



**INSTITUTO
FEDERAL**
Piauí

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

JOSÉ GABRIEL RODRIGUES DOS SANTOS

**O MÉTODO DE PÓLYA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE EQUAÇÃO DO
SEGUNDO GRAU**

TERESINA

2022

JOSÉ GABRIEL RODRIGUES DOS SANTOS

O MÉTODO DE PÓLYA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE EQUAÇÃO DO
SEGUNDO GRAU

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo completo) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina Central.

Orientador: Prof. Ms. Robson Abreu Fonseca

TERESINA

2022

O MÉTODO DE PÓLYA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

José Gabriel Rodrigues dos Santos¹
Robson Abreu Fonseca²

RESUMO

O uso da resolução de problemas nas séries iniciais da educação básica tem um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois induz o aluno a pensar, elaborar e tomar decisão para chegar ao resultado. Este trabalho tem como objetivo evidenciar o método de Pólya como uma perspectiva para a solução de problemas de equações do segundo grau. Para a consecução deste trabalho, partiu-se de uma pesquisa descritiva e bibliográfica, por meio de uma abordagem qualitativa, onde serviu como referencial teórico Pólya (1995) para aplicação do seu método, lezzi (2018) para apresentação do conteúdo de equação do segundo grau e elenco de problemas sobre o mesmo. Para seguir as diretrizes que tratam sobre ensino, educação básica, bem como a resolução de problemas e o conteúdo de equação do segundo grau foram revisados os documentos oficiais, através dos Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular, norteando os caminhos seguidos neste trabalho. Metodologicamente serão apresentados três problemas matemáticos envolvendo equações do segundo grau cuja resolução seguirá o método desenvolvido por Pólya. Após isso, concluiu-se que a aplicação do método de resolução de problemas de Pólya para ensino de equações do segundo grau pode ser uma importante ferramenta no auxílio para o ensino na educação básica.

Palavras-chave: Pólya; resolução de problemas; equação do segundo grau.

ABSTRACT

The use of problem solving in the initial grades of basic education has a fundamental role in the teaching and learning process of mathematics, as it induces the student to think, elaborate and make decisions to reach the result. This work aims to highlight the Pólya method as a perspective for solving quadratic equation problems. In order to carry out this work, we started with a descriptive and bibliographic research, through a qualitative approach, which served as a theoretical reference Pólya (1995) for the application of his method, lezzi (2018) for the presentation of the equation content of the second degree and list of problems about it. In order to follow the guidelines that deal with teaching, basic education, as well as problem solving and the content of the high school equation, the official documents were revised, through the National Curricular Parameters and the National Curricular Common Base, guiding the paths followed in this work. . Methodologically, three mathematical problems involving quadratic equations will be presented, whose resolution will follow the method developed by Pólya. After that, it was concluded that the application of Pólya's problem solving method for teaching quadratic equations can be an important tool in helping teaching in basic education.

Data de aprovação: 23/06/2022 (data de apresentação do TCC)

¹ Graduando em Licenciatura em Matemática. Instituto Federal do Piauí.
gabrielrodrigues04031996@gmail.com

² Mestre em matemática. Instituto Federal do Piauí. robson.fonseca@ifpi.edu.br.

1 Introdução

Mesmo que os livros didáticos tragam problemas de matemática contextualizados, relacionados ao cotidiano dos alunos, a resolução de problemas pode vir a contribuir com a interpretação e tomada de decisão dos alunos, sendo um mecanismo de compreensão e fixação do conteúdo elevando a capacidade crítica destes, tornando-os sujeitos da construção de seu próprio conhecimento.

Para os alunos, compreender métodos matemáticos, deve ser mais do que decorar fórmulas, resultados ou procedimentos. Para se adquirir conhecimento matemático é necessário saber pensar Matemática. Para isto o aluno tem um percurso lento e laborioso, cujo começo se dá através de problemas, dos quais deve buscar os meios para chegar a sua resolução.

Para Pólya (1995), resolver um problema é encontrar um caminho ainda não conhecido e que rompa as barreiras existentes para chegar ao objetivo proposto, utilizando-se dos meios adequados.

