



OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS: UMA ANÁLISE DE PROBLEMAS SOBRE PROGRESSÕES

MAGNUN ALVES DE SOUSA

Teresina

2021

MAGNUN ALVES DE SOUSA

**OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS: UMA
ANÁLISE DE PROBLEMAS SOBRE PROGRESSÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso,
apresentado ao curso de Matemática do
Instituto Federal (IFPI), Curso de Matemática,
como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Orientadora. Prof.^a Me Jeane Gardênia Costa
do Nascimento

Teresina

2021

OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS: UMA ANÁLISE DE PROBLEMAS SOBRE PROGRESSÕES

Magnun Alves de SOUSA¹

Jeane Gardênia Costa do NASCIMENTO²

RESUMO

A problemática educacional do Brasil está, em parte, relacionada à baixa compreensão dos conteúdos matemáticos e consequentemente o insuficiente desempenho dos estudantes gera inquietação nos educadores da área que diariamente buscam estratégias para minimizar essa situação. Buscando estabelecer alternativas que despertem o interesse do aluno pela disciplina vislumbrou-se um estudo bibliográfico sobre as possibilidades de utilização de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, no contexto de sala de aula com propósito de estimular um maior interesse dos estudantes pela área trazendo a competitividade saudável para o cotidiano escolar e não somente para quando da aplicação das provas do evento, haja vista que os conhecimentos e competências exigidos pela OBMEP são de suma importância ao incentivo e aprofundamento científico uma vez que são abordados de modo a estimular a exploração a investigação e consequentemente o desenvolvimento de maior afinidade com a matemática. Sendo assim, objetivando identificar, com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, as competências necessárias para a resolução dos problemas propostos pela OBMEP sobre o tema progressões, foram selecionadas seis questões com as respectivas resoluções propostas pela equipe de elaboração da prova e em alguns casos foram propostas soluções alternativas. Ao fim da pesquisa será possível identificar que as questões propostas pela olimpíada podem sim contribuir para melhoria da compreensão e consequentemente da aprendizagem dos temas abordados.

Palavras-chave: OBMEP. PCNs. Análise. Aprendizagem. Compreensão

¹ Licenciando do curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal Piauí (IFPI), campus Teresina Central. Teresina, Piauí, Brasil. E-mail: magnunalvess@gmail.com

² Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Professora do Instituto Federal do Piauí (IFPI), campus Teresina Central. Teresina, Piauí, Brasil. E-mail: jeane.gardenia@ifpi.edu.br

BRAZILIAN OLYMPICS OF MATHEMATICS OF PUBLIC SCHOOLS: AN ANALYSIS OF PROBLEMS ON PROGRESSIONS

Magnun Alves de SOUSA

Jeane Gardênia Costa do NASCIMENTO

ABSTRACT

The educational issue in Brazil is, in part, related to the low understanding of mathematical content and, consequently, the insufficient performance of students generates concern among educators in the area who daily seek strategies to minimize this situation. Seeking to establish alternatives that arouse student interest in the subject, a bibliographical study was envisioned on the possibilities of using questions from the Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad - OBMEP, in the classroom context in order to stimulate greater student interest by the area, bringing healthy competitiveness to daily school life and not only for the application of the event's tests, given that the knowledge and skills required by the OBMEP are of paramount importance to scientific encouragement and deepening, as they are addressed in order to stimulate the exploration of research and consequently the development of greater affinity with mathematics. Therefore, aiming to identify, based on the National Curriculum Parameters - PCNs, the skills needed to solve the problems proposed by the OBMEP on the topic of progressions, were six questions were selected with the respective resolutions proposed by the test preparation team and in some cases alternative solutions were proposed. At the end of the research, it is possible to identify that the issues proposed by the Olympics can indeed contribute to improving understanding and, consequently, learning about the topics covered.

Keywords: OBMEP. PCNs. Analysis. Learning. Understanding.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	6
2 METODOLOGIA	8
2.1 Progressão Aritmética	9
2.1.1 Fórmulas:	10
2.1.2 Demonstrações.....	10
2.2 Progressão Aritmética de 2º ordem	11
2.2.1 Fórmula.....	11
2.2.2 Demonstração.....	12
3 ANALISES.....	12
3.1 Primeira Questão Selecionada - (OBMEP 2005 - 1º Fase – NÍVEL 3)	12
3.1.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:	12
3.1.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):	12
3.1.3 A Análise da Questão:	13
3.2 Segunda Questão Selecionada - (OBMEP 2005 - 2º Fase – NÍVEL 3)	13
3.2.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:	14
3.2.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):	14
3.2.3 A Análise da Questão:.....	15
3.3 Terceira Questão Selecionada - (OBMEP 2008 - 1º Fase – NÍVEL 3)	16
3.3.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:	16
3.3.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):	16
3.3.3 A Análise da Questão:.....	17
3.4 Quarta Questão Selecionada - (OBMEP 2009 - 1º Fase – NÍVEL 3)	17
3.4.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:	18
3.4.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):	18
3.4.3 A Análise da Questão:	19
3.5 Quinta Questão Selecionada - (OBMEP 2012 - 1º Fase – NÍVEL 3)	20
3.5.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:	20
3.5.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):	20
3.5.3 A Análise da Questão:	21
3.6 Sexta Questão Selecionada - (OBMEP 2015 - 1º Fase – NÍVEL 3)	22
3.6.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:	22
3.6.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):	23
3.6.3 A Análise da Questão:	23
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	24
5 REFERÊNCIAS	24

1 INTRODUÇÃO

A discussão sobre a problemática da educação no Brasil relacionada à baixa compreensão dos conteúdos matemáticos e conseqüentemente a não promoção anual dos estudantes, gera grande inquietação por parte dos educadores da área que constantemente buscam estratégias que minimizem esse grave e contínuo problema de aprendizagem objetivando estabelecer alternativas que despertem o interesse do aluno pela disciplina em si.

