

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
CURSO DE LICENCIATURA MATEMÁTICA**

PEDRO AUGUSTO SOARES DA SILVA

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS A PARTIR DE
UMA PRÁTICA DA APLICAÇÃO DA LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON.**

**TERESINA
2021**

PEDRO AUGUSTO SOARES DA SILVA

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS A PARTIR DE
UMA PRÁTICA DA APLICAÇÃO DA LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON.**

Artigo apresentado ao Curso de Licenciatura
Matemática como um dos requisitos para
obtenção do título de Licenciado em Matemática
pelo Instituto Federal do Piauí – IFPI,
Campus Teresina central.

Orientador (a): Professor Dr. Roberto Arruda Lima Soares

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS A PARTIR DE UMA PRÁTICA DA APLICAÇÃO DA LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON.

A PROPOSAL FOR TEACHING EXPONENTIAL FUNCTIONS FROM A NEWTON COOLING LAW APPLICATION PRACTICE.

Pedro Augusto Soares da Silva

Roberto Arruda Lima Soares

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma proposta de ensino de funções exponenciais ao Ensino Médio a partir da lei do resfriamento de Newton, buscando associar as aplicações teóricas junto a uma aplicação prática, uma vez que, essa união é extremamente importante no ensino da matemática, pois modifica a maneira como os alunos analisam situações, atitudes, gerando críticas e reflexões na construção de um conhecimento mais significativo para os educandos. Com o objetivo de estimular o entendimento das funções exponenciais com base na Lei de Resfriamento de um corpo, proposta por Newton, com a uma abordagem que seja a mais simples e compreensível ao aluno, com a finalidade de demonstrar como o aprendizado pode se tornar prazeroso, visto que conseguimos conciliar aplicações teóricas com situações relacionadas ao nosso cotidiano. O presente trabalho foi desenvolvido no Campus Teresina - Central do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia/IFPI com a finalidade de promover uma aprendizagem significativa, visando atribuir um significado no entendimento dos alunos de maneira intuitiva.

Palavras-chave: Funções Exponenciais, Aprendizagem. Atividade Prática. Lei de Resfriamento de Newton.

ABSTRACT

This work presents a proposal for teaching exponential functions to high school based on Newton's cooling law, seeking to associate theoretical applications with practical application, since this union is extremely important in the teaching of mathematics, as it modifies the way students analyze situations, attitudes, generating criticism and reflections in the construction of more meaningful knowledge for students. In order to stimulate the understanding of exponential functions based on the Cooling Law of a body, proposed by Newton, with an approach that is the most simple and understandable to the student, with the purpose of demonstrating how learning can become pleasurable , since we managed to reconcile theoretical applications with situations related to our daily lives. This work was developed at the Teresina - Central Campus of the Federal Institute of Education, Science and Technology / IFPI with the purpose of promoting meaningful learning, aiming to assign meaning to the students' understanding in an intuitive way.

Keywords: Exponential Functions. Learning. Ordinary Differential Equations. Newton's Law of Cooling.

Introdução

A necessidade de contextualizar situações em sala de aula, onde o professor constrói ocasiões que são mais acessíveis para o entendimento dos alunos, é uma boa abordagem de ensino, pois uma teoria com significado para os alunos pode proporcionar uma melhor aprendizagem. Além disso, a teoria na Matemática tem sua importância, pois esclarece ao aluno o motivo pelo qual aquele conteúdo foi estudado, revelando as necessidades que fizeram com que o homem criasse e desenvolvesse respostas para o que acontecia ao seu redor.

Uma boa explanação do conteúdo, por parte do professor, pode despertar nos alunos a curiosidade sobre o conteúdo estudado, favorecendo através da aula prática a construção de um conhecimento mais significativo, observando a importância tanto da teoria quanto da prática no cotidiano das pessoas. Neste trabalho, é observado que o ensino da matemática associando aspectos teóricos e aplicações prática podem ser utilizadas de uma forma a instigar os alunos a confirmarem suas conclusões teóricas. Com isso, aprender matemática se torna mais atrativo e prazeroso, mudando um pouco a ideia errônea de que a matemática é somente cálculos soltos sem muita aplicação. Com esse tipo de estudo pode se esperar que o aluno mude a sua forma de interpretação de diversos acontecimentos, formando cidadãos críticos e construtores do conhecimento.

