

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI
***CAMPUS* TERESINA CENTRAL**
LICENCIATURA EM FÍSICA

YURI CASTRO CAVALCANTE

**ANÁLISE DA RESSONÂNCIA DE OSCILAÇÕES MECÂNICAS E
ELETROMAGNÉTICAS A PARTIR DA TRANSFORMADA DE FOURIER**

TERESINA

2021

YURI CASTRO CAVALCANTE

ANÁLISE DA RESSONÂNCIA DE OSCILAÇÕES MECÂNICAS E
ELETROMAGNÉTICAS A PARTIR DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obten-
ção do diploma do Curso de Licenciatura em
Física do Instituto Federal de Educação, Ciên-
cia e Tecnologia do Piauí - *Campus* Teresina Central.

Orientador(a): Prof. Dr. José Ricardo Rodri-
gues Duarte.

TERESINA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Cavalcante, Yuri Castro

C377a Análise da ressonância de oscilações mecânicas e eletromagnéticas a partir da transformada de Fourier / Yuri Castro Cavalcante. - 2021.
68 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto Federal do Piauí, Campus Teresina Central, 2021.

Orientador : Prof. Dr. José Ricardo Rodrigues Duarte.

1. Fenômeno da ressonância. 2. Oscilações mecânica e eletromagnética.
3. Transformada de Fourier. I.Título.

CDD - 530

Elaborado por Sindya Santos Melo CRB 3/1085



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
DIRETORIA DE ENSINO
DEPARTAMENTO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES - DFP
COORDENAÇÃO DE FÍSICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Análise da ressonância de oscilações mecânicas e eletromagnéticas a partir da transformada de Fourier

CANDIDATO(A): Yuri Castro Cavalcante

DATA: 31 de agosto de 2021

Monografia defendida junto ao Departamento de Formação de Professores, aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. José Ricardo Rodrigues Duarte - Orientador
Instituição: Instituto Federal do Piauí – IFPI

Prof. Me. Ayrton Vasconcelos Lima - Avaliador
Instituição: Instituto Federal do Piauí - IFPI

Prof. Me. Domingos dos Santos Ponciano - Avaliador
Instituição: Instituto Federal do Piauí - IFPI

Teresina-PI, 31 de agosto de 2021.

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente aos meus pais, Waldir e Marinalva, as razões da minha existência e por terem me educado e construído meu caráter. Agradeço a eles também, por acreditarem na educação de seus filhos e colocarem nela a esperança de crescer na vida. Além disso, lhes agradeço pelo apoio financeiro a mim conferido na cidade de Teresina, sem ele não seria possível terminar o curso. Enfim, agradeço a eles por serem minha inspiração.

Ao professor Dr. Ricardo Duarte, pela paciência e compreensão da situação que estou passando em minha família. Agradeço também pelo seu profissionalismo, que mesmo diante das férias docentes estava presente sempre me orientando. Por ter ministrado as disciplinas Fluidos e Ondas, Laboratório de Fluidos e Ondas, Termodinâmica, Laboratório de Termodinâmica, Física Computacional, Eletromagnetismo e História da Física, e na maioria dessas disciplinas deu um teor computacional - isto contribuiu muito na escolha dessa pesquisa.

Agradeço a ele pela oportunidade dado na pesquisa "Uso de métodos estocásticos para investigação das condições otimizadas na captação de energia solar" no PIBIC-2017, me serviu financeiramente e na aquisição de conhecimentos.

Ao discente Freitas, pelo seu companheirismo e ajuda na parte computacional das disciplinas do curso. Também por ter ministrado o minicurso de lógica de programação; e esses conhecimentos foram essenciais no desenvolvimento dessa monografia.

A instituição, pelo espaço cedido para a realização deste curso e eventos propostos. E aos companheiros de turma, pela força e motivação nos momentos difíceis do curso.

RESUMO

Este trabalho analisou o fenômeno da ressonância nas oscilações mecânica e eletromagnética a partir da transformada de Fourier, com o auxílio da linguagem Fortran 90. Abordou-se os aspectos teóricos básicos das equações diferenciais ordinárias, oscilações mecânica e eletromagnética, transformada de Fourier e do método computacional de Runge-Kutta de 4ª ordem. Com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem foram obtidos os gráficos das soluções gerais dos problemas para o caso de amortecimento subcrítico (pois apresenta a característica oscilatória e pode interagir com uma força externa), sendo nítido que após o tempo de decaimento ($t \gg \tau_d$) prevalece a solução estacionária de cada oscilação. Além disso, através da linguagem Fortran 90 foi possível analisar o fenômeno da ressonância, sob a perspectiva do fator de mérito Q . Aplicando a transformada de Fourier nas oscilações forçadas e amortecidas, encontrou-se as soluções sob o domínio da frequência, e já com a frequência de ressonância; e usando a transformada inversa de Fourier foi encontrado as respostas no domínio do tempo, as mesmas obtidas analiticamente.

Palavras-chave: Fenômeno da ressonância. Oscilações mecânica e eletromagnética. Transformada de Fourier.

ABSTRACT

This work analyzed the phenomenon of resonance in mechanical and electromagnetic oscillations from the Fourier transform, with the aid of the Fortran language 90. The basic theoretical aspects of ordinary differential equations were discussed, mechanical and electromagnetic oscillations. Fourier transform and the fourth order Runge-Kutta's computational method. With the fourth order Runge-Kutta's method were obtained the graphs of the general solutions of the problems for the damping case subcritical (since it has the oscillatory characteristic and can interact with a force external), being clear that after the decay time ($t \gg \tau_d$) the solution prevails stationary of each oscillation. Furthermore, through the Fortran 90 language it was possible analyze the phenomenon of resonance, from the perspective of the Q merit factor. Applying the Fourier transform in the forced and damped oscillations, the solutions under the frequency domain, and already with the resonant frequency; and using the inverse Fourier transform was found the answers in the time domain, the obtained analytically.

Keywords: Resonance phenomenon. Mechanical and electromagnetic oscillations. Fourier transform.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	12
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM	12
2.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM	14
2.2.1	Método de Variação dos Parâmetros	15
2.2.2	Equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes	16
2.2.3	Método dos coeficientes a determinar	19
3	OSCILAÇÕES MECÂNICAS E ELETROMAGNÉTICAS	20
3.1	OSCILAÇÕES MECÂNICAS	20
3.1.1	Oscilações amortecidas ou forçadas	24
3.1.1.1	Oscilações amortecidas	26
3.1.1.2	Oscilações forçadas	31
3.1.2	Oscilações forçadas e amortecidas	32
3.2	OSCILAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS	33
3.2.1	Circuito RC em série	35
3.2.2	Circuito RL em série	37
3.2.3	Circuito RLC em série	38
4	TRANSFORMADA DE FOURIER	45
4.1	SÉRIE DE FOURIER	45
4.2	TRANSFORMADA DE FOURIER	48
4.3	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM	50
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	52
5.1	FENÔMENO DA RESSONÂNCIA DAS OSCILAÇÕES MECÂNICA E ELETROMAGNÉTICA	52
5.1.1	Discussão sobre a solução analítica da oscilação mecânica forçada e amortecida	52
5.1.2	Discussão sobre a solução analítica da oscilação eletromagnética forçada e amortecida	58

5.2	APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER NOS PROBLEMAS GERAIS DAS OSCILAÇÕES MECÂNICA E ELETROMAGNÉTICA .	62
5.2.1	Aplicação da transformada de Fourier na oscilação mecânica for- çada e amortecida	62
5.2.2	Aplicação da transformada de Fourier na oscilação eletromagné- tica forçada e amortecida	65
6	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

No século XVIII, o principal interesse dos físicos e matemáticos era encontrar as soluções dos problemas da Mecânica do Contínuo e da Termologia, através das Equações Diferenciais que requeriam um rigor matemático refinado (FIGUEIREDO, 1977). Os problemas já presentes na época foram: vibrações transversais de uma onda; condução do calor em uma barra e equilíbrio de uma membrana sob a ação de certas forças; todos representados por soluções de equações diferenciais parciais.

Grandes matemáticos e físicos da época participaram do estudo desses problemas, tais como: d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange - almejaram encontrar uma expressão que transformasse uma dada função em soma de senos e cossenos, para em alguns problemas satisfazer a equação de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - mas foi Fourier, estudando a propagação do calor em corpos sólidos, que obteve uma série que representasse algumas funções em bases trigonométricas.

Depois que matemáticos (tais como: Cauchy, Bolzano, Dirichlet e outros) aperfeiçoaram a série de Fourier, ela pôde ser utilizada em muitos problemas de áreas afins e representar uma parcela das funções descontínuas - diferentemente da série de Taylor, que só esboça funções contínuas e deriváveis -, além ser útil em processamento de sinais e imagens.

Para que seja respondida o questionamento: "Quais parâmetros são usados na transformada de Fourier para a análise da ressonância mecânica e eletromagnética?" o objetivo geral do presente estudo foi: "Analisar a ressonância de oscilações mecânicas e eletromagnéticas a partir da transformada de Fourier, com auxílio da linguagem Fortran 90", através dos seguintes passos: discussão analítica do caso da ressonância de oscilações mecânicas e eletromagnéticas, apresentando os dados graficamente a partir da utilização da linguagem Fortran 90; e resolução dos problemas de oscilações mecânicas e eletromagnéticas, usando a transformada de Fourier para encontrar as soluções das equações inhomogêneas no domínio da frequência.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a pesquisa bibliográfica, que se desenvolve a partir de materiais já prontos, principalmente livros e artigos científicos, tornando-se fontes dos temas a serem pesquisados (GIL, 2002). Nesse sentido, realizou-se uma busca bibliográfica por monografias, artigos científicos, dissertações, teses e livros

sobre a temática.

Na física, a ressonância é uma interação entre uma força externa (vento, terremoto, descarga elétrica, intensidade de um som, oscilação de um equipamento e outras) e um sistema físico em estudo; que é responsável por maximizar as grandezas de cada fenômeno. É pelo fenômeno da ressonância que se explica: o balanço atingir valores elevados quando empurrado; rompimento de estruturas físicas (edifícios, pontes, taças de vidro e outras) e a construção de aeronaves, na qual os projetistas levam em consideração as frequências angulares das asas e dos motores, que não devem coincidir.

Inicialmente foi preciso compreender o fenômeno da ressonância de oscilações mecânicas e eletromagnéticas, suas características e parâmetros de ocorrência. Posteriormente recorreu-se o uso de ferramentas computacionais, como as simulações numéricas utilizando a linguagem Fortran 90 e o plotador de gráficos Gnuplot, nas equações gerais das oscilações e ilustrou-se o fenômeno da ressonância em gráficos.

Por fim, aplicou-se as transformadas de Fourier nas oscilações mecânica e eletromagnética para obter as soluções particulares dos problemas. Utilizando a função delta de Dirac nas resoluções, as soluções já foram obtidas em ressonância com cada força externa.

É de fundamental importância à Física e áreas afins a compreensão do fenômeno da ressonância, visto que sua aplicação pode ser encontrada na Medicina (uso da ressonância magnética em exames), nas Engenharias Civil (uso na absorção das vibrações do solo), Elétrica (uso para controle e interferência de circuitos elétricos), Mecânica (uso para amortecimento forçado e periódico) e diversas outras áreas e aplicações.

Esse trabalho monográfico está estruturado em três capítulos intitulados: Capítulo 2 - Equações Diferenciais Ordinárias; Capítulo 3 - Oscilações mecânicas e eletromagnéticas; e Capítulo 4 - Transformada de Fourier. No capítulo 2 será apresentado a teoria das equações diferenciais ordinárias até que abrangesse o método de resolução das equações diferenciais das oscilações mecânica e eletromagnética.

No capítulo 3 apresentará a teoria das oscilações mecânicas e eletromagnéticas, partindo do oscilador harmônico simples (considerando os métodos de aproximação

de Taylor para pequenas oscilações) até o oscilador forçado e amortecido. Discutirá também o fator de mérito Q das oscilações mecânica e eletromagnética, para que o fenômeno da ressonância seja compreendido nesta perspectiva.

No capítulo 4 é dedicado a transformada de Fourier, apresentando inicialmente os conceitos básicos da série de Fourier e ilustrando com exemplo sua utilidade. Mediante isso, será introduzido a transformada de Fourier e também a transformada discreta de Fourier, que é um caso particular da transformada contínua de Fourier.

Deve-se ressaltar a contribuição de Eduardo (2018) à matemática e física, pois aplicou a transformada de Fourier em sistemas periódicos da mecânica (oscilador harmônico, pêndulo simples e pião simétrico), analisando esses problemas sob a perspectiva da frequência. Apesar de que tenha comentado sobre a ressonância nas oscilações amortecidas e/ou forçadas, através da transformada de Fourier, seu trabalho é inteiramente matemático e geral, no sentido de que analisou todo o movimento oscilatório.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

O Cálculo (Diferencial e Integral) e as Equações Diferenciais surgiram juntos, por meio das contribuições de Newton e Leibnitz (construíram a base das Equações Diferenciais, por meio do Cálculo Diferencial e Integral), Laplace, Lagrange, Jacobi, Poincaré, Liapounov e dentre outros. Todo fenômeno pode ser estudado por equações diferenciais, na qual sua resolução descreve o comportamento de suas grandezas físicas.

Na seção abaixo será discutido sobre o problema de valor inicial e a existência de soluções nas equações diferenciais. Como também apresentaremos os principais métodos de resolução das Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Em seguida, abordaremos os principais aspectos da teoria das Equações Diferenciais de Segunda Ordem.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Segundo Figueiredo e Neves (1997), a forma geral das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é dado por

$$\dot{x} = p(t)x + q(t) \quad (2.1)$$

para $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, funções reais contínuas definidas no intervalo (a, b) . Então, o objetivo é encontrar uma função $x(t)$ que seja diferenciável no intervalo dado e satisfaça a (2.1). Para essa equação diferencial, buscaremos uma solução geral que contenha o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Para resolver a (2.2) precisamos encontrar o fator integrante $\mu(t)$, operando assim

$$\mu(t) (\dot{x} - p(t)x) = \mu(t)q(t) \quad (2.3)$$

de forma que o primeiro membro da (2.3) seja a derivada da função composta $\mu(t)x(t)$

$$\mu(t) (\dot{x} - p(t)x) = \frac{d}{dt} (\mu(t)x(t)) = \dot{\mu}x + \mu\dot{x} \quad (2.4)$$

Assim:

$$-\mu(t)p(t)x = \dot{\mu}x \sim \frac{\dot{\mu}}{\mu(t)} = -p(t) \sim \frac{1}{\mu(t)} \cdot \frac{d\mu}{dt} = -p(t) \sim \frac{1}{\mu(t)} \cdot \frac{d\mu}{dt} dt = -p(t)dt \quad (2.5)$$

Integrando a (2.5):

$$\int \frac{1}{\mu(t)} \cdot \frac{d\mu}{dt} dt = - \int p(t) dt \quad (2.6)$$

$$\ln \mu(t) = - \int p(t) dt \sim \mu(t) = e^{-\int p(t) dt} = e^{-\int p(s) ds} \quad (2.7)$$

Definindo o intervalo de integração que contenha o problema de valor inicial:

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} = e^{-\int_t^{t_0} p(s) ds} \quad (2.8)$$

Para simplificar as expressões da solução geral $x(t)$ denominamos:

$$T(t, t_0) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \quad (2.9)$$

com as propriedades válidas

$$\begin{cases} T(t_0, t_0) = 1 \\ T(t, t_0) = [T(t_0, t)]^{-1} \\ T(t, t_0)T(t_0, s) = T(t, s) \end{cases} \quad (2.10)$$

Pela segunda propriedade de (2.10), o fator integrante $\mu(t)$ de (2.8) é também:

$$\mu(t) = T(t_0, t) \quad (2.11)$$

Portanto a (2.3) resulta em:

$$\frac{d}{dt} (T(t_0, t)x(t)) = T(t_0, t)q(t) \sim \frac{d}{dt} (T(t_0, t)x(t)) dt = T(t_0, t)q(t) dt \quad (2.12)$$

Integrando (2.12) encontramos:

$$T(t_0, t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t T(t_0, s)q(s) ds \quad (2.13)$$

Multiplicando (2.13) por $T(t, t_0)$ e em posse das propriedades da (2.10) temos:

$$x(t) = T(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t T(t, s)q(s) ds \quad (2.14)$$

que é denominado de fórmula de variação das constantes, na qual é solução do problema de valor inicial (2.2).

