionado pela formação de um arco. Mostrando que esse estudo está ligado a probabilidade de interferência de uma função na saída do material, onde essa probabilidade pode ser entendida com um modelo geométrico simples em que o bloqueio no arco acontece devido a trajetória aleatória na descarga dos grãos. Somada aos efeitos de atrito entre as esferas e o ângulo de abertura [17].

Os materiais granulares apresentam como uma de suas características marcantes a formação de arcos. Essa configuração pressupõe que os arcos sejam responsáveis pela propagação não uniforme de forças e mudanças na fração do material no recipiente, dando aos arcos a definição de estruturas que consistem em estabilizar os grãos. Pois se uma partícula for removida do arco a estrutura colapsa sob efeito da gravidade [1].

6. DESCRIÇÃO DO MODELO A SER COMPARADO

Seguindo o modelo de [18], para descrever as descargas de pilhas granulares de tamanho bidimensional. Será apresentado aqui dados importantes a respeito da fundamentação usada para a verificação do SOC, e posteriormente essas análises servirão para fazer as comparações com o trabalho aqui desenvolvido.

Foram utilizadas na fundamentação, o algoritmo de dinâmica molecular e *Velocity-Verlet* [30], para simular a interação entre os vizinhos mais próximos, e outros modelos também foram usados como *spring-dashpot* [8] que simula a interação de contato na direção normal e a interação elástica e o modelo *Cundall and Strack* [5], que simula a fricção Coulombiana na direção tangencial.

Tais modelos são representações específicas das Leis de Newton exceto o *Cundall and Strack* está relacionado a força elétrica. No entanto, todos estão sujeitos a força gravitacional $\vec{g}$, apontando para baixo na direção vertical [18]. Em decorrência do problema ser tratado em 2D, as forças normais e tangenciais na partícula i e na partícula j são dadas por:

$$\vec{F}_i^{(n)} = H(\Delta_{ij})(K_n \Delta_{ij} - \gamma \vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}) \vec{n}_{ij} \quad (4)$$

$$\vec{F}_i^{(\tau)} = H(\Delta_{ij}) \min(|\vec{f}_r|, \mu |\vec{F}_i^{(n)}|) \text{sgn}(\vec{f}_r \cdot \vec{\tau}_{ij}) \vec{\tau}_{ij} \quad (5)$$

Na equação, H é uma função degrau que é dada por:

$$H(x) = 1, \text{ se } x \geq 0 \text{ e } H(x) = 0 \quad (6)$$

Caso contrário, a profundidade de penetração é dada por:

$$\Delta = \frac{d_i}{2} + \frac{d_j}{2} - |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (7)$$

A força resultante tangencial em um estante t , $\vec{f}_r(t)$ é descrita pela equação:

$$t, \vec{f}_r(t) + K_t \delta_t \left(\frac{d_i}{2} - \frac{d_j}{2} - \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\tau}_{ij} \right) \vec{\tau}_{ij} \quad (8)$$

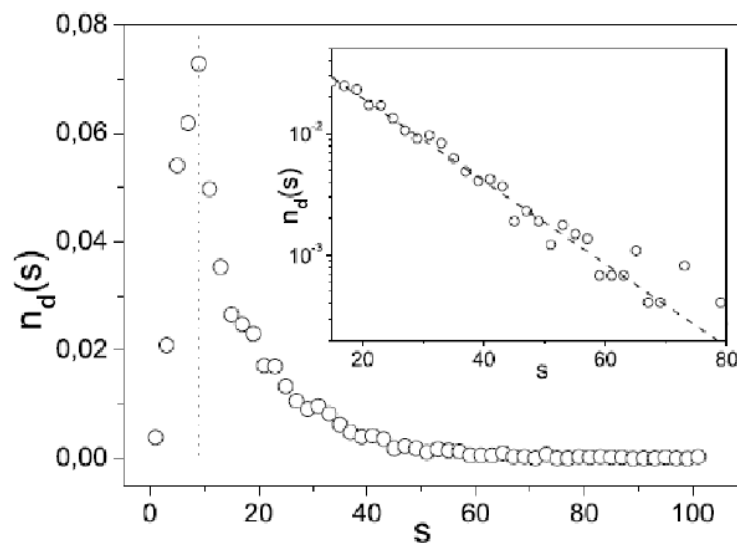
6.1 DESCRIÇÃO DO SILO 2D

No exemplo do silo em 2D, a metodologia utilizada para investigação da transição de engarrafamento, se inicia com a caracterização do tamanho e peso padrão das esferas de aço correspondentes a $(1,00 \pm 0,01)mm$ de diâmetro e $(4,00 \pm 0,01)mg$, em seguida o material granular será confinado em um silo bidimensional onde é possível controlar a largura de um orifício localizado na base. A largura do orifício em unidades de diâmetro do grão é representada por d . a largura da base é equivalente a 200 diâmetros dos grãos.

Após cada evento de engarrafamento, o escoamento é restabelecido através de um jato de ar que é lançado no sentido oposto ao escoamento. O silo é preenchido com uma quantidade da ordem de 10^5 grãos, que são depositados de maneira uniforme sobre toda a extensão da base. Ao longo do experimento, o silo vai sendo recarregado para manter inalterada a pressão próxima ao orifício.

A distribuição $n_d(s)$ do tamanho das avalanches s , definida como a descarga entre dois engarrafamentos consecutivos, para $2,17d$ (d é o diâmetro do grão), é exibida na Figura 6.1 O gráfico apresenta um máximo na região de pequenas avalanches e depois decai exponencialmente à medida que s aumenta. As distribuições para os outros valores de d apresentam as mesmas características.

Figura 6.1: Distribuição do tamanho das avalanches, definida como a descarga entre dois engarrafamentos consecutivos



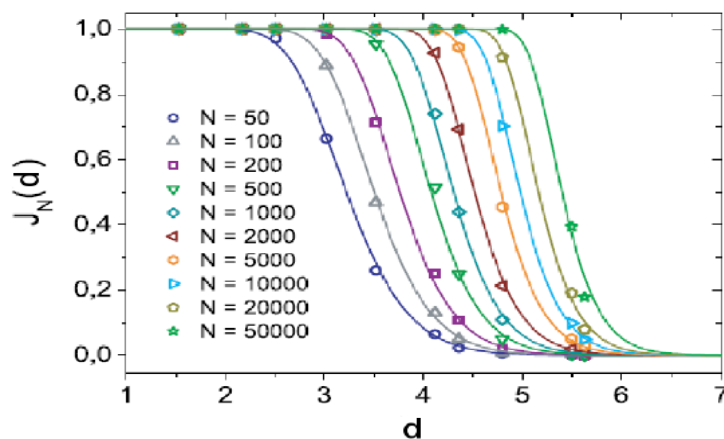
Fonte: retirada de [18]

A probabilidade de engarrafamento $J(d)$ é definida levando em conta a distribuição de avalanches, esse dado é de grande importância para caracterizar o estado não engarrafado e o escoamento livre em um período de tempo indefinidamente longo. $J(d)$, é então definida como o limite da $J_N(d)$ quando $N \rightarrow \infty$, onde $J_N(d)$ é a probabilidade do sistema engarrafar antes que N grãos atravessem o orifício esses dados também são acessíveis através de [1], e pode ser calculado usando a seguinte equação:

$$J_N(d) \equiv 1 - \sum_{s=N}^{\infty} nd(s). \quad (9)$$

A figura 6.2 mostra o gráfico de $J_N(d)$ para vários valores de N . Os símbolos representam os dados obtidos do experimento e as linhas representam um modelo probabilístico proposto pelo autor para a formação de arcos. Em todo o gráfico é possível observar uma queda acentuada de $J_N(d)$ em uma determinada região do domínio. A região em que ocorre a queda se desloca para a direita a medida que N aumenta. É possível mostrar que o gráfico de $J_N(d)$ está tendendo para uma função degrau, pois existe de uma largura crítica separando uma fase engarrafada de uma fase fluida. Se, no entanto, o gráfico estivesse se deslocando indefinidamente no sentido de d positivo, convergindo para $J(d) = 1$, não haverá transição, e com certeza o escoamento será interrompido em um tempo finito — havendo uma configuração estável compatível com orifício de qualquer largura.