A Olimpíada Brasileira de Matemática em Escolas Públicas (OBMEP), é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, sendo realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que tem o objetivo de despertar nos alunos o gosto pela matemática e ciências em geral. De acordo com este projeto os conhecimentos básicos e as competências são de suma importância para incentivar os alunos a ingressarem nas universidades, nas áreas científicas e tecnológicas, porém a dinâmica e abordagem utilizada por este recurso ainda é pouco aproveitada em sala de aula.

A abordagem da OBMEP abrange um leque de conhecimentos que podem ser explorados de maneira mais efetiva pelo professor em sala de aula, visto que existe um banco de dados disponível pela organização do evento de forma gratuita e acessível via site, que disponibiliza todo o material necessário para desenvolver as mais diversas habilidades e promover a melhoria na qualidade do ensino.

Diante disso, questiona-se: os problemas abordados pela OBMEP podem ser usados como recurso para aprofundamento dos conteúdos de sala de aula para melhoria da aprendizagem dos alunos do Ensino Médio?

A pesquisa aqui apresentada tem como principal objetivo investigar quais as competências necessárias para a resolução de problemas propostos pela Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas – OBMEP, sobre o tema progressões, à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs. Para tal, foram selecionadas seis questões que abordam o tema progressões e delas analisou-se as resoluções propostas pela equipe de elaboração da prova propondo, soluções alternativas além de, conforme proposta de trabalho, identificar por meio de análise que teve como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais as competências mobilizadas para as resoluções.

Há uma relação muito próxima entre o ensino e aprendizagem, pois através do ensino é possível se chegar a aprendizagem e a qualidade da aprendizagem se dá pela maneira que se desenvolve cada atividade, pelo sentido da atividade, pelo trabalho coletivo ou individual dos alunos e pelo nível de cooperação entre aluno e professor para que todos participem da aula. Sobre o caminho para a aprendizagem, citaremos Weisz que diz:

O professor é que precisa compreender o caminho de aprendizagem que o aluno está percorrendo naquele momento e, em função disso, identificar as informações e as atividades que permitam a ele avançar no patamar de conhecimento que já conquistou para outro mais evoluído. ... (WEISZ, 2009, p.65)

Com a afirmação a autora defende que o processo de aprendizagem não deve se adaptar ao modelo de ensino, mas o processo de ensino tem que ser moldado para se adaptar à aprendizagem do aluno, pois cada estudante aprende de uma determinada maneira. Além disso, sobre o fato de que infelizmente a aprovação nem sempre reflete o aprendizado e que conteúdos de ordem básica e suma importância são por vezes esquecidos ocasionando dificuldades na aprendizagem de novos temas a afirmação de Coll (2001 pg. 61) é bastante oportuna uma vez que o autor pontua que, “quando o aluno enfrenta um novo conteúdo a ser aprendido, sempre faz o armado com uma série de conceitos, concepções, representações e conhecimento adquiridos no decorrer de suas experiências anteriores”, dessa forma é praticamente impossível uma aprendizagem sem conexões anteriores.

De acordo com a análise de Cesar Coll, quando um aluno está frente a um novo conhecimento ele sempre busca conhecimento anteriores e que servirão de base, ficando explícita a importância de um aprendizado de qualidade. Acredita-se que essa qualidade pode ser alcançada através de uma variação de estratégias de ensino de maneira que a introdução de problemas da OBMEP como metodologia de aprofundamento vem de encontro a essa crença.

Para se verificar esse resultado de compreensão do conteúdo se faz necessárias avaliações, mas geralmente somente as avaliações não são suficientes para mensurar a eficácia da abordagem escolhida.

Quando, pela avaliação o estudante demonstra que aprendeu o conceito ensinado, o professor considera que já realizou o seu papel de “ensinante” e passa a dizer o novo conteúdo do programa. Nesse tipo de relação de ensino, o que se requer do aluno é o aprendizado do conceito enunciado geralmente por meio de memorização. Isso, normalmente, propicia ao aluno o resultado

necessário para sua aprovação na disciplina, no ano e no curso, porém não garante o “apropriar-se”. ... (ANASTISIOU, 2015 pg. 27).

A autora afirma que somente a memorização não é relevante, pois esta estará condenada ao esquecimento, o que reforça a necessidade de aprendizagem real o que só será obtido por meio de uma variedade de estratégias que o professor terá que desenvolver em sala de aula e julgar, dentro dos resultados obtidos, aquela que mais lhe foi favorável dentro da sua realidade.

