



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
DIRETORIA DE ENSINO
DEPARTAMENTO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PEDRO ALEXANDRE LINHARES LIMA

**INTEGRAIS MÚLTIPLAS EM COORDENADAS POLARES: FATOS PARA
UTILIZAÇÃO DO JACOBIANO**

TERESINA-PI

JULHO/2021

PEDRO ALEXANDRE LINHARES LIMA

**INTEGRAIS MÚLTIPLAS EM COORDENADAS POLARES: FATOS PARA
UTILIZAÇÃO DO JACOBIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo completo)
apresentado como exigência parcial para obtenção do
diploma do Curso de Licenciatura de Matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí - *Campus* Teresina Central.

Orientador: Prof. Ms. Robson Abreu Fonseca

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof xxxxx xxxxxxxx (orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI) - *Campus* Teresina Central.

Prof. Xxxxx xxxxxx (membro)
Instituição Federal do Piauí (IFPI) - *Campus* Teresina Central

Prof. Xxxxx XXxxx (membro)
Instituição Federal do Piauí (IFPI) - *Campus* Teresina Central

Agradeço primeiramente a Deus pelo privilégio de fazer parte do Instituto Federal do Piauí, Teresina Central, minha família base fundamental por garantir toda essa experiência única. E por fim sou grato também por todos os professores (as) e amigos que me ajudaram nessa caminhada.

Resumo

Ao estudar cálculo, no que circunscreve os aspectos aprendidos à nível de educação superior, as integrais são construídas e solucionadas por várias técnicas disseminadas na literatura matemática. Um estudo específico sobre coordenadas polares, em se tratando de construção, definição, gráficos e aplicações, foi oportunizado neste trabalho, onde foi desenvolvida uma pesquisa no campo do Programa de Bolsa a Iniciação Científica (PIBIC). A aplicação na região definida em coordenadas polares e a utilização das integrais duplas, acarreta na necessidade da mudança de variável para solucionar problemas, daí proporemos a investigação sobre indícios que qualifiquem a utilização do Jacobiano. Os Problemas que envolvem as integrais múltiplas em coordenadas polares, rodeiam como principal eixo de abordagem as mudanças de variáveis, além do que, compreendem também o tratamento da questão da montagem do Jacobiano para a finalidade de mudança de variáveis. No intuito de qualificar a inserção da mudança de variáveis, para perceber indicativos gráficos ou algébricos que viabilizem um tratamento específico ou não do Jacobiano para solução das integrais em estudo. Este trabalho circunscreve uma atividade de investigação bibliográfica e processual para uma construção-seleção dos conceitos, pautado nas discussões de Anton H; Bivens I. C; Davis S. L (2010), Gonçalves B. M; Flemming D. M (2013), e Wrede R. C; Spiegel M. S (2004), e para fundamentar com métodos de ensino e bases para a metodologia, utilizada neste trabalho foi referenciado Quivy e Campenhoudt (1995). Diante disso, foi possível concluir que, ao relacionar aspectos que integram os temas estudados em contextos históricos e sobrepostos, foi possível também levantar como os autores abordam os temas. Com tudo, foi identificado nos materiais componentes do trabalho, modelagem matemática, relacionando o raciocínio lógico da aprendizagem significativa e o processo de aplicabilidade do Jacobiano.

Palavras-Chave: Ensino, integrais múltiplas, utilização do Jacobiano.

Abstract

When studying calculus, in what circumscribes the aspects learned at the level of higher education, the integrals are constructed and solved by several techniques disseminated in the mathematical literature. A specific study on polar coordinates, in terms of construction, definition, graphs and applications, was opportunized in this work, where a research was developed in the field of the Scholarship Program (PIBIC), where the application in the region defined in coordinates polar and the use of double integrals, necessitates the change of variable to solve problems, hence we propose research on indications that qualify the use of the Jacobian. The problems that involve multiple integrals in polar coordinates, surround as main axis of approach the changes of variables, besides which, they also understand the treatment of the question of investigating, which indications point the assembly of the Jacobian for the purpose of change of variables. In order to qualify the insertion of the change of variables, to perceive graphical or algebraic indicatives that enable a specific or non-Jacobian treatment to solve the integrals under study. This work circumscribes an activity of bibliographic and procedural research for a construction-selection of concepts, based on the discussions of Anton H; Bivens I.C; Davis S. L (2010), Gonçalves B. M; Flemming D. M (2013), and Wrede R.C; Spiegel M. S (2004), and to base with teaching methods and bases for the methodology, used in this work was referenced Quivy and Campenhoudt (1995). Therefore, it was possible to conclude that, by relating aspects that integrate the themes studied in historical and overlapping contexts, it was also possible to find out how the authors approach the themes. With everything, it was identified in the work materials, mathematical modeling, relating the logical reasoning of meaningful learning and the Jacobian applicability process.