Figura 6.2: Gráficos da probabilidade $J_N(d)$ em função de d .



Fonte: retirada de [18]

O modelo para a formação de arcos pensado pelo autor possui um caráter semi-empírico e se baseia na hipótese de que os eventos que consistem na passagem de um grão pelo orifício são independentes e possuem a mesma probabilidade. Com isso, obtém-se uma relação entre a probabilidade de engarrafamento e o tamanho médio das descargas $\langle s \rangle$. Nesse ponto, o modelo precisa ser alimentado com uma expressão para $\langle s \rangle$, e é aí que reside seu caráter empírico. A expressão para $\langle s \rangle$ é obtida dos dados experimentais. Estes, entretanto, podem ser descritos com a mesma precisão por uma lei de potência $\langle s \rangle = C/(dc - d)^\gamma$, onde C é uma constante de ajuste para $\langle s \rangle$, e a saída crítica, aquela onde não ocorrem mais engarrafamento é descrita por dc , porém, o valor de γ , é negligenciado no trabalho. Além de outras variáveis importantes que foram encontradas em [34], que indica os valores obtidos para s Além dos apresentados na eq. (9), para fazer as comparações dos dados do gráfico de $Jn(d)$ em função de d que é o tamanho das saídas. Será necessário conhecer os seguintes dados: taxa de decaimento α ; quantidade de medidas M ; número de grãos antes da avalanche n ; número de grãos que caem do silo n_o ; Número médio de grãos N ; número de grãos no silo após a avalanche m ; probabilidade de engarrafar p , probabilidade do fluxo permanecer sem formar arcos de bloqueio q ; os parâmetros de ajuste da taxa de decaimento A, B, γ ; função distribuição $F(n)$; Os dados citados, são usados nas seguintes equações:

Função distribuição

$$F(n) = 1/m = e^{-\alpha(n-n_o)} = q^{(n-n_o)} = e^{(n-n_o)\ln q} \quad (10)$$

Taxa de decaimento

$$\alpha = \ln q = -\ln(1 - p) \quad \text{Ou} \quad \alpha = A e^{-Bd^2} \quad (11)$$

Probabilidade do fluxo permanecer constante

$$q = (1 - p) \quad (12)$$

Probabilidade de interferência

$$J(d) = 1 - (1 - p)^{m-n_o} = 1 - e^{-\alpha(m-n_o)} \quad (13)$$

Número médio de grãos por médio por avalanches

$$N = A(d_c - d)^{-\gamma} \text{ Ou } N = A^{B/(d_c - d)} \text{ ou ainda } N = A - 1 * e^{-Bd^2} \quad (14)$$

Probabilidade para que o fluxo trave antes que N esferas caiam.

$$Jn(D) = 1 - e^{-NAe^{-B(n_0 D)^2}} \quad (15)$$

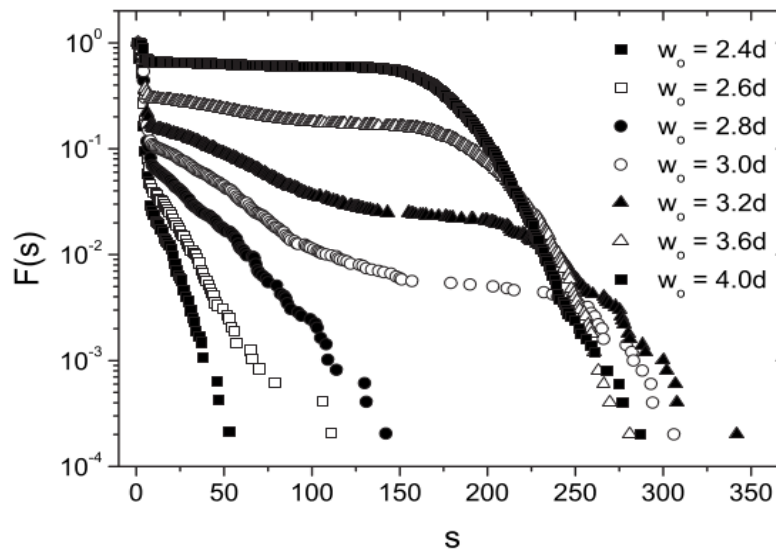
Resolvendo a Eq.10, encontra-se $F(n) = 2.5 * 10^{-4}$; utilizando as Eq. 10 e 11, encontra-se $\alpha = 3.25 * 10^{-3}$; usando as Eq.10 e 11, encontra-se $q = e^{3.25 * 10^{-4}}$; utilizando a Eq.12 encontra-se $p = 1 - \sqrt[4000]{e^{13}}$; usando a Eq.13, encontra-se $J(d) = 0.99$; usando a Eq.11 e 14; encontra-se $N = 3.07 * 10^{-4}$; sendo ai e A e B parâmetros de ajuste do experimento obtidos através de, nesse caso $A = 0.846$ e $\gamma = (6.9 \pm 0.2)$ os valores são encontrado em [34] e utilizando a Eq.14 encontra-se o valor de $B = 6.76928 * 10^{-4}$, agora em posse de todos esses valores, pode ser calculado a Eq. 13 para o valor de $Jn(d)$.

Seguindo com objetivo de investigar a existência da *SELF-ORGANIZED CRITICALITY-SOC* e os efeitos causados pela largura de saída do silo bidimensional sobre as descargas de grãos, como pode ser analisado em [18], é feito um estudo de forma diferente para pilhas de tamanhos diferentes de substratos $L = 2d, 50d, 75d, 100d$ e $125d$.

O número médio de partículas restantes na pilha, logo depois do desmoronamento é aproximadamente: $N_{25} = (3 \pm 1) \cdot 10$, $N_{50} = (1,9 \pm 0,3) \cdot 10^2$, $N_{75} = (5,0 \pm 0,5) \cdot 10^2$, $N_{100} = (1,6 \pm 0,1) \cdot 10^3$. A variação do parâmetro D é de 1.0d, a 7.0d em passos de 0,2d.

Nesse aspecto é importante ressaltar que o processo simulacional é uma função de distribuição para desmoronamento da pilha formada por materiais granulares de tamanhos distintos passando por $F(s)$, para alguns valores de d para uma pilha com $L = 75d$, como pode ser visto no gráfico Fig. 6.3, e para caracterizar o tamanho das saídas em [18] trocou o parâmetro do diâmetro da saída de d por w_o e d_c por w_c . Essa mudança também será feita no decorrer dessa sessão.

Figura. 6.3: Função de distribuição acumulada



Fonte: retirada de [18]

No gráfico da função $F(s)$, está representado a probabilidade que os tamanhos das descargas s ou menos s podem ocorrer, esses dados são exibidos em escala semilogarítmica para dar ênfase a uma dependência exponencial e evidenciar sua calda [18].

Analisando uma $F(s)$, pode-se observar três comportamentos diferentes pois para valores obtidos abaixo da saída $w = 2,9d$ a distribuição das medidas adota uma lei exponencial ao longo do intervalo dos dados obtidos através das simulações.

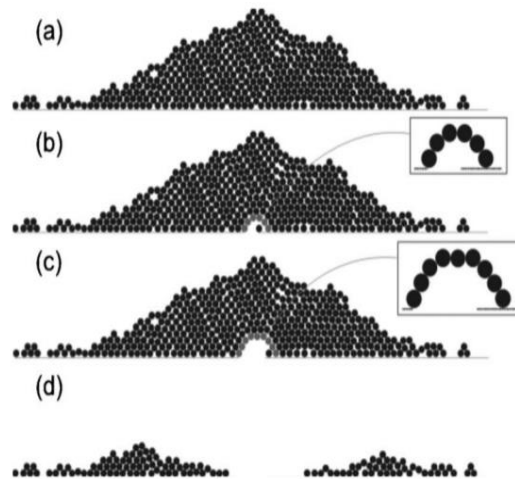
Já para valores médios em seu regime intermediário, a pilha ou colapsa ou o fluxo granular é facilmente bloqueado evidenciando a presença de um arco depois que alguns grãos passam no orifício do silo, os valores obtidos para $w = 2,9da4,0d$, as distribuições nivelam-se ao longo da média de seus valores de s , porem, mantendo suas formas exponenciais, revelando a presença de dois tamanhos diferentes para cada avalanche.