Sobre a utilização das atividades disponibilizadas virtualmente pela organização da OBMEP como ferramenta de apoio, o pesquisador Iran Abreu Mendes fez um estudo sobre esse tipo de material:

A perspectiva pedagógica se materializa no desenvolvimento de micro projetos em sala de aula e, a partir de orientações do professor (pesquisador), é possível oportunizar ao estudante o exercício de um bom uso (uso construtivo) da informação fornecida das redes de conexões das novas tecnologias de informação. ... (MENDES, 2009 pg.15)

De acordo com esse estudo verifica-se que há diversas maneiras de aprofundar um conteúdo em sala de aula, não somente com exercícios, mas trabalhos em grupo, seminários entre outros e dentro do contexto sociocultural de cada estudante o que é muito relevante, pois proporciona ao professor possibilidade de adaptar-se a cada realidade, promovendo uma aprendizagem mais personalizada. Em pesquisa por Maria Manuela e Vanessa Sena, as pesquisadoras informam o seguinte:

Entendemos a contextualização da matemática como um processo sociocultural que consiste em compreendê-la, tal como todo conhecimento cotidiano, científico ou tecnológico, como resultado de uma construção humana, inserida em um processo histórico e social. (MANUELA, SENA 2008 pg.19)

Sendo assim a contextualização proposta pelas questões contempladas pela OBMEP trará um conhecimento de melhor entendimento dos conteúdos, visto que a matemática não deve se restringir apenas ao meio acadêmico, mas também às situações cotidianas, que podem ser trabalhadas para uma melhor compreensão do conteúdo, justamente a ideia implícita nessa proposta de trabalho.

2 METODOLOGIA

A presente pesquisa teve caráter exploratório bibliográfico, haja vista que conforme pontua (Gil, 2010 p.29), esse tipo de pesquisa permite ao investigador

analisar em profundidade cada informação, sendo estas obtidas por meio de coleta e seleção de dados oriundos de material já publicado, Rovigati (2009), informa que a pesquisa bibliográfica é importante por várias razões, entre elas a aplicação de pesquisa de campo e de laboratório, considerando que toda e qualquer pesquisa exige a pesquisa bibliográfica antecipadamente, na forma exploratória, com o exame do material de domínio público já produzido.

Esse estudo seguiu as etapas de levantamento e seleção preliminar do material a ser analisado, definição e leitura crítica do material selecionado, organização lógica do conteúdo que no caso foi a abordagem de progressões aritméticas em problemas da OBMEP, análise das questões propostas e pôr fim a escrita do relatório.

Após a pesquisa de questões propostas pelos bancos de dados de provas da OBMEP constantes no site do evento dos anos de 2005 até 2019 foram identificadas apenas seis questões o que nos levou a uma primeira crítica no tocante à pequena quantidade de questões abordando o tema escolhido. As análises basearam-se nas habilidades propostas para o ensino de matemática constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, já que o documento defende:

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (Brasil, 1998, p. 40)

Entende-se que essa é a uma das propostas das olimpíadas de Matemática, então passemos, a seguir a uma breve definição de progressão aritmética e suas fórmulas e em seguida às questões selecionadas e as soluções propostas pela OBMEP, com algumas sugestões alternativas de soluções bem como a análise dessas soluções em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais.

2.1 Progressão Aritmética

De acordo com (Iezzi et al., 2013) progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se o termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada **razão** da P.A. e é indicado por r .

$$\text{Razão: } r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

2.1.1 Fórmulas:

Será abordado de maneira simples as fórmulas referentes a progressão aritmética para melhor entendimento das análises.

Para obter um termo qualquer de uma P.A. devemos conhecer apenas o 1º termo e a razão, de modo geral o termo a_n que ocupa a n ésima posição da sequência, é dada pela expressão: $a_n = a_1 + (n - 1).r$, e para se obter a soma dos n primeiros termos de uma P.A. usamos a expressão: $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.

2.1.2 Demonstrações:

O fato de uma progressão aritmética ser classificada como infinita nos traz vários problemas em relação à obtenção de termos que estão localizados distantes dos primeiros. Então levando em consideração a definição de razão dita anteriormente temos as seguintes relações:

- $a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$
- $a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + r + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$
- $a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 2r + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$
- $a_5 - a_4 = r \Rightarrow a_5 = a_4 + r \Rightarrow a_5 = a_1 + 3r + r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r$

Assim sucessivamente.

Logo, das igualdades acima, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Seja dada uma progressão aritmética qualquer, indicando a soma dos n primeiros termos por S_n , obtém-se:

- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$

Escrevendo essa soma de trás para frente, obtém-se:

- $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$

Somando-se membro a membro essas duas equações, obtemos:

- $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$
- $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + r + a_n - r) + \dots + (a_n - r + a_1 + r) + (a_n + a_1)$
- $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_n + a_1) + (a_n + a_1)$
- $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$
- $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

2.2 Progressão Aritmética de 2º ordem

Para identificar o tipo de progressão é necessário primeiramente encontrar a razão da mesma sendo que em alguns casos, essa razão não é obtida pelo modo convencional, e em situações como essas cabe o conhecimento sobre progressões aritméticas de segunda ordem.

Seja dada a sequência $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, e definindo o operador Δ (ou operador **diferença**) como sendo a diferença entre cada termo da sequência e o seu antecedente, temos que de acordo com Lopes (2017) uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência de números reais (x_n) , na qual as diferenças $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não estacionária (razão $\neq 0$).

Nesse exemplo temos a sequência: $(2, 5, 11, 20, 32, \dots)$, aqui você não consegue identificar a P.A., mas se fizer a diferença entre os termos aparecerá uma P.A. verdadeira de razão 3: $(5 - 2, 11 - 5, 20 - 11, 32 - 20, \dots) = (3, 6, 9, 12, \dots)$.