O que garante a existência e unicidade de uma equação diferencial de primeira ordem é o teorema apresentado a seguir:

Teorema 2.1.1 (Existência e Unicidade). *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y) . Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I)*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Para demonstração detalhada do Teorema-2.1.1 ver Figueiredo e Neves (1997). Observe que somente a continuidade de uma função f , no intervalo dado, não garante a unicidade de uma solução do problema de valor inicial, conforme é mostrado abaixo:

Exemplo 2.1 Encontre a EDO do problema de valor inicial

$$y' = |y|^{1/2} \quad y(0) = 0 \quad (2.16)$$

Neste exemplo, a função $f(x, y) = |y|^{1/2}$ é contínua para todo o plano (x, y) e $y(x) = 0$ é uma das soluções desse problema. Agora resolvendo o problema pelo método das equações separáveis encontramos outras soluções:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{4}x^2, & x < 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Então, (2.16) não tem unicidade em torno da origem do plano (x, y) .

Existem outros tipos especiais de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, que podem ser obtidas analiticamente, tais como: Equações Homogêneas, Equações Exatas, Equações de Bernoulli, Ricatti e de Clairaut, para mais detalhes ver Zill e Cullen (2001a). Diante do estudo a que se propõe, não será necessário apresentá-los nesta seção.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Esses tipos de equações diferenciais tiveram sua origem em problemas da Mecânica, tais como: dinâmica de uma partícula, oscilador harmônico e campos centrais de forças. O objetivo dessa seção é apresentar os métodos de resoluções de Equações Diferenciais de segunda ordem, que aproximam-se das equações dos osciladores forçados amortecidos mecânico e eletromagnético.

Para $p, q, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas no intervalo (a, b) , a equação linear de segunda ordem é

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (2.18)$$

ou simplesmente, para $t > 0$ ou toda a reta $-\infty < t < \infty$;

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f. \quad (2.19)$$

O teorema a seguir garante a existência e unicidade de (2.18):

Teorema 2.2.1. *Se p, q e f são funções contínuas em (a, b) , então o problema de valor inicial (P.V.I) apresentado abaixo tem uma, e somente uma, solução definida em todo o intervalo (a, b)*

$$\begin{cases} \ddot{x} + p\dot{x} + qx = f \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

A equação homogênea de (2.20) é quando $f = 0$

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \quad (2.21)$$

e para um conjunto de condições iniciais temos uma única solução:

$$x(t_0) = 1 \quad \dot{x}(t_0) = 0 \quad (2.22)$$

$$x(t_0) = 0 \quad \dot{x}(t_0) = 1 \quad (2.23)$$

Se $\phi_1(t)$ é solução da (2.21) com o P.V.I da (2.22) e $\phi_2(t)$ for também solução, para o P.V.I da (2.23); a superposição das duas funções também satisfaz a (2.21):

$$\phi(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) \quad (2.24)$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias.

2.2.1 Método de Variação dos Parâmetros

Esse método tem o objetivo de buscar funções $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ para o qual

$$x(t) = \alpha_1(t)\psi_1(t) + \alpha_2(t)\psi_2(t) \quad (2.25)$$

seja solução de (2.18), com $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ soluções linearmente independente (quando $\varphi_1\psi_1(t) + \varphi_2\psi_2(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$ - intervalo de continuidade das funções $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ -, ou seja, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) e que satisfaça a (2.21).

Derivando (2.25) em relação a t :

$$\dot{x} = \alpha_1\dot{\psi}_1 + \alpha_2\dot{\psi}_2 + \dot{\alpha}_1\psi_1 + \dot{\alpha}_2\psi_2 \quad (2.26)$$

E como estamos com dois graus de liberdade, consideramos $\dot{\alpha}_1\psi_1 + \dot{\alpha}_2\psi_2 = 0$. Então (2.26) se resume a

$$\dot{x} = \alpha_1\dot{\psi}_1 + \alpha_2\dot{\psi}_2 \quad (2.27)$$

e derivando novamente temos

$$\ddot{x} = \alpha_1\ddot{\psi}_1 + \alpha_2\ddot{\psi}_2 + \dot{\alpha}_1\dot{\psi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\psi}_2. \quad (2.28)$$

Agora, substituindo (2.25), (2.27) e (2.28) em (2.19) obtemos

$$\dot{\alpha}_1\dot{\psi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\psi}_2 = f \quad (2.29)$$

e assim, temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1\psi_1 + \dot{\alpha}_2\psi_2 = 0 \\ \dot{\alpha}_1\dot{\psi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\psi}_2 = f. \end{cases} \quad (2.30)$$

A solução da (2.30) é

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{f\psi_2}{W} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{f\psi_1}{W} \quad (2.31)$$

com W chamado de Wronskiano de ψ_1 e ψ_2 , expresso por

$$W = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 & \dot{\psi}_2 \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

2.2.2 Equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

São equações diferenciais do tipo

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad p, q = \text{constantes} \quad (2.33)$$

com soluções definidas em toda a reta.

As solução de (2.33) são da forma $x(t) = e^{\lambda t}$, para o qual λ tem que ser determinado. Então, substituindo suas respectivas derivadas em (2.33) encontramos

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0 \sim (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda t} = 0 \quad (2.34)$$

e como $e^{\lambda t}$ nunca se anula, a

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (2.35)$$

é denominada de equação característica ou auxiliar.

As raízes de (2.35) depende do sinal de Δ :

a) $\Delta > 0$;

Para esta situação, a solução de (2.33) é composta de duas raízes reais e distintas

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (2.36)$$

e as funções da solução são linearmente independente para

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}. \quad (2.37)$$

b) $\Delta = 0$;

Nesse caso, encontramos apenas como raiz de (2.35) $\lambda = -\frac{p}{2}$ e uma das soluções é:

$$x_1(t) = e^{-pt/2} \quad (2.38)$$

Para encontrar a outra solução utilizamos o método de redução de ordem para (2.33), considerando $x_1(t)$ como solução. Assim, $x_2(t)$ é dado por

$$x_2(t) = u(t)x_1(t) \quad (2.39)$$

e substituindo suas derivadas em (2.33) temos:

$$\ddot{u}x_1 + \dot{u}\dot{x}_1 + u\ddot{x}_1 + p[\dot{u}x_1 + u\dot{x}_1] + qu\dot{x}_1 = 0 \quad (2.40)$$

$$\ddot{u}x_1 + \dot{u}[2\dot{x}_1 + px_1] + u[\ddot{x}_1 + p\dot{x}_1 + qx_1] = 0 \quad (2.41)$$

$$\ddot{u}x_1 + \dot{u} [2\dot{x}_1 + px_1] = 0 \quad (2.42)$$

Chamando $\dot{u} = \nu$ a (2.42) resulta em

$$\dot{\nu}x_1 + \nu [2\dot{x}_1 + px_1] = 0 \sim \dot{\nu} + \left[p + 2\frac{\dot{x}_1}{x_1} \right] \nu = 0 \quad (2.43)$$

na qual é uma equação diferencial linear de 1ª ordem. Resolvendo (2.43) encontramos

$$\nu(t) = \frac{c}{x_1^2} e^{-P(t)}, \quad c = \text{constante}, \quad (2.44)$$

onde $P(t) = \int p(t) dt$ e portanto:

$$u(t) = \int \nu dt \sim u(t) = c \int \frac{1}{x_1^2} e^{-P(t)} dt \quad (2.45)$$

Substituindo (2.45) em (2.39)

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-P(t)} dt \quad (2.46)$$

e encontramos a segunda solução de (2.33) pelo método de redução de ordem. Agora, para $x_1 = e^{-pt/2}$ da (2.38) temos:

$$x_2(t) = e^{-pt/2} \int \frac{1}{(e^{-pt/2})^2} e^{-pt} dt = te^{-pt/2} \quad (2.47)$$

c) $\Delta < 0$

Neste caso, as raízes da (2.35) são complexas conjugadas

$$\lambda_1 = -\mu + i\nu \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\mu - i\nu \quad (2.48)$$

onde $\mu = \frac{p}{2}$ e $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$. Então, as soluções são:

$$x_1(t) = e^{-\mu t} e^{i\nu t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\nu t} \quad (2.49)$$

E levando em consideração a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, outras soluções de (2.33) pode ser dado por

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2} [x_1(t) + x_2(t)] = e^{-\mu t} \cos \nu t \quad (2.50)$$

e

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2i} [x_1(t) - x_2(t)] = e^{-\mu t} \sin \nu t. \quad (2.51)$$

2.2.3 Método dos coeficientes a determinar

Esse método consiste em procurar uma solução particular $x_p(t)$ a partir do formato da função $f(t)$ da equação

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t) \quad p, q = \text{constantes} \quad (2.52)$$

e para $f(t) = \cos \beta t$ ou $\sin \beta t$, a solução particular é $x_p(t) = b_1 \cos \beta t + b_2 \sin \beta t$, bastando determinar os coeficientes b_1 e b_2 . Conforme exemplo abaixo:

Exemplo: Encontre a solução particular $x_p(t)$ da

$$4\ddot{x} - 4\dot{x} - 3x = \cos 2t \quad (2.53)$$

Reorganizando a equação diferencial (2.53) temos

$$\ddot{x} - \dot{x} - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4} \cos 2t \quad (2.54)$$

e a solução particular é dado por $x_p(t) = b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$. Substituindo as derivadas em $x_p(t)$ de (2.54) encontramos:

$$[-4b_1 \cos 2t - 4b_2 \sin 2t] - [-2b_1 \sin 2t + 2b_2 \cos 2t] - \frac{3}{4}[b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t] = \frac{1}{4} \cos 2t \quad (2.55)$$

$$\left[-4b_1 - 2b_2 - \frac{3}{4}b_1\right] \cos 2t + \left[-4b_2 + 2b_1 - \frac{3}{4}b_2\right] \sin 2t = \frac{1}{4} \cos 2t \quad (2.56)$$

Para que (2.56) seja verdadeira, temos o sistema

$$\begin{cases} -4b_1 - 2b_2 - \frac{3}{4}b_1 = \frac{1}{4} \\ -4b_2 + 2b_1 - \frac{3}{4}b_2 = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

e resolvendo o sistema acima encontramos os coeficientes $b_1 = -\frac{19}{425}$ e $b_2 = -\frac{8}{425}$, assim a solução particular torna-se:

$$x_p(t) = -\frac{19}{425} \cos 2t - \frac{8}{425} \sin 2t. \quad (2.58)$$

3 OSCILAÇÕES MECÂNICAS E ELETROMAGNÉTICAS

Nesta seção, discutiremos o conceito de oscilações mecânicas e eletromagnéticas, de modo a direcionar as reflexões para o âmbito da ressonância em oscilações mecânicas e eletromagnéticas, foco no nosso estudo.

3.1 OSCILAÇÕES MECÂNICAS

Na Física as oscilações se diferem das ondas, porque as oscilações são vibrações localizadas, já as ondas se propagam no espaço. São exemplos de oscilações mecânicas: pêndulos, diapasões, cordas de instrumentos musicais e colunas de ar em instrumentos de sopro.

Segundo Thohnton e Marion (2011) os sistemas oscilantes com apenas um grau de liberdade (por exemplo, a posição de uma partícula deslocada da posição de equilíbrio), há uma força restauradora que tende a voltar a partícula a posição original. Para $F(x)$ uma função de restauração que depende somente do deslocamento e possui derivadas contínuas em todas as ordens, pode ser expandida em uma série de Taylor:

$$F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{3!} x^3 \left(\frac{d^3 F}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (3.1)$$

Para o caso da partícula deslocada em uma posição suficientemente pequeno, a força restauradora $F(x)$ pode ser aproximada por $-kx$, onde F_0 é nulo ($x = 0$, pois corresponde a posição de equilíbrio e caso contrário a partícula não retornaria ao ponto de equilíbrio) e $k \equiv -\left(\frac{dF}{dx} \right)_0$, pois os termos de x^2 e de ordem superior foram desprezados. Os sistemas físicos que são regidos por $F(x) = -kx$, obedecem a lei de Hooke.

Considere um sistema massa-mola oscilando em torno da posição de equilíbrio; a segunda lei de Newton do sistema oscilante é:

$$-kx = m\ddot{x} \quad (3.2)$$

Então:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.3)$$

Onde:

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \quad (3.4)$$

A EDO (Equação Diferencial Ordinária) (3.3) chama-se equação do movimento harmônico simples (MHS) e abrange qualquer sistema oscilante de pequenos desvios da posição de equilíbrio estável, descrito com apenas um grau de liberdade, no caso a posição.

Para resolver qualquer EDO, como é o caso da (3.3), usa-se soluções aproximadas por métodos numéricos, com os parâmetros da oscilação suficientemente pequenos. Então, para $\Delta t \rightarrow 0$ as aproximações das aceleração e velocidade, são respectivamente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{dx}{dt}(t + \Delta t) - \frac{dx}{dt}(t) \right] \quad (3.5)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [x(t + \Delta t) - x(t)] \quad (3.6)$$

Para o sistema massa-mola as condições iniciais são:

$$x(0) = x_0 \quad (3.7)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v(0) = v_0 \quad (3.8)$$

Substituindo esses valores em (3.5) e (3.6) respectivamente, temos que as aproximações para $t = 0$ são:

$$x(\Delta t) \approx x(0) + \Delta t \frac{dx}{dt}(0) = x_0 + v_0 \Delta t \quad (3.9)$$

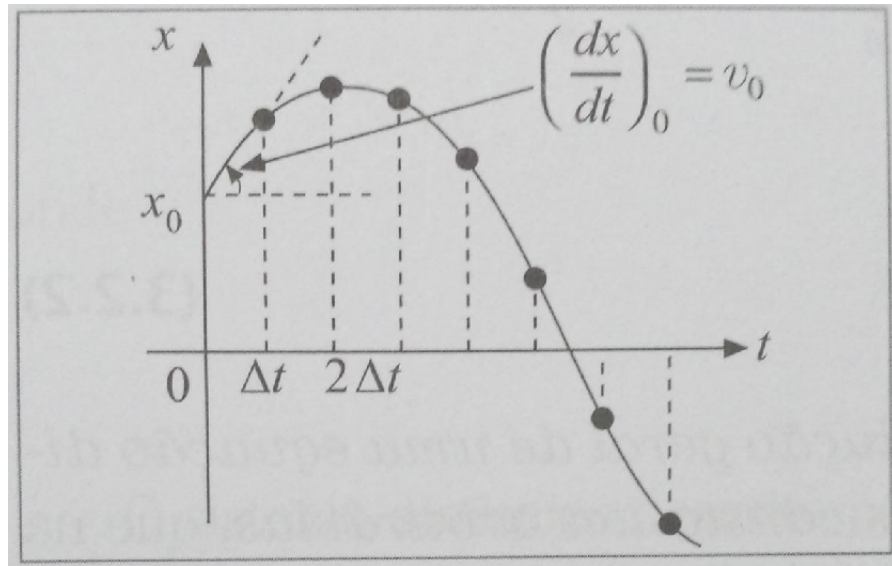
$$\frac{dx}{dt}(\Delta t) \approx \frac{dx}{dt}(0) + \Delta t \cdot \frac{d^2x}{dt^2}(0) \quad (3.10)$$

Considerando que $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x(0)$ (retirada da (3.3)) a (3.10) fica:

$$\frac{dx}{dt}(\Delta t) \approx \frac{dx}{dt}(0) + \Delta t \cdot \frac{d^2x}{dt^2}(0) = v_0 - \omega_0^2 x_0 \Delta t \quad (3.11)$$

Realizando esse procedimento sucessivas vezes, com $\Delta t \rightarrow 0$ obtemos por simulação computacional o gráfico a seguir (Figura 1):

Figura 1 – Obtenção da solução numérica da (3.3)



Fonte: (Nussenzveig, 2002).

Observe a ilustração acima que quanto menor for Δt mais a reta tangente se aproxima da solução $x(t)$. O gráfico mostrado acima, sugere que a função seja periódica, do tipo $\sin(ct)$ e/ou $\cos(ct)$, onde c precisa ser ajustada para satisfazer a (3.3). Então, tomando $c = \omega$ as soluções para (3.3):

$$x_1(t) = \cos(\omega t) \quad (3.12)$$

$$x_2(t) = \sin(\omega t) \quad (3.13)$$

Pelo princípio de superposição da teoria de EDO, a solução geral da (3.3), considerando que a (3.12) e (3.13) são linearmente independentes, é:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (3.14)$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.14) a solução geral é:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (3.15)$$

Considerando que $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi$, a solução geral (3.15) escrita em termos desse argumento, para $a = A \cos \varphi$ e $b = -A \sin \varphi$, é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.16)$$

Onde:

ω : frequência angular do sistema;

A : amplitude das oscilações, dada por $A = \sqrt{a^2 + b^2}$;

φ : constante de fase do sistema;

Segundo Nussenzveig (2002), a solução $x(t)$ oscila entre os extremos A e $-A$, conforme os valores máximo e mínimo do cosseno. Quando modifica a fase inicial (φ), a função desloca-se pelo lado direito ou esquerdo e mostra valores diferentes da posição para os mesmos instantes de tempo.

