



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
DIRETORIA DE ENSINO
DEPARTAMENTO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATEUS DA COSTA SANTOS

FRACTAIS: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS
FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO

TERESINA-PI

DEZEMBRO/2021

MATEUS DA COSTA SANTOS

**FRACTAIS: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS
FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo)
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de Licenciatura
em Matemática do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.
Campus Teresina Central

Orientadora: Prof^a. Dr^a Francisca da Rocha
Barros

Teresina-PI

Dezembro/2021

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: FRACTAIS: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO

ALUNA: MATEUS DA COSTA SANTOS - IFPI

DATA: 21 de dezembro de 2021.

Artigo defendido junto ao Departamento de Formação de Professores, **APROVADO** pela Banca examinadora.

Teresina, 21 de dezembro de 2021.

Profa. Dra. Francisca da Rocha Barros – IFPI
Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves- IFPI
Avaliador

Prof. Me. Francismar Holanda – IFPI
Avaliador

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	6
2 A INTEGRAÇÃO DOS FRACTAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA	8
2.2 GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO	10
2.3 FRACTAIS PARA SALA DE AULA	14
3. PERCURSO METODOLÓGICO	16
4 SISTEMATIZAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS	17
4.1 SISTEMATIZAÇÃO DOS DADOS	18
4.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	19
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	23
REFERÊNCIAS	24

FRACTAIS: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO

MATEUS DA COSTA SANTOS¹

FRANCISCA DA ROCHA BARROS²

RESUMO

Os fractais são figuras estudadas pela Geometria Fractal que possui como principal característica a autossimilaridade. Baseando-se no fato de que alguns deles são formados por figuras geométricas regulares, estudadas a partir do Ensino Fundamental, bem como na proposta da Base Nacional Curricular Comum (BNCC), sobre o uso dessas figuras nas aulas de Geometria no Ensino Médio, decidiu-se investigar como os fractais vem sendo utilizados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, para ensinar Geometria, além de verificar as contribuições desses recursos para compreensão da Geometria nos níveis de ensino escolhidos. A investigação constituiu-se de revisão integrativa, analisando dissertações publicadas no período de 2016 a 2020, correspondentes ao objetivo da pesquisa. A busca deu-se nas bases de periódicos nacionais: o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Finalizada a busca e aplicados os critérios de inclusão e exclusão, selecionaram-se três dissertações. As análises basearam-se nos PCN, PCN+ e BNCC e nos estudos de Barbosa (2005). Ao fim da análise, constatou-se que os fractais favorecem a motivação dos alunos para o estudo de Geometria, além de proporcionar ricas experiências de exercício dos conteúdos com a manipulação dos elementos e cálculos estudados. O baixo número de pesquisas e o pouco ou nenhum conhecimento prévio, por parte dos alunos, mostrou que os fractais tem sido pouco trabalhados em sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Básica. Ensino de Geometria. Geometria Fractal.

¹Graduando de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)

²Professora Titular do IFPI; Doutora em Letras/Linguística (UFPE); Mestra em Ciência da Informação (UFMG); Especialista em Língua Portuguesa e Licenciada em Letras (UFPI). fran2.barros@ifpi.edu.br

FRACTALS: CONTRIBUTIONS FOR TEACHING OF GEOMETRY IN THE FINAL YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL AND IN HIGH SCHOOL

ABSTRACT

Fractals are figures studied by Fractal Geometry which has self-similarity as its main characteristic. Based on the fact that some of them are formed by regular geometric figures, studied from Elementary School onwards, as well as on the proposal of the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), on the using of these figures in Geometry classes in High School, it was decided to investigate how fractals have been used in the final years of elementary school and in high school, for teaching geometry, besides to verifying the contributions of these resources to the understanding of geometry at the chosen levels of education. The research consisted of an integrative review, analyzing dissertations published from 2016 to 2020, corresponding to the research objective. The search was conducted in national databases of journals: Catálogo de Teses e Dissertações da Capes and Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Once the search was completed and the inclusion and exclusion criteria were applied, three dissertations were selected. The analyzes were based on PCN, PCN+ and BNCC and on studies by Barbosa (2005). At the end of the analysis, it was found that fractals favor the motivation of students for the study of Geometry, besides providing rich experiences in exercising the contents with the manipulation of the studied elements and calculations. The low number of researches and little or no prior knowledge on the part of students showed that fractals have rarely been worked on in the classroom.

KEYWORDS: Teaching Geometry. Fractal geometry. Elementary teaching. Elementary School. High school.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal foi desenvolvida com o intuito de descrever e analisar algumas formas e padrões que a Geometria Euclidiana não conseguia estudar. Sendo introduzida aos estudos matemáticos pelo matemático francês Benoit Mandelbrot

(1924 – 2010), essa Geometria não-Euclidiana estuda figuras conhecidas como fractais, que, de acordo com o próprio Mandelbrot (1982), são conhecidos por possuírem uma notável característica: a autossimilaridade. Tal característica faz com que essas figuras sejam formadas por repetições de partes do todo em escalas diferentes. Os fractais, segundo as pesquisas feitas por Mandelbrot (1982), são encontrados em diversos campos da natureza e do universo, além de estarem intimamente relacionados a ciência do CAOS (estudo realizado em diversas áreas, que visa encontrar ordem na desordem).