2.2.1 Fórmula:

Para se calcular um determinado termo de uma P.A. de segunda ordem usamos a seguinte expressão: $a_n = a_1(\text{primeira ordem}) + S_{n-1}(\text{segunda ordem})$

2.2.2 Demonstração:

Se a sequência dada (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a sequência de números reais dada por:

$$\bullet (\Delta x_n) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$$

Assim, $(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n)$, é a soma dos, $n - 1$, primeiros termos da P.A. então teremos:

- $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \dots + x_n - x_{n-1}$
- $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} = x_n - x_1$
- $x_n = x_1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})$
- $x_n = x_1 + S_{n-1}$

3 ANÁLISES

3.1 Primeira Questão Seleccionada - (OBMEP 2005 - 1º Fase – NÍVEL 3)

Quantos números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2005?

3.1.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:

Os múltiplos de 3 maiores do que 1 e menores do que 2005 são os números $(3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \dots, 3 \times n)$, onde $(3 \times n)$ é o maior múltiplo de 3 menor do que 2005, usando o algoritmo da divisão, podemos escrever $(2005 = 3 \times 668 + 1)$ e segue que $n = 668$.

3.1.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):

Primeiro montar a sequência: $(3, 6, 9, 12, 15, \dots, 2004)$ e estimular o aluno a perceber que a sequência se trata de uma progressão aritmética (P.A.). A partir desse ponto é possível utilizar as fórmulas referentes a P.A. que foram mostradas anteriormente como a fórmula do termo geral da P.A.: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, fazendo a identificação dos termos:

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_n = 2004 \\ a_1 = 3 \\ \text{razão} = 3 \\ n = ? \end{cases}$$

E aplicação direta a fórmula:

$$2004 = 3 + (n - 1) \cdot 3$$

$$2004 = 3 + 3 \cdot n - 3$$

$$3.n = 2004$$

$$n = \frac{2004}{3} = 668 \text{ termos múltiplos de 3 na sequência.}$$

3.1.3 A Análise da Questão:

Ao analisar a proposta de solução fica claro o aspecto de priorização a não necessidade que memorização de fórmulas, visto que essa trabalha apenas conhecimentos sobre divisibilidade por meio do Algoritmo de Euclides o que atende ao objetivo de compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam ao aluno desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Além disso é possível identificar o objetivo de utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos. Tal objetivo reforça o caráter instrumental da matemática no ensino médio, fazendo como é bem enfatizado pelo documento, “o aluno perceber a matemática como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas na resolução de problemas”, essas estratégias, não necessariamente precisam ser sofisticadas ou diversificadas e sim proporcionar o desenvolvimento da iniciativa individual e a segurança em adaptar conhecimentos adquiridos ao longo do desenvolvimento acadêmico em diferentes situações e contextos.

É possível ainda sugerir ao professor utilizar essa questão como introdução com conteúdo de progressões aritméticas como problema motivacional.

3.2 Segunda Questão Selecionada - (OBMEP 2005 - 2º Fase – NÍVEL 3)

A sequência 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, ... é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.



A) Escreva os 20 primeiros termos desta sequência.

B) Qual é o 1000º termo desta sequência?

C) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

3.2.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:

Para o item (A) temos seguindo a lei de formação da sequência, os 20 primeiros termos são (0,3,7,10,14,17,21,24,28,31,35,38,42,45,49,52,56,59,63,66).

Para os itens (B) e (C), observamos que a sequência dada pode ser decomposta em duas sequências, como segue:

(i) a sequência I dos termos de ordem ímpar: 0,7,14,21 ..., esta sequência consiste dos múltiplos de 7; seu termo geral é $7n$ para $n \geq 0$.

(ii) a sequência P dos termos de ordem par: 3,10,17,24..., esta sequência consiste dos múltiplos de 7 somados com 3; seu termo geral é $7n + 3$ para $n \geq 0$.

Para o item (B) como 1000 é par, vemos que o 1000º termo da sequência original é o 500º termo da sequência P. Este termo corresponde a $n = 499$, uma vez que o primeiro termo de P corresponde a $n = 0$. Logo, o termo procurado é o $7 \times 499 + 3 = 3496$

Para o item (C) Temos que $2000 = 7 \times 285 + 5$. Logo 2000 não pode ser escrito nem na forma $7n$, nem na forma $7n + 3$ para algum $n \geq 0$ e, portanto, 2000 não é um termo da sequência. Outra maneira de resolver este item é notar que as soluções das equações $2000 = 7n$ e $2000 = 7n + 3$ não são números naturais.

3.2.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):

a) De acordo com a explicação escrever os 20 termos da sequência:

{0,3,4,7,10,14,17,21,24,28,31,35,38,42,45,49,52,59,63,66}

b) Observando essa sequência, podemos deduzir ela em duas progressões com n sendo par ou ímpar.

A_n se n for par: (3,10,17,24,31, ...)

A_n se n for ímpar: (0,7,14,21,28, ...)

Como o 1000º termo é par vamos usar a sequência (3,10,17,24,31,...), mas perceba que na sequência original o 1000º termo corresponde ao termo 500º na sequência nova, pois foi feita uma divisão em duas sequências.