Para garantir a formação plena dos estudantes, independentemente de sua condição social e região do país, a BNCC(Base nacional comum curricular): “estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica.”, ou seja, neste sentido, o conhecimento sobre as funções exponenciais é assegurado na BNCC por ser um modelo matemático que representa tantos fenômenos observado no cotidiano, como, por exemplo, o crescimento de uma capital aplicado à taxa constante.

Este estudo baseou-se nas funções exponenciais, mais especificamente na parte da Lei de Resfriamento de Newton, associando a teoria e prática para

o desenvolvimento da ideia de proposta de ensino. A Lei de Resfriamento de Newton foi utilizada por ser simples e compreensível, possibilitando demonstrar como o aprendizado pode se tornar prazeroso quando conseguimos os conceitos teóricos são associados a situações práticas experimentais.

A proposta de trabalho foi bem aceita pelo professor da disciplina do módulo que viria a aceitar a orientação do mesmo. Dado o impasse, ele me fez a seguinte proposta: ensinar funções exponenciais a partir da Lei do resfriamento de Newton e claro mostrar a importância da teoria e prática de um conteúdo do ensino médio, estimulando no aluno essa nova capacidade de aprender.

Funções exponenciais

Relativamente ao modelo teórico que representará o fenômeno observado na parte prática do experimento, apresentaremos de forma direta a função exponencial.

Dado um número real $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: dada por $f(x) = a^x$ é a função exponencial, que dependendo do valor de $0 < a < 1$ ou $a > 1$ a função pode ter um decrescimento muito rápido ou um crescimento muito rápido, respectivamente. De maneira mais geral, temos a função do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: dada por $f(x) = b \cdot a^x$, onde b é um número real qualquer.

Primeiramente ao entender as funções exponenciais na teoria e prática o aluno será estimulado a aprender e utilizar a mesma no dia a dia, como por exemplo na análise de comportamento da mesma, ou seja, sabendo que função exponencial tem um crescimento e decrescimento muito rápido se comparado com outras funções já estudadas.

A função exponencial exige um conhecimento de potenciação e claro todas as suas propriedades, é comum a dificuldade do aluno nessa área, então, cabe ao professor fazer um algo a mais pertinente em um determinado assunto. A teoria e prática dos conteúdos matemáticos faz com que o desenvolvimento da aprendizagem significativa seja o diferencial na vida do aluno, estudar e pesquisar a relação teoria e prática no ensino da matemática nos anos finais do Ensino Médio é importante, visto tanto déficit nesta área, sabendo que o preparo do aluno do ensino médio para a vida profissional se dá nos anos finais, saber

como se dá a aprendizagem dos alunos relacionando teoria e prática fará o diferencial enquanto educadores.

A idéia da junção do conhecimento teórico aliado às praticas educacionais, deve despertar no professor pesquisador um olhar mais criterioso com seus alunos, e também na seleção de determinados conteúdos trabalhados, nessa prática específica se busca dar ênfase à realidade que os alunos se encontram inseridos compreendendo as funções exponenciais e suas características próprias sendo representadas pelo modelo matemático da lei do resfriamento de Newton e suas especificidades.

Lei de Resfriamento de Newton

“Isaac Newton (1643-1727) foi um cientista inglês. Descobriu a Lei da Gravitação Universal. É considerado um dos maiores estudiosos da história da humanidade. Publicou diversos trabalhos sobre mecânica, astronomia, física, química, matemática e alquimia. Há também escritos seus sobre teologia”. (eBiografia.com)

A Lei de Resfriamento de Newton é uma aplicação em equações diferenciais utilizada para resolver problemas relacionados à variação de temperatura, assim como afirma Alitolif (2011),

Esta forma de aplicação é ligada diretamente a física, mas cálculos voltados para as leis de temperatura são de grande utilidade em várias outras ciências, alguns exemplos são os utilizados nas engenharias, na variação de temperatura de uma simples xícara de café durante o seu resfriamento ou no derretimento de uma bola de sorvete, ou ainda no processo de resfriamento de um bolo, entre outras aplicabilidades deste modelo. (ALITOLIF, 2011, p.18).