Keywords: Teaching, multiple integrals, use of Jacobian.

.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	08
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	08
2.1 Aplicação da matriz Jacobiana.....	10
3 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	12
4 RESULTADOS E DISCURSÕES.....	13
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	17
REFERÊNCIAS.....	18

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa levantar aspectos históricos, características identificadas em livros e artigos contendo definições e aplicações do Jacobiano em integrais múltiplas em coordenadas polares para mudança de variável. Este trabalho fora idealizado e desenvolvido no âmbito do Programa de Bolsa a Iniciação Científica (PIBIC). Aqui se propôs identificar a relação entre as aplicações em diferentes espaços onde ocorrem as mudanças de coordenadas, bem como, indicar fatos que norteiam a utilização da matriz do Jacobiano nas integrais aplicadas. Discutindo e apontando características e comportamentos matemáticos identificados nas leituras dos materiais estudados.

Em aspectos preliminares faremos algumas definições, para em seguida apontarmos hipóteses e suspeitas que nortearão o corpo deste trabalho. Montando uma linha de pesquisa, objetivando refletir o método matemático adequado na obtenção das características a serem levantadas. Por meio de atividades de investigação bibliográfica e processual para uma construção-seleção dos conhecimentos que se fizeram necessários para a pesquisa.

Como principal eixo de abordagem da pesquisa, trataremos da questão de investigar, quais indícios apontam a montagem do Jacobiano para mudança de variáveis em integrais múltiplas em coordenadas polares. Prenderemo-nos a investigar como os autores, Anton H; Bivens I. C; Davis S.L (2010), Gonçalves B.M; Flemming D.M (2013), e Wrede R. C; Spiegel M. S (2004), abordam ou se valem destes temas? Após uma investigação bibliográfica, histórica e conteudista, montar-se-á estratégias perseguindo a condição de montar um roteiro para identificação de características aplicáveis e facilitadoras, para solução de problemas. Tudo a luz das discussões detidas nos textos e saberes indicados pelos autores supracitados, mediadores para fins desta investigação.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Gonçalves B.M; Flemming D.M (2013), na integração de funções de uma variável, a fórmula de mudança de variável ou substituição é usada para transformar uma integral dada em outra mais simples. Temos:

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

onde $a = g(c)$ e $b = g(d)$.

Quando utilizamos essa fórmula para calcular uma integral definida, a mudança de variável vem acompanhada por uma correspondente mudança nos limites de integração, prática comum no trato com integrais simples.

Para as integrais duplas, podemos utilizar um procedimento análogo. Por meio de uma mudança de variáveis, observados o contexto e levantamentos de Anton H; Bivens I. C; Davis S.L (2010), escreve:

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v) \quad (1)$$

Uma integral dupla sobre um região R genérica do plano xy pode ser transformada em uma integral dupla sobre uma região R' do plano uv . Aqui se destaca a possibilidade de parametrizar regiões por meio de parâmetros definidos previamente.

Se a transformação leva pontos distintos de R' a pontos distintos de R , dizemos que ela é uma aplicação um por um.

Nesse caso, a correspondência entre as regiões R e R' é bijetora, e podemos retornar de R para R' pela transformação inversa.

$$u = u(x, y) \text{ e } v = v(x, y). \quad (2)$$

Considerando que as funções em (1) e (2) são contínuas, com derivadas parciais contínuas em R' e R , respectivamente, temos,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \quad (3)$$

Onde $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ é o determinante jacobiano de x e y em relação a u e v .