Calculando o termo pedido:

$$\text{Dados:} \begin{cases} a_1 = 3 \\ n = 500 \\ \text{razão} = 7 \\ a_{500} = ? \end{cases}$$

Substituindo na fórmula do termo geral da P.A. temos:

$$a_{500} = 3 + (500 - 1) \cdot 7$$

$$a_{500} = 3 + 499 \cdot 7$$

$$a_{500} = 3496$$

c) Utilizando o termo geral sendo n par termos:

$$2000 = 3 + (n - 1) \cdot 7$$

$$2000 = 3 + 7n - 7$$

$$n = \frac{2004}{7}, \text{ sendo que } n \text{ não é inteiro.}$$

Utilizando o termo geral sendo n ímpar termos:

$$2000 = 0 + (n - 1) \cdot 7$$

$$2000 = 7n - 7$$

$$n = \frac{2007}{7}, \text{ sendo que } n \text{ também não é inteiro.}$$

Como a sequência original é constituída somente de números inteiros nenhum termo dessa sequência será 2000.

3.2.3 A Análise da Questão:

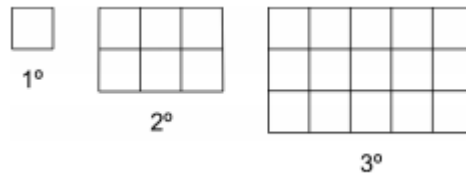
Na solução proposta verifica-se, que foi utilizado o uso de multiplicidade e fatoração, que é um processo que consiste em representar um número ou uma expressão como produto de fatores, utilizando esses recursos para interpretação e resolução do problema, permitindo assim identificarmos o objetivo de aplicar seus

conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas, conforme os PCNs.

Isso leva o aluno a compreender os procedimentos e estratégias que permitam a ele desenvolver seus estudos compreendendo assim o enunciado e formulando uma estratégia de resolução.

3.3 Terceira Questão Seleccionada - (OBMEP 2008 - 1º Fase – NÍVEL 3)

Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do 100º retângulo dessa sequência?



3.3.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:

De acordo com a lei de formação dada, a sequência de retângulos, escrita como altura x base, é da forma: $\{1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 5, 4 \times 7, \dots, n \times (2n - 1), \dots\}$. Logo o 100º retângulo ($n = 100$) é da forma 100×199 , e seu perímetro é: $2 \times (100 + 199) = 598$

3.3.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):

Observando os perímetros se obtém uma progressão aritmética (4, 10, 16, 22, ...), basta usar a fórmula do termo geral da P.A.:

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_1 = 4 \\ n = 100 \\ \text{razão} = 6 \\ a_{100} = ? \end{cases}$$

Substituindo na fórmula temos:

$$a_{100} = 4 + (100 - 1) \cdot 6$$

$$a_{100} = 4 + 600 - 6$$

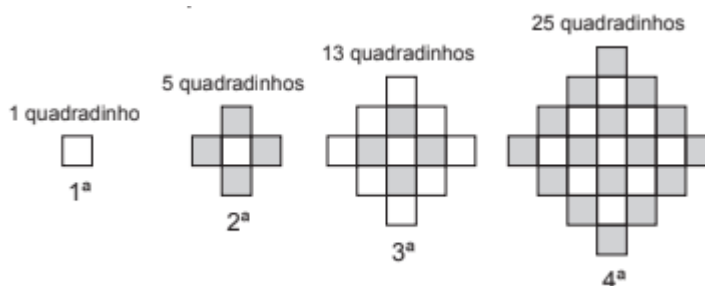
$$a_{100} = 598 \text{ cm, é o perímetro do } 100^\circ \text{ retângulo.}$$

3.3.3 A Análise da Questão:

Na solução proposta, foi percebido que a estratégia utilizada para a resolução do problema foi a verificação de uma regra para a sequência proposta denominada de lei de formação, que é bastante utilizada para se descobrir a lógica de uma determinada sequência, fazendo o aluno raciocinar para prever os futuros resultados, interpretando a questão e utilizando raciocínios dedutivos para achar a solução. Segundo os PCNs, “os alunos devem ter se aproximado de vários campos da matemática em condições de utiliza-los e amplia-los”, dessa maneira pode ser desenvolvido de modo mais amplo essas capacidades tão importantes de abstração, raciocínio e resolução de problemas de qualquer tipo como, investigação, análise, compreensão e interpretação de fatos matemáticos. Podemos assim identificar o objetivo de desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas de comunicação, bem como espírito crítico e criativo.

3.4 Quarta Questão Seleccionada - (OBMEP 2009 - 1º Fase – NÍVEL 3)

Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?



3.4.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:

Vamos contar quantos quadradinhos brancos e sombreados aparecem em cada figura.

figura	brancos	sombreados	total
1ª	$1 = 1^2$	$0 = 0^2$	$1^2 + 0^2$
2ª	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$2^2 + 1^2$
3ª	$9 = 3^2$	$4 = 2^2$	$3^2 + 2^2$
4ª	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	$4^2 + 3^2$

Em geral, vemos que a n -ésima figura terá: $n^2 + (n - 1)^2$ quadradinhos. Nosso problema se resume então a achar o menor inteiro positivo n tal que $n^2 + (n - 1)^2 \geq 2009$. Podemos fazer isto analisando o sinal do polinômio: $n^2 + (n - 1)^2 - 2009 = 2n^2 - 2n - 2008$, mas é mais rápido proceder por aproximações, como segue.