Derivando (3.16) em função de t , encontramos a velocidade do sistema massa-mola:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.17)$$

Como $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$, a (3.17) em função do cosseno é:

$$v(t) = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.18)$$

Comparando (3.16) e (3.18) para $\varphi = 0$, observamos que estão em quadratura: quando $|x| = A$ (deslocamento máximo), a velocidade é nula; e quando a massa passa pela posição de equilíbrio ($x = 0$), o módulo da velocidade é máximo.

Substituindo (3.17) na energia cinética do sistema massa-mola temos:

$$T(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (3.19)$$

Para sistemas conservativos temos que a variação da energia potencial é igual ao negativo do trabalho realizado sobre o ente físico; expresso da seguinte forma:

$$\Delta U = -W \quad (3.20)$$

Para o sistema massa-mola considerado, a energia potencial elástica é:

$$U = \int dw = \int_0^x -F_{el} dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.21)$$

Substituindo (3.16) em (3.21), com a constante elástica $k = m\omega^2$, temos a energia potencial elástica do oscilador massa-mola em função do cosseno:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (3.22)$$

Assim, a energia total E se torna:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}kA^2 \quad (3.23)$$

Observe que E é independente do tempo, ou seja, se conserva em qualquer instante da oscilação - para a posição de equilíbrio, a energia é totalmente cinética e quando a amplitude é máxima, ela é puramente potencial. Esse resultado se comporta desta forma, porque foi desconsiderado forças resistivas e externas na análise do problema.

Qualquer sistema físico conservativo com apenas um grau de liberdade, que oscila em uma posição de equilíbrio estável, satisfaz a equação do movimento harmônico simples – Eq. (3.3); com a frequência angular (ω) distinta em cada sistema. Segundo Nussenzveig (2002), há uma gama de exemplos da mesma natureza da Eq. (3.3), por exemplo: pêndulo de torção, pêndulo simples, pêndulo físico e oscilações de duas partículas.

3.1.1 Oscilações amortecidas ou forçadas

Em sistemas físicos de oscilações reais há perdas de energia e a (3.3) não é satisfeita, já que corresponde a um sistema conservativo. Em sistemas reais as dissipações são por atrito entre os objetos (sólidos ou entre sólidos e líquidos) e por meio da resistência do ar (através do deslocamento no interior do fluido).

Para facilitar a compreensão desses tipos de oscilações é necessário introduzir algumas considerações sobre números complexos para resoluções das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que descrevem esses problemas físicos.

Assim, lezzi et al. (2002) considera que o número complexo é o conjunto de pares ordenados de números reais que satisfazem as seguintes definições:

Igualdade: Dois pares ordenados são iguais, quando apresentarem primeiros termos iguais e segundos termos iguais;

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d \quad (3.24)$$

Adição: É a soma termo a termo dos pares ordenados, ou seja, para a soma de dois pares ordenados, soma-se as duas abscissas e ordenadas, respectivamente.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (3.25)$$

Multiplicação: Para o produto de dois pares ordenados, o primeiro termo do produto é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares, e o segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (3.26)$$

O número complexo $z = (x, y)$ tem a forma algébrica $z = a + b \cdot i$, para qual, as definições de igualdade, adição e multiplicação de números complexos ainda são válidas. Considerando que o conjugado desse número complexo é $\bar{z} = a - b \cdot i$ é válido as propriedades:

$$z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}z \quad (3.27)$$

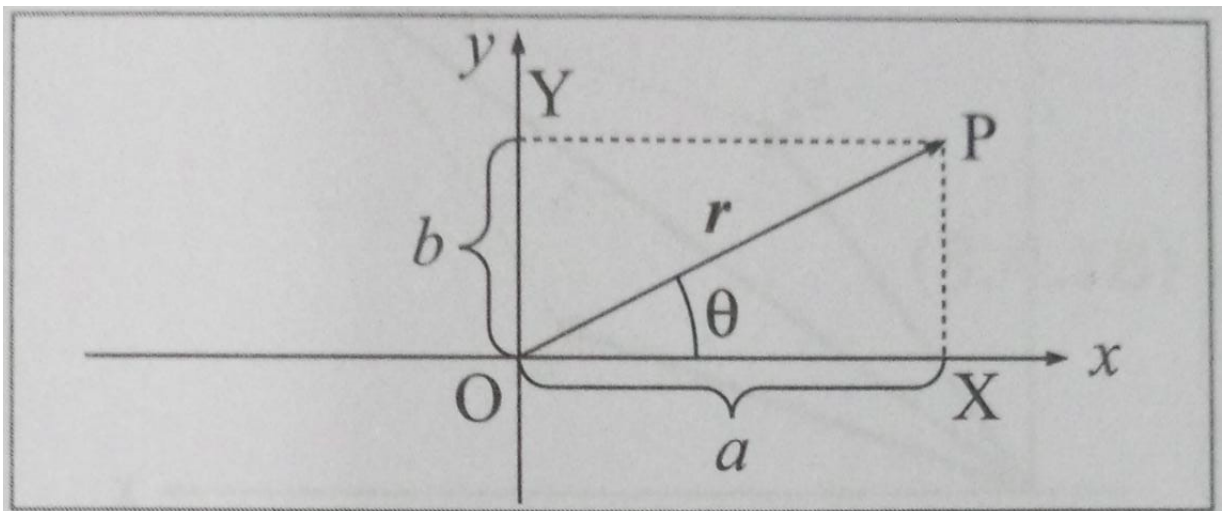
$$z - \bar{z} = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i \quad (3.28)$$

O módulo de z :

$$|z|^2 \equiv \bar{z}z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 \sim |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.29)$$

A representação do número complexo em um plano cartesiano é um ponto de coordenadas (x, y) , distante r do eixo das origens, conforme mostrado abaixo:

Figura 2 – Representação trigonométrica de z



Fonte: (Nussenzveig, 2002).

Substituindo as projeções $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ em $z = x + yi$, com $e^{\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (conhecido como fórmula de Euler) temos:

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (3.30)$$

Da Figura-2, o argumento de z é:

$$\theta = \text{Arg } z = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad (3.31)$$

Se $z(t)$ é solução de uma EDO de coeficientes constantes, $\text{Re } z(t)$ também satisfaz essa equação diferencial. Para a combinação linear, com coeficientes constantes, de números complexos é válido:

$$\text{Re} (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 \text{Re } z_1 + \lambda_2 \text{Re } z_2 \quad (3.32)$$

Além disso, considerando $z(t)$ variável, da forma $z(t) = x(t) + iy(t)$, a sua derivada fica:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t) + iy(t)] = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \quad (3.33)$$

3.1.1.1 Oscilações amortecidas

Para oscilações unidimensionais, com a velocidade suficientemente pequena, a força resistiva é proporcional a velocidade. A equação de movimento para oscilações amortecidas pequenas é:

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x} \quad (3.34)$$

Com o parâmetro $\rho > 0$ a força adicional é realmente resistiva, caso contrário ($\rho < 0$) a velocidade da partícula aumentaria e a oscilação não teria amortecimento. Reorganizando e dividindo por m a (3.34) fica:

$$\ddot{x} + \frac{\rho}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.35)$$

Para $\gamma = \frac{\rho}{m}$ (parâmetro de amortecimento) e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (frequência natural do sistema) a (3.35) torna-se:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.36)$$

Como (3.36) é uma equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes constantes, podemos recorrer a notação complexa da função candidata a solução $z(t) = e^{pt}$,

substituindo $x(t)$ por $z(t)$ e suas respectivas derivadas:

$$p^2 z + \gamma p z + \omega_0^2 z = 0 \sim (p^2 + \gamma p + \omega_0^2) z = 0 \quad (3.37)$$

Então, a equação característica de (3.37) é:

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad (3.38)$$

Resolvendo essa equação do 2º grau temos como solução:

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \quad (3.39)$$

Dependendo do valor do Δ (discriminante) temos os regimes:

- a)** amortecimento subcrítico: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$;
- b)** amortecimento supercrítico: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$;
- c)** amortecimento crítico: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$.

Abaixo é discutido cada regime:

- a)** amortecimento subcrítico ($\frac{\gamma}{2} < \omega_0$)

Para o caso do movimento subamortecido, é necessário definir:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \quad (3.40)$$

E a raiz quadrada negativa de (3.39) resulta:

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \quad (3.41)$$

Assim, a solução geral é composta de duas constantes reais arbitrárias, formada pela combinação das duas raízes da equação característica:

$$z(t) = ae^{p_+ t} + be^{p_- t} \sim z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}) \quad (3.42)$$

Agora basta retirar a parte real da (3.42), já que é o eixo real da oscilação:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] \quad (3.43)$$

Outra forma de obter a solução (3.43) é utilizar uma das raízes e proceder como segue:

$$z(t) = Ce^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega)t} \quad (3.44)$$

Substituindo $C = Ae^{i\varphi}$ em (3.44):

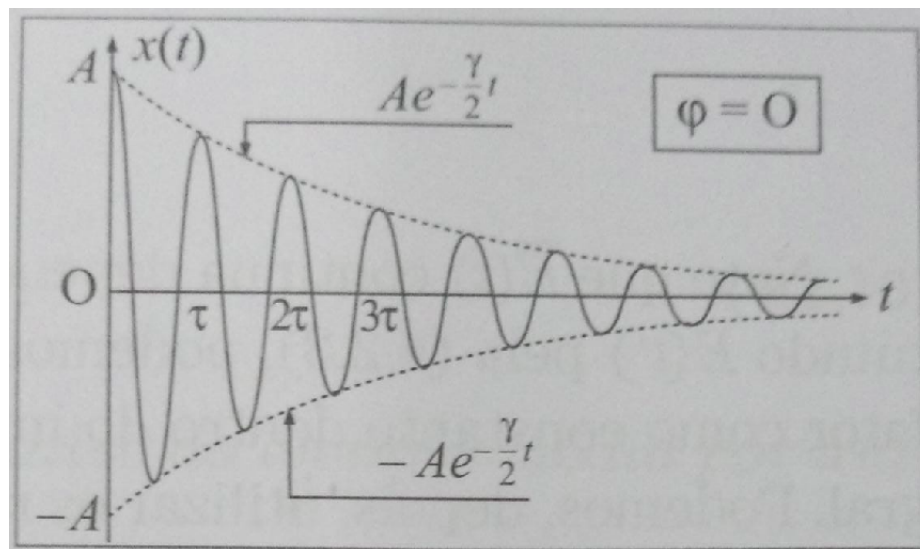
$$z(t) = Ae^{i\varphi} e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega)t} = Ae^{\frac{\gamma}{2}t} e^{(\omega t + \varphi)i} \quad (3.45)$$

Tomando a parte real de (3.45) obtemos a solução geral:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.46)$$

O gráfico plotado é mostrado abaixo, para $\varphi = 0$:

Figura 3 – Comportamento da amplitude nas oscilações amortecidas



Fonte: (Nussenzveig, 2002).

Observe que a Figura-3 representa efetivamente uma oscilação amortecida, em que a amplitude diminui até zero quando $t \rightarrow \infty$. Para o amortecimento fraco, $\gamma \ll \omega_0$, a amplitude máxima do oscilador amortecido diminui com o tempo pelo fator $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ e a envoltória da oscilação é dado por $\pm Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$, conforme mostra a ilustração anterior.

Para Thohnton e Marion (2011), nas oscilações amortecidas não define-se frequência angular de oscilação, já que o movimento não é periódico. A frequência angular para esse sistema é $\omega = \frac{2\pi}{2\tau}$, com τ medindo o tempo entre cruzamentos do eixo x adjacentes a zero.

A energia mecânica deste oscilador é:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) \quad (3.47)$$

Observe que a variação da energia mecânica do sistema é diferente de zero, pois a energia é constantemente cedida ao meio de amortecimento e dissipada como calor ou radiação (na forma de ondas de fluido). Derivando (3.47) em relação a t temos:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = -\rho\dot{x}^2 = -m\gamma\dot{x}^2 \quad (3.48)$$

Substituindo (3.46) e sua derivada em (3.47) temos:

$$E(t) = \frac{1}{2}mA^2e^{-\gamma t} \left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos^2(\omega t + \varphi) - \frac{\gamma}{2}\omega \sin[2(\omega t + \varphi)] + \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \right] \quad (3.49)$$

No amortecimento fraco ($\gamma \ll \omega_0$) o fator $e^{-\gamma t}$ varia praticamente nada em um período de oscilação e se comporta como constante no cálculo do valor médio de $E(t)$. Assim, substituindo (3.49) na equação abaixo encontramos:

$$\overline{E}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} E(t') dt' = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} = \overline{E}(0)e^{-\gamma t} \quad (3.50)$$

O tempo de decaimento (τ_d) corresponde ao período que a energia média torna-se $\frac{1}{e}\overline{E}(0)$, então:

$$\tau_d = \frac{1}{\gamma} \quad (3.51)$$

A derivada da (3.50) para qualquer valor de t é:

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = -\gamma\overline{E} \quad (3.52)$$

Usando (3.52) para encontrar a energia dissipada por um ciclo de oscilação:

$$\Delta\overline{E} = -\frac{d\overline{E}}{dt} \cdot \tau = \gamma\overline{E}\tau \quad (3.53)$$

Usando (3.53), o fator de mérito ou fator Q torna-se:

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{energia armazenada no oscilador}}{\text{energia dissipada por ciclo}} \right) = 2\pi \left(\frac{\overline{E}}{\Delta\overline{E}} \right) = 2\pi \left(\frac{\overline{E}}{\gamma\overline{E}\tau} \right) = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (3.54)$$

Observe que $Q \gg 1$ (para amortecimento fraco) e quanto maior o fator de mérito menor o amortecimento da oscilação.

b) amortecimento supercrítico ($\frac{\gamma}{2} > \omega_0$)

Para esse tipo de oscilação a solução é composta de duas constantes reais e distintas. Usando $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ em (3.39) e substituindo em (3.42):

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (ae^{\beta t} + be^{-\beta t}) \quad (3.55)$$

Essa solução tende rapidamente a zero, quando $x_0 > 0$ e $v_0 > 0$, e não apresenta nenhum termo oscilante.

c) amortecimento crítico ($\frac{\gamma}{2} = \omega_0$)

Para encontrar a outra solução para esse tipo de amortecimento é necessário calcular o $\lim_{\beta \rightarrow 0} x(t)$ da solução do amortecimento supercrítico (3.55), quando $a = \frac{1}{2\beta}$ e $b = -\frac{1}{2\beta}$:

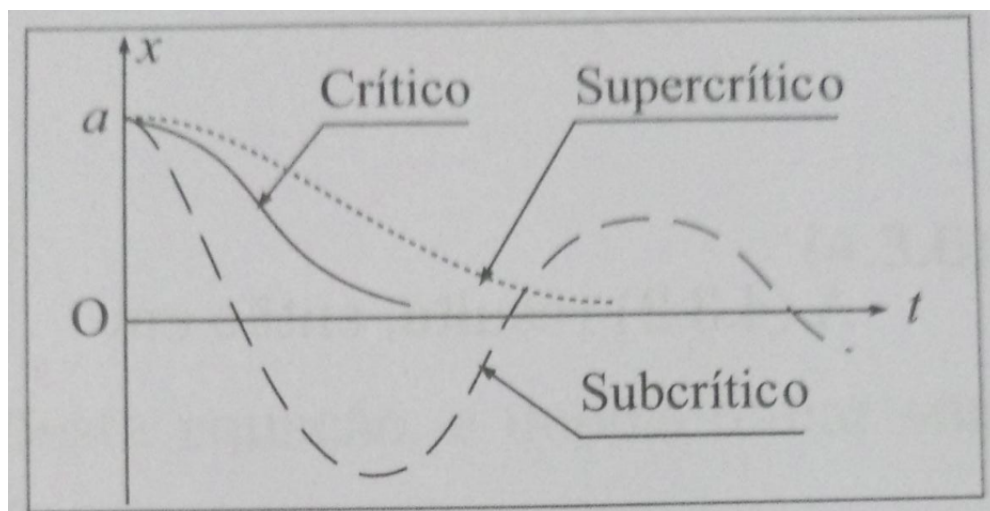
$$\lim_{\beta \rightarrow 0} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta} \right) = te^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (3.56)$$

Então, a solução geral para o amortecimento crítico é:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt) \quad (3.57)$$

A ilustração a seguir mostra o regime de oscilação para os três tipos de amortecimentos:

Figura 4 – Três casos do oscilador amortecido



Fonte: (Nussenzveig, 2002).