Em decorrência da complexidade dos estudos teóricos sobre a geração e o comportamento de fractais, que exigem conhecimentos estudados a partir do nível superior, essas figuras não costumam ser abordadas ao longo do nível de Ensino Médio. No entanto, conforme explana Falconer (1990), encontramos entre os fractais alguns tipos de figuras que se utilizam de elementos geométricos euclidianos para sua construção, como a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, que utilizam repetições de triângulos equiláteros de tamanhos e posições diferentes em suas composições, bem como o Conjunto de Cantor, que faz uso de quadrados estrategicamente posicionados e de tamanhos variados para sua construção.

Tal capacidade de se utilizar elementos da Geometria Clássica em fractais abriu espaço para uma abordagem em níveis de ensino menores que o superior, tendo em vista que muitos desses elementos são explorados no Ensino Médio e no Ensino Fundamental. Isso fica claro com o fato de que a BNCC (Base Nacional Curricular Comum), ao estruturar uma de suas competências para o ensino de Matemática, na modalidade de Ensino Médio, que garante aos alunos aprender a utilizar a linguagem e as representações matemáticas para interpretar a realidade, destacou a utilização dos fractais como recurso a ser utilizado em uma das habilidades que devem ser desenvolvidas para cumprir essa competência:

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 533).

Tendo em vista essa intimidade que alguns fractais possuem com a Geometria Euclidiana e o fato de que o uso de fractais no Ensino Médio brasileiro foi direcionado como habilidade curricular em aulas de Matemática pela BNCC em 2018, os seguintes

questionamentos surgiram: De que modo os fractais geométricos regulares estão sendo utilizados como recurso didático no ensino de Geometria nos níveis de Ensino Médio e Fundamental, de acordo com dissertações publicadas nos últimos cinco anos? Quais as contribuições desses recursos para a compreensão da Geometria?

A fim de responder esses questionamentos, foi buscado analisar de que modo os fractais geométricos regulares estão sendo utilizados como recurso didático no ensino de Geometria no Ensino Médio, e, também no Ensino Fundamental, em dissertações publicadas nos últimos cinco anos, com vistas a averiguar as contribuições desse recurso para a compreensão desse assunto. Para isso, foram definidos os seguintes objetivos específicos: mapear dissertações publicadas nos últimos cinco anos cujo objeto de estudo seja a utilização de fractais geométricos regulares como recurso didático no ensino de Geometria no Ensino Fundamental e no Ensino Médio; relacionar os conteúdos abordados com a utilização desses recursos; descrever e comparar os resultados das pesquisas selecionadas.

2 A INTEGRAÇÃO DOS FRACTAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA

Nesta seção, o Ensino de Geometria é estruturado, visando elencar as principais áreas de estudo em Geometria trabalhadas ao longo do Ensino Fundamental, anos finais (6º - 9º ano), e Ensino Médio no Brasil, bem como os objetivos e focos dessa área de conhecimento matemático para o Ensino Médio. Para tal, foi feita uma consulta nos principais documentos norteadores atuais, disponibilizados para educação Brasileira, os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN), os PCN+ Ensino Médio e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC). Além disso, são destacados os principais fractais geométricos para se trabalhar em aulas de Geometria nos níveis de Ensino: Fundamental e Médio, sugestões de conceitos, elementos e cálculos a se trabalhar com as figuras destacadas, tendo como base os estudos de Barbosa (2005), com fractais para sala de aula.

2.1 GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL (ANOS FINAIS) BRASILEIRO

Os anos finais do Ensino Fundamental, compreendem os seguintes anos desse nível de educação oferecida no Brasil: 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano. Em vista disso, segundo o que afirmam os Parâmetros Nacionais Curriculares para o Ensino Fundamental, os alunos que se encontram nesse nível de educação, antes chamado

de segundo ciclo do Ensino Fundamental, possuem grandes avanços em matéria cognitiva, pois:

Eles começam a estabelecer relações de causalidade, o que os estimula a buscar a explicação das coisas (porquês) e as finalidades (para que servem). O pensamento ganha maior flexibilidade, o que lhes possibilita perceber transformações. A reversibilidade do pensamento permite a observação de que alguns elementos dos objetos e das situações permanecem e outros se transformam. Desse modo, passam a descobrir regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas. Também aumenta a possibilidade de compreensão de alguns significados das operações e das relações entre elas. Ampliam suas hipóteses, estendendo-as a contextos mais amplos. Assim, por exemplo, percebem que algumas regras, propriedades, padrões, que identificam nos números que lhes são mais familiares, também valem para números “maiores”. (BRASIL, 1997, p. 55)

Com isso, o professor de Matemática, bem como os demais professores dessa modalidade, tem a oportunidade de trabalhar com alunos com um amadurecimento maior para aprendizagem. Uma vez que esses alunos, conforme os PCN (BRASIL,1997), ganham a capacidade de se concentrar, se expressar, fazer representações e, por se encontrarem no estágio que Piaget (1967) chama de Pensamento Operatório Formal (11 a 15 -16 anos), os alunos adquirem a capacidade de interagir de forma mais direta com a linguagem matemática, conseguindo criar hipóteses, começando a desenvolver o pensamento lógico matemático e, assim, vão deixando de depender tanto de recursos visuais para assimilar conceitos matemáticos.

Essa vantagem, em função do desenvolvimento cognitivo natural dos alunos, permite aos professores de Matemática explorar bem mais a fundo sua disciplina, o que levou os PCN para o Ensino Fundamental a serem elaborados subdividindo-a nos conteúdos: **Números Naturais, Sistema de Numeração Decimal e Números Racionais; Operações com Números Naturais e Racionais; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação e Conteúdos Atitudinais** (BRASIL,1997). Atualmente, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), divide os conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental em unidades temáticas, sendo elas: **Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística** (BRASIL,2018).