E para resultados acima de $w_c = 4,0$, a região achatada estende-se para a esquerda, e a degradação de primeira exponencial não é mais evidenciada [18]. Esse fato indica a presença de um tamanho único para caracterizar a avalanche, onde o mesmo se torna grande o suficiente para sistematicamente destruir as pilhas realizadas, essa mudança é conhecida como uma transição de fase para um regime catastrófico.

A partir da figura. 6.4, observa-se que acima da representação em (a), a saída

w, acontece um travamento de descarga, apresentando a formação de um arco no qual aumenta proporcionalmente com o aumento da saída, até um limite de saída crítica, onde não ocorre mais arco de bloqueio e o fluxo se torna contínuo até a pilha desabar formando duas pilhas menores.

Figura 6.4: A evolução das avalanches



Fonte: retirada do [18]

6.2 CONCLUSÕES

A resultados apresentados pelas figuras acima, podem ser verificados sem a necessidade da medida das alturas das pilhas, onde apenas um dos gráficos necessita da utilização de formulas para fazer a comparação, as demais figuras podem ser analisadas através da comparação entre os dados experimentais.

O modelo para a formação de arcos possui um caráter semi-empírico e se baseia na hipótese de que os eventos consistem na passagem de um grão pelo orifício são independentes e possuem a mesma probabilidade. Com isso, obtém-se uma relação entre a probabilidade de engarrafamento e o tamanho médio das descargas $\langle s \rangle$. Nesse ponto, o modelo precisa ser alimentado com uma expressão para $\langle s \rangle$, e é aí que reside seu caráter empírico. A expressão para $\langle s \rangle$ é obtida dos dados experimentais.

7. DISCRIÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL

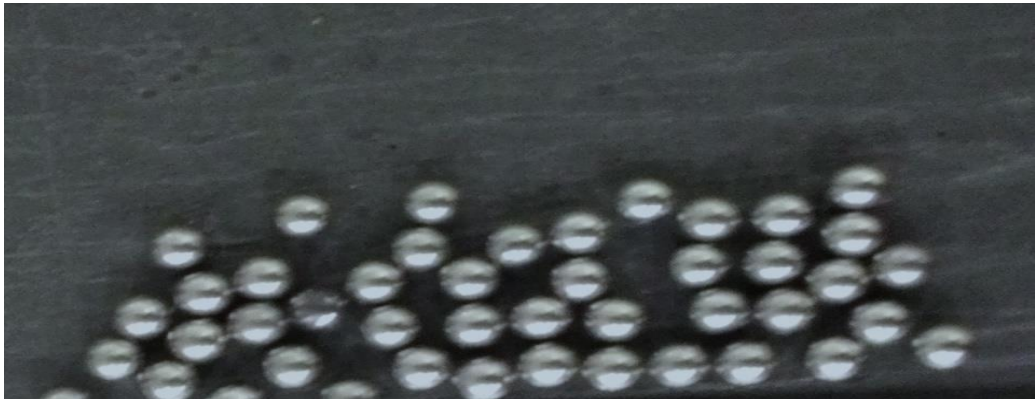
Para realização do experimento de descargas de pilhas granulares, serão utilizadas algumas peças fundamentais: Uma célula transparente 2D, formada por duas placas paralelas de acrílico transparente com base regular com $L = 165d$ onde d é o diâmetro de $3mm$ da esfera, composta de aço inoxidável; e altura $h = 30cm$; E uma lâmina que possui em seu centro saídas sequenciadas em ordem crescente, com formas retangulares onde as arestas laterais variam de $2,6da5,0d$ e outra lâmina com saídas de tamanhos finitos nas laterais, sendo em um dos lados $6d$ e no lado contrário $7d$, onde d é o diâmetro da esfera; além desses também foram utilizados, um Imã acoplado a uma barra de metal, uma Lupa, uma calculadora científica, uma balança de precisão, uma Lâmina de papel Vergê, dois raios de aço utilizados em bicicletas, uma pedaço de garrafa pet, e por fim será usada a Plataforma Wolfram matemática para criação dos gráficos para demonstração dos dados [32]; e uma Máquina fotográfica;

Figura 7.1: Silo de acrílico formado por placas paralelas e base retangular de largura $w = 165d$



Fonte: própria.

Figura 7.2: Fotografia de algumas esferas usadas para formar a pilha, com diâmetro $d = 3mm$.



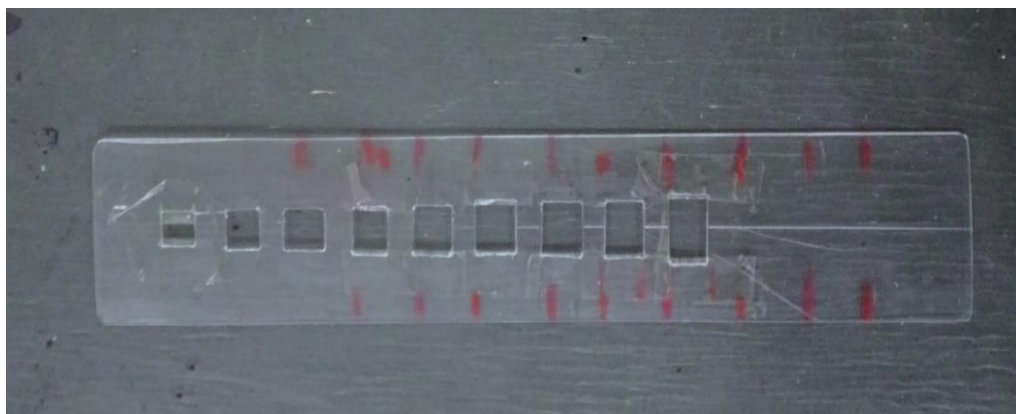
Fonte: Própria.

Figura 7.3: Imã acoplado a uma barra de metal



Fonte: Própria.

Figura 7.4: Lâmina com aberturas de tamanhos variáveis em seu centro.



Fonte: Própria.

Figura 7.5: Lâmina com (duas) aberturas diferentes em escala real.



Fonte: Própria.

Figura 7.6: Calculadora científica



Fonte: Própria.

Figura 7.7: Mini balança de precisão



Fonte: Própria.

Figura 7.8: Lâmina de papel Vergê.



Fonte: Própria.

Figura 7.9: Vareta composta por raios metálicos.



Fonte: Própria.

Figura 7.10: Lupa



Fonte: Própria.

Figura 7.11: Garrafa pet cortada ao meio



Fonte: Própria.

8. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

As etapas para se executar a simulação experimental, obedecem a seguinte ordem, no primeiro momento foi pesado na balança de alta precisão um único grão, para que posteriormente seja feita a contagem dos grãos através de pesagens, utilizando regras de três, em seguida serão pesados vários grãos até atingir o peso referente a quantidade de 4.000 (quatro mil) grãos, um valor considerado adequado para que a pilha de grãos possa alcançar um formato triangular que é característico para realização do experimento. Onde os mesmos serão transferidos da balança para o pedaço de garrafa pet, para facilitar a adição dos grãos no silo 2d.

Antes que os grãos sejam depositados na estrutura, a lamina de papel Vergê deve ser sobreposta a uma das lamina contendo aberturas de tamanhos variáveis, obedecendo a sequência do tamanho das saídas em ordem crescente pela sequência 2,6d; 2,9d; 3,2d; 3,5d; 3,8d; 4,1d; 4,4d; 4,7d, 5,0d e 6,0d, onde d corresponde ao diâmetro da esfera (3mm), esse processo deve ser repetido 20(vinte) vezes para cada uma das 10(dez) aberturas.

Com as laminas colocadas de maneira adequada, pode ser dado início a transferência dos grãos para o substrato do aparato (fundo), com o material sendo colocados lentamente e de maneira única, sem variação, até que a pilha seja formada, todos os grãos contidos no pedaço de garrafa pet devem ser despejados no silo, até que a pilha possua um formato triangular de monocamadas de esferas justapostas, camada a camada até formar uma pilha padrão em que o material comece a se desprender da estrutura principal.