Newton estabeleceu que o resfriamento obedece à seguinte Equação (1):

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_a) \quad \text{Equação 1}$$

ou seja, a taxa de variação da temperatura do resfriamento, ou a velocidade do resfriamento (em °C/s ou K/s, por exemplo) é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente. Assim, se não houver diferença de temperatura, a velocidade será zero.

As condições para que o modelo seja aceito é tomar as hipóteses (i), (ii), (iii), como verdadeiras, sendo que (i) toma que a temperatura $T = T(t)$ dependa do tempo e seja a mesma em todos os pontos do objeto observado, (ii) a temperatura do meio permaneça constante no decorrer da prática e (iii) que a taxa de variação da temperatura no decorrer do tempo satisfaça a condição da lei de resfriamento de Newton. Observa-se facilmente que (Equação 1) é uma equação diferencial linear e separável e que sua solução é dada pela expressão:

$$T(t) = Ta + Ce^{kt} \quad \text{Equação 2}$$

onde C é um número real. Vale ressaltar nessa solução que a constante de proporcionalidade terá $k < 0$, indicando que a temperatura do corpo observado diminui com o decorrer do tempo.

Os principais fatores que influencia tal resfriamento é a temperatura ambiente; que pela lei de resfriamento de Newton deve ser constante, e o calor específico que depende do material utilizado, ou seja, para encontrar de fato as temperaturas de ambos os materiais é necessário supor que um determinado corpo esteja num meio onde a temperatura seja T_0 (temperatura inicial). Seja $T(t)$ (a temperatura do corpo no instante t). De acordo com a Lei de Resfriamento de Newton, a taxa de variação da temperatura do corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do meio e do corpo seja igual a Equação(1).

Metodologia

O trabalho foi desenvolvido a partir da ideia de um conteúdo bastante relevante em uma disciplina do sexto módulo do curso de Licenciatura em Matemática, no Campus Teresina Central do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. Este trabalho foi desenvolvido em duas etapas: a primeira visa uma pesquisa bibliográfica sobre a Lei de Resfriamento de Newton através de livros, artigos científicos, documentos, revistas acadêmicas e sites educacionais. Na segunda etapa, fez-se experimento com a utilização de alguns instrumentos (estufa, termômetro digital, objeto de material cerâmico, objeto de material metálico, bloco de anotações, caneta, etc.). Através dos dados obtidos da situação problema foi possível comparar os resultados alcançados com os resultados teóricos, Além dos acessórios já citados para a realização da pesquisa, também foi utilizado computadores com acesso à Internet, livros e artigos científicos que discutem o assunto.

Teoria e Prática na Lei de Resfriamento de Newton

É fundamental que os professores busquem novas alternativas educacionais capazes de manter o interesse entre a matemática escolar aplicada com o meio em que os alunos vivem. Assim, D'Ambósio (1986) complementa que,

O valor da teoria se revela no momento em que ela é transformada em prática. No caso da educação, as teorias se justificam na medida em que seu efeito se faça sentir na condução do dia-a-dia na sala de aula. De outra maneira, a teoria não passará de tal, pois não poderá ser legitimada na prática educativa. (D'AMBROSIO, 1986, p. 43).

Na tentativa de contextualizar a união entre teoria e prática através da Lei de Resfriamento de Newton foi realizado um experimento que consistiu em medir, através do uso de um termômetro eletrônico, a temperatura do ambiente (laboratório de materiais) e, em seguida, em espaços de tempo constante, a temperatura do material cerâmico que é foi retirado da estufa e colocado numa superfície em temperatura ambiente de 27,8°C, logo após, com intervalos de 30 segundos são feitas as medições da temperatura deste material.