Como $n^2 > (n - 1)^2$ para $n \geq 1$, devemos ter $2n^2 > 2009$, ou seja, $n^2 > 1004,5$; segue que $n > 31$. Como $32^2 + 31^2 = 1985$, o valor $n = 32$ está descartado; por outro lado, para $n = 33$ temos $33^2 + 32^2 = 2113$.

3.4.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):

Observando a sequência temos: $(1, 5, 13, 25, \dots)$, fazendo a análise dessa sequência temos:

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 1 + 4$$

$$A_3 = 1 + 4 + 8$$

$$A_4 = 1 + 4 + 8 + 12$$

Logo, como a sequência é infinita temos:

$$A_n = 1 + 4 + 8 + 12 + \dots + B_n$$

Essa parte destacada da sequência se caracteriza como uma P.A de segunda ordem de razão **4** e **$n - 1$** termos, pois não incluímos o número 1. Também podemos perceber essa P.A. de segunda ordem fazendo a diferença dos termos consecutivos: $(5 - 1, 13 - 5, 25 - 13, \dots) = (4, 8, 12, \dots)$

Utilizando a **fórmula do termo geral** na P.A. de segunda ordem temos:

$$B_n = B_1 + (n - 1) \cdot r$$

Substituindo **n** por **$n - 1$**

$$B_n = B_1 + [(n - 1) - 1] \cdot r$$

$$B_n = B_1 + (n - 2) \cdot r$$

$$B_n = 4 + (n - 2) \cdot 4$$

$$B_n = 4n - 4$$

Substituindo o valor de **B_n** em **A_n** temos:

$$A_n = 1 + 4 + 8 + 12 + \dots + (4n - 4)$$

Como podemos observar se trata de uma soma então utilizaremos a **fórmula da soma dos termos**, na **P.A de segunda ordem**, assim temos:

$$\text{Dados:} \begin{cases} A_1 = 4 \\ A_n = 4n - 4 \\ n = n - 1 \text{ (pois não estamos considerando o número 1)} \end{cases}$$

$$A_n = 1 + \left[\frac{(4 + 4n - 4) \cdot (n - 1)}{2} \right]$$

$$A_n = 1 + \left(\frac{4n^2 - 4n}{2} \right)$$

$$A_n = 2n^2 - 2n + 1$$

De acordo com o enunciado temos que $A_n > 2009$, substituindo temos:

$$2n^2 - 2n + 1 > 2009$$

$$2n^2 - 2n - 2008 > 0$$

$$n^2 - n - 1004 > 0$$

$$\Delta = 4017, \sqrt{\Delta} \approx 63,38$$

$$n = \frac{1 \pm 63,38}{2}$$

$$\text{Logo temos dois valores:} \begin{cases} n_1 = 32,19 \\ n_2 = -31,19 \end{cases}$$

Não podemos considerar o valor negativo, logo consideramos $n = 32,19$.

Substituindo $n = 32$ temos:

$A_n = 2 \cdot (32^2) - 2 \cdot 32 + 1 = 1985$, e não satisfaz como resposta pois queremos maior que 2009.

Substituindo $n = 33$ temos:

$A_n = 2 \cdot (33^2) - 2 \cdot 33 + 1 = 2113$, satisfazendo como solução, **logo a 33ª figura será a primeira da sequência que terá mais que 2009 quadradinhos.**

3.4.3 A Análise da Questão:

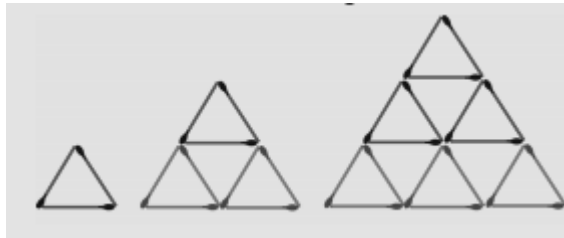
A observação na resolução proposta, notamos a utilização da lei de formação da sequência, e logo depois conhecimentos de inequação fazendo o estudo do sinal e algumas aproximações, logo podemos perceber que os alunos não precisam possuir muitas estratégias ou técnicas sofisticadas mas sim desenvolver uma iniciativa e ter uma segurança para adaptá-las a diferentes contextos, isso tem relação com os objetivos presentes nos PCNs de, aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, promover a realização pessoal mediante o sentimento de

segurança em relação às suas capacidades matemáticas e estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos.

O papel do professor nesse caso é trabalhar essas habilidades de selecionar informações, analisar as informações obtidas, e a partir disso tomar decisões que vão exigir procedimentos e formar de pensar matemáticas que são desenvolvidas ao longo do ensino médio.

3.5 Quinta Questão Seleccionada - (OBMEP 2012 - 1º Fase – NÍVEL 3)

Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos tem um lado desse triângulo?



3.5.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:

O primeiro triângulo da sequência é formado por três palitos. Para $n \geq 2$, o triângulo que ocupa a posição n na sequência é formado acrescentando n triângulos iguais ao primeiro ao triângulo precedente. Logo, o total de palitos utilizados para construir o triângulo que ocupa a posição n na sequência é:

$3.1 + 3.2 + \dots + 3n = 3. (1 + 2 + \dots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$. Para saber em qual triângulo foram usados 135 palitos, devemos resolver a equação $\frac{3n(n+1)}{2} = 135$, ou seja, $n(n+1) = 90$. Por inspeção, vemos que a raiz positiva dessa equação é $n = 9$; logo o triângulo que estamos procurando é o nono triângulo da sequência, cujo lado tem 9 palitos.