A largura de tamanho do silo 2D não foi escolhida de maneira aleatória, mas sim por ser compatível com padrões adotados, pois elimina possíveis influencias laterais proporcionando a formação da pilha independente de forças atuando advindas dos lados extremos, caso contrário, haveria um aglomerado de grão nas extremas direita e esquerda descaracterizando a sua formação.

Para que o fluxo de grãos seja observado, a lamina de papel Vergê, deve ser retirada de maneira uniforme (para todas as pilhas formadas), sem causar interferência nas outras partes do silo, pois apenas ela teve ser retirada e cessado o processo, é possível observar que com a presença de travamento do fluxo passando pelo orifício do silo, irá formar arco de bloqueio ou se irá ocorrer uma descarga total

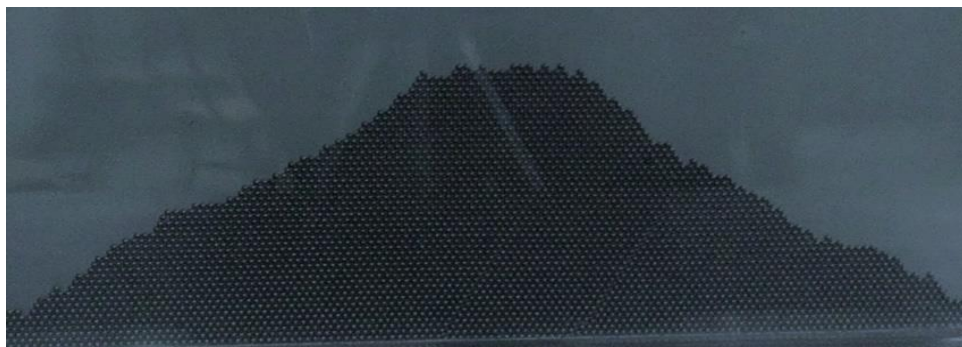
do material granular esse segundo caso é denominado de evento catastrófico, que se caracteriza pela mudança abrupta de um regime de congestionamento para um regime contínuo [18].

Com a ocorrência de formação de arcos de bloqueio, coleta-se o número de esferas formadoras do mesmo. Os grãos que vazaram da pilha são do tamanho das avalanches, sendo precisamente quantificados pelo valor de sua massa total e sua quantidade unitária, procede-se de maneira análoga caso não haja formação arcos.

Nas figuras 8.1, 8.2 e 8.3, São mostradas fotografias da pilha formada, do arco de bloqueio, e das duas pilhas formadas logo após a descarga total, respectivamente. Imagens essas que corroboraram com o trabalho de [18].

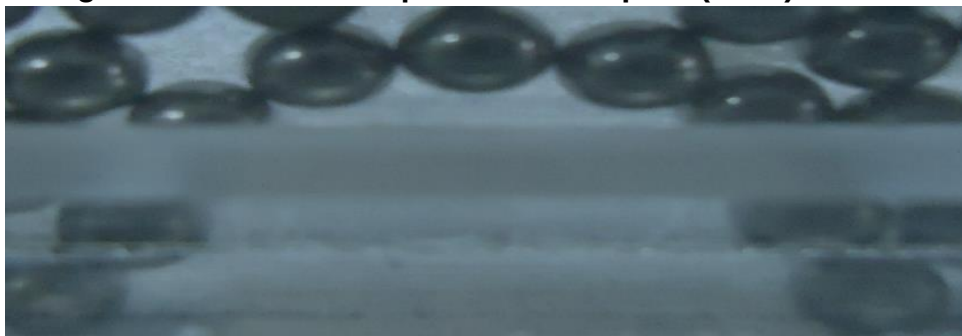
Ao termino de cada medida, o silo foi esvaziado utilizando os raios de aço, até que não restasse mais nem uma esfera dentro do silo, esse processo deve foi repetido para todas as 200 medidas propostas. Ao finalizar o processo de medidas usou-se a plataforma Wolfram Matemática, para geração dos gráficos e análises quantitativas

Figura 8.1: pilha logo depois da adição de todos os grãos.



Fonte: própria

Figura 8.2: arco de bloqueio formado por 9(nove) esferas.



Fonte: própria

Figura 8.3: pilha logo após um evento catastrófico.



Fonte: própria

9. RESULTADOS

9.1 TABELAS

Os dados coletados das saídas w_o : 2.6d; 2.9d; 3.2d; 3.5d; 3.8d; 4.1d; 4.4d; 4.7d; 5.0d; e 6.0d; onde d corresponde ao tamanho da esfera, as saídas são apresentadas na ordem crescente, fornecendo o tamanho de cada abertura, a quantidade de esferas formando arco de bloqueio, representado por *arc* e o número médio de esferas representado por *S*, que atravessaram a abertura do silo após a avalanche.

Tabela 1: Número de esferas que atravessam o orifício do silo por avalanche
S, por diâmetro de saída w_o

2.6d	2.9d	3.2d	3.5d	3.8d	4.1d	4.4d	4.7d	5.0d	6.0d
1	77	7	249	2943	502	2882	2879	2823	2778
1	91	5	405	1064	2949	1055	2861	2753	2860
1	234	226	167	2932	1435	2841	2858	2732	2920
2	351	59	237	2902	2897	1347	2879	2736	2950
1	56	5	176	3270	2819	159	2867	2821	2978
1	7	572	1309	2992	302	2733	2732	2839	2729
1	9	5	461	464	3009	2908	2926	2874	2915
1	142	5	5	2881	2968	2954	3022	2755	2949
1	145	39	20	338	421	2873	2844	2859	2973
1	555	776	5	311	2958	781	2848	2837	2947
1	52	210	427	383	2757	2914	2954	2919	3000
1	150	5	343	797	61	2884	2821	2847	2835
1	440	102	561	1173	2783	2860	769	2803	2752
1	5	332	1725	605	2818	2864	2972	2639	2790
1	5	439	146	258	2977	84	2942	282	2706
2	137	215	189	839	1081	2836	2960	2805	2914
1	83	651	1149	964	2844	2867	2673	2701	2980
1	5	5	5	366	769	2894	2801	2751	2859
1	154	16	5	206	859	2971	1024	2893	2954
3	311	67	657	5	247	2945	2875	2779	2905

Fonte: própria

Uma informação importante deve ser observada sobre a análise da tabela 2, pois quando não há a formação de arcos de Bloqueio, ocorrendo fenômenos denominados catastróficos, a quantidade de esferas que formam o arco é “0” (Zero).

Tabela 2: Quantidade de esferas no arco de bloqueio *arc* por diâmetro de saída w_o

2.6d	2.9d	3.2d	3.5d	3.8d	4.1d	4.4d	4.7d	5.0d	6.0d
4	8	7	6	0	11	0	0	0	0
4	9	8	7	7	0	8	0	0	0
3	9	6	7	0	7	0	0	0	0
4	5	6	6	0	0	8	0	0	0
4	5	7	5	0	0	8	0	0	0
4	7	7	7	0	6	0	0	0	0
4	7	7	8	6	0	0	0	0	0
4	7	7	7	0	0	0	0	0	0
4	7	7	6	7	8	0	0	0	0
4	6	9	7	7	0	8	0	0	0
4	5	6	7	7	0	0	0	0	0
4	9	7	6	8	7	0	0	0	0
4	12	10	7	8	0	0	7	0	0
4	7	11	6	7	0	0	0	0	0
4	9	9	8	8	0	6	0	8	0
4	8	8	9	9	9	0	0	0	0
4	7	7	6	9	0	0	0	0	0
4	7	7	7	7	7	0	0	0	0
4	6	8	7	5	7	0	9	0	0
3	9	7	8	7	6	0	0	0	0

Fonte: própria

9.2 ANÁLISES DOS DADOS

Utilizando os dados experimentais verificou-se, que para a saída correspondente $w = 2,6d$. Existe uma quantidade mínima de esferas descarregadas da pilha formando um arco de bloqueio com a quantidade mínima de grãos pela avalanche. Verificando a abertura de passagens do substrato de $w = 2,6d$ até $6,0d$. é possível observar um aumento no número de grãos escoados, sendo esse aumento proporcional ao tamanho do arco, assim como no modelo proposto na figura. 6.4 por [18], mostra a evolução das avalanches, saindo de um regime de bloqueio até atingir um regime catastrófico.