Assim, foram obtidos os seguintes valores:

Tabela 1. Resultado do experimento com material cerâmico

Resultado do experimento com material cerâmico	
Temperatura da estufa	110,6°C
Tempo (t)	Temperatura (T) em °C
0'	95,9
30"	93,2
1'	88,4
1'30"	83,3
2'	78,9
2'30"	72,8
3'	69,8

3'30"	65,2
4'	62,2
4'30"	59,7
5'	56,9

Fonte: Dados da Pesquisa.

Com as informações coletadas no experimento com o material cerâmico, podemos determinar o modelo matemático específico a partir da Equação 2 $T(t) = Ta + Ce^{kt}$, tomando $T(0') = 95,9\text{ °C}$ e $T(1') = 88,4\text{ °C}$, obtemos a Equação 3:

$$T(t) = 27,8 + 68,1e^{-0,117t} \quad \text{Equação 3}$$

Em seguida foi realizado o mesmo procedimento com o material metálico e mantendo a metodologia e as mesmas condições ambientais. Os resultados estão apresentados na Tabela 2:

Tabela 2. Resultado do experimento com material metálico

Resultado do experimento com material metálico	
Temperatura da estufa	110,3°C
Tempo (t)	Temperatura (T) em °C
0'	90,3
30"	76,8
1'	67,1
1'30"	60,2
2'	56,7
2'30"	53,4
3'	50,4
3'30"	47,8
4'	45,3
4'30"	43,6
5'	41,9

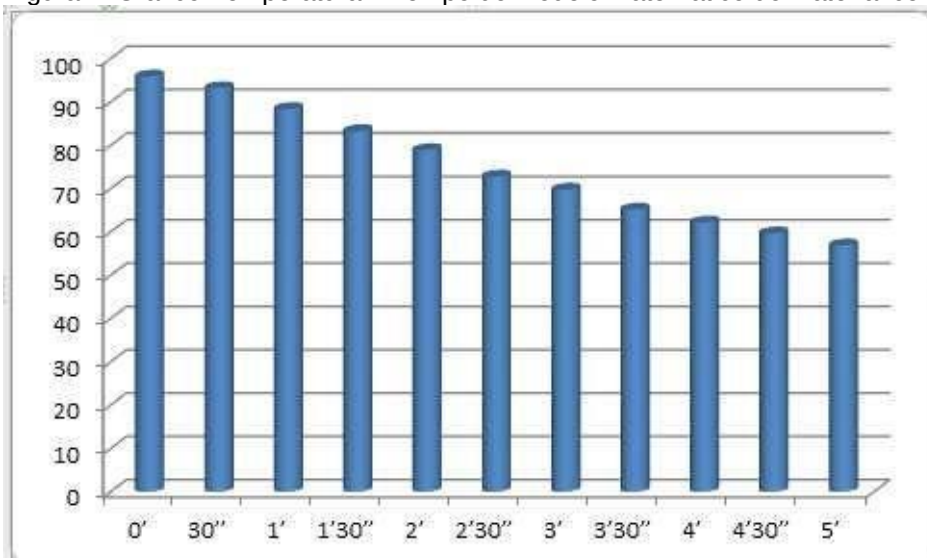
Fonte: Própria dos autores

Novamente, com as informações coletadas no experimento com o material metálico, podemos determinar o modelo matemático específico a partir da Equação 2 $T(t) = Ta + Ce^{kt}$, tomando $T(0') = 90,3\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $T(1') = 67,1\text{ }^{\circ}\text{C}$, obtemos a Equação 4:

$$T(t) = 27,8 + 62,5e^{-0,464t} \quad \text{Equação 4}$$

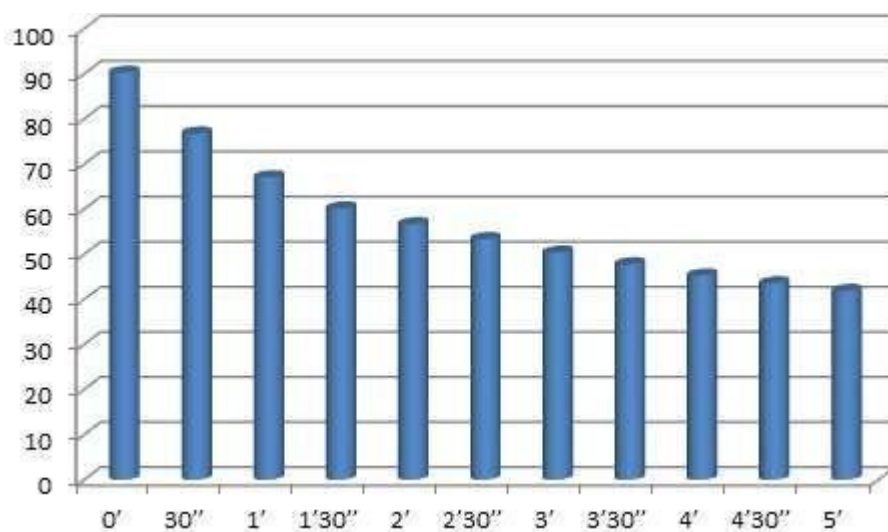
Abaixo temos os gráficos (Figuras 1 e 2) de ambos os materiais utilizados no experimento verificando os pontos de temperatura em relação ao tempo seguindo o modelo matemático.

Figura 1: Gráfico Temperatura x Tempo do modelo matemático do material cerâmico



Fonte própria

Figura 2: Gráfico Temperatura x Tempo do modelo matemático do material metálico



Fonte: própria

Percebemos ao analisar ambos os gráficos que há um processo de decaimento até a temperatura ambiente, seguindo os intervalos de tempo com decaimentos diferentes por conta da constante de cada material ser diferente e após a da comparação dos gráficos representados pelas gráficos 1 e 2 verifica-se a influência das condições de temperatura do meio externo no resfriamento.

Então foram feitos os cálculos por meio da aplicação teórica na Lei de Resfriamento de Newton resolvendo a seguinte situação: Num quarto fechado, cuja temperatura ambiente permanece a 27,8°C coloca-se um determinado objeto cerâmico a uma temperatura constante de 95,9°C. Se após 1 minuto a temperatura do objeto for de 88,4°C determine a temperatura deste com intervalo de 30 segundos até o tempo de 5 minutos. Assim como para um objeto metálico à 90,3°C, que após 1 minuto está à 67,1°C.

Assim, foi possível obter os seguintes resultados:

Tabela 3. Relação dos resultados experimentais X modelo matemático

tempo (t)	Temperatura (°C) Experimental do material cerâmico	Temperatura (°C) Modelo matemático material cerâmico	Temperatura (°C) Experimental do material metálico	Temperatura (°C) Modelo matemático material metálico
0'	95,9	95,9	90,3	90,3
30"	93,2	91,9	76,8	77,45
1'	88,4	88,1	67,1	67,2
1'30"	83,3	84,6	60,2	59,1
2'	78,9	81,4	56,7	52,7
2'30"	72,8	78,2	53,4	47,5
3'	69,8	75,3	50,4	43,5
3'30"	65,2	72,5	47,8	40,2
4'	62,2	69,9	45,3	37,7
4'30"	59,7	67,4	43,6	35,6
5'	56,9	65,1	41,9	34,1