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Entenda a montagem da matriz Jacobiana. Observe que ela é formada por derivadas parciais de $\partial(x, y)$. Quando se refere a uma função de uma variável, após a sua derivada primeira, encontra-se outra função. Agora em funções vetoriais derivando a função encontra-se uma matriz. Então a montagem da matriz jacobiana é a derivada parcial de uma função vetorial.

Exemplo: sabendo disso, derivar.

$$f(x, y, z) = (x^2 + e^y, x + y \operatorname{sen} z) \quad f: R: R$$

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = x_1^2 + e^{y_1} ; \quad f_2(x_2, y_2, z_2) = x_2 + y_2 \operatorname{sen} z_2$$

$$f'(x, y, z) = \left| \frac{\partial(f_1(x_1, y_1, z_1))}{\partial(f_2(x_2, y_2, z_2))} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & e^{y_1} & 0 \\ 1 & \text{sen} z_1 & y_1 \cos z_1 \end{vmatrix}$$

2.1 APLICAÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA

Segundo Anton H; Bivens I. C; Davis S.L (2010), a expressão Jacobiano é denominada para mudança de variável, em homenagem a Carl Gustav Jakob Jacobi, nascido em 10 de dezembro de 1804, Potsdam, Alemanha e faleceu em 18 de fevereiro de 1851, Berlim, Alemanha. Matemático que fez o primeiro estudo sério sobre a mudança de variáveis em integrais múltiplas, em meados do século XIX. O determinante é dado por:

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

O jacobiano que aparece em (3) pode ser interpretado como uma medida de quanto a transformação (2) modifica área de uma região. Esse fato será abordado em coordenadas polares, em seguida, segundo Gonçalves B. M; Flemming D. M.

As equações,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (4)$$

que nos dão as coordenadas cartesianas de um dado ponto em termos de suas coordenadas polares, podem ser vistas como uma transformação que leva pontos (x, y) do plano xy .

O determinante jacobiano nesse caso é dado por,

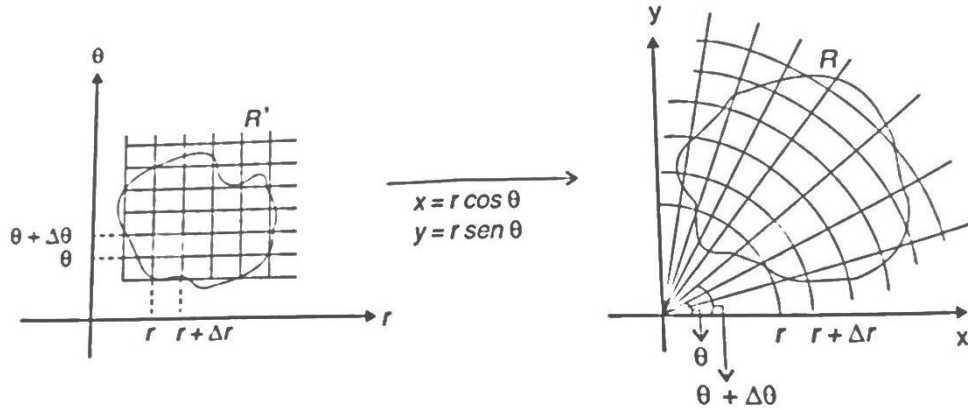
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

e a fórmula (2) pode ser expressa por,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (5)$$

A imagem abaixo exemplifica geometricamente a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. Uma interpretação geométrica que permite visualizar a expressão (5) para o caso de uma função contínua $f(x, y)$, definida em R .

Imagem 1: Retângulo polar. Fonte: Gonçalves B. M; Flemming D. M (2013).



Vamos considerar duas regiões R e R' dos planos xy e $r\theta$, respectivamente, que se relacionam pelas equações (4).

Dividindo região R' em pequenos retângulos por meio de retas $r = \text{constante}$ e $\theta = \text{constante}$, a região R fica dividida em pequenas regiões, como mostra a imagem 1, que usualmente são chamados de **retângulos polares**.