Os eventos catastróficos são caracterizados pela descarga total de grãos do sistema, sem a presença de arcos de bloqueio, na tabela 2, e possível verificar o início desses eventos a partir da saída $3,8d$. Na qual, 6(seis) avalanches não apresentaram o travamento do sistema.

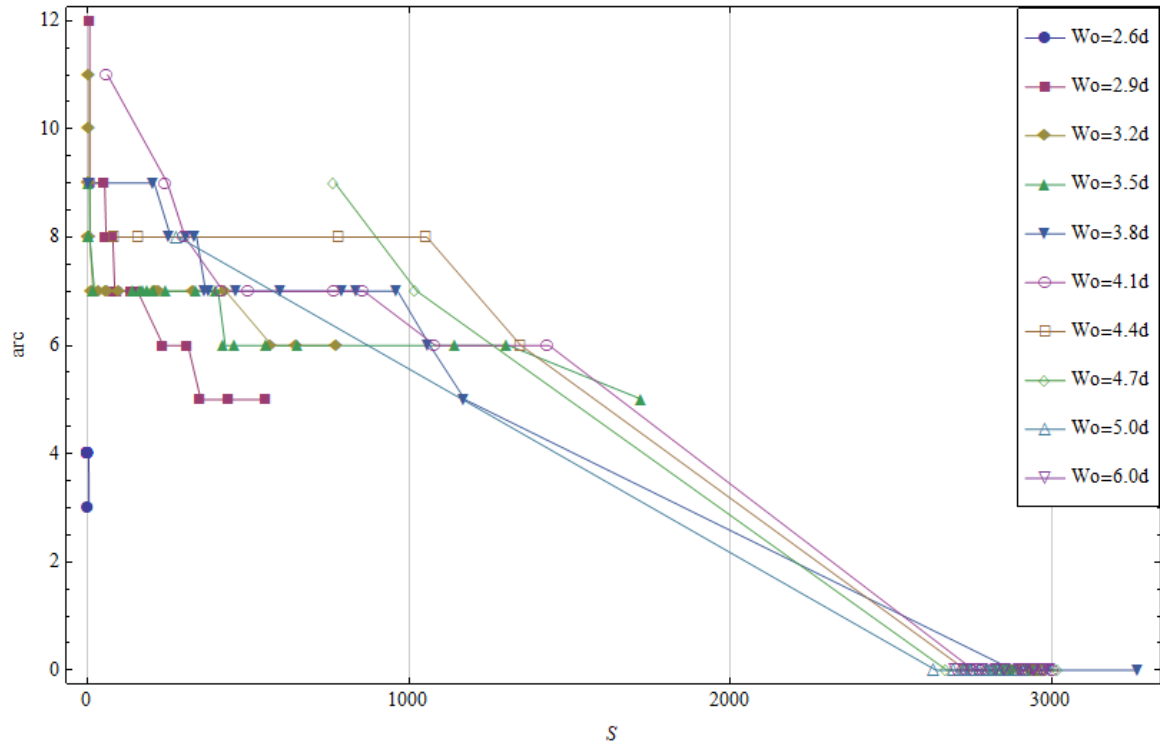
O padrão dos eventos mudou a formação de arcos para regimes catastróficos, a partir de $3,8d$ e verificável através da sessão tabelas, ainda é possível afirmar que para a saída de $4,1d$, o comportamento desse sistema é totalmente imprevisível, existir a probabilidade caracterizando um sistema de comportamento “não-linear” das descargas de grãos formar tanto um arco ou uma avalanche total. Com o aumento no tamanho das W , foi identificado uma saída crítica $W_c = 6,0d$, onde não foi registrada nem uma formação de arco de bloqueio. O que mostra que para valores moires para essa abertura existe um regime de fluxo contínuo sem a presença de travamentos

Ainda sem a necessidade de cálculos, foi observado que para as saídas $w = 8,7d; 10,5d$ e $11,4d$; como é mostrado há possível existência de padrão para o número de 5(cinco) esferas expelidas do silo após a avalanche, onde para esse dado, o número de esferas formando o arco de bloqueio tendia a 7(sete) esferas. Algo que causou muita curiosidade. Porém, o estudo em questão exige uma quantidade maior de medidas para comprovação dessa informação.

Na figura 9.1, é possível identificar três tipos de comportamento, no primeiro, para saída $2,6d$ os arcos de bloqueio apresentam um comportamento linear, pois os arcos sofrem uma variação mínima, e já na segunda observação, acima da saída $2,9d$; até a saída $5,0d$ a variação no tamanho dos arcos por quantidade de grãos expelidos apresenta um comportamento imprevisível, no entanto, o maior número de arco se

concentra, próximo de 7(sete) esferas. E por fim, para saída de $6,0d$ existem apenas eventos catastróficos, onde inexistente a formação de arcos de bloqueio.

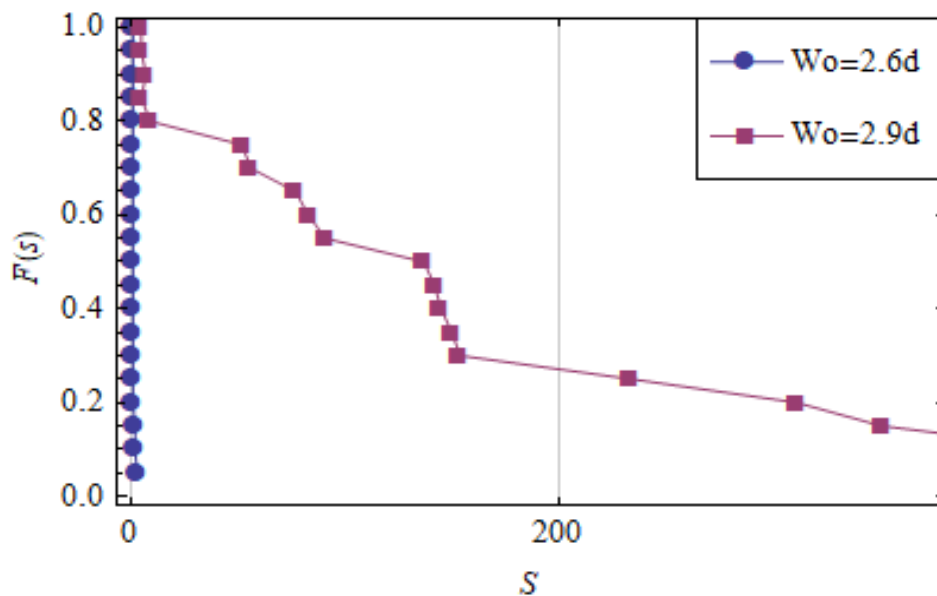
Figura 9.1: Gráfico da formação de arcos por avalanche de grãos



Fonte: própria

Observações feitas a partir da figura 6.1. do trabalho de [18], foi calculada a função distribuição $F(s)$, para 2(duas) saídas consecutivas $w = 2,6d$ e $w = 2,9d$, onde o tamanho das saídas são bem próximos ao da literatura usando simulações, e utilizando colhidos experimentalmente foi possível verificar que a máxima $F(s)$ (probabilidade de ocorrência de avalanches com relação ao tamanho da avalanche) na região de pequenas avalanches também decai exponencialmente a medida que s (tamanho da avalanche) aumenta, fato que pode ser verificado através da figura 9.2

Figura 9.2: Função distribuição $f(s)$ em função da quantidade de grãos escoados s .