Tendo em vista que este trabalho é focado no ensino de Geometria através de fractais geométricos, buscou-se focar nos conteúdos de Espaço e Forma [depois

nomeado de Geometria, pela BNCC (BRASIL, 2018)], bem como no conteúdo de Grandezas e Medidas. Esses conteúdos, que estão inseridos na componente curricular Matemática, devem ser trabalhados, de acordo com a BNCC, destacando “a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação” (BRASIL, 2018, p. 298). Com isso, no início dos últimos anos do Ensino Fundamental, mais precisamente no 6º ano, tomando como base que propõe a BNCC, os alunos são introduzidos a linguagem geométrica mais formal, aprendendo conceitos como: os de plano cartesiano, retas, vértices e arestas, classificação de polígonos, ângulos, perímetros e vão entendendo como e para quê se usam as unidades de medidas em grandezas (BRASIL, 2018). A partir daí, até chegar ao último ano do Ensino Fundamental, o 9º ano, a linguagem geométrica passa a ser mais aprofundada, trazendo definições, condições de existência, algumas demonstrações, conceitos mais complexos como o Teorema de Pitágoras. Apesar de o foco ser a aprendizagem matematicamente formal desses conceitos, a BNCC ainda expressa que podem ser usados “diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica...” (BRASIL, 2018, p. 298). A BNCC ainda afirma que a História da Matemática pode ser um grande recurso para a compreensão por despertar o interesse dos alunos para os conceitos abordados (BRASIL, 2018). Para fazer com que a aprendizagem dos conteúdos de Geometria seja significativa, os recursos e materiais escolhidos pelo professor para uso nas aulas devem “estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 298).

2.2 GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO

No que diz respeito a Geometria no Ensino Médio, os PCN+ estruturam essa área de estudo da Matemática em quatro unidades temáticas: **Geometria Plana, Geometria Espacial, Métrica e Geometria Analítica** (BRASIL, 2007). Com base nos PCN+ pode-se notar que os conteúdos são explorados tendo em vista dois aspectos: a posição relativa (perpendicularismo, paralelismo, intersecção e composição) de elementos geométricos e as medidas (áreas, volumes, perímetros e semiperímetros) associadas a esses elementos (BRASIL, 2007).

Em Geometria Plana, unidade temática em que se estuda os elementos geométricos no plano bidimensional, os PCN+ destacam a importância de se trabalhar três conteúdos: semelhança, congruência e representação de figuras, propondo as seguintes habilidades:

Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema; Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc; Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real; Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras; Fazer uso de escalas em representações planas. (BRASIL, 2007, p. 125)

A unidade temática de Geometria Espacial, no que propõem os PCN+, aplica os elementos da Geometria Plana em um espaço tridimensional, abordando os conteúdos geométricos: “elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos” (BRASIL, 2007, p. 125). Essa unidade temática também deve ser responsável por trabalhar as habilidades:

Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções; Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos; Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade; Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados. (BRASIL, 2007, p. 125)

Ao falar sobre a terceira unidade temática, Métrica, os PCN+ destacam os conteúdos de áreas, volumes, estimativas, juntamente com valores: exato e aproximado; além de, também, permitir o desenvolvimento das seguintes habilidades:

Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos; Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos; Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro. (BRASIL, 2007, p. 125)

Por fim, na unidade temática de número 4, Geometria Analítica, os PCN+ propõem que os professores trabalhem as representações no plano cartesiano, bem como as equações, intersecções e posição relativas de figuras geométricas (BRASIL, 2007). Nessa unidade temática, são propostas as habilidades:

Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos; Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características; Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa; Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2007, p. 125)

Os PCN+ ainda realçam a necessidade de se trabalhar com esses elementos geométricos de forma a conseguir deduzir cálculos, demonstrar teoremas e resolver problemas aplicados, em sua grande parte, a outras formas geométricas euclidianas construídas de forma teórica ou em construções reais, com um enfoque no ensino e aprendizagem dos passos e da linguagem matemática para formalizar tais ações (BRASIL, 2007).

Assim, pode-se dizer que o ensino de Geometria, ao longo do Ensino Médio era pautado, principalmente na aprendizagem de propriedades, nos cálculos associados as medições e em análises algébricas presentes em figuras geométricas que se assemelham a objetos e outros elementos que são observados na vida real, o que tornava, e ainda torna, essa área de conhecimento matemático bem extensa, ainda que somente no Ensino Médio. Mesmo com o foco um pouco mais voltado para aplicações próprias e teóricas, a Geometria no Ensino Médio já possuía uma atenção na utilização dos conhecimentos aprendidos para fazer uma leitura de alguns elementos da realidade e da linguagem matemática, bem como do seu rigor, para compreender os elementos centrais que existiam por trás das propriedades e dos cálculos nas figuras e entes geométricos estudados.