3.1.1.2 Oscilações forçadas

Nesse tipo de oscilação existe uma força externa periódica (responsável por fornecer energia ao sistema), com frequência angular diferente da frequência natural do oscilador. Exemplos de oscilações forçadas são: oscilações de uma pessoa sentada num balanço sob a ação de empurrões periódicos; oscilações do diafragma de um microfone e oscilações elétricas.

A equação diferencial que rege esse problema é, considerando a força externa $F(t)$ periódica:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.58)$$

Para $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a (3.58) fica:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \sim \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3.59)$$

Esse é um exemplo de equação diferencial de 2ª ordem inhomogênea, na qual a solução geral é a somatória da solução geral da equação homogênea (quando $F(t) = 0$) e da solução particular. Então, expandimos para notação complexa:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3.60)$$

A solução procurada é da forma $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$ e substituindo suas respectivas derivadas em (3.60):

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \sim (\omega_0^2 - \omega^2)z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3.61)$$

Então:

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (3.62)$$

A constante complexa z_0 em forma trigonométrica:

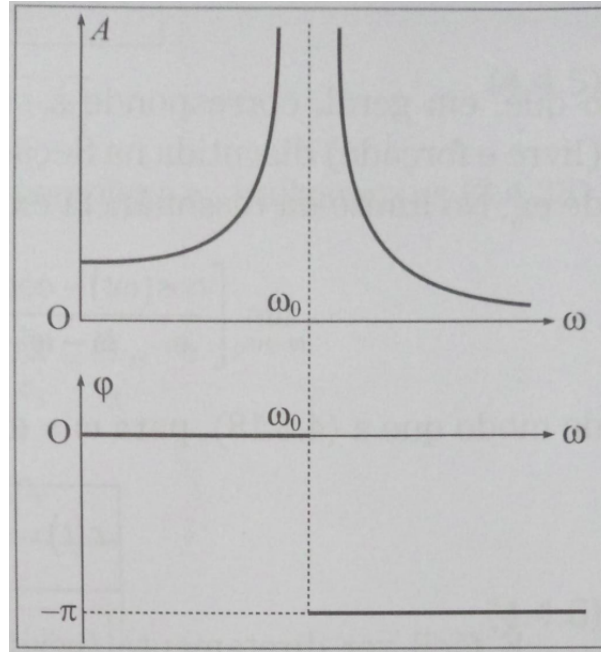
$$z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = A e^{i\varphi} \quad (3.63)$$

Para $A = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$, tomando a constante de fase $\varphi = 0$ ($\omega < \omega_0$) ou $\varphi = -\pi$ ($\omega > \omega_0$). E a solução particular (solução estacionária) é a parte real de (3.62):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.64)$$

Quando $\omega \rightarrow \omega_0$ na amplitude A observamos o fenômeno da ressonância, na qual $A \rightarrow \infty$ e a constante de fase φ apresenta uma descontinuidade na defasagem em $\omega = \omega_0$. A figura abaixo mostra o comportamento das duas grandezas:

Figura 5 – Ressonância nas oscilações forçadas



Fonte: (Nussenzveig, 2002).

3.1.2 Oscilações forçadas e amortecidas

A equação diferencial mais geral que descreve um problema de oscilações mecânicas (para uma força externa periódica e uma força dissipativa proporcional à velocidade) é:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.65)$$

Dividindo (3.65) por m e usando $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\gamma = \frac{\rho}{m}$:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3.66)$$

Resolvendo o problema em notação complexa, para a solução teste $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \sim (\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2) z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \sim (\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2) z_0 = \frac{F_0}{m} \quad (3.67)$$

Como z_0 é constante complexa, é escrito como $Ae^{i\varphi}$ e a (3.67) torna-se:

$$(\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2) z_0 = \frac{F_0}{m} \sim z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2)} = Ae^{i\varphi} \quad (3.68)$$

Assim:

$$A^2 = |z_0|^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]} \sim A(\omega) = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}} \quad (3.69)$$

E a constante de fase φ é:

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.70)$$

Portanto, a solução estacionária é:

$$x(t) = \text{Re } z(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (3.71)$$

3.2 OSCILAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS

Para Nussenzveig (1997), circuitos elétricos são formados basicamente por esses elementos: resistores, capacitores, indutores e geradores. Conforme a associação desses elementos são classificados as oscilações.

Cada um desses elementos exerce uma função no circuito; os resistores dissipam energia, os capacitores armazenam energia elétrica; os indutores armazenam energia magnética, e os geradores são fontes de fem (força eletromotriz).

A associação LC (indutor e capacitor) em série é denominada de oscilação livre, na qual a energia do circuito se conserva - apenas alterna entre as energias no campo elétrico e magnético, do capacitor e indutor respectivamente (NUSSENZVEIG, 1997).

Considerando que o capacitor está com a carga inicial Q , sua queda de potencial entre as placas é $V = \frac{Q}{C}$ (C como a capacitância do capacitor) e a voltagem nos terminais do indutor é $V = L \frac{dI}{dt}$, a 1ª lei de Kirchhoff ('a soma de todas as quedas de tensão ao longo de uma malha de um circuito é nula') fica:

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (3.72)$$

Considerando que $\frac{dQ}{dt} = I$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (frequência angular das oscilações livres), a (3.72) resulta em:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (3.73)$$

Utilizando notação complexa, com a solução teste $z(t) = ae^{bt}$ (onde a e b são constantes complexas), a equação diferencial anterior fica (substituindo suas

respectivas derivadas):

$$\ddot{z} + \omega_0^2 \dot{z} = 0 \sim ab^2 e^{bt} + \omega_0^2 a e^{bt} = 0 \sim a e^{bt} (b^2 + \omega_0^2) = 0 \quad (3.74)$$

Então, para que (3.74) seja satisfeita temos:

$$b^2 + \omega_0^2 = 0 \sim b^2 = -\omega_0^2 \sim b = \pm i\omega_0 \quad (3.75)$$

Assim, a solução geral da (3.74) é:

$$z(t) = a_+ e^{i\omega_0 t} + a_- e^{-i\omega_0 t} \quad (3.76)$$

Escolhendo estrategicamente os valores das constantes $a_+ = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$ e $a_- = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}$ a (3.76) torna-se:

$$z(t) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{i\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{-i\omega_0 t} = \frac{A}{2} [e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}] \quad (3.77)$$

Como $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ a (3.77), com a constante $A = Q_\infty = C\varepsilon_0$, resulta em (somente com a parte real de $z(t)$):

$$Q(t) = \text{Re } z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = C\varepsilon_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.78)$$

Então a corrente I , do circuito LC , torna-se:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -C\varepsilon_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.79)$$

Note das equações (3.78) e (3.79) que estão em diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$, ou seja, quando a corrente no círculo é máxima, a carga no capacitor é nula, e quando a carga no capacitor é máxima, a corrente no circuito é nula. (MACHADO, 2000)

Quando a corrente começa a circular no circuito, o capacitor se descarrega e a tensão entre suas placas diminui, na mesma proporção que a variação temporal da corrente no circuito, assim a tensão de retorno produzida pelo indutor também diminui. A corrente se torna máxima quando a carga no capacitor se anula, como também as tensões no capacitor e no indutor.

Em seguida o capacitor carrega-se novamente, só que agora com polaridade invertida, ou seja, os sinais das placas se invertem. Quando o capacitor começa a descarregar, a corrente agora circula no circuito em um sentido oposto a situação

inicial e atinge seu valor máximo quando o capacitor está completamente descarregado. (MACHADO, 2000)

Esse tipo de oscilação, da corrente no circuito ou da carga no capacitor, é equivalente ao sistema mecânico do oscilador harmônico simples (Seção 3.1) descrito pela (3.3). Para as equivalências do sistema mecânico ao eletromagnético $m \rightarrow L$ e $k \rightarrow \frac{1}{C}$, encontramos exatamente a (3.73).

Como não há resistência no circuito, a energia eletromagnética armazenada no sistema é constante, semelhante ao oscilador harmônico simples, como será mostrado a seguir:

Usando (3.78), a energia potencial armazenada no capacitor no instante t é:

$$U_C = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{C^2 \varepsilon_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2C} = \frac{C \varepsilon_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (3.80)$$

E a energia potencial armazenada no indutor no instante t , considerando (3.79), é:

$$U_L(t) = \frac{LI^2(t)}{2} = L \frac{C^2 \varepsilon^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} = \frac{C \varepsilon^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (3.81)$$

Substituindo (3.80) e (3.81) na energia total U :

$$U = U_C(t) + U_L(t) = \frac{C \varepsilon_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} + \frac{C \varepsilon^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (3.82)$$

Assim:

$$U = \frac{C \varepsilon_0^2}{2} \quad (3.83)$$

Portanto, a energia do circuito LC se conserva, apenas oscila entre energia elétrica (armazenada no campo elétrico do capacitor) e energia magnética (no interior do indutor).

3.2.1 Circuito RC em série

Este tipo de circuito é composto por um capacitor de capacitância C (inicialmente descarregado), um resistor de resistência R e uma fonte de tensão, de corrente DC, ε_0 . A tensão entre esses elementos é dado por: capacitor ($V_C = \frac{Q}{C}$) e resistor ($V_R = RI$); quando aplicamos a 1ª lei de Kirchhoff no circuito, com o sentido convencional da corrente oposto ao sentido real dos elétrons, temos:

$$\varepsilon_0 + V_C + V_R = 0 \sim \varepsilon_0 - \frac{Q}{C} - RI = 0 \quad (3.84)$$

Sabendo que $\frac{dQ}{dt} = I$ a (3.84) fica:

$$\varepsilon_0 - \frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0 \sim R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_0 \sim \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\varepsilon_0}{R} \quad (3.85)$$

Reorganizando (3.85) temos:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{R} - \frac{Q}{RC} = \frac{C\varepsilon_0 - Q}{RC} \quad (3.86)$$

Então:

$$\frac{dQ}{C\varepsilon_0 - Q} = \frac{dt}{RC} \quad (3.87)$$

Integrando (3.87) nos dois lados da equação, com $t = 0$ o capacitor está descarregado ($Q(0) = 0$):

$$\int_0^Q \frac{dQ}{C\varepsilon_0 - Q} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \quad (3.88)$$

$$-\ln [C\varepsilon_0 - Q]_0^Q = \frac{t}{RC} \sim \ln (C\varepsilon_0 - Q) - \ln (C\varepsilon_0) = -\frac{t}{RC} \quad (3.89)$$

$$\ln \left[\frac{C\varepsilon_0 - Q}{C\varepsilon_0} \right] = -\frac{t}{RC} \sim \frac{C\varepsilon_0 - Q}{C\varepsilon_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \sim C\varepsilon_0 - Q = C\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.90)$$

Assim:

$$Q(t) = C\varepsilon_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] \quad (3.91)$$

A (3.91) descreve o carregamento do capacitor em um circuito RC , e quando $t \rightarrow \infty$ a sua carga tende ao valor limite $Q_\infty = C\varepsilon_0$, que corresponde a carga máxima obtida pelo capacitor. Levando em consideração que o tempo capacitivo é $\tau_C = RC$ (tempo que a corrente leva para cair a $\frac{1}{e}$ do valor inicial) a carga no capacitor torna-se:

$$Q(t) = Q_\infty \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right] \quad (3.92)$$

Então, a corrente no circuito é:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left[Q_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right) \right] = -Q_\infty \left[-\frac{1}{RC} \right] e^{-\frac{t}{\tau_C}} = \frac{C\varepsilon_0}{RC} e^{-\frac{t}{\tau_C}} = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_C}} \quad (3.93)$$

Então, para $t \rightarrow \infty$ o capacitor fica carregado totalmente, com $Q = C\varepsilon_0$, e a corrente se anula.

Agora considerando o capacitor carregado com capacitância C e sem a fonte de tensão ε_0 , a 1ª lei de Kirchhoff resulta em:

$$V_R + V_C = 0 \sim RI + \frac{Q}{C} = 0 \sim R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \sim \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0 \sim \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \quad (3.94)$$

Integrando (3.94):

$$\int_{Q_\infty}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC} \quad (3.95)$$

$$\ln [Q]_{Q_\infty}^Q = -\frac{t}{RC} \sim \ln Q - \ln Q_\infty = -\frac{t}{RC} \sim \ln \left[\frac{Q}{Q_\infty} \right] = -\frac{t}{RC} \sim \frac{Q}{Q_\infty} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.96)$$

Portanto:

$$Q(t) = Q_\infty e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.97)$$

Então, (3.97) expõe o descarregamento do capacitor no circuito RC . E a corrente é dada pelo mesmo procedimento anterior:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} [Q_\infty e^{-\frac{t}{RC}}] = Q_\infty \left[-\frac{1}{RC} \right] e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{C\varepsilon_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.98)$$

3.2.2 Circuito RL em série

Os elementos desse circuito são: um resistor de resistência R , um indutor ideal de auto-indutância L e uma fonte de tensão ε_0 . Usando os resultados, já discutido anteriormente, das tensões desses elementos, a 1ª lei de Kirchhoff fica:

$$\varepsilon_0 + V_R + V_L = 0 \sim \varepsilon_0 - RI - L \frac{dI}{dt} = 0 \sim L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon_0 \sim \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon_0}{L} \quad (3.99)$$

Reorganizando (3.99):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{L} - \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon_0 - RI}{L} \sim \frac{dI}{\varepsilon_0 - RI} = \frac{dt}{L} \quad (3.100)$$

Integrando (3.100):

$$\int_0^I \frac{dI}{\varepsilon_0 - RI} = \int_0^t \frac{dt}{L} \quad (3.101)$$

$$-\frac{1}{R} \ln [\varepsilon_0 - RI]_0^I = \frac{t}{L} \sim \ln [\varepsilon_0 - RI]_0^I = -\frac{R}{L} t \sim \ln (\varepsilon_0 - RI) - \ln \varepsilon_0 = -\frac{R}{L} t \quad (3.102)$$

$$\ln \left[\frac{\varepsilon_0 - RI}{\varepsilon_0} \right] = -\frac{R}{L} t \sim \frac{\varepsilon_0 - RI}{\varepsilon_0} = e^{-\frac{R}{L} t} \sim \varepsilon_0 - RI = \varepsilon_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (3.103)$$

Então:

$$RI = \varepsilon_0 \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \sim I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad (3.104)$$

Sabendo que a constante de tempo indutiva é $\tau_L = \frac{L}{R}$, a (3.104) resulta em:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right] \quad (3.105)$$

A (3.105) fornece o comportamento da corrente no circuito RL e quando $t \rightarrow \infty$ a corrente I se aproxima do valor $\frac{\varepsilon_0}{R}$.

Após a corrente atingir seu valor máximo ($\frac{\varepsilon_0}{R}$) e se retirar a fonte de tensão do circuito, a 1ª lei de Kirchhoff resulta em:

$$V_R + V_L = 0 \sim -RI - L \frac{dI}{dt} = 0 \sim L \frac{dI}{dt} = -RI \sim \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \quad (3.106)$$

Integrando (3.106):

$$\int_{\frac{\varepsilon_0}{R}}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt \quad (3.107)$$

$$\ln [I]_{\frac{\varepsilon_0}{R}}^I = -\frac{R}{L}t \sim \ln I - \ln (\varepsilon_0/R) = -\frac{R}{L}t \sim \ln \left[\frac{I}{\varepsilon_0/R} \right] = -\frac{R}{L}t \sim \frac{I}{\varepsilon_0/R} = e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.108)$$

Assim:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.109)$$

Observe que (3.109) se anula após um tempo longo, concordando inteiramente com a experiência, pois o indutor atua como uma fonte de tensão induzida, gerando uma corrente induzida no mesmo sentido que a corrente inicial, mas por conta da presença do resistor e da fonte de f_{em} (força eletromotriz) induzida a corrente do circuito diminui até chegar a zero.