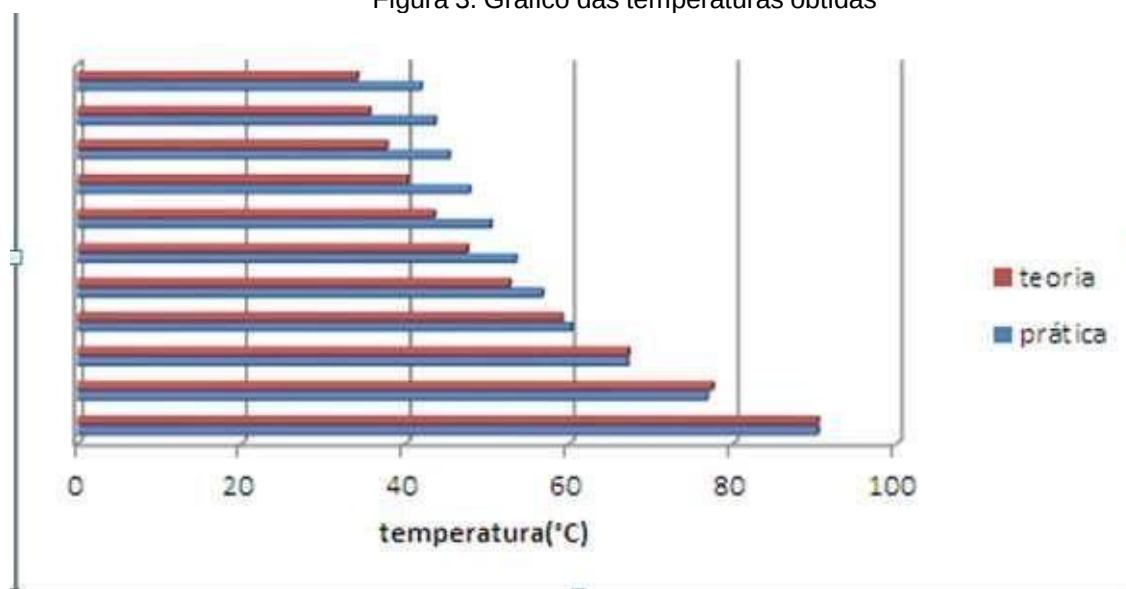
Fonte: Própria dos autores

Na Tabela 3, observa-se que os resultados obtidos com os dois métodos (teoria e prática) são próximos, porém os valores vão se distanciando gradativamente, e isso ocorre por diversas razões, dentre elas erro entre as

medições de temperatura, oscilação da temperatura ambiente, assim como a interação dos objetos com os integrantes do experimento. Portanto, verifica-se que houve no ambiente do experimento a transferência de calor transiente, ou seja, “implica variação ao longo do tempo ou dependência do tempo” (GHAJAR; ÇENGEL, 2012, p.65).

Neste experimento, objetivamos amenizar ao máximo as possíveis diferenças entre os valores obtidos experimentalmente e dos obtidos com o modelo matemático proposto por Newton, no entanto, esse esforço nunca será plenamente alcançado, pois normalmente não se conhece o valor verdadeiro de uma grandeza. Mas o rigor na execução do experimento possibilita uma maior aproximação dos resultados possibilitando validar o modelo matemático estudado. Para Lima (2017) “ao se verificar os Erros Absolutos como a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro e Erros Relativos como a razão entre o erro absoluto e o valor verdadeiro de uma medida”, temos na Figura 1 os gráficos encontrados através desta pesquisa que mostra a diferença nas temperaturas não podendo garantir se há erros ou não, mas o que mais se aproxima da realidade.

Figura 3. Gráfico das temperaturas obtidas



Fonte: Própria dos autores

Nota-se que os resultados obtidos nos tempos de 30" até 1' são considerados de boa precisão (a diferença entre os valores da aplicação teórica e da aplicação prática são praticamente iguais), enquanto que nos demais tempos os resultados são de baixa precisão (a diferença entre os valores da

aplicação teórica e da aplicação prática são divergentes), ou seja, existe a variação dos dados medidos experimentalmente com os esperados teoricamente, porém observa-se nos princípios físicos que não se pode ter um valor exato, pois,

[...] nenhuma medida de qualquer grandeza física é exata. A acurácia (ou exatidão) e a precisão (número de algarismos significativos do valor medido) de um certo dado medido estarão sempre limitadas tanto pela sofisticação do equipamento utilizado, pela habilidade do sujeito que realiza a medida, pelos princípios físicos básicos tanto do instrumento de medida, quanto do fenômeno que gerou o experimento e o conhecimento que se tem sobre o valor "verdadeiro" da grandeza física. (MEDIÇÃO, 2018).

Os erros analisados podem ser gerados pelo sistema de medidas, interação sensorial-meio, perturbação do meio ou erros conceituais, assim como imprecisão nas aferições de temperatura. Chamamos atenção para esse fato pois o mesmo terá influência nos resultados dos experimentos, até porque, por se tratar de um modelo experimental, há de se observar algumas divergências.