No entanto, mesmo possuindo essa atenção no entendimento da Geometria existente no contexto da vida humana, o ensino de Matemática, e, conseqüentemente, de Geometria no Ensino Médio, passou por algumas implementações que adicionaram novos objetivos a alcançar e habilidades a desenvolver nas aulas de Geometria, com a elaboração de um novo documento norteador da educação brasileira, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

A BNCC, ainda mantendo uma estrutura de conteúdos parecida com a proposta dos PCN+, trouxe um novo foco para trabalhá-los ao longo do Ensino Médio:

[...]colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.”(BRASIL, 2018, p.527)

O que significa que, além de conhecer bem a parte teórica e exercitá-la através da resolução de exercícios e problemas, os estudantes que estão cursando o Ensino Médio devem ser direcionados a enxergar as relações entre os conhecimentos matemáticos aprendidos, a fim de utilizá-los para ler e compreender a realidade na qual estão inseridos. Com isso, novos rumos a serem atingidos para a Matemática e suas tecnologias, bem como nas demais disciplinas no ensino médio, foram organizados na BNCC em competências específicas, cada uma com habilidades a se alcançar, não havendo necessidade de se seguir uma ordem ou estar em determinado ano do Ensino Médio para desenvolvê-las (BRASIL, 2018).

Dito isso, os conhecimentos de Geometria, área que passou a ser chamada de Geometria e Medidas, ao longo do Ensino Médio, pela BNCC devem ser ministrados com o intuito de valorizar os aspectos: correlação entre os conteúdos matemáticos e outras áreas de conhecimento; utilização de tecnologias que permitam a manipulação de elementos da Geometria e façam cálculos de Medidas, como softwares de geometria dinâmica; disposição dos conteúdos, métodos e instrumentos de ensino trabalhados visando a criação conjecturas e a dedução de fórmulas para dar significado ao que é aprendido, bem como criar modelos para solucionar problemas, sejam eles teóricos ou práticos; utilização da Geometria e Medidas como instrumento para analisar e compreender situações de variados contextos (BRASIL, 2018).

Sabendo disso, pode-se concluir que o ensino de Geometria e Medidas, nos conformes atuais propostos pela Base Nacional Curricular Comum prioriza muito as aplicações para realidade e interações que, através de recursos expositivos, práticos ou tecnológicos, coloquem o aluno como objeto central do próprio processo de aprendizagem (BRASIL, 2018).

Sendo um campo de estudo, mesmo no Ensino Médio, bem extenso, a Geometria possui um amplo espaço para as mais diversas aplicações de recursos e métodos de ensino ao longo das aulas. Apropriando-se desse fato e observando a

demanda da utilização de fractais em aulas de Geometria, como propõe a BNCC (BRASIL, 2018), ver como os fractais geométricos tem sido utilizados durante as aulas de Matemática para esse campo no Ensino Médio foi a escolha natural para o objeto de pesquisa desse trabalho. Mas, antes de se analisar como pesquisadores tem aplicado esses objetos em suas aulas de Matemática, é necessário saber quais fractais podem ser utilizados, os conteúdos de Geometria que podem ser abordados, bem como sugestões bem fundamentadas sobre como se aplicar essas ricas figuras em sala de aula. Portanto, no tópico seguinte, todos esses assuntos serão devidamente explanados de forma fundamentada.

2.3 FRACTAIS PARA SALA DE AULA

Como já comentado, nem todos os fractais que existem podem ser explorados na Educação Básica, devido a alta complexidade de sua construção e cálculos para medições. Ainda assim, alguns fractais possuem aplicações educacionais que se encaixam perfeitamente na estrutura do Ensino Básico brasileiro. Para Barbosa (2005), baseando-se nas características naturais dos fractais, há duas formas de trabalhá-los no Ensino Médio brasileiro: (1) estudando-se as relações numéricas encontradas em seus elementos durante interações sucessivas e (2) explorando-se o fator estético dos fractais como motivador para se estudar as suas relações com a Matemática. Visto que, seguindo o que se propõe por Barbosa (2005) e a BNCC (BRASIL, 2018), a segunda forma de se abordar os fractais se dá normalmente em aulas introdutórias, neste tópico serão aprofundadas as formas de abordagens de fractais geométricos com as suas relações numéricas ao longo de interações sucessivas.

Com isso em mente, para se realizar a aplicação da primeira forma de se trabalhar os fractais em sala de aula, Barbosa destaca que “tais explorações, em geral, são ao nível de aprendizagem de educandos do ensino médio, portanto, podendo ser utilizadas para uma boa fixação da aprendizagem correspondente.” (BARBOSA, 2005, p. 58). Portanto, os fractais abordados para o estudo de relações métricas devem ser formados por elementos geométricos regulares e, assim, podem ser sugeridos em sala os cálculos de contagem (de arestas, vértices, lados, diagonais e faces), de perímetros, de áreas e de volumes, bem como a análise das relações entre os lados de alguns fractais abordados.

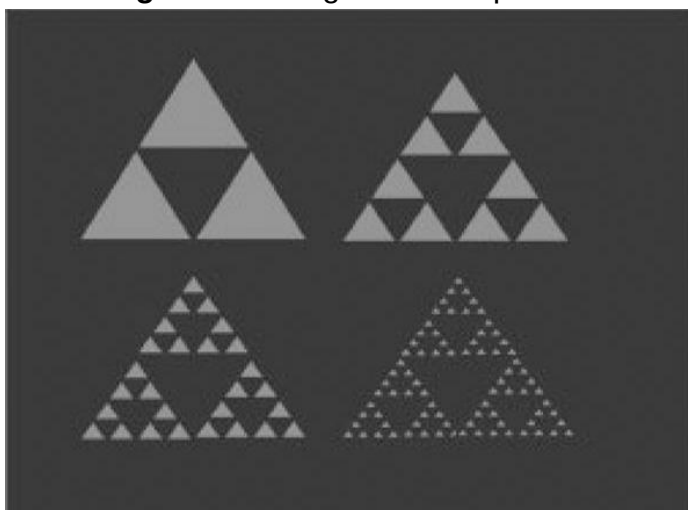
Barbosa (2005) lista alguns fractais geométricos regulares que podem ser abordados no Ensino Fundamental (anos finais) e, principalmente, no Ensino Médio seguindo a análise e contagem de seus elementos, bem como realizando o cálculo de suas medições, sendo eles: Floco de neve de Koch, Tapete de Sierpinski, Triângulo de Sierpinski, Esponja de Menger, Fractal em X, Fractais (Pentagonal, Hexagonal e Octogonal) de Dürer e a Árvore Pitagórica Fundamental. Todos esses fractais são formados por figuras geométricas regulares estudados, em sua maior parte, durante o Ensino Médio, e alguns, como o Triângulo de Sierpinski e o Floco de neve de Koch, já possuem elementos vistos ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental, conforme observado nas figuras abaixo.