3.2.3 Circuito RLC em série

Esse circuito é a generalização dos circuitos RC , RL e LC , discutidos anteriormente; sendo composto pelos elementos: um resistor de resistência R , um capacitor de capacitância C , um indutor de indutância L e uma fonte de tensão ε_0 . A 1ª lei de Kirchhoff fica:

$$\varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{Q}{C} = 0 \quad (3.110)$$

Considerando que $I = \frac{dQ}{dt}$, a (3.110) resulta em:

$$\varepsilon_0 - L \frac{d^2 Q}{dt^2} - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \sim L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_0 \sim \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{\varepsilon_0}{L} \quad (3.111)$$

Definindo a frequência natural do sistema $(\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}})$ e o termo de amortecimento $(2\beta = \frac{R}{L})$, a (3.111) fica:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{\varepsilon_0}{L} \quad (3.112)$$

Que segundo a teoria das equações diferenciais ordinárias (Capítulo 2) a (3.112) é uma equação diferencial ordinária não-homogênea, sendo assim, a solução geral da (3.112) é a soma de uma solução particular com a solução da equação homogênea. Para a equação homogênea temos:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (3.113)$$

Recorrendo a notação complexa para uma possível solução $Q_h(t) = ae^{bt}$, com a e b podendo ser complexos. Substituindo as respectivas derivadas em (3.113):

$$ab^2 e^{bt} + 2\beta abe^{bt} + a\omega_0^2 e^{bt} = 0 \sim ae^{bt} (b^2 + 2\beta b + \omega_0^2) = 0 \quad (3.114)$$

Para que (3.114) seja satisfeita basta que:

$$(b^2 + 2\beta b + \omega_0^2) = 0 \quad (3.115)$$

E as raízes dessa equação do segundo grau são:

$$b = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{2\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (3.116)$$

Dependendo do valor da raiz quadrada as raízes da (3.116) assume valores complexos, reais e distintos ou reais e iguais, conforme será discutido os três casos separadamente.

a) Raízes complexas: $\beta < \omega_0$;

O termo da raiz quadrada da (3.116), para esse regime de oscilação, é negativo e é necessário definir outro parâmetro:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad (3.117)$$

E as raízes da (3.116) se reduzem em:

$$b = -\beta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)} = -\beta \pm \sqrt{-\omega^2} = -\beta \pm i\omega \quad (3.118)$$

Então, a solução geral da (3.113) com as duas raízes é:

$$Q_h(t) = a_+ e^{(-\beta+i\omega)t} + a_- e^{(-\beta-i\omega)t} \quad (3.119)$$

E agora, recorrendo a representação trigonométrica das constantes complexas a_+ e a_- :

$$a_+ = \frac{A}{2} e^{i\varphi} \quad (3.120)$$

$$a_- = \frac{A}{2} e^{-i\varphi} \quad (3.121)$$

Substituindo em (3.119):

$$Q_h(t) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{(-\beta+i\omega)t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{(-\beta-i\omega)t} = \frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{-\beta t} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{-\beta t} e^{-i\omega t} \quad (3.122)$$

$$Q_h(t) = A e^{-\beta t} \left[\frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} \right] \quad (3.123)$$

Sabemos que $\cos(\omega t + \varphi) = \left[\frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} \right]$, a (3.123) se resume em:

$$Q_h(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.124)$$

Observe que a (3.124) oscila com frequência angular ω , na qual é menor que a frequência natural do sistema. A carga nesse circuito é modulada pelo termo exponencial $A e^{-\beta t}$.

Para o amortecimento fraco, o fator de mérito Q^* do oscilador é dado por:

$$Q^* = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}{\gamma} \left(\approx \frac{\omega_0}{\gamma} \right), \quad (3.125)$$

para mais detalhes vide Nussenzveig (1997) na seção 10.5.

b) Raízes reais e distintas: $\beta > \omega_0$;

Como o termo da raiz quadrada é positivo, definimos:

$$\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2 \quad (3.126)$$

Substituindo em (3.116) as raízes são:

$$b = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{\omega^2} = -\beta \pm \omega \quad (3.127)$$

A solução geral é dada por:

$$Q_h(t) = a_+ e^{(-\beta+\omega)t} + a_- e^{(-\beta-\omega)t} \quad (3.128)$$

Definimos as constantes a_+ e a_- como

$$a_+ = \frac{A}{2} e^\varphi \quad (3.129)$$

$$a_- = \frac{A}{2} e^{-\varphi} \quad (3.130)$$

e substituimos em (3.128):

$$Q_h(t) = \frac{A}{2} e^\varphi e^{(-\beta+\omega)t} + \frac{A}{2} e^{-\varphi} e^{(-\beta-\omega)t} = \frac{A}{2} e^\varphi e^{-\beta t} e^{\omega t} + \frac{A}{2} e^{-\varphi} e^{-\beta t} e^{-\omega t} \quad (3.131)$$

$$Q_h(t) = A e^{-\beta t} \left[\frac{e^{(\omega t + \varphi)} + e^{-(\omega t + \varphi)}}{2} \right] \quad (3.132)$$

Lembrando que $\cosh(\omega t + \varphi) = \frac{e^{(\omega t + \varphi)} + e^{-(\omega t + \varphi)}}{2}$ e substituindo em (3.132):

$$Q_h(t) = A e^{-\beta t} \cosh(\omega t + \varphi) \quad (3.133)$$

Observe que a (3.133) descreve a carga no capacitor quando as raízes da (3.116) são reais e distintas, na qual a carga tende a zero rapidamente, sem oscilar, já que o cosseno hiperbólico não é uma função periódica.

c) Raízes reais e iguais: $\beta = \omega_0$.

Como o termo da raiz quadrada é zero, as raízes da (3.116) são reais e iguais:

$$b_1 = b_2 = -\beta = -\omega_0 \quad (3.134)$$

Uma das soluções é dada por:

$$Q_1(t) = e^{-\omega_0 t} \quad (3.135)$$

Por ser uma EDO de 2ª ordem homogênea, precisamos de outra solução para compor a solução geral. Assim, aplicamos a (2.46) no problema (com $x_1(t) = Q_1(t)$, $P(t) = 2\beta t = 2\omega_0 t$ e $x_2(t) = Q_2(t)$) para encontrar a segunda solução:

$$Q_2(t) = Q_1(t) \int \frac{1}{Q_1^2(t)} e^{-2\omega_0 t} dt \quad (3.136)$$

$$Q_2(t) = e^{-\omega_0 t} \int \frac{1}{(e^{-\omega_0 t})^2} e^{-2\omega_0 t} dt = e^{-\omega_0 t} \int \frac{e^{-2\omega_0 t}}{e^{-2\omega_0 t}} dt = e^{-\omega_0 t} \cdot t \quad (3.137)$$

Então, a solução geral é dada por:

$$Q_h(t) = a_1 Q_1(t) + a_2 Q_2(t) = a_1 e^{-\omega_0 t} + a_2 t e^{-\omega_0 t} = (a_1 + a_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad (3.138)$$

Observe que (3.138) tende a zero para t suficientemente grande e não apresenta um caráter oscilatório.

A solução particular da (3.112) é do tipo $Q_p = K$. Derivando e substituindo em (3.112), para $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, encontramos:

$$\omega_0^2 Q_p = \frac{\varepsilon_0}{L} \sim \omega_0^2 K = \frac{\varepsilon_0}{L} \sim K = \frac{\varepsilon_0}{L\omega_0^2} = \frac{\varepsilon_0}{L \cdot \frac{1}{LC}} = C\varepsilon_0 \quad (3.139)$$

Então, a solução geral da (3.112) é:

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = C\varepsilon_0 + Q_h(t) \quad (3.140)$$

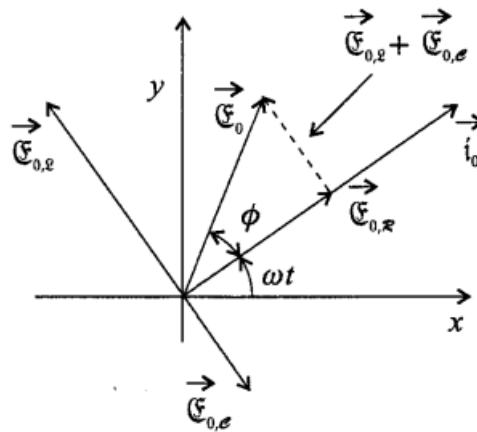
Para $Q_h(t)$ igual a solução da equação homogênea, dos três possíveis casos discutidos anteriormente.

Para um circuito de corrente alternada (AC, do inglês "Alternating Current") a fonte de tensão é modulada por: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ e as consequências nas medidas das tensões e correntes de cada elemento do circuito é:

- a)** Circuito puramente resistivo: $I_R = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos \omega t$ (corrente em fase com a tensão do gerador);
- b)** Circuito puramente capacitivo: $I_C = \omega C \varepsilon_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ (corrente está na frente da tensão, por $\frac{\pi}{2}$);
- c)** Circuito puramente indutivo: $I_L = \frac{\varepsilon_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$ (corrente está atrasada com relação à tensão pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$).

Para Machado (2000) circuitos dessa natureza, a tensão no resistor (ε_R) está em fase com a corrente I do circuito; a tensão no capacitor (ε_C) está atrasado em $\frac{\pi}{2}$ da corrente do circuito, com a corrente na frente da tensão e a tensão no indutor (ε_L) fica adiantada da corrente no ângulo de $\frac{\pi}{2}$. Considerando a discussão de Machado, o circuito RLC de corrente alternada é representado no diagrama de fasores:

Figura 6 – Diagrama de fasores qualitativo do circuito RLC de corrente alternada



Fonte: (Machado, 2000).

Aplicando a lei das malhas para esse circuito temos:

$$\varepsilon - RI - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (3.141)$$

Derivando (3.141) em relação ao tempo:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.142)$$

Considerando a função teste $I_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ à solução particular da (3.142) e substituindo as respectivas derivadas na equação diferencial (3.142):

$$-L\omega^2 I_0 \cos(\omega t + \varphi) - R\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{I_0}{C} \cos(\omega t + \varphi) = -\omega \varepsilon_0 \sin \omega t \quad (3.143)$$

$$\omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi) + R I_0 \sin(\omega t + \varphi) - \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad (3.144)$$

Definimos as grandezas $X_L = \omega L$ (reatância indutiva), $X_C = \frac{1}{\omega C}$ (reatância capacitiva) e $Z = \frac{\varepsilon_0}{I_0}$ (impedância), então (3.144) se reduz a:

$$X_L I_0 \cos(\omega t + \varphi) + R I_0 \sin(\omega t + \varphi) - X_C I_0 \cos(\omega t + \varphi) = Z I_0 \sin \omega t \quad (3.145)$$

$$(X_L - X_C)I_0 \cos(\omega t + \varphi) + RI_0 \sin(\omega t + \varphi) = ZI_0 \sin \omega t \quad (3.146)$$

$$(X_L - X_C) \cos(\omega t + \varphi) + R \sin(\omega t + \varphi) = Z \sin \omega t \quad (3.147)$$

Agora, definindo a reatância para todo o circuito $X = X_L - X_C$ e levando para (3.147):

$$X \cos(\omega t + \varphi) + R \sin(\omega t + \varphi) = Z \sin \omega t \quad (3.148)$$

Recorrendo a soma de ângulos nas funções trigonométricas:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi \quad (3.149)$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \quad (3.150)$$

Substituindo as (3.149) e (3.150) em (3.148) temos:

$$X (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) + R (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = Z \sin \omega t \quad (3.151)$$

Reorganizando:

$$(X \cos \varphi + R \sin \varphi) \cos \omega t + (R \cos \varphi - X \sin \varphi - Z) \sin \omega t = 0 \quad (3.152)$$

Para que a (3.152) seja válida é necessário que os termos entre parênteses se anulem:

$$\begin{cases} X \cos \varphi + R \sin \varphi = 0 \\ R \cos \varphi - X \sin \varphi - Z = 0 \end{cases} \quad (3.153)$$

Então:

$$\tan \varphi = -\frac{X}{R} \quad (3.154)$$

$$Z = R \cos \varphi - X \sin \varphi \quad (3.155)$$

Mas substituindo os valores das funções trigonométricas em (3.155) encontramos:

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Então, a solução particular da (3.142) é:

$$I_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{\varepsilon_0}{Z} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.156)$$

Integrando (3.156) em relação a dt temos a função da carga no circuito RLC em série:

$$Q_p(t) = \int I_p(t) dt = \frac{\varepsilon_0}{Z} \int \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{\varepsilon_0}{Z\omega} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.157)$$

4 TRANSFORMADA DE FOURIER

Esse capítulo será reservado à introdução da teoria da Transformada de Fourier, em vista à aplicabilidade nas equações diferenciais dos osciladores forçados amortecidos mecânico e eletromagnético, sem perder o foco no fenômeno da ressonância dessas oscilações. Mediante isso, é necessário introduzirmos a série de Fourier, para que possamos compreender os termos que tratam a Transformada de Fourier.

Além disso, nesse mesmo capítulo discutiremos o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem, para a análise da ressonância nas oscilações mecânica e eletromagnética, na linguagem Fortran 90.

4.1 SÉRIE DE FOURIER

No século XVIII, físicos e matemáticos estavam motivados para procurar soluções dos problemas da Mecânica do Contínuo e da Termologia, através das equações diferenciais e requeriam um rigor matemático refinado. Para Figueiredo (1977), as três equações básicas que precisavam de soluções são as seguintes: problema das vibrações transversais de uma onda, na qual é descrita pela equação das ondas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad (4.1)$$

o problema da condução do calor em uma barra, representado pela equação do calor

$$u_t = k u_{xx} \quad (4.2)$$

e o problema do equilíbrio de uma membrana sob a ação de algumas forças, que satisfaz à equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (4.3)$$

A série de Fourier teve origem no estudo da propagação do calor em corpos sólidos, publicado em seu tratado em 1822, com o título: "*Théorie analytique de la chaleur*" (Teoria analítica do calor). A análise da condução do calor em corpos sólidos por meio do Cálculo Diferencial e Integral e das Equações Diferenciais, são insuficientes, sendo necessário do arcabouço matemático de Fourier.

A série de Fourier é dada pela expansão de uma função genérica

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.4)$$

onde a série deve convergir uniformemente no intervalo de continuidade da função $f(x)$.

Para séries uniformemente convergentes, as propriedades de derivação e integração são válidas. A (4.4) é composta por seno e cosseno de período $2L$, tornando a função $f(x)$ com o mesmo comportamento de periodicidade, assim integrando (4.4) para encontrar o coeficiente a_0 :

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \quad (4.5)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (4.6)$$

Aos demais coeficientes de Fourier, utilizamos as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1; \quad (4.7)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1; \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Agora, multiplicando a (4.4) separadamente por $\cos \frac{m\pi x}{L}$ e $\sin \frac{m\pi x}{L}$, para $m \geq 1$ fixado; os resultados das integrais de cada termo são, respectivamente

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L \quad (4.10)$$

e

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L. \quad (4.11)$$

Como $n = m$ das relações de ortogonalidade (4.8) e (4.9) e trocando m por n das (4.10) e (4.11) obtemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0 \quad (4.12)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (4.13)$$

Então, para uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, pode ser aproximada pela série de Fourier (4.4) com os coeficientes a_n e b_n calculados por (4.12) e (4.13), respectivamente. Para que uma função f seja igual à sua série de Fourier é preciso que satisfaça o teorema a seguir

Teorema 4.1.1 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável (quando a função f e sua derivada f' são seccionalmente contínuas) e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , dada por (4.4), converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$. Assim,*

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.14)$$

Observe no exemplo abaixo, como encontramos os coeficientes de Fourier da função de uma onda quadrada:

Exemplo I: Calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi; \\ 0, & -\pi \leq x < 0; \\ \text{e periódica de período } 2\pi. \end{cases} \quad (4.15)$$

Calculando os coeficientes de Fourier a_0 , a_n e b_n , através as equações (4.6), (4.12) e (4.13), respectivamente

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1, \quad (4.16)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} = 0, \quad (4.17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2k, \ k \geq 1, \\ \frac{2}{(2k-1)\pi}, & \text{se } n = 2k-1, \ k \geq 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

e substituindo esses resultados em (4.4) temos a série de Fourier da função $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x. \quad (4.19)$$

Uma relação muito útil na série de Fourier, é a identidade de Parseval

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx, \quad (4.20)$$

para uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, tal que f e $|f|$ são integráveis e os coeficientes de Fourier podem ser calculados por (4.20).