Considerações finais

O presente trabalho teve como propósito mostrar a importância da fusão entre teoria e prática no ensino/aprendizagem de Matemática, além de conhecer e estudar as funções exponenciais e a sua relação com a Lei de Resfriamento de Newton. Foi contextualizada a união das aplicações teóricas e práticas através de uma situação-problema resolvida por meio da lei de resfriamento de Newton e de um experimento.

Conhecer as diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor faça sua prática pedagógica e percebe-se então que a teoria e prática, muitas vezes estão afastados e muitos são os fatores, cabe ao professor ser atuante e pesquisador, estar sempre buscando se aperfeiçoar em sua prática.

É de suma importância que as aulas de Matemática devem ser elaboradas de forma criativa e de forma inovadora para assim preparar os alunos para adentrar na sociedade atual e nas exigências que a mesma os impõe. Deste modo os educadores podem se atentar que cabe a nós dar resposta a tais

exigências com responsabilidade através da inovação e de uma nova concepção pedagógica.

O experimento trouxe a possibilidade de usar o modelo da lei de Resfriamento de Newton em uma prática e comparar os resultados práticos com os já sabidos da teoria como forma de prova, analisando os erros absolutos e relativos para cada intervalo de tempo analisado.

Na comparação dos valores obtidos foram observadas poucas mudanças nas temperaturas com intervalos de 1 e 5 minutos para o resfriamento do metal e da cerâmica. Com isso, a aprendizagem tornou-se significativa quando foi possível compreender os fenômenos físicos capazes de explicar porque um corpo perde ou ganha calor com o passar do tempo e que a escolha dos instrumentos da pesquisa também influencia nos resultados.

É importante falar que o presente trabalho possibilitou uma compreensão acerca da realidade do ensino, principalmente na maneira como os conceitos matemáticos são dispostos, tanto na teoria, como na possibilidade de vinculá-los com a prática. Na prática, foi possível conhecer a importância da lei de Resfriamento de Newton, tirar algumas dúvidas acerca do que estava sendo estudado. A atividade experimental ofereceu condições para levantar e testar ideias, foram várias tentativas, muitos erros e acertos, exigiu paciência, concentração, persistência, mas, ao final o experimento trouxe satisfação e conhecimento, como também mostrou que o estudo se tornou melhor ao unir aplicação prática/teórica.

Por isso, torna importante ressaltar que o professor deve tentar desenvolver práticas pedagógicas diferenciais para auxiliar no desenvolvimento cognitivo do discente, pois quando nos encontramos totalmente envolvidos com a realidade envolvente que o estudo sugere, então à obtenção de novos conceitos como também nos sentimos responsáveis pela nossa própria aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALITOLEF, S. S. **Algumas Aplicações das Equações Diferenciais**. Ji Paraná: UNIR, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018, pág 8.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 1ª ed. São Paulo: Summus, 1986.

FRAZÃO, D. **Isaac Newton**. Disponível em < https://www.ebiografia.com/isaac_newton > Acesso em nov. 2018.

GHAJAR, A. J.; ÇENGEL, Y. A. **Transferência de Calor e Massa**: Uma abordagem prática. Tradução de Fátima A. M. Lino. 4ª ed. São Paulo: Bookman, 2012.

LIMA, S. F. **Erros e Medições Físicas**. Disponível em < <http://aprendendofisica.pro.br/pmwiki.php/Main/ErrosMedidasFisicaEEtc> > . Acesso em nov. 2018.

Medição de dados experimentais, incerteza e propagação de erro. Página elaborada pela Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas. Disponível em < <http://www.fem.unicamp.br/~instmed/Incerteza.htm> >. Acesso em nov. 2018.

PEREIRA, I. M. do N.; BARBOZA, C. M. Teoria e prática na lei de resfriamento de Newton. **EMD**, p.45-53. 2018. Disponível em < <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/download/36689/25614> >. Acesso em nov. 2018.

SILVA, Silva, Wilton Pereira da; Precker; Jurgen W, e outros. **Medida de Calor Específico e Lei de Resfriamento de Newton**: Um Refinamento na Análise dos Dados Experimentais. Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 25, no. 4, Dezembro, 2003.