Figura 1: Floco de neve de Koch



Fonte: Barbosa (p.32, 2005)

Figura 2: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Barbosa (p. 35, 2005)

Barbosa (2005) sugere um foco nas contagens de elementos que formam esses fractais e nos cálculos de perímetro, área e volume, de acordo com o tipo de fractal, seja ele bidimensional, ou tridimensional, em cada um dos seus níveis de escala. Com isso, a cada nível de escala para construir o fractal em sala de aula, o

professor deve sugerir a contagem do número de arestas, vértices ou faces, no caso de um fractal tridimensional. Barbosa (2005) destaca que é bem interessante fazer algumas conjecturas acerca de alguns cálculos de áreas e perímetros em níveis bem altos, pois alguns fractais levam a valores bem curiosos e interessantes, como áreas que tendem a zero e perímetros que tendem ao infinito.

Os fractais descritos por Barbosa (2005) podem ser feitos em desenhos pelos alunos no caderno, através de softwares, ou construídos com materiais manipuláveis, como o poliminó, ficando a critério do professor, mediante a quantidade de alunos e os recursos a disposição, a escolha de quais fractais trabalhar e os níveis de escala a serem abordados durante as construções, análises e cálculos. Barbosa (2005) também explana que o professor de Matemática no Ensino Médio, ou, Ensino Fundamental, pode ficar à vontade para se utilizar de sua criatividade para usar os processos de geração de um fractal, apontados em sua obra, para gerar fractais que possuam outros elementos geométricos não pontuados ao longo de seu livro.

3. PERCURSO METODOLÓGICO

Essa pesquisa se caracteriza como uma Revisão Integrativa de cunho qualitativo, visando atingir os objetivos propostos. A escolha da Revisão Integrativa como método de pesquisa se deu porque esse tipo de revisão proporciona a “mais ampla abordagem metodológica referente às revisões, permitindo a inclusão de estudos experimentais e não-experimentais para uma compreensão completa do fenômeno analisado” (SOUZA, 2010, p. 103). Com isso, esse método de revisão permite analisar rigorosamente trabalhos científicos já publicados, identificar lacunas, visando gerar novos conhecimentos e apontar alvos para novos estudos sobre o assunto.

Para realização deste estudo, buscaram-se dissertações em duas plataformas digitais que funcionam como base de teses e dissertações brasileiras: a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Na busca, foram utilizadas as seguintes expressões: “fractal”; “geometria fractal”; “geometria”; “ensino médio”; “ensino fundamental” e “educação básica”.

A pesquisa preliminar pelas dissertações com as expressões citadas resultou em quatro dissertações no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e sete

dissertações na BDTD, que foram submetidas a uma filtragem utilizando-se os seguintes critérios de inclusão: (1) ser uma pesquisa voltada para fins educacionais; (2) corresponder com pelo menos um dos objetivos desse trabalho; (3) apresentar pesquisas feitas com aplicações práticas utilizando fractais para ensinar Geometria em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, ou no Ensino Médio. As dissertações que não atenderam a esses critérios foram excluídas da pesquisa.

Com isso, das quatro dissertações encontradas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, apenas uma conseguiu atender aos critérios de inclusão. Utilizando os mesmos critérios de inclusão, na BDTD, apenas 2 das 7 dissertações encontradas na pesquisa preliminar foram selecionadas. A seguir, as Tabelas 1 e 2, relacionam, respectivamente, a quantidade de dissertações encontradas durante a pesquisa preliminar e as pesquisas que foram selecionadas para fazer parte deste estudo através dos critérios de inclusão já citados, de acordo com os portais de periódicos em que se encontravam.

Tabela 1: Lista com quantidade de dissertações encontradas com os descritores de busca por Portal de Periódicos

Portal de Periódicos	Quantidade de Dissertações Selecionadas
Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES	4
Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações	7

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Tabela 2: Lista com quantidade de dissertações que atenderam aos critérios de inclusão por portal de periódicos

Portal de Periódicos	Quantidade de Dissertações Selecionadas
Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES	1
Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações	2

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

4 SISTEMATIZAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nesta seção, as dissertações selecionadas estão apresentadas, segundo a ordem cronológica em que foram defendidas, com as informações que contribuíram para a análise. Além disso, os processos utilizados e os dados obtidos pelos autores

em suas pesquisas são discutidos, com base nas considerações dos PCN para Ensino Fundamental, nos PCN+ para o Ensino Médio, na BNCC e nos estudos de Barbosa (2005), sobre fractais aplicados em sala de aula.

4.1 SISTEMATIZAÇÃO DOS DADOS

No Quadro 1, a seguir, sistematizam-se os dados principais das dissertações, que foram nomeadas como D₁, D₂, D₃, com o intuito de evitar repetições dos títulos durante a discussão dos dados.