Uma das vantagens da série de Fourier frente as outras séries de expansão, tal como a série de Taylor, é sua utilidade na representação de funções descontínuas (por exemplo: onda em dente de serra, onda quadrada e uma onda triangular) e periódicas. Além disso, a expansão de Fourier de uma força de impulsão em uma partícula oscilatória descrita por uma EDO (linear), é possível encontrar os harmônicos dessa força e resolvê-la para cada termo.

4.2 TRANSFORMADA DE FOURIER

Antes de definirmos a Transformada de Fourier, precisamos apresentar o espaço de função sobre o qual ela opera. A notação L^1 denomina funções do tipo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a valores complexos, com as integrais impróprias de f e $|f|$ calculáveis e os limites

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(x)| dx \quad (4.21)$$

existem.

Agora podemos tomar funções apenas do tipo L^1 e definirmos formalmente a Transformada de Fourier e sua inversa da função $f(x)$, respectivamente

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad \text{e} \quad (4.22)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi \quad (4.23)$$

definidas em $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Considerando duas funções f e g no espaço vetorial L^1 , a Transformada de Fourier da soma delas, para α e β constantes complexas em $\mathbb{C}$, é equivalente a

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g] \quad (4.24)$$

e para a derivada de ordem n de uma função, que satisfaça o espaço L^1 , a Transformada de Fourier resulta em

$$F[D^n f] = (i\xi)^n F[f], \quad (4.25)$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Usando a definição de produto de convolução (somatório do produto entre duas funções, ao longo da região de integração)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (4.26)$$

para duas funções f e g em L^1 a sua Transformada de Fourier é expressa por:

$$F[f * g] = (2\pi)^{1/2} F[f] F[g]. \quad (4.27)$$

A transformada de Fourier tornou-se uma ferramenta útil na matemática aplicada, no estudos das equações diferenciais ordinárias e parciais com condições de contorno (transforma as equações diferenciais ordinárias em equações algébricas no domínio da frequência; e as equações diferenciais parciais converte nas EDOs) e nas equações integrais. Além disso, é utilizado na representação de sinais/funções aperiódicos genéricos, conforme mostra o exemplo abaixo:

Exemplo II: Considere o sinal

$$x(t) = e^{-at}u(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{para } t > 0 \text{ e } a > 0; \\ 0, & \text{para } t < 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

e encontre sua transformada de Fourier.

Usando (4.22) com o diferencial infinitesimal do tempo:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-it\xi} e^{-at} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a + j\xi} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}. \quad (4.29)$$

Então,

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a + j\xi}, \quad (4.30)$$

para que seja representado graficamente é necessário das amplitude e fase da (4.30), já que está em notação complexa.

Para Brigham (1988), a Transformada Discreta de Fourier (do inglês *Discrete Fourier Transform* - DFT) é dada por

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT) e^{-j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.31)$$

ou

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-j2\pi nk/N} \quad (4.32)$$

onde foi substituído $\frac{n}{NT}$ por n e kT por k , para simplificarmos as notações. Considerando $N = 4$ em (4.32) e $W = e^{-j2\pi/N}$ temos o sistema

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\ X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\ X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\ X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9 \end{aligned} \quad (4.33)$$

que também é obtido pela notação matricial

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

ou mais compacto ainda

$$X(n) = W^{nk} x_0(k). \quad (4.35)$$

Observe que a (4.34) é a transformada discreta de Fourier na forma matricial, e para o cálculo de N fatores, surgem N^2 multiplicações.

4.3 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Método numérico mais utilizado na obtenção das soluções aproximadas de equações diferenciais, por ser mais preciso e prático no cálculo das derivadas de ordem superior. Os métodos de Runge-Kutta tiveram origem no método de Euler, a partir da comparação com o polinômio de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 ,

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4.36)$$

Assim é obtido as ordens do método de Runge-Kutta, em especial o de quarta ordem é uma comparação com o polinômio de Taylor de grau quarto, ou seja, desenvolvido até o quinto termo.

Segundo Zill e Cullen (2001b), o método de Runge-Kutta de quarta ordem consiste em determinar constantes adequadas para que seja válida a equação

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (4.37)$$

e a solução mais conhecida para esse problema é

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.38)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (4.40)$$

o método de Runge-Kutta de quarta ordem pode ser aplicado se reduzirmos a equação diferencial de segunda ordem a um sistema de primeira ordem, substituindo $y' = u$ em (4.40) temos

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases} \quad (4.41)$$

e aplicando o método de Runge-Kutta de quarta ordem separadamente nas equações do sistema (4.41) encontramos a solução da (4.40).

Utilizamos o método numérico vigente nas equações (3.66) e (3.142), para obter as soluções gerais dos problemas mecânico e eletromagnético respectivamente, porque é mais eficiente do que outros métodos computacionais, como por exemplo o método de Euler.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para alcançar o objetivo geral - analisar a ressonância de oscilações mecânicas e eletromagnéticas a partir da Transformada de Fourier, com auxílio da linguagem Fortran 90 - dessa pesquisa, obteve-se primeiramente os seguintes resultados: gráficos do fenômeno da ressonância das oscilações mecânica e eletromagnética, através da linguagem Fortran 90; e a resolução das EDOs das oscilações desse trabalho, aplicando as Transformadas de Fourier. Por fim, analisou-se a ressonância dessas oscilações por Transformada de Fourier, conforme será mostrada a seguir:

5.1 FENÔMENO DA RESSONÂNCIA DAS OSCILAÇÕES MECÂNICA E ELETRO-MAGNÉTICA

A seguir será discutido os resultados obtidos nas oscilações mecânicas para o oscilador forçado amortecido, mostrando a influência do fator de mérito Q na amplitude dessa oscilação, quando a frequência angular ω se aproxima de ω_0 . Logo em seguida, apresentaremos os resultados na oscilação eletromagnética, incluindo o fenômeno da ressonância sob efeito da força eletromotriz $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ nos circuitos RLC em série.

5.1.1 Discussão sobre a solução analítica da oscilação mecânica forçada e amortecida

O tipo de oscilação amortecida que interage com o ambiente (força externa) é o oscilador com amortecimento subcrítico, pois é o único dentre os três tipos de amortecimento (amortecimentos subcrítico, supercrítico e crítico) que apresenta o caráter oscilatório, conforme Figura-4.

A solução geral da Equação Diferencial Ordinária (3.66), conforme teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (Capítulo 2), para o amortecimento subcrítico é a soma da solução homogênea (3.43) com a solução particular (3.71):

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} [a \cos \omega t + b \sin \omega t] + A(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)] \quad (5.1)$$

As constantes a e b são encontradas através das condições iniciais de contorno $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = v(0) = 0$. Assim:

$$x(0) = a + A(\omega) \cos \varphi(\omega) = 1 \sim a = 1 - A(\omega) \cos [\varphi(\omega)] \quad (5.2)$$

Derivando (5.1) em relação a t :

$$v(t) = e^{-\gamma t/2} \left[-\frac{\gamma}{2} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) - a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \right] - A(\omega)\omega \sin [\omega t + \varphi(\omega)] \quad (5.3)$$

Substituindo $v(0) = 0$ em (5.3):

$$v(0) = \left[-\frac{\gamma}{2}(a) + b\omega \right] - A(\omega)\omega \sin [\varphi(\omega)] = 0 \sim b = \frac{\frac{\gamma}{2}(a) + A(\omega)\omega \sin [\varphi(\omega)]}{\omega} \quad (5.4)$$

Considerando a (5.2) a constante b resulta em:

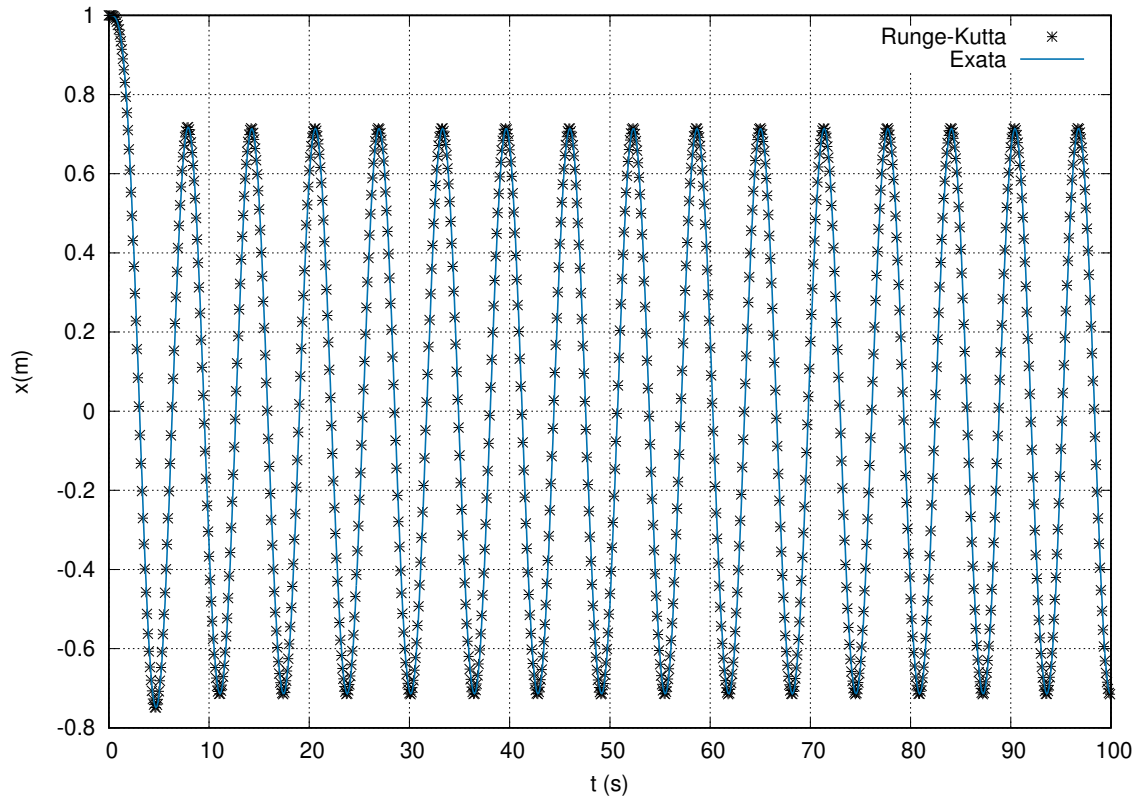
$$b = \frac{\frac{\gamma}{2} (1 - A(\omega) \cos [\varphi(\omega)]) + A(\omega)\omega \sin [\varphi(\omega)]}{\omega} \quad (5.5)$$

Utilizou-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, escrito em Fortran 90, para o sistema de equações acopladas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{\rho}{m}(v) - \frac{k}{m}(x) + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \end{cases} \quad (5.6)$$

Para os seguintes parâmetros: $h = 0.1$ (tamanho do passo), $k = 1 \text{ N/m}$ (constante elástica da mola), $m = 1 \text{ kg}$ (massa do bloco), $F_0 = 1 \text{ N}$ (valor inicial da força externa) e $\rho = 1,4141 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$ (parâmetro de amortecimento), que está no regime de subamortecimento - oscilação, na qual acontece o fenômeno da ressonância - , o resultado encontrado para a solução geral:

Figura 7 – Solução geral da (3.43)



Fonte: Própria.

Observe que o método computacional usado convergiu para a solução geral do oscilador forçado e amortecido, com margens de erro quase imperceptíveis. Quando $t \rightarrow \infty$ a solução homogênea, também denominada de solução transiente, desaparece, pois quando o termo $e^{-\gamma t/2}$ tende a zero e a solução geral resulta na solução particular. Assim, após um certo tempo (para $t \gg \frac{1}{\gamma}$) o oscilador forçado amortecido se comporta como um oscilador harmônico simples com frequência angular ω , conforme mostra a Figura-7.

O fenômeno da ressonância ($\omega \rightarrow \omega_0$) corresponde a oscilação com frequência que maximiza a amplitude do oscilador. Assim diferenciando a (3.69) em relação a ω temos:

$$\left. \frac{dA}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_r} = \frac{F_0}{m} \left(-\frac{1}{2} \right) [(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + (\gamma\omega_r)^2]^{-3/2} \cdot [(2)(\omega_0^2 - \omega_r^2)(-2\omega_r) + 2\gamma^2\omega_r] = 0 \quad (5.7)$$

$$-F_0 [(2)(\omega_0^2 - \omega_r^2)(-2\omega_r) + 2\gamma^2\omega_r] = 0 \sim -2F_0\omega_r [-2(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 2\gamma^2] \quad (5.8)$$

$$\sim [-2(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 2\gamma^2] = 0 \sim -2(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 2\gamma^2 = 0 \sim -\omega_0^2 + \omega_r^2 + \gamma^2 = 0 \quad (5.9)$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (5.10)$$

Onde ω_r é a frequência angular da ressonância. Observe que $\omega_0 > \omega_r$ para todo tempo de oscilação e que valores de $\gamma > \omega_0$ o fenômeno da ressonância não ocorre; assim ω_r torna-se imaginário e a amplitude A decresce rapidamente.

Para o fenômeno da ressonância considera-se: $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$ e $\gamma \ll \omega_0$ (amortecimento fraco), as equações (3.69) e (3.70), com as aproximações $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ e $\gamma\omega \approx \gamma\omega_0$, tornam-se:

$$A^2(\omega) \approx \frac{F_0^2}{m^2 [4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma\omega_0)^2]} \approx \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right]} \quad (5.11)$$

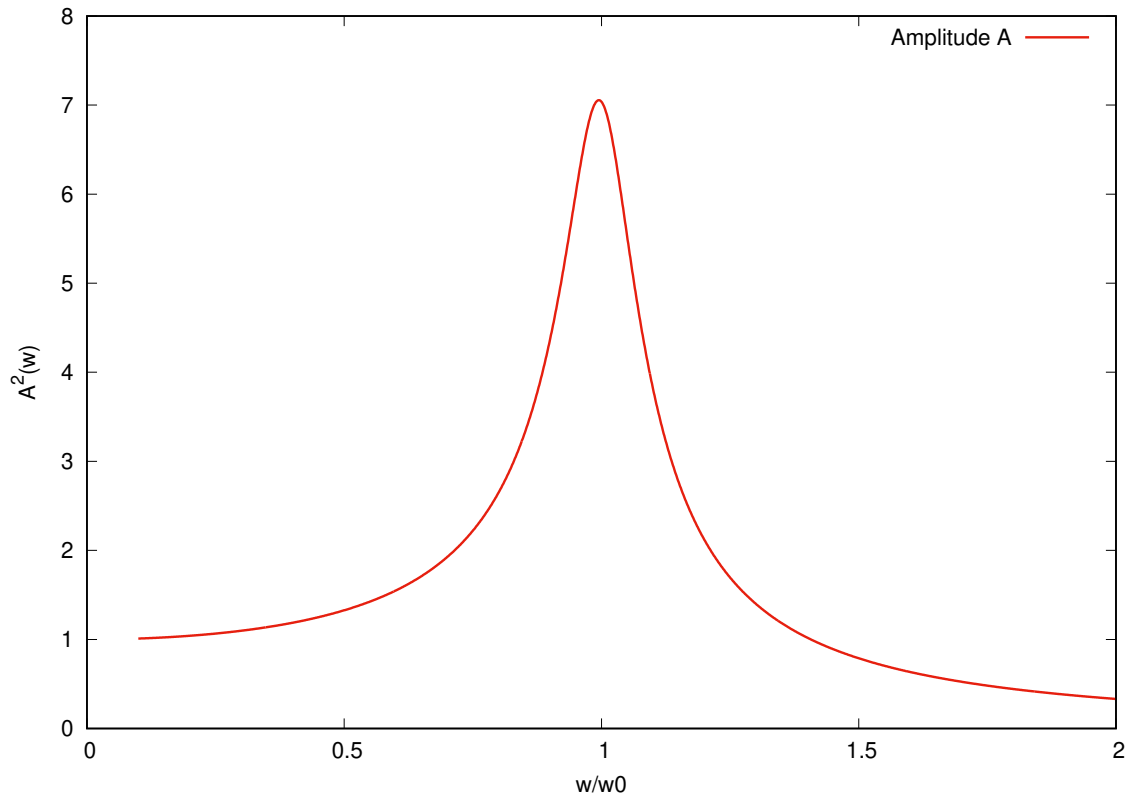
$$\varphi(\omega) \approx -\arctan \left[\frac{\gamma\omega_0}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)} \right] \approx -\arctan \left[\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega)} \right] \quad (5.12)$$

A amplitude é máxima (A_{max}) quando $\omega = \omega_0$, em (5.11):

$$A_{max} = A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} \quad (5.13)$$

O resultado abaixo mostra a amplitude nas proximidades de ω_0 , com $\rho = 0,1421 \frac{N}{m/s}$:

Figura 8 – Amplitude A em função da frequência de impulsão ω



Fonte: Própria.