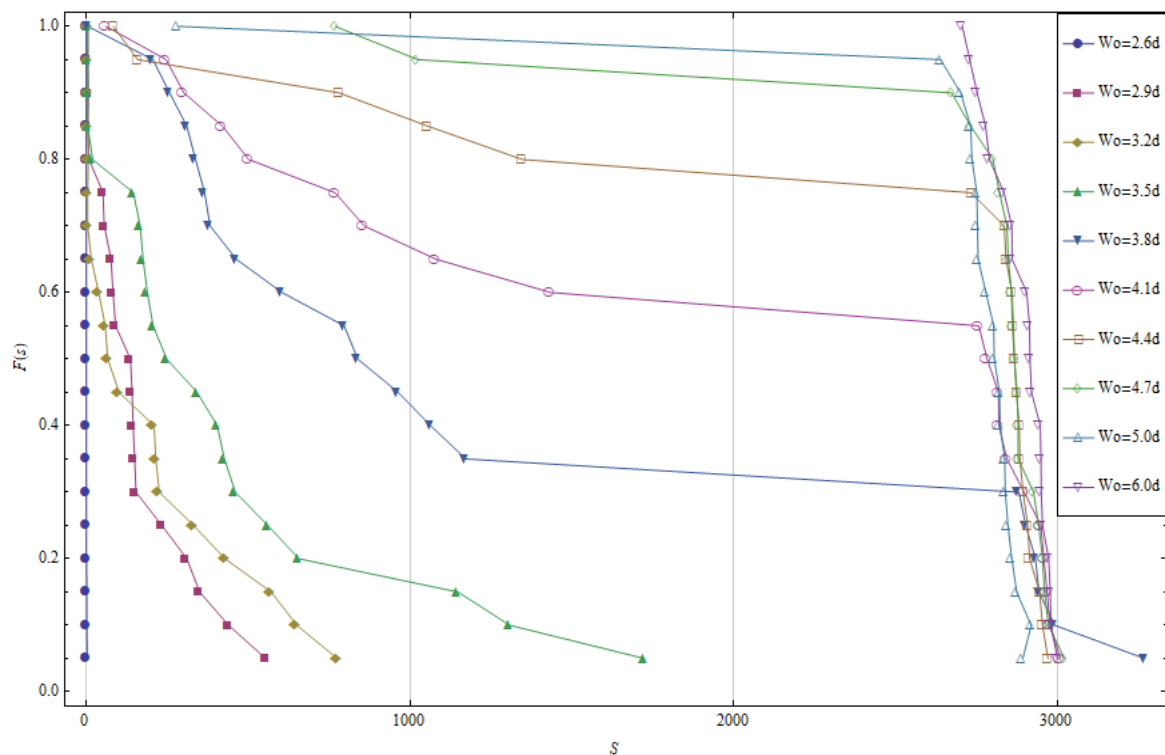
Fonte: própria

Agora verificando os dados apresentados na figura 6.3, onde é exibido o gráfico da função de distribuição acumulada, lembrando que $F(s)$ representa a probabilidade do tamanho de descarga s , ou maior que s podem ocorrer.

Utilizando os dados obtidos experimentalmente, para 10 (dez) saídas analisadas, onde os tamanhos das saídas variam de $2,6d$ a $5,0d$ em passos de $0,3d$, com a adição de uma última saída de tamanho $w = 6,0d$, também é possível distinguir três regimes diferentes, o primeiro regime abaixo de $3,5d$, a distribuição segue uma lei exponencial ao longo de todos os dados simulacionais.

O segundo regime é identificado acima de $3,5d$ até $6,0d$, onde as distribuições começam a nivelar os valores médios de s , mas mantêm suas formas exponenciais, revelando a existência de dois tamanhos característicos para as avalanches. E acima de $6,0d$ onde não existe mais formas exponenciais. E sim um único tamanho característico de avalanche, no qual não existe mais arcos de bloqueio. Esses dados podem ser comprovados a partir da figura 9.3.

Figura 9.3: Gráfico da função de distribuição acumulada para valores de w .

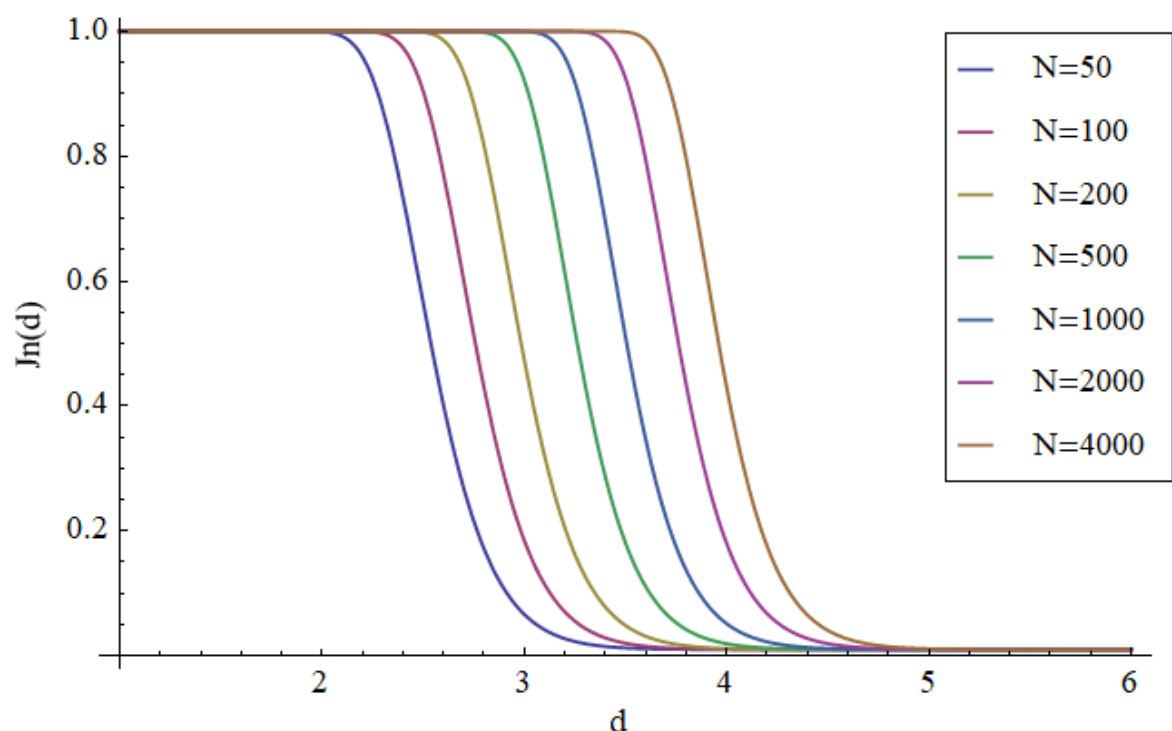


Fonte: própria

Agora analisando a figura 6.2, onde é exibido Gráfico da *probabilidade* $JN(d)$ em função de d , onde $JN(d)$ é a probabilidade de o sistema engarrafar antes que N grãos atravessem o orifício e d corresponde ao tamanho das saídas. Mostrando que para 10(dez) valores de N variando de 0 há 4 000, e na tentativa de também verificar uma queda acentuada de $JN(d)$ em uma determinada região do domínio. Pois é nessa região em que ocorre a queda de d , se desloca para a direita a medida que N aumenta.

Utilizando os dados obtidos na seção tabela foi calculado, a média para S , correspondente ao tamanho da abertura, além da variância, o desvio padrão, dados necessários para calcular a probabilidade da distribuição normal. E por fim $N = 50, 100, 200, 500, 1000, 2000$ e 4000 esferas. Os resultados mostrados acima são representados através da figura 9.4

Figura 9.4: Gráfico da probabilidade $Jn(d)$ em função de d , para que o fluxo trave antes que N esferas caiam.



Fonte: própria

O gráfico mostra que para abertura $2,6d$, a probabilidade de engarrafamento é de 100%, representação que pode ser verificada nos dados na sessão tabelas, onde os valores de N estão em conformidade com os dados apresentados no gráfico, sendo que a probabilidade de engarrafamento é muito alta próximo da saída $3,8d$, a partir

dessa abertura as avalanches começam a apresentar um comportamento imprevisível, e a medida que as saídas aumentam de tamanho o número médio de grãos por avalanche também aumenta até os eventos, até que uma saída crítica é encontrada acima da saída $w = 5,0d$.