Quadro 1: Sistematização das dissertações escolhidas para revisão integrativa

DISSERTAÇÕES (BASE/ANO)	DADOS PRINCIPAIS
D ₁ (BDTD/2016)	TÍTULO: A Geometria Fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométrico OBJETIVO: Averiguar quais as contribuições que a Geometria fractal pode proporcionar ao ensino dos alunos do Ensino Médio, em relação aos conceitos da Geometria Euclidiana, apresentando ao aluno a matemática de forma diferenciada da qual estão habituados, por meio da utilização de materiais manipuláveis, sem desviar-nos dos conteúdos estabelecidos pelo Currículo do Estado de São Paulo. RESULTADOS: Após aplicar um questionário que estimou o conhecimento dos alunos sobre conceitos Geométricos pertinentes a uma turma de 2º ano do Ensino Médio, a pesquisadora mediu uma intervenção pedagógica que introduziu e trabalhou os conceitos Geométricos abordados no questionário. Apesar do desinteresse de alguns em participar das aulas, muitos dos alunos ficaram motivados a manipulá-los após a introdução contextualizada dos fractais. Através de um novo questionário visando estimar a aprendizagem dos alunos após a intervenção, foi constatado que as interações geométricas feitas com os fractais permitiram um aumento significativo na taxa de acerto dos alunos em questões de: ponto médio, comprimento de um segmento, área e volume.
D ₂ (BDTD/2017)	TÍTULO: Geometria Fractal na Educação Básica OBJETIVO: Apresentar o conceito da geometria fractal e alguns tópicos matemáticos que podem ser explorados a partir da mesma, estabelecendo uma conexão com os conteúdos da educação básica, ampliando, assim, sua divulgação. RESULTADOS: Com a abordagem feita, a pesquisadora pôde notar que os alunos possuíam pouquíssimo ou nenhum conhecimento prévio sobre os fractais. Através da exibição de um vídeo que contextualizou alguns elementos matemático-geométricos, dentre eles os fractais, os alunos puderam se sentir motivados a descobrir mais sobre os fractais e interagir com eles. Apesar do bom efeito com o vídeo, muitos alunos não conseguiram associar os fractais aos conceitos matemáticos por eles conhecidos, mesmo sendo indicados pelo vídeo. Mesmo assim, os alunos ficaram bem motivados a construir e fazer interações com essas figuras, pois a introdução dialogada e contextualizada os permitiu enxergar os fractais como elementos que são bem presentes na vida humana.

D3 (Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES/2020)	TÍTULO: Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do Geogebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental OBJETIVO: Analisar potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais por alunos de uma turma regular do sexto ano do Ensino Fundamental. RESULTADOS: Com a introdução aos fractais e as discussões entre a pesquisadora e a turma acerca do assunto, os alunos puderam concluir, por si próprios, que as figuras abordadas faziam parte do contexto humano em várias áreas. As interações feitas com fractais, inicialmente por meio de um material concreto e, depois, pelo software livre de Geometria Dinâmica Geogebra, permitiram aos alunos exercitar os conteúdos de triângulos e quadriláteros, bem como suas áreas e perímetros.
---	---

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

4.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Na D₁, a autora faz uma intervenção pedagógica utilizando-se, primeiramente, de uma das sugestões de Barbosa (2005): o uso dos fractais para destacar o fator estético e motivar os alunos a estudarem essas figuras. Em síntese, o objetivo da pesquisadora era averiguar quais as contribuições que a Geometria fractal pode proporcionar ao ensino dos alunos do Ensino Médio.

É válido informar que, antes de iniciar a intervenção, foi aplicado um questionário para diagnosticar os conhecimentos prévios da turma de 2º ano do Ensino Médio. Para a iniciar a abordagem sobre os fractais, além de conceituá-los e fazer a diferenciação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Fractal, a pesquisadora buscou utilizar outro recurso interessante durante a exposição: a contextualização histórica para os estudos da Geometria Fractal. Essa metodologia, de acordo com a BNCC, enriquece muito as aulas, pois “é muito importante incluir a história da Matemática como um recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2018, p. 298).

Vale registrar que os alunos envolvidos na pesquisa, segundo as respostas do questionário, possuíam dificuldades relacionados a conceitos que deveriam ser aprendidos no Ensino Fundamental. Portanto, as aplicações de fractais foram feitas visando sanar as carências que os alunos tinham com relação aos conteúdos de Geometria, vistos ao longo do Ensino Fundamental. Para tal, foram utilizados os fractais: Degraus Centrais e Triângulo de Sierpinski, ambos construídos em folhas de papel, utilizando conceitos geométricos, nos níveis sugeridos pela autora.

Para as análises dos dois fractais, foram utilizadas as sugestões de Barbosa (2005), aproveitando cada nível de construção para verificar o perímetro, quantidade de lados e a área de cada parte do fractal e do todo. Com isso, as atividades experimentadas trabalharam os seguintes conteúdos de Geometria: ponto médio, comprimento de um segmento, área e volume. Os questionários feitos para estimar a aprendizagem dos alunos nessa pesquisa mostraram que houve melhora na assimilação e compreensão dos conteúdos geométricos trabalhados.