3.5.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):

$$\text{Dados: } \begin{cases} A_n = 135 \\ A_1 = 3 \\ n = ? \end{cases}$$

Analisando a sequência temos: (3,9,18,30, ...), fazendo a diferença dos termos consecutivos temos: (9 - 3, 18 - 9, 30 - 18, ...) = (6,9,12, ...), caracterizando uma P.A. de segunda ordem de razão 3. Ampliando essa P.A. temos: (6,9,12,15,18,21,24,27, ...)

Utilizando a fórmula de uma P.A. de segunda ordem temos:

$$A_n = A_1 + S_{n-1}$$

$$135 = 3 + S_{n-1}$$

$$S_{n-1} = 132$$

Como foi mostrado antes a soma dos termos de uma P.A. é dado pela fórmula:

$$S = \frac{(A_1 + A_n) \cdot n}{2}, \text{ logo temos } 132 = \frac{(6 + A_n) \cdot n}{2}, \text{ como temos uma P.A. infinita vamos}$$

verificar testando o valor de n .

Verificando os valores temos que somente $n = 8$ serve de solução:

$$132 = \frac{(6 + A_8) \cdot 8}{2}$$

$$132 = \frac{(6 + 27) \cdot 8}{2}$$

$$132 = (6 + 27) \cdot 4$$

$$132 = 132$$

Logo conclui-se que $S_{n-1} = S_8$, o que implica que o $n = 9$, logo o triângulo procurado está na **9ª posição** da sequência.

Como vemos na imagem todos os triângulos são **equiláteros**, ou seja, tem todos os lados iguais, e sua posição representa a quantidade de palitos de sua base, como o triângulo está na 9ª posição ele tem 9 palitos em sua base, logo seu lado tem 9 palitos.

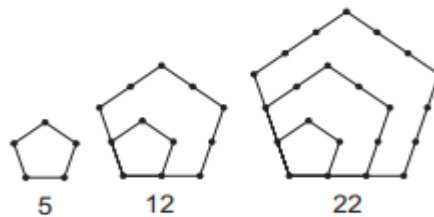
3.5.3 A Análise da Questão:

Ao analisar a resolução percebemos que novamente foi utilizada a ideia de lei de formação de uma sequência, simplificação de equação e raiz de uma equação do primeiro grau, selecionando assim uma estratégia de resolução e interpretando as informações relativas ao problema, contribuindo assim para o desenvolvimento de processos de pensamento, pois de acordo com os PCNs, “a aquisição de atitudes podem formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação”, causando ao aluno uma confiança e um desprendimento para analisar situações novas, propiciando para o mesmo uma visão mais ampla, estando assim relacionado com os objetivos de utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos e de estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos,

apresentando assim ao aluno novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo.

3.6 Sexta Questão Seleccionada - (OBMEP 2015 - 1º Fase – NÍVEL 3)

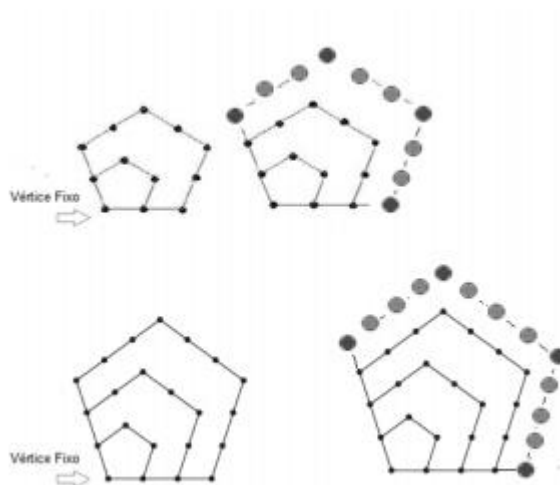
Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?



3.6.1 Solução proposta pela equipe da OBMEP:

Os números de pontos de cada figura formam uma sequência chamada de números pentagonais. Observe que, a partir da figura n , $n \geq 1$, a figura $n + 1$ é obtida acrescentando-se à figura anterior 4 novos pontos que serão os vértices e n novos pontos em cada um dos três lados opostos ao vértice fixo, totalizando $4 + 3n$ novos pontos.

Assim, se a vigésima figura possui 651 pontos a vigésima primeira terá $651 + 3 \times 20 + 4 = 715$ pontos.



3.6.2 Solução Alternativa (ou solução após a apresentação formal do conteúdo):

$$\text{Dados: } \begin{cases} A_{20} = 651 \\ A_{21} = ? \end{cases}$$

Analisando a sequência temos: (5,12,22,35 ...), fazendo a diferença dos termos consecutivos temos: $(12 - 5, 22 - 12, 35 - 22, \dots) = (7, 10, 13, \dots)$, caracterizando uma P.A. de segunda ordem de razão 3.