10. CONCLUSÕES E EXPECTATIVAS

A comparações feita entre os resultados experimentais a respeito do silo 2d apresentados aqui e os resultados obtidos por [18], tiveram uma boa aproximação, porém, não foi possível evidenciar a presença da criticalidade alto organizada nas estatísticas de descargas de avalanches em pilhas granulares. E o que pode ser concluído através dos resultados, é que o tamanho das avalanches e o dos arcos depende da saída do orifício. Podendo a partir dos dados apresentados ter uma estimativa da quantidade de grãos escoados da pilha durante o fluxo do material, além disso foi observado também uma transição de fase no montão em que ocorre uma avalanche total do sistema, e que fenômeno se torna mais frequente na saída $W_c = 0.6d$ ou para saídas próximas desse valor de abertura.

A partir do modelo experimental proposto pode se verificar que apesar da simplicidade que aparenta o experimento, o mesmo é muito sensível a forças externas naturais do ambiente, por exemplo a arcos de bloqueio se mostram integrantes e ao mesmo tempo fundamental para as observações, o caracteriza a análise desse estudo um alto grau de complexidade. E sua imprevisibilidade de acontecimentos está ligada a muitos fenômenos físicos do dia-a-dia de todas as pessoas. E o fato de não se ter ainda uma compreensão consolidada da formação dos arcos, tornando-se motivação de estudos posteriores mais detalhados.

REFERENCIAS

- [1] A. Janda et al, **Jamming and critical outlet size in the discharge of a two-dimensional silo**. Disponível em: < <https://www.unav.edu/documents/15083165/15065268/jamming-and-critical-outlet-size-in-the-discharge-of-a-two-dimensional-silo.pdf/> >. Acessado em 15 de março de 2018.
- [2] BARBOSA, RUY MADSEN. **Descobrimos a geometria do fractal – para a sala de aula** – 3.ed. p. 10, 2005.
- [3] Castro, A. C. et al. **Estados Físicos da Água**. Disponível em: < http://www.cdcc.usp.br/maomassa/doc/ensinodociencias/estados_fis.pdf >. Acessado dia 20 de jan de 2018
- [4] **Cosmo e ciência**. Disponível em: < <http://cosmoseconsciencia.blogspot.com.br/2012/10/vortex-ubiquidade-cosmica.html> >. Acessado em 19 de fev de 2018
- [5] CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. **Geotechnique**, v. 29, p. 47, 1979. Disponível em:< <http://93.174.95.27/scimag/get.php?doi=10.1680/geot.1979.29.1.47&downloadname=&key=1CLBS47IE885R4P6> >. Acessado em 13 de jan de 2018.
- [6] Daniel V. Schroeder. **An Introduction to Thermal Physics**. Weber State University. Disponível em: < http://islamabad-institute.weebly.com/uploads/1/3/1/0/13101414/schroeder_daniel_thermal_physics.pdf >. Acessado dia 02 de janeiro de 2018
- [7] Edward N. Lorenz. **Predictability; Does the Flap of Butterfly's wings in Brazil Set off tornado in Texas?** 27 de dezembro de 1972. Disponível em:< http://eaps4.mit.edu/research/Lorenz/Butterfly_1972.pdf >. Acesso em 02 de jan de 2018.
- [8] Enrique A. López-Guerra and Santiago D. Solares. **Modeling viscoelasticity through spring–dashpot models in intermittent-contact atomic force microscopy**. Beilstein J. Nanotechnol. 2014. Disponível em: < https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4273292/pdf/Beilstein_J_Nanotechnol-05-2149.pdf- >. Acessado em 10 de jan de 2018
- [9] Fey, F. R.; Jarbas, A. **Teoria do Caos a ordem da não-linearidade** – Universidades Integradas de Taquara, V.5, n.1, p 221, 222 jan. /Dez 2012. Disponível em:< https://www2.faccat.br/portal/sites/default/files/ckeditorfiles/ua2012_ffey_jarosa.pdf >. Acessado em 20 de dez de 2017.
- [10] **física contemporânea**. Leis de potência. Disponível em: < <http://www.pbx-brasil.com/Disciplinas/FisicaContemporanea/Notas/mecanicaClassica/leisDePotencia/leisDePotencia.html> >. Acessado em 15 de fev de 2019
- [11] Moura, Cássio Stein. **Física para o Ensino Médio Gravitação, Eletromagnetismo e Física Moderna**. Disponível em:< <http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/fisicaparaoensinomedio.pdf> >. Acessado em 17 de março de 2018
- [12] GLEICK, James. **Caos – a criação de uma nova ciência**. 3.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1990. Disponível em: < <http://download.libgen.io/get.php?md5=DD4C0EA5E0C4D7B5D6EED3E61AC35B1C&key=NVGOIMM7DB2EWAST> >, acessado em 20 de dez de 2017.
- [13] Gleria, Iram et al. **Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 2, p. 99 - 108, (2004). Disponível em:< <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v26n2/a04v26n2.pdf> >. Acessado em 28 de dez de 2017.

- [14] JAEGER, G. **The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution.** Disponível em: < <http://93.174.95.27/scimag/get.php?doi=10.1007/s004070050021&downloadname=&key=COAD2X8995Y7C8XR> >. Acessado dia 20 de marco de 2018.
- [15] **Jamming transition in two-dimensional hoppers and silos-** PHYSICAL REVIEW E **71**, 060301(R) (2005) disponível em : < <http://93.174.95.27/scimag/get.php?doi=10.1103/PhysRevE.97.012903&downloadname=&key=K64MQYK1QW4FJSD> >. Acessado em 15 de mar de 2018
- [16] Junior, T. W. **CAOS: A CRIAÇÃO DE UMA NOVA CIÊNCIA? - As aplicações e implicações da Teoria do Caos na Administração de Empresas** – Revista de Administração de Empresas, São Paulo, agosto de 1993. Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/rae/v33n4/a09v33n4.pdf> >. Acesso em 15 de dez de 2017
- [17] k. To, Li. Pik - Yin, and H. K pak. **Jamming of granular flow in a two-dimensional hoppor.** Disponível em: < <http://93.174.95.27/scimag/get.php?doi=10.1103/PhysRevLett.86.71&downloadname=&key=FUJPOLYXDDSP38TN> >. Acessado dia 17 de marco de 2018.
- [18] MAGALHÃES, C.; MOREIRA, J. **Engarrafamento e Segregação em Empilhamentos Abertos de Grãos.** Universidade federal de minas gerais. Julho de 2013: Disponível em: <http://lilith.fisica.ufmg.br/posgrad/Teses_Doutorado/decada2010/caio-magalhaes/CaioFrancaMerelim-1-tese.pdf >. Acessado dia 17 de dez de 2017.
- [19] M.V. Carneiro e I.C. Charret. **A criticalidade auto-organizada na pilha de areia.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 4, p. 571 - 576, (2005) Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v27n4/a09v27n4.pdf> >. Acessado em 20 de jan de 2018.
- [20] Oliveira, M. J. **termodinâmica.** Disponível em: <<http://download1593.mediafire.com/72vu6v448ecg/yx57rwwdqf6fy/Termodin%C3%A2mica-M%C3%A1rio+Jos%C3%A9+de+Oliveira.pdf> >. Acessado em 20 de marco de 2018
- [21] Paty. M. **A noção de determinismo na física e seus limites.** *scientiae zudia*, São Paulo, v. 2, n. 4, p. 465-92, 2004. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ss/v2n4/a01v2n4.pdf> >. Acessado em 08 de jan de 2018.
- [22] Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld - **SELF-ORGANIZED CRITICALITY- an explanation of 1/f Noise Physical department, Brookhaven, National Laboratory, Upton New York 11973. 27 July 1987.** Disponível em: <<http://cqb.pku.edu.cn/tanglab/pdf/1987-63.pdf> >. Acessado em 17 de dez de 2017.
- [23] Prisma a luz da física. **Caos e o sistema solar.** Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo2/topico2.php> >. Acessado em 29 de Jan de 2018.
- [24] Prisma a luz da física. **Fractais e a geometria da natureza.** Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico2.php> >. Acessado em 29 de Jan de 2018.
- [25] Prisma a luz da física. **O que são atratores estranhos.** Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo3/topico4.php> >. Acessado em 29 de Jan de 2018.
- [26] Prisma a luz da física. **Transição de fase e criticalidade.** Disponível em: < <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo3/modulo8/topico1.php> >. Acessado em 29 de Jan de 2018.