Diante desse resultado, pode-se afirmar que a introdução sobre fractais, feita no primeiro momento, ajudou os alunos a observarem essas figuras como padrões matemáticos e a compreender os fractais como parte da realidade, presentes em alguns contextos, como na natureza, conforme indica a BNCC (BRASIL, 2018). No que diz respeito à segunda etapa, os fractais serviram como recurso auxiliar para trabalhar conceitos geométricos indicados nos PCN+ (BRASIL, 2007). É importante destacar que, no que se refere às dificuldades para trabalhar com os fractais na turma indicada, a autora indica como a principal delas a falta de interesse que alguns alunos tiveram durante a primeira interação com conceitos geométricos, sem a utilização dos fractais para compreendê-los. Esse desinteresse fez com que alguns alunos faltassem durante toda a semana de atividades.

Na D₂, foi feita uma abordagem da Geometria Fractal no Ensino Fundamental, mais precisamente em uma turma do 9º ano desse nível de ensino. Assim como a D₁, a abordagem teve início com um vídeo que expôs alguns elementos geométricos presentes na natureza, dentre eles alguns fractais naturais. Após despertar o senso estético dos alunos com uma amostra dos fractais naturais, como sugere Barbosa (2005), a autora buscou, através de uma discussão com os alunos, descobrir o que eles conseguiram assimilar sobre o tema, tendo visto apenas o vídeo introdutório. Com isso, foi constatado que muitos entenderam, mesmo de maneira informal, o que são os fractais, fato esse que os levou a ficarem curiosos sobre o assunto.

Apesar de compreenderem o significado do termo fractal, os alunos da turma, quando sugerido que exemplificassem conteúdos matemáticos conhecidos que, aos olhos deles próprios, possuísem relação com os fractais, não conseguiram estabelecer relações com elementos geométricos e curvas já estudadas. Esse evento foi considerado desfavorável pela pesquisadora, pois o vídeo introdutório mostrou

alguns fractais formados por elementos geométricos estudados ao longo do Ensino Fundamental.

A pesquisadora também tentou promover uma discussão acerca da autossemelhança e das infinitas repetições, porém os alunos não conseguiram associar diretamente esses processos à Matemática. Ainda assim, o interesse dos alunos sobre o assunto não diminuiu e a autora logo iniciou o processo de confecção de um fractal que, apesar de não estar entre os listados por Barbosa (2005), é baseado num quadrado, visando trabalhar conteúdos mais simples como: propriedades de quadriláteros, ponto médio e Teorema de Pitágoras. Todos esses conteúdos são previstos para os anos finais do Ensino Fundamental pela BNCC (BRASIL, 2018), sendo mais abordados em anos anteriores ao 9º ano. Isso indica que a pesquisadora possuía como objetivo, após constatar dificuldades em associação dos conteúdos geométricos com os fractais, utilizar o fractal proposto para sanar lacunas de aprendizagem de conteúdos matemáticos vistos anteriormente pelos alunos.

Os resultados obtidos pelos alunos durante as manipulações do fractal com base em um quadrado sugerido pela autora não foram apresentados. No entanto, foi relatado que os alunos ficaram tão interessados com os fractais, que, munindo-se dos princípios de criação dessas figuras, confeccionaram outros fractais geométricos. Com isso, os alunos mostraram que conseguiram tomar conhecimento sobre o que são os fractais, as principais características e onde se encontram no mundo.

A D₃ se propôs a abordar conceitos geométricos utilizando fractais e o software livre Geogebra, em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Para tal, a autora, inicialmente, fez uma apresentação sobre os fractais e promoveu uma discussão sobre formas encontradas na natureza que se assemelham a fractal. Com isso, a autora fez com que os alunos, através de suas próprias discussões sobre o tema, concluíssem que os fractais se encontram bem presentes na vida humana.

Observa-se que essa relação que a autora estabeleceu entre os fractais e as formas encontradas na natureza vai ao encontro do que Barbosa explana:

Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc; seria absurdamente inadequado. A

geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (BARBOSA, 2005, p.5)

. Dando prosseguimento, a pesquisadora começou a construir e analisar, com os alunos, o fractal Tapete de Sierpinski, sugerido por Barbosa (2005). Após constatar que os alunos já entendiam o comportamento de fractais geométricos ao longo de seus níveis, a autora sugeriu que fossem calculados a área e o perímetro do Tapete de Sierpinski. A etapa seguinte consistiu em utilizar o software livre Geogebra para construir e fazer simulações de níveis de dimensionamento para os fractais: Tapete e Triângulo de Sierpinski, permitindo a visualização do comportamento desses fractais em mais níveis, indo além do que o material concreto conseguiu mostrar. Com essa abordagem, a autora conseguiu trabalhar conceitos dos elementos principais de triângulos e quadriláteros bem como suas áreas e perímetros, utilizando-se de um grande recurso para aulas de Matemática, recomendado pela BNCC: softwares de geometria dinâmica (BRASIL, 2018).

O estudo revelou que os alunos conseguiram assimilar bem o conceito de um fractal, o comportamento e a relação que esses possuem com a natureza. Os conceitos geométricos foram bem exercitados e os alunos se sentiram mais motivados a interagir, por perceberem a conexão dos fractais com elementos presentes na vida humana. Apesar disso, a autora ainda aponta como dificuldade a falta de experiência dos alunos com a utilização de réguas e dos elementos geométricos, em sua linguagem formal, para localizar os elementos das figuras obtidas. O que pode ser explicado pelo fato de que os alunos de 6º ano que participaram da abordagem, possuindo uma média de idade de 11,7 anos, estarem na fase de transição entre o pensamento concreto e o pensamento formal, ou seja, ainda estão iniciando o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, que os permite generalizar e formalizar conceitos, antes conhecidos de maneira apenas visual e concreta (PIAGET, 1967).