Observe que $\gamma = 0,1421 \frac{N \cdot s}{kg \cdot m} \ll \omega_0 = 1 \frac{rad}{s}$ (com $k = 1 N/m$ e $m = 1 kg$), satisfaz as condições de amortecimento fraco e portanto, dissipa menos energia por ciclo de oscilação. O valor mais alto da amplitude A é quando $\omega = \omega_0$, conforme mostra a Figura-8 e substituindo (para $F_0 = 1 N$) em (5.13) encontramos:

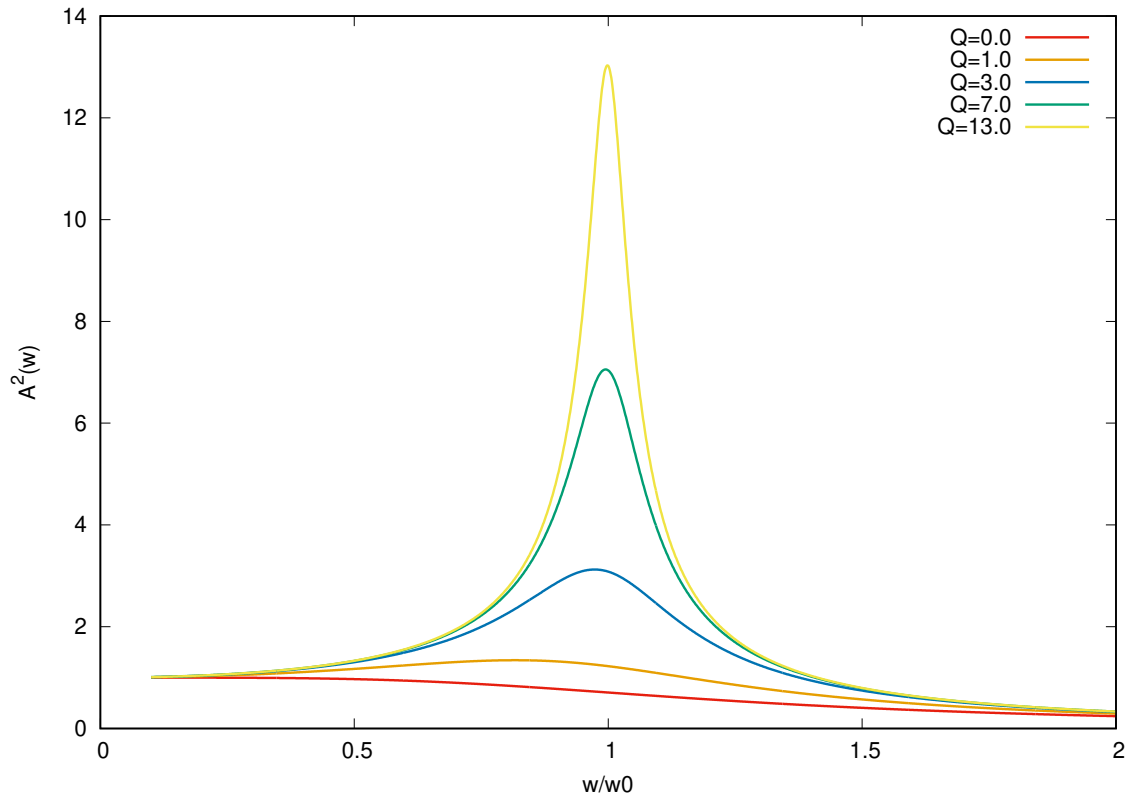
$$A_{max} = \frac{1 N}{(1 kg)(1 rad/s)(0,1421 N s/kg m)} \approx 7,0373 m \quad (5.14)$$

O grau de amortecimento de um sistema oscilatório é descrito pelo fator de qualidade Q :

$$Q = \frac{\omega_r}{\gamma} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{\gamma} \quad (5.15)$$

Então, quanto maior o fator Q, menor o amortecimento por oscilação. Abaixo é mostrado as curvas de ressonância de vários valores de Q :

Figura 9 – Amplitude A em função do fator de mérito Q



Fonte: Própria.

Observe que a medida que o fator de qualidade Q aumenta, mais energia é armazenada por ciclo de oscilação; então a amplitude A atinge valores maiores, exatamente em $\omega = \omega_0$ (fenômeno da ressonância). Aumentar Q equivale diminuir o parâmetro de amortecimento ρ , de forma que não fuja do regime de amortecimento fraco.

Nos intervalos $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$ a amplitude máxima A_{max} cai pela metade e entre os extremos a semilargura do pico de ressonância é $\Delta\omega = \gamma$. Para baixas frequências ($\omega \ll \omega_0$) $\omega \rightarrow 0$ e (3.69) torna-se:

$$A(\omega) \approx A(0) = \frac{F_0}{(m\omega_0^2)} \quad (5.16)$$

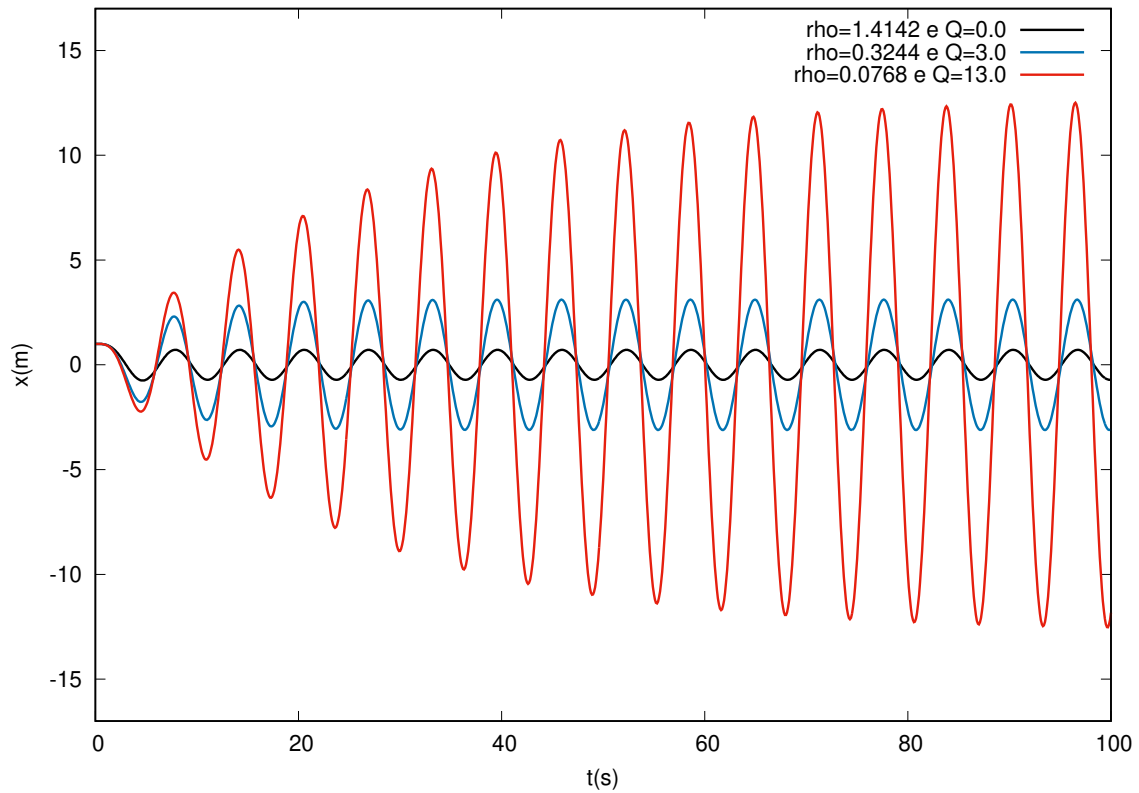
E a razão $\frac{A(\omega_0)}{A(0)}$, considerando a (5.13), resulta em:

$$\frac{A(\omega_0)}{A(0)} = \frac{F_0/m\omega_0\gamma}{F_0/m\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (5.17)$$

Na qual é idêntico ao fator de mérito Q da (3.54) e quanto mais estreita a ressonância, mais alto é o pico da amplitude, conforme ilustrado na Figura-9.

Levando em considerando o fator de qualidade Q na oscilação temos:

Figura 10 – Influência do fator de mérito Q nas amplitudes das oscilações



Fonte: Própria.

Observe claramente que a oscilação com fator de qualidade $Q = 13$ apresenta maior valor absoluto da amplitude, já que quanto maior o fator de amplificação mais energia é acumulado no sistema oscilante, sendo responsável pela maximização da grandeza em questão.

5.1.2 Discussão sobre a solução analítica da oscilação eletromagnética forçada e amortecida

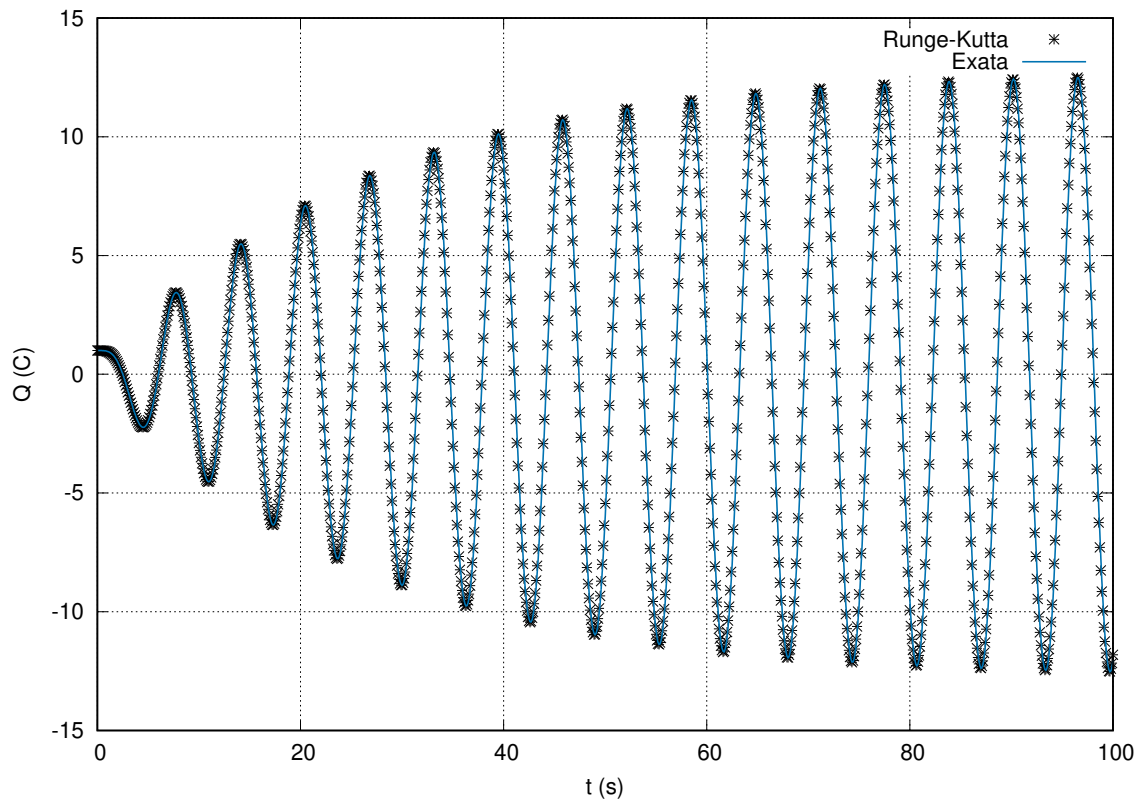
Pelo mesmo motivo e procedimento da seção anterior, a solução geral da (3.142) é dada pelo somatório das equações (3.124) e (3.157):

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon_0}{Z\omega} \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.18)$$

onde a impedância Z é dado por $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.

Observe que quando $t \rightarrow \infty$ a solução homogênea desaparece e a solução geral da (5.18) se comporta como um oscilador harmônico simples (OHS) de frequência externa ω , conforme mostra abaixo:

Figura 11 – Solução geral do oscilador harmônico forçado e amortecido eletromagnético

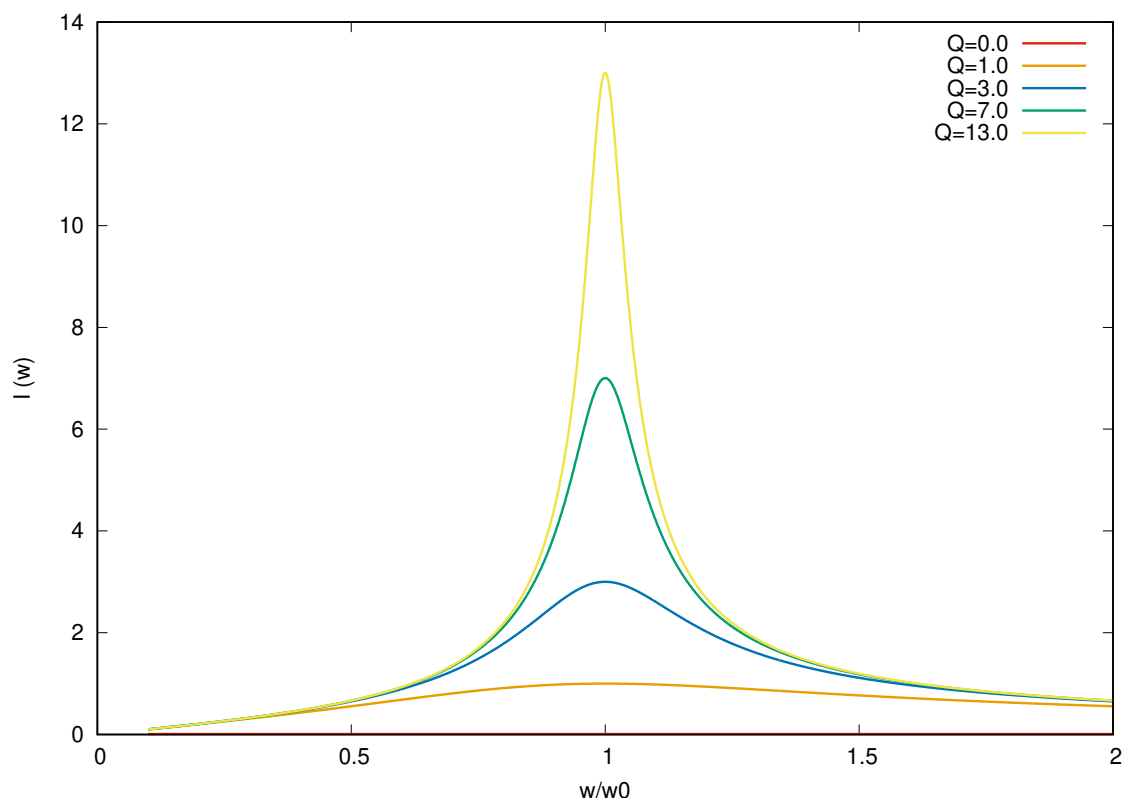


Fonte: Própria.

Observe nas Figura-7 e Figura-11 que o tempo de decaimento τ_d (tempo necessário para levar a energia média de oscilação cair pelo fator $\frac{1}{e}$ do valor inicial) - na oscilação mecânica $t \approx 10 \text{ s}$ e na eletromagnética acontece em $t \approx 80 \text{ s}$ -, porque os parâmetros de amortecimentos são diferentes e quanto menor o amortecimento mais tempo leva à solução homogênea para desaparecer.

Tendo como parâmetro o fator de qualidade Q da Eq. (3.125), o oscilador forçado e amortecido apresenta medidas da corrente elétrica diferente, para cada mudança no fator de mérito Q , como está mostrado abaixo:

Figura 12 – Influência do fator de qualidade Q na corrente elétrica do circuito



Fonte: Própria.

Observando a Figura-12, descobrimos que o valor da corrente elétrica máxima é exatamente em ω_0 e aumentando cada vez mais o fator de mérito Q o pico é mais alto; dizemos então, que o oscilador eletromagnético entrou em ressonância com a frequência ω , da ddp do gerador. Atentai também que $Q = 0.0$ equivale a dizer que $R \rightarrow \infty$, portanto o circuito torna-se totalmente resistivo e quase não oscila na Figura-12 (está paralelo ao eixo das abscissas).