Utilizando a fórmula de uma P.A. de segunda ordem temos:

$$A_n = A_1 + S_{n-1}$$

$$A_{21} = A_1 + S_{20}$$

$$A_{21} = 5 + S_{20}$$

Agora se calcula o S_{20} que se trata da soma dos 20 termos da P.A. usando a fórmula:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

Para achar o termo a_{20} usa-se a fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, logo:

$$a_{20} = 7 + (20 - 1) \cdot 3$$

$a_{20} = 64$, substituindo na fórmula da soma temos:

$$S_{20} = \frac{(7 + 64) \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = 710$$

Agora é só somar: a_1 (primeira ordem) + S_{n-1} (segunda ordem)

$$a_{21} = 5 + 710 = 715$$

Logo a vigésima primeira figura terá 715 pontos.

3.6.3 A Análise da Questão:

Verificando-se a solução proposta, é possível perceber a utilização da lei de formação dos números pentagonais, entende-se que intuito foi permitir ao aluno a possibilidade de o mesmo estruturar pensamento e raciocínio dedutivo. Nesse sentido podemos concluir que o aluno deve perceber a matemática como um sistema de códigos e regras, sendo muito importante que o mesmo entenda que as definições servem para estruturar e dar sentido as técnicas aplicadas. De acordo com os PCNs, “é um processo lento, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular busca de regularidades e generalizações de padrões”, dessa maneira tendo relação com os objetivos de analisar e valorizar informações provenientes de

diferentes fontes e compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar da pequena quantidade de questões com a temática escolhida disponíveis no banco de provas da OBMEP, podemos concluir que a amostra encontrada possui um bom trabalho de uso do raciocínio e excelente rigor matemático podendo perfeitamente serem trabalhadas durante o desenvolvimento e aprofundamento dos conteúdos propostos além de estarem totalmente em consonância com os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Sua importância no processo de ensino e aprendizagem são relacionadas principalmente às estratégias de resolução que podem ser trabalhadas e aprimoradas pelo professor e com isso o estímulo à pesquisa estará sendo exercido efetivamente nos procedimentos educacionais para o ensino da Área, tal aspecto contribui significativamente para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando inclusive que um maior número de alunos tenha acesso a um material de qualidade.

Também foi possível perceber que o estudo sistemático das questões propostas pela OBMEP possibilita um real aperfeiçoamento dos professores de escolas públicas, visto que estes enfrentam dificuldades que vão muito além da questão salarial, o que contribui sua valorização profissional, além provocar uma reflexão sobre o que se ensina e como se ensina dando ao seu trabalho.

5 REFERÊNCIAS

ALYRIO, Rovigati Danilo. **Métodos e técnicas de pesquisa em administração**. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

ANASTASIOU, Léa das Graças Camargo; ALVES, Leonir Pessate. **Processos de Ensino na Universidade**: Pressupostos para as estratégias de trabalho em aula. 9. ed. Joinville, SC: Univille, 2010. 146 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC, SEF, 1997.

COLL, Cesar. **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2006. 224 p.
DAVID, Maria Manuela M. S.; TOMAZ, Vanesa Sena. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. 1. ed. Belo Horizonte MG: Autêntica, 2008. 144 p.

FIORENTINI, Dario. **Formação de professores de matemática**: Explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

GIL, Antonio. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010. 200 p.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática**: ciência e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 1.

LOPES, Fernando. **O Ensino de Progressão Geométrica de Segunda Ordem no Ensino Médio**. Trabalho de conclusão de curso (PROFMAT) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Jose do Rio Preto, 2017. p. 71. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151716/lopes_fh_me_sjrp.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 8 jun. 2021.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo SP: Livraria da Física, 2009. 215 p.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **1ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2005 1º FASE ESCOLAS PÚBLICAS + ESCOLAS PRIVADAS**. [S. l.], 2005. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1dYU5WdzT23JyAj2b3gcZq0heiYKxHPZ/view>. Acesso em: 1 jul. 2019.

_____. **1ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2005 2º FASE ESCOLAS PÚBLICAS + ESCOLAS PRIVADAS**. [S. l.], 2005. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1jHpMLi7ccgAqQn-lxBI1Uxmdh4RfyFij/view>. Acesso em: 1 jul. 2019.

_____. **4ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2008 1º FASE ESCOLAS PÚBLICAS + ESCOLAS PRIVADAS**. [S. l.], 2008. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1pXkMm0-TjFjziXiZ7IbUzvuQLIK1jAuo/view>. Acesso em: 1 jul. 2019.

_____. **5ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2009 1º FASE ESCOLAS PÚBLICAS + ESCOLAS PRIVADAS**. [S. l.], 2009. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1Nyg4mmfj7sJ4D2A2Ja1lxaJnLl1AxdoL/view>. Acesso em: 1 jul. 2019.

_____. **8ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2012 1º FASE ESCOLAS PÚBLICAS + ESCOLAS PRIVADAS**. [S. l.], 2012. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1IVhCd3QCzg-XLehaCUnYP994d1p9yBJG/view>. Acesso em: 1 jul. 2019.

_____. **11ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2015 1º FASE ESCOLAS PÚBLICAS + ESCOLAS PRIVADAS**. [S. l.], 2015. Disponível em:

<https://drive.google.com/file/d/1A8gk7l8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view>

Acesso em: 1 jul. 2019.

_____. **15^a OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2019 ESCOLAS PÚBLICAS + ESCOLAS PRIVADAS.** [S. l.], 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 1 jul. 2019.

WEISZ, Telma. **O diálogo entre o ensino e a aprendizagem.** São Paulo: Ática, 2009. 134 p.