Analisando as três dissertações, foi possível notar que a introdução com: contexto histórico, definições e exemplos na natureza, foi adequada para promover o conhecimento dos alunos sobre os fractais. Em todos os estudos, os fractais foram apresentados aos alunos e em todos foi verificado que nenhum dos alunos, de antemão, possuía conhecimento verdadeiramente relevante acerca desses elementos matemáticos. Foi constatado que apenas as dissertações D₁ e D₃ tiveram resultados,

com base em discussões e testes, que comprovassem a eficiência do uso de fractais regulares geométricos para o ensino de Geometria. Essa eficiência ficou bem clara nos resultados apontados, reforçando o que Barbosa (2005) defende sobre os fractais serem excelentes ferramentas para se exercitar conhecimentos matemáticos trabalhados durante o Ensino Básico, principalmente no que diz respeito à Geometria. Com isso, a utilização dessas formas geométricas em sala de aula capacita os estudantes, mesmo nos últimos anos do Ensino Fundamental, a:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018, p. 532)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta revisão integrativa, foi realizada a análise de dissertações que abordam a utilização de fractais geométricos regulares para o ensino de Geometria em dois níveis do Ensino Básico: os anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio, com o intuito de verificar como os fractais vêm sendo utilizados em aulas de Geometria. A análise visa responder às questões norteadoras dessa pesquisa: De que modo os fractais geométricos regulares estão sendo utilizados como recurso didático no ensino de Geometria nos níveis de Ensino Médio e Fundamental, de acordo com dissertações publicadas nos últimos cinco anos? Quais as contribuições desses recursos para a compreensão da Geometria?

Conforme foi apresentado, ao se fazer um recorte temporal de cinco anos (2016 – 2020), apenas três dissertações foram selecionadas, levando em consideração o objetivo proposto, o que permite a conclusão de que há poucos estudos que abordam o uso de fractais para aulas de Geometria de forma prática em sala de aula. Com base na quantidade de pesquisas feitas no espaço temporal e, conforme constatado pelas autoras das dissertações analisadas, no baixo ou inexistente conhecimento prévio dos alunos que participaram das pesquisas a respeito dos fractais, pode-se inferir que, além de não existirem muitas pesquisas sobre aplicações educacionais para os fractais geométricos, essas formas têm sido pouco trabalhadas por professores de Matemática em suas turmas.

No entanto, apesar do número escasso de pesquisas nesse campo, foi possível observar alguns meios de aplicação dos fractais geométricos regulares nas aulas de Geometria. Conforme comprovado pelas pesquisas analisadas, os fractais que se encaixam nessa categoria de geométricos regulares são valiosos recursos que proporcionam exercitar, de maneira dinâmica e interativa, os conteúdos associados às unidades temáticas de: **Geometria e Medidas**.

Mediante as pesquisas analisadas, após serem motivados com a introdução aos fractais e a Geometria que os estuda, os alunos se sentem mais à vontade para construir e manipular fractais geométricos regulares, seja de forma concreta, por desenho geométrico, ou através de softwares de Geometria Dinâmica. Através da construção e manipulação desses fractais, os alunos interagem com os conhecimentos geométricos estudados no Ensino Básico, tendo assim, a visão geométrica aumentada e ganhando agilidade para fazer a identificação e contagem de elementos como faces, arestas, pontos médios e outros elementos, bem como desenvolvem maior desenvoltura para efetuar cálculos de área ou volume, dependendo da necessidade e do fractal abordado.

Por fim, espera-se que esta pesquisa contribua para despertar o olhar de futuros e atuais professores de Matemática para a utilização de fractais regulares geométricos em aulas de Geometria e em outras unidades temáticas abordadas na Matemática do Ensino Básico, haja vista que essa abordagem amplia a compreensão dos alunos sobre a realidade que os cerca e seu uso é previsto pela BNCC desde 2018.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrimos a Geometria Fractal**: para a sala de aula. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 07 dez. 2021.

_____. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Nacionais Curriculares**. Brasília: MEC/SEF, 2007. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 05 dez. 2021.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2021.

FALCONER, K. J. **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications**. 1. Ed. New York: John Wiley & Sons, 1990.

LUZ, E. V. **A Geometria Fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos**. 2016. 83 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2016.

MANDELBROT, B. P. **The Fractal Geometry of Nature**. 1. Ed. San Francisco: W.H. Freeman, 1982.

MOREIRA, V. S. S. S. **Geometria Fractal na Educação Básica**. 2017. 78 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

XAVIER, L. K. **Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental**. 2020. 162 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

PIAGET, J. **Seis estudos de Psicologia**. Rio de Janeiro: Forense, 1967.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus, por ter me proporcionado todas as oportunidades e ricas experiências que tive na vida, bem como por ter me guiado até então.

Agradeço aos meus pais, Lêda e Francisco, e a minha irmã, Mara, pelo apoio, os conselhos e os incentivos que sempre têm me dado, mesmo quando a situação não ficava favorável.

Sou muito grato a minha orientadora, Francisca da Rocha Barros, pelas excelentes instruções em relação ao trabalho, pelo tempo dedicado para me ajudar e pela paciência sempre demonstrada.

Fico muito agradecido aos meus amigos que sempre estiveram comigo durante todo o meu percurso até este momento e por nunca desistirem de mim em momentos difíceis.

Certamente, foi graças a vocês que consegui chegar até aqui. Obrigado!