O retângulo de área $\Delta A' = \Delta r \Delta \theta$, evidenciando na região R' , está em correspondência com o retângulo polar, de área ΔA , demarcada na região R . Da geometria elementar, temos que ΔA é dado por,

$$\begin{aligned}
 \Delta A &= \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta \theta - \frac{1}{2}r^2 \Delta \theta \\
 &= \frac{1}{2}[(r + \Delta r)^2 - r^2] \Delta \theta \\
 &= \frac{r + (r + \Delta r)}{2} \Delta r \Delta \theta \\
 &= \bar{r} \Delta r \Delta \theta \\
 &= \bar{r} \Delta A'.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Onde $\bar{r}$ é o raio médio entre r e $r + \Delta r$.

Essa expressão permite visualizar o papel do jacobiano, que no caso é r , como um fator de ampliação (ou redução) local para áreas. Ou seja, a matriz jacobiana é utilizada como um fator de correção de área, esta ação é necessária por que houve perda de valores no momento da troca de coordenadas cartesianas para polares.

3. METODOLOGIA

A metodologia proposta para esta pesquisa, é tratá-la como uma atividade de investigação bibliográfica e processual para uma construção-seleção dos conceitos. Assim como discute Quivy e Campenhoudt (1995, p. 149), (apud. Gerhardt, 2009, p.53), onde:

Ele é composto de conceito e hipóteses que estão interligados para formar conjuntamente um quadro de análise coerente. A conceitualização, ou a construção de conceitos, constitui uma construção abstrata que tenta dar conta do real. Nesse sentido, ela não dá conta de todas as dimensões e aspectos do real, mas somente o que expressa o essencial, segundo o ponto de vista do pesquisador. Trata-se, portanto, de uma construção-seleção. A construção de um conceito consiste em designar dimensões que o constituem e em precisar os indicadores graças aos quais essas dimensões poderão ser mensuradas.

Contudo, suspeitando das variáveis levantadas e com intuito de construir ideias acerca da seleção dos indicativos da pesquisa pensa-se, para atingir tais objetivos:

1. Levantamento histórico sobre os temas a serem abordados neste trabalho, com investigações bibliográficas em diferentes meios de publicação de pesquisas, a luz das referências, para relacionar os temas, definições e aplicações;
2. Coletar ações sobre interpretação ou abordagem dos temas levantados e referências bibliográficas, por meio de investidas algébricas e interpretativas, sobre conteúdos e problemas;
3. Qualificar percepções junto ao método, possivelmente elaborado, na tentativa de oferecer abordagens diferenciadas para ressignificação de conteúdos para contextualização de aplicação ou aprendizagem.

Foram selecionados três livros de Cálculo, o Cálculo - volume II de ANTON H; BIVENS I.C; DAVIS S.L, Cálculo B de GONÇALVES B. M; FLEMMING D. M e Cálculo Avançado – 2º ed. de WREDE R.C; SPIEGEL M.S. Com estes livros selecionamos problemas que garantem a aplicabilidade da matriz em diferentes espaços onde ocorrem as mudanças de coordenadas e variáveis.

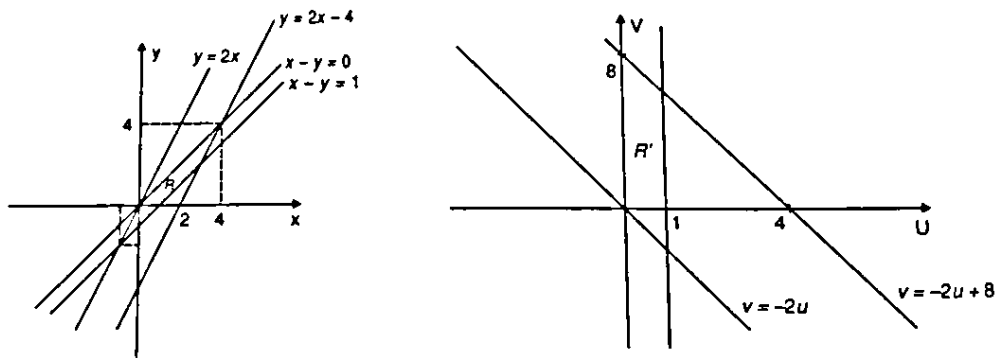
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nota-se uma relação contundente entre os temas, desde construção e definição de utilização do Jacobiano, a luz das interpretações, gráficas, algébricas e aplicáveis das integrais duplas em coordenadas polares para mudança de variáveis na sua solução. A seguir exemplificaremos essa relação, com problemas que garantem a aplicabilidade em diferentes espaços onde ocorrem as mudanças de coordenadas. E principalmente identificando razões para a utilização da matriz jacobiana como fator de correção de área no momento da mudança de variáveis.