[27] Ribeiro, Orlando da Silva. **Regime Catastrófico em Descargas de Pilhas Granulares - Aspectos Experimentais**. Teresina: mar, 2014.

[28] Salinas, S.R.A. **introdução a física estatística** – disponível em :
<<http://download.library1.org/get/EB2254C5CD584943BF19E51F2E06B715/Silvio%20Salinas-Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20F%C3%ADsica%20Estat%C3%ADstica-Edusp%20%282008%29.pdf>>. Acesso em 5 de mar de 2018.

[29] Silveira, F. L. **DETERMINISMO, PREVISIBILIDADE E CAOS**. Instituto de Física da UFRGS. p.138, ago. 1993. Disponível em:<https://www.if.ufrgs.br/~lang/Textos/Determinismo_previsibilidade_caos.pdf>. Acessado em 02 de jan. de 2018.

[30] W.C.SWOPE et al. J.Chem.Phys, v. 76, 1982. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01133543>>. Acessado em 2 de fev. de 2018.

[31] **Walter Isaacson.Einstein - sua vida, seu universo**. Disponível em:<<http://download.libgen.io/get.php?md5=838A99BA43DABA20E477A4F756DEB8C0&key=YC6ILZ40DGZX06WJ>>. Acessado em 20 de jan de 2018.

[32] **Wolfram matemática**. Disponível em: <<http://www.wolfram.com/mathematica/>>. Acessado em 15 de mar. de 2018.

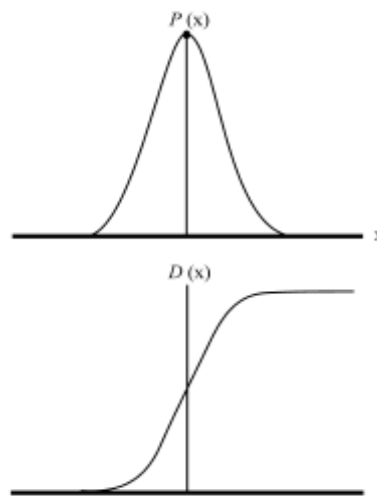
[33] Zago, Marcelo - **ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA NR-33 – SEGURANÇA E SAÚDE NOS TRABALHOS EM ESPAÇOS CONFINADOS EM SILOS DE GRÃOS**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, p 24, 25 Curitiba (2013). Disponível em:<http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1549/1/CT_CEEST_XXV_2013_26.pdf>. Acessado em 19 de dez. de 2017.

[34] Zuriguel, I. Invited review: **Clogging of granular materials in bottlenecks. Papers in Physics, vol. 6, art. 060014 (2014)**. Disponível em: <http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1852-42492014000200008>. Acessado em 14 fev de 2018.

APÊNDICE A – LEIS DE POTENICA.

Para compreender um pouco sobre lei de potencia, imaginane um grafico para representar os valores de um dado produto que esta disponivel no mercado, assim como varios sites de compra e venda aferenceem aos seus clientes, no grafico abaixo se pode visualizar uma curva em forma de sino, ela representa uma gaussiana ou normal dos dados, onde a maioria dos valores discritos pelo produto se encontram na parte central da curva, para representar a media do valor cobrado pela mercadoria desejada. Enquando os lados repesentam as variações de aumento e decaimento exponelcial. Isto corresponde a fato de que grandes flutuações são estaticamente pouco provaveis e depois de um certo ponto, impossiveis.

Fig. – distribuição gaussiana.



Fonte: imagem retirada de [13].

As distribuições gaussianas são definidas a partir de uma função densidade de probabilidade que se escreve da sente forma.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Onde x é a variável estocástica em questão, $\mu = \langle x \rangle$ é a média da distribuição, e $\sigma = \sqrt{\langle x \rangle - \langle x \rangle^2}$ denomina-se *desvio-padrão*. Como modelo, considere que se desejasse medir o comprimento de uma mesa, que representara a variável estocástica

x . Ao realizar N medidas uma após a outra obtém-se um valor media estimado por $x = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$, sendo que $\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \rightarrow \mu$ na medida em que N tende para o infinito. E ignorando quaisquer fontes de erros sistemático, expressamos o resultado da experiencia na forma $\mu = \bar{x} \pm k\sigma$, onde k é uma constante ligada a distribuição gaussiana e o desvio padrão N fornece uma boa estimativa do erro cometido na estimação da medida. A probabilidade de encontra $a \leq x \leq b$ é dada por.

$$\int_a^b P(x)dx.$$

Além disso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1,$$

Ou seja, a probabilidade e de se encontrar um valor qualquer de x é igual a 1.

Distribuições gaussianas são, supostamente, a norma da natureza cuja larga aplicabilidade resulta do teorema do limite central: em qualquer caso onde muitos eventos aleatórios contribuem para um determinado resultado, que seguira a destruição normal. Em outras palavras, suponha-se que a variável estacionaria, x_i , seja o clássico passeio aleatório (*rondom walk*) onde x_i , pode assumir aleatoriamente os valores $\pm S$ a posição da variável após N passos é dado por

$$S_N = \sum_{i=1}^N x_i,$$

O teorema do limite central diz que se os passos de x_i são independentes uns dos outros e possuem desvio-padrão finito, função densidade de probabilidade da seguinte variável.

$$\frac{S}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma\sqrt{N}}$$

Será gaussiana a medida que $N \rightarrow \infty$ mesmo que cada x_i não obedeça a distribuição normal, mesmo que fenômenos não-gaussianos venham a apresentar algum tipo de movimento regular na forma de lei de potência não-gaussiana. E estas

são incompatíveis com a noção de que a média representa a escala característica os sistemas com escalas descrevem grande parte da natureza, as vezes até sistemas desordenados, as gotas de chuva na causada tem uma escala característica: basta focalizar que o diâmetro médio é uma gota, mas existem os sistemas que não possuem escala característica. Descritos por leis de potência, que são soluções de equações funcionais de forma

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \quad (1.0)$$

Quando físico analisam um fenômeno acabam resolvendo algum tipo de equação diferencial. Onde as funções possuem alguma *escala característica*. Em geral pode-se expressar as funções em termos de exponenciais, em que aparece um parâmetro que determina a escala do problema.

Tomando como exemplo a lei de decaimento exponencial de núcleos radioativos. Sendo R a probabilidade de emissão de radiação por segundo e determinando que N núcleos não decaíram no instante t . Após o intervalo dt , um número dN de núcleos ira decair. Uma vez que R é a probabilidade de que um núcleo particular dos núcleos do sistema decair em um segundo. Rdt é a probabilidade de que qualquer um número médio de núcleos que decaem é

$$dN = -NRdt$$

Que, depois de resolvida. Nos fornece

$$N(t) = N(0)e^{-Rt}$$

Nesta expressão, $N(0)$ é o número de núcleos que não tinham decaído no instante inicial. A partir da express.ao acima, podemos demonstrar que o intervalo de tempo necessário para que o número de núcleos, que ainda não decaíram, diminua por um fator igual a dois, é dado por

$$\frac{T_1}{2} = \frac{\ln 2}{R}$$

Esta é a chamada *meia-vida* do núcleo radioativo, e representa a escala de tempo característica do processo, note que a medida que $t \rightarrow \infty$ se obtém $N(t) \rightarrow \infty$ Isto corresponde ao fato de que encontrar um núcleo que não decaiu torna-se um evento extremamente raro.

Na física dos fenômenos críticos, a expressão 1 acima é conhecida por *hipótese de escala* ou de homogeneidade. Esta forma a base da teoria do grupo de renormalização. Por exemplo, nas vizinhanças de um ponto crítico, a função *energia livre por spin* $g(T, H)$ de um ferromagneto é escrita como a soma de uma parte regular, $g_0(T, H)$, e de uma parte singular, $g_s(T, H)$, E na parte singular que as peculiaridades da criticalidade ocorrem e, de acordo com a hipótese de escala, supõe-se que ela obedeça a equação 1.0.

Leis de potência também surgem em casos como a distribuição de terremotos, extinção de espécies e *crashes* de bolsas de valores, e o sentido do termo *universalidade*, para os fenômenos críticos, ganha dimensões inesperadas mesmo para os pioneiros da área.