Segundo Nussenzveig (1997), quando $\omega \rightarrow 0$, a reatância do capacitor domina, porque o circuito se comporta como estivesse aberto (as placas do capacitor estão isoladas uma da outra); e para $\omega \rightarrow \infty$, a reatância do indutor já se torna dominante, pois o indutor L se opõe a variações muito rápidas. Como a corrente elétrica é positiva e tende a zero nos dois extremos de ω , deve obrigatoriamente passar por um valor máximo.

Analisando com mais detalhes, a corrente de pico (valor máximo) I_{pm} é atingido quando $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ e substituindo a impedância do sistema em termos das

grandezas físicas iniciais, temos:

$$I_{pm} = \frac{\varepsilon_0}{Z} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (5.19)$$

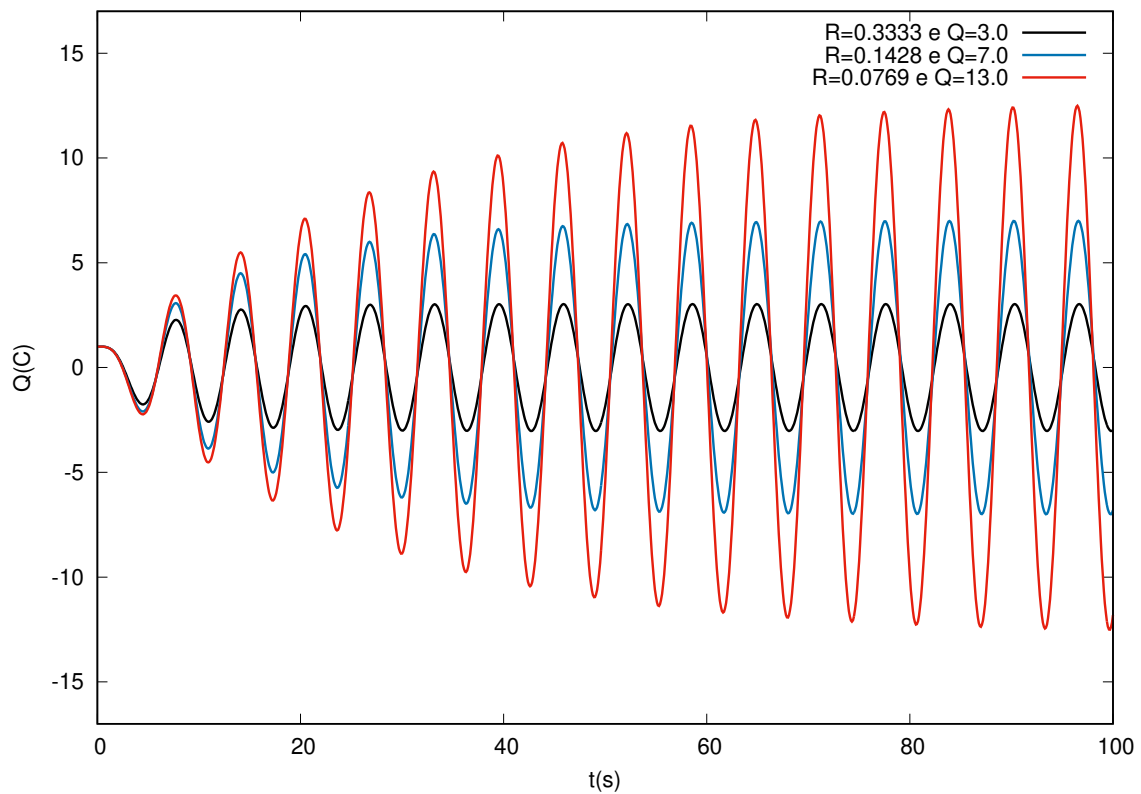
e o menor valor de Z ocorre quando a reatância X em (5.19) se anula e a impedância resulta em $Z = R$. Assim, para que isso ocorra temos:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \sim \omega L = \frac{1}{\omega C} \sim \omega^2 = \frac{1}{LC} \sim \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5.20)$$

que é exatamente a frequência natural de oscilação do sistema (ω_0).

Finalmente, obtemos a amplitude de oscilação em função do fator de qualidade Q :

Figura 13 – Oscilação para diferentes fatores de qualidade Q



Fonte: Própria.

E observe claramente que quando maior for Q mais energia o sistema recebe e armazena, consequentemente mais carga elétrica há no circuito RLC. É importante notar a analogia das equações (3.66) e (3.112), das oscilações mecânicas e eletromagnéticas respectivamente:

$$x \rightarrow Q, \quad m \rightarrow L, \quad k \rightarrow \frac{1}{C} \quad \text{e} \quad v \rightarrow I, \quad (5.21)$$

fazendo essas alterações em (3.66) o problema se resume na mesma EDO, porém com uma interpretação física distinta.

5.2 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER NOS PROBLEMAS GERAIS DAS OSCILAÇÕES MECÂNICA E ELETROMAGNÉTICA

A seguir aplicaremos a transformada de Fourier nas equações (3.66) e (3.142), para obtermos as soluções particulares das oscilações forçadas e amortecidas mecânica e eletromagnética, respectivamente.

5.2.1 Aplicação da transformada de Fourier na oscilação mecânica forçada e amortecida

Aplicando a transformada de Fourier, equação (4.22), na EDO da (3.66) temos:

$$F(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = F\left(\frac{F_0}{m} \cos \omega t\right) \quad (5.22)$$

e usando a propriedade da (4.25) a equação (5.22) resulta em:

$$(i\xi)^2 F(\xi) + \gamma(i\xi) F(\xi) + \omega_0^2 F(\xi) = \frac{F_0}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t e^{-i\xi t} dt \quad (5.23)$$

$$F(\xi) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \xi^2 + i\xi\gamma)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t e^{-i\xi t} dt \quad (5.24)$$

Denominando a integral da (5.24) por

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t e^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right] e^{-i\xi t} dt \quad (5.25)$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi-\omega)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi+\omega)t} dt \right]. \quad (5.26)$$

Para resolvermos a integral (5.26) precisamos recorrer a função delta de Dirac deslocada

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-a)t} dt \quad (5.27)$$

e para nosso problema

$$\delta(\xi - \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi-\omega)t} dt \quad (5.28)$$

e

$$\delta(\xi + \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi+\omega)t} dt. \quad (5.29)$$

Substituindo (5.28) e (5.29) em (5.26)

$$I = \frac{1}{2} [2\pi\delta(\xi - \omega) + 2\pi\delta(\xi + \omega)] = \pi [\delta(\xi - \omega) + \delta(\xi + \omega)] \quad (5.30)$$

e levando para (5.24)

$$F(\xi) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \xi^2 + i\xi\gamma)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} [\delta(\xi - \omega) + \delta(\xi + \omega)]. \quad (5.31)$$

Agora aplicamos a transformada inversa de Fourier, equação (4.23), alterando $f(x)$ por $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \xi^2 + i\xi\gamma)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} [\delta(\xi - \omega) + \delta(\xi + \omega)] e^{i\xi t} d\xi \quad (5.32)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\delta(\xi - \omega) + \delta(\xi + \omega)] e^{i\xi t}}{(\omega_0^2 - \xi^2 + i\xi\gamma)} d\xi \quad (5.33)$$

Finalmente usamos a propriedade de filtragem da função delta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(\xi - \omega) d\xi = f(\omega) \quad (5.34)$$

na (5.33)

$$x(t) = \frac{F_0}{2m} \left[\frac{e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} + \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \right] \quad (5.35)$$

ou

$$x(t) = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2 \right]} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) + \omega\gamma \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) \right] \quad (5.36)$$

Sabendo que

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (5.37)$$

e

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad (5.38)$$

a (5.36) se resume em

$$x(t) = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2 \right]} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \omega\gamma \sin \omega t \right] \quad (5.39)$$

$$x(t) = \frac{F_0 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2 \right]^{-1/2}}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2 \right]^{1/2}} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \omega\gamma \sin \omega t \right] \quad (5.40)$$

Chamando

$$\sin \phi = \omega \gamma \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2 \right]^{-1/2} \quad (5.41)$$

e

$$\cos \phi = (\omega_0^2 - \omega^2) \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2 \right]^{-1/2}, \quad (5.42)$$

então temos

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\omega \gamma \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2 \right]^{-1/2}}{(\omega_0^2 - \omega^2) \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2 \right]^{-1/2}} = \frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5.43)$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (5.44)$$

Finalmente, simplificamos a (5.40) em

$$x(t) = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2 \right]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (5.45)$$

e observe que aplicando a transformada de Fourier obtemos a mesma solução particular da equação diferencial (3.66), para ϕ dado pela (5.44).

Considerando a propriedade da função delta de Dirac

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x + a) + \delta(x - a)] \quad \text{para } a > 0 \quad (5.46)$$

a (5.31) se reduz em

$$F(\xi) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \xi^2 + i\xi\gamma)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} 2\omega \delta(\xi^2 - \omega^2). \quad (5.47)$$

Pela própria definição da delta de Dirac, a (5.47) apresenta pontos máximos em $-\omega$ e ω , então quando $\xi \rightarrow |\omega|$ sua amplitude $A(\omega)$ é

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} 2\omega \quad (5.48)$$

A expressão (5.48) atinge seu valor quando sua derivada primeira se anula.

Chamando $z = \frac{F_0 \pi}{m\sqrt{2\pi}}$ sua derivada fica

$$A'(\omega) = z 2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)^{-1} + 2\omega(-1)z(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)^{-2} \cdot (-2\omega + i\gamma) = 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{2z}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} - \frac{2\omega z(-2\omega + i\gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)^2} = 0 \sim 1 - \frac{-2\omega + i\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} = 0 \quad (5.50)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma) - \omega(-2\omega + i\gamma) = 0 \sim \omega_0^2 = -\omega^2 \sim \omega = \pm\omega_0 i. \quad (5.51)$$

Então, o sistema está em ressonância, pois sua frequência corresponde a frequência natural ω_0 .

5.2.2 Aplicação da transformada de Fourier na oscilação eletromagnética forçada e amortecida

Para o caso eletromagnético, trabalhemos a (3.141)

$$\varepsilon - RI - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0, \quad (5.52)$$

fazendo as substituições $I = \frac{dQ}{dt}$ e $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$ temos

$$\varepsilon - R \frac{dQ}{dt} - L \frac{d^2Q}{dt^2} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (5.53)$$

ou

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t \quad (5.54)$$

Denominando $\beta = \frac{R}{2L}$ (parâmetro de amortecimento) e $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ (frequência natural do sistema), a (5.54) pode ser escrita assim

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t \quad (5.55)$$

e aplicando a propriedade da (4.25) temos

$$(i\psi)^2 G(\psi) + 2\beta (i\psi) G(\psi) + \omega_0^2 G(\psi) = \frac{\varepsilon_0}{L\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t e^{-i\psi t} dt \quad (5.56)$$

$$G(\psi) = \frac{\varepsilon_0}{L(\omega_0^2 - \psi^2 + 2i\psi\beta)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t e^{-i\psi t} dt \quad (5.57)$$

Realizando o mesmo procedimento das equações (5.25) até (5.31) na (5.57) encontramos

$$G(\psi) = \frac{\varepsilon_0}{L(\omega_0^2 - \psi^2 + 2i\psi\beta)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} [\delta(\psi - \omega) + \delta(\psi + \omega)], \quad (5.58)$$

mediante isso aplicamos a transformada inversa de Fourier, equação (4.23), resultando em

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_0}{L(\omega_0^2 - \psi^2 + 2i\psi\beta)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} [\delta(\psi - \omega) + \delta(\psi + \omega)] e^{i\psi t} d\psi \quad (5.59)$$

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0}{2L} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\delta(\psi - \omega) + \delta(\psi + \omega)] e^{i\psi t}}{(\omega_0^2 - \psi^2 + 2i\psi\beta)} d\psi \quad (5.60)$$

e usando a (5.34) em (5.60) temos

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0}{2L} \left[\frac{e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta)} + \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\beta)} \right]. \quad (5.61)$$

Para simplificarmos a (5.61) utilizamos o mesmo procedimento das equações (5.36) até (5.42) para descobrirmos a função da carga elétrica no sistema

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0}{L \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 \right]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi), \quad (5.62)$$

para a constante de fase dado por

$$\phi = \arctan \left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (5.63)$$

Observe que obtemos a mesma equação (3.157), com uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$, conforme mostra a (5.62). Utilizando a transformada de Fourier nas equações gerais das oscilações mecânica e eletromagnética, encontramos a solução particular (na qual é nosso interesse, para o estudo do fenômeno da ressonância) de cada problema.

A (5.58) pode ser reescrita como

$$G(\psi) = \frac{\varepsilon_0}{L(\omega_0^2 - \psi^2 + 2i\psi\beta)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} 2\omega\delta(\psi^2 - \omega^2) \quad (5.64)$$

e a função explode quando $\psi \rightarrow |\omega|$ e ω se iguala a frequência de ressonância ω_0 , pelos mesmos motivos da oscilação mecânica.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma abordagem diferente para analisar o fenômeno da ressonância em oscilações periódicas da física, como é o caso das oscilações mecânica e eletromagnética, aplicando a transformada de Fourier diretamente nas equações diferenciais ordinárias dos problemas propostos.

Utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem para encontrar as soluções gerais dos problemas, a partir de um sistema de equações acopladas, pois mostrou-se um método mais preciso e prático. As ilustrações Figura-7 e Figura-11 mostram a convergência total do método com a solução geral de cada oscilação, que após o tempo de decaimento (τ_d) as soluções particulares predominam em cada sistema.

Mostrou-se ainda a influência do fator de mérito Q nas oscilações, e quanto maior Q mais energia é armazenada no circuito. O ponto de maior amplitude é o pico de ressonância, exatamente em $\omega = \omega_0$ sobre qual a frequência do oscilador se aproxima da frequência da força externa, para o caso de amortecimento subcrítico.

Aplicando as transformadas de Fourier nas equações gerais das oscilações mecânica e eletromagnética encontramos as mesmas soluções particulares obtidas analiticamente no capítulo 3; o que mostra a utilidade da análise de Fourier nas equações diferenciais ordinárias. Observamos que a solução homogênea, de cada problema, não é possível obter, porque as transformadas de Fourier precisam de uma função de partida para serem calculadas, mas mesmo assim nos interessa somente as soluções particulares para análise do fenômeno da ressonância.

Analisar fenômenos físicos em outro domínio, além do habitual, otimiza a obtenção dos resultados, como foi o caso da análise do fenômeno da ressonância pela transformada de Fourier, em que não foi preciso realizar as aproximações de amortecimento fraco das oscilações mecânica e eletromagnética. Aplicando a transformada de Fourier nos problemas desse trabalho, obtemos a resposta já no domínio da frequência e com a frequência de ressonância (para a função delta de Dirac deslocada).

Portanto, nesse trabalho foi importante para o meio acadêmico, porque apresentou uma nova abordagem à análise do fenômeno da ressonância das oscilações mecânica e eletromagnética; e apesar de ser muito tímida ainda há vários conteúdos da física que a transformada de Fourier mostra-se útil.

REFERÊNCIAS

BRIGHAM, E. O. **The Fast Fourier Transform**. New Jersey: USA: Prentice Hall, Inc., 1988. Disponível em: <http://sar.kangwon.ac.kr/gisg/FFT_book.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2021.

EDUARDO, E. C. **Aplicações da Transformada de Fourier em Soluções Numéricas de Sistemas Periódicos em Mecânica**. 2018. 164 fl. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/154064>>. Acesso em: 26 fev. 2020.

FIGUEIREDO, D. G. d. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1977. Disponível em: <https://www.academia.edu/38975072/Analise_de_fourier_e_equacoes_diferenciais_parciais_djairo_guedes_de_figueiredo>. Acesso em: 02 abr. 2021.

FIGUEIREDO, D. G. d.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1997. Coleção Matemática Universitária.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de Matemática elementar: Complexos, polinômios e equações**. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 2002. v. 6.

MACHADO, K. D. **Teoria do eletromagnetismo - Volume I**. 1. ed. Ponta Grossa: UEPG, 2000.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Eletromagnetismo**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

_____. **Curso de Física Básica: Fluidos, oscilações e ondas e calor**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

THOHNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Tradução: Antonio Zumpano.

_____. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 6. Tradução: Alfredo Alves de Farias. Disponível em: <https://www.academia.edu/31898441/Equa%C3%A7%C3%B5es_diferenciais_vol_2_3a_ed_dennis_g_zill_e_michael_r_cullen>. Acesso em: 18 abr. 2021.