Exemplo 1: Calcular $I = \iint_R (x - y) dx dy$, sendo R o paralelogramo limitado pelas retas

$$x - y = 0, x - y = 1, y = 2x \text{ e } y = 2x - 4.$$

Imagem 2, do exemplo 1: Região de integração R . Fonte: Gonçalves B.M; Flemming. D. M



Solução: A imagem 2, mostra a região de integração R . Observando essa figura vemos que para calcular a integral dada diretamente usando as variáveis x e y , precisamos dividir R em três sub-regiões e usar proposições.

Esse trabalho pode ser evitado por meio de uma mudança de variáveis adequada. Fazendo

$$u = x - y, v = 2x \quad (7)$$

a região R , que é um paralelogramo inclinado em relação a ambos os eixos x e y , transforma-se em um paralelogramo R' , que pode ser visualizado na imagem 2, é delimitado pelas retas

$$u = 0 \quad u = 1, v = -2u \text{ e } v = -2u + 8.$$

Temos

$$R': \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ -2u \leq v \leq -2u + 8 \end{cases}$$

Precisamos também do **jacobiano** de x, y em relação a u e v . Das equações (7), vem que,

$$x = \frac{v}{2} \text{ e } y = \frac{v}{2} - u$$

Assim,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ é o fator que vai corrigir a área após a mudança.

.

Utilizando a fórmula (3) obtemos,

$$\begin{aligned} & \iint_R (x - y) \cdot dx dy \\ &= \iint_R (u) \cdot \frac{1}{2} \cdot dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-2x}^{-2x+8} u \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-2x}^{-2x+8} u \, dx dy \, u(-2u + 8 + 2u) \, du \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcular $I = \iint_R [(x - 2)^2 + (y - 2)^2] dx dy$, onde R é a região delimitada pela circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Solução: Nesse exemplo vamos ilustrar a utilização de duas transformações sucessivas para o cálculo da integral.

Inicialmente, vamos transformar a região dada em um círculo com centro na origem.

Fazemos

$$x - 2 = u, \quad y - 2 = v$$

Temos, então,

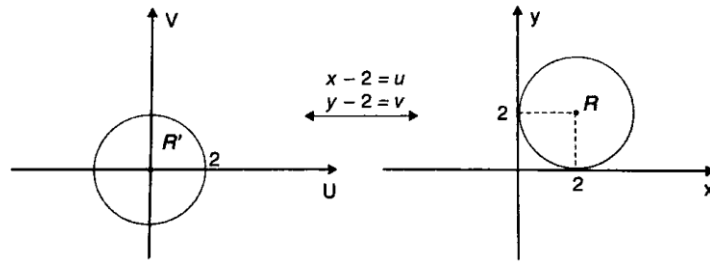
$$x = u + 2, \quad y = v + 2$$

A região R' do plano uv em correspondência com a região R é delimitada pela circunferência,

$$u^2 + v^2 = 4$$

As regiões R e R' estão ilustradas na imagem 3.

Imagem 3 do exemplo 2: regiões R e R' . Fonte: Wrede R. C; Spiegel M. S (2004).



O **Jacobiano** de xy em relação a u e v é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Portanto, usando (3), vem,

$$I = \iint_{R'} (u^2 + v^2) \, du \, dv.$$

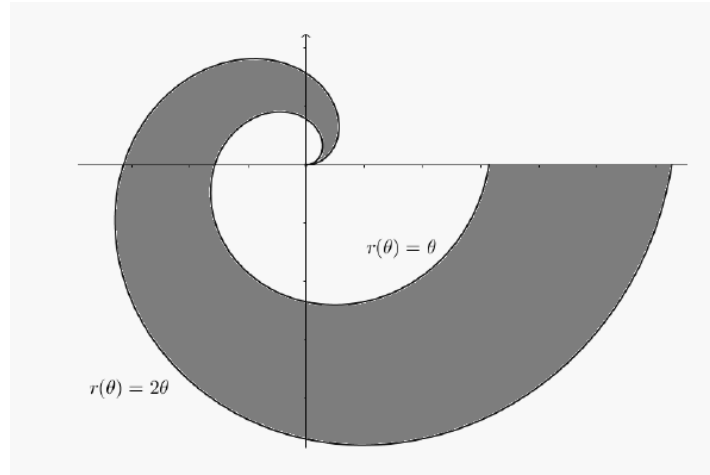
Podemos agora resolver a integral I com o auxílio das **coordenadas polares**. Procedendo de forma análoga ao Exemplo 1, temos,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas: a curva polar $r(\theta) = \theta$, onde a curva polar $r(\theta) = 2\theta$ onde, $0 \leq \theta \leq 2\theta$, e pelo eixo x positivo.

Solução; Temos que a região do plano xy é,

Imagem 4 do exemplo 3: região limitada pelas curvas. Fonte: Anton H; Bivens I. C; Davis S.L (2010).



$$B\{(r, \theta): \theta \leq r \leq 2\theta; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Sabemos que em coordenadas cartesianas teríamos que a área seria dada pela integral dupla da função $f(x, y) = 1$. Calcularemos em coordenadas polares devido o conjunto B , no plano $r\theta$, descrever um retângulo, que é uma região bem mais simples de trabalhar. Para fazermos essa mudança, devemos considerar o jacobiano da mudança polar que é r . Portanto, ficamos com,

$$\begin{aligned} A &= \iint_B r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{2\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\theta}^{2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\theta^2 - \theta^2) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (2\pi)^3 = 4\pi^3 \end{aligned}$$

Com forma a tentar correlacionar requisitos entre os assuntos. Foi feito com os exemplos apresentados uma relação entre os temas de cálculo que norteiam essa pesquisa, de forma que os futuros usuários ou estudantes, possam encontrar significado na contextualização e aplicação dos conteúdos. Tornando o ensino, aprendizagem ou pesquisas futuras, fluente e participativo junto aos cenários de aplicação dos temas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma análise teórica, de modo que pode-se concluir possíveis contribuições, onde se enquadram no intuito de qualificar a inserção da mudança de variáveis para integrais duplas em coordenadas polares, onde possibilitou a percepção de indicativos gráficos ou algébricos que viabilizaram um tratamento específico ou não do Jacobiano, para solução das integrais em estudo.

Que as investidas sobre as suspeitas levantadas, possam ser discutidas como esta prática pode ser utilizada no ambiente acadêmico de forma efetiva e permanente. Que qualquer usuário ou estudante, possa encontrar significado na contextualização e aplicação dos conteúdos. Tornando o ensino, aprendizagem ou pesquisas futuras, fluente e participativo junto aos cenários de aplicação dos temas, proporcionando efeitos sobre o significado e sua aplicabilidade.

Concluimos também que, ao arrolar indícios que relacionam os temas estudados em aspectos históricos e aplicados, foi possível levantar como as referências enxergam os conteúdos. Todavia, foi identificado nos discursos dos autores, modelagem matemática junto ao raciocínio lógico da significação para a construção e utilização do Jacobiano.

REFERÊNCIAS

ABNT. **Associação Brasileira de Normas Técnicas**. Abnt, 2021. Disponível em: < <http://www.abnt.org.br/> >. Acesso em: 25/06/2021.

ANTON H; BIVENS I.C; DAVIS S.L. **Cálculo - Volume II – 10 ed.**”. Editora Bookman, 2010.

GONÇALVES B. M; FLEMMING D. M. **Cálculo B – 2 ed.** Editora Bookman, 2013.

QUIVY, R.; CAMPENHOUDT, L. V. “**Manual de pesquisa em ciências sociais**”. Paris: Dunod, 1995.

WREDE R.C ; SPIEGEL M.S. **Cálculo Avançado - 2.ed.** Editora Bookman, 2004.

LINS, Rômulo, Campos. **Matemática, monstros, significados e educação matemática. Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 92-120, 2004.