Neste sentido, partiu-se do seguinte problema: É possível aplicar o método de resolução de problemas de Pólya no ensino de equações do segundo grau?

Para a consecução do problema elencou-se como objetivo geral: evidenciar o método de Pólya como uma perspectiva para a solução de problemas de equações do segundo grau. E como objetivos específicos: identificar os principais pressupostos da resolução de problema segundo Pólya; montar estratégias para resolver a equação do segundo grau usando as técnicas de Pólya para resolução de problemas; fazer com que a técnica de Pólya esteja entre a resolução e a compreensão da questão.

Dessa forma, esse conteúdo será apresentado procurando sempre associar a teoria com situações problemas ou aplicações que remetam à prática, permitindo assim que o aluno não veja os conteúdos de Matemática de forma dissociada da prática. Ao fim do processo o estudante levantará os dados e inferências para resolução do problema e, por fim, possa montar um roteiro de atuação definitiva

Em toda questão é necessária estabelecer uma estratégia de resolução, porém uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos é justamente a de encontrar uma estratégia para chegar à inferência da resolução do problema.

No conteúdo de equação do segundo grau isso também acontece, visto que se faz presente em outros conteúdos posteriores, não só na matemática, mas

também na física e áreas afins. Nisso é necessário que o aluno saiba quando um exercício envolve este conteúdo.

Além disso, num contexto atual onde questões contextualizadas estão mais presentes no cotidiano do aluno, saber discernir o que está trabalhando e como proceder é imprescindível para chegar ao resultado esperado.

Neste contexto o presente trabalho busca mostrar que o método de resolução de problemas estabelecido por George Pólya é uma importante ferramenta para problemas envolvendo equação do segundo grau.

Para isso o trabalho apresenta um referencial teórico abordando breves considerações sobre a resolução de problemas. Na sequência levantaremos uma rápida biografia de George Pólya, com um breve resumo de sua vida e o seu método de resolução de problemas. Também será apresentado o conteúdo de equações do segundo grau através de sua definição, raízes e a técnica de completar quadrados para chegar a sua fórmula resolutive.

Após isso, será apresentada a metodologia do trabalho explicando o conjunto de métodos utilizados e o caminho percorrido durante a execução do mesmo. Depois será exposto os resultados e discussões onde serão solucionados problemas envolvendo equações do segundo grau com o uso do método de Pólya e discutido a aplicação do método ao problema e ao conteúdo. Por último será apresentada a conclusão com base nos objetivos e o problema estabelecido.

2. Desenvolvimento

2.1 Referencial teórico

2.1.1 Resolução de problemas: breves considerações

A presença de problemas se dá desde as civilizações antigas. Os antigos problemas matemáticos, descobertos no Egito, Grécia e China são apresentados, de maneira igual, seguindo a mesma proposta: a de se criar um problema, resolvê-lo e mostrar sua solução. A matemática junto à resolução de problemas, se faz presente em nossa sociedade em todos os momentos. Desde o início, com o desenvolvimento da história da humanidade, o homem conseguiu evoluir na medida em que conseguiu superar obstáculos, respondendo os problemas que surgiam. Segundo o Parâmetro Curricular Nacional (PCN):

A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta as perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculos de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados à investigação internas à própria Matemática. (BRASIL, 1998, p. 40).

Na matemática resolver problemas é a arte de reorganizar conceitos e habilidades, aplicando-os em uma nova situação, de forma a alcançar um objetivo. Ao resolver problemas de matemática, o aluno consegue desenvolver determinadas estratégias que, em geral, podem ser aplicadas a um grande número de situações e contextos. Segundo Onuchic (1999, p. 204), “resolução de problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas”.

Resolver problemas nos leva a ação de pensar e desenvolver estratégias para chegar a solução, com objetivo de envolver alunos no contexto atual para desenvolvimento de habilidades matemáticas. Dada a importância da resolução de problemas, os autores Lupinacci e Botin sugerem:

A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem podem ser desenvolvidos através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI e BOTIN, 2004, p.01).

De acordo com os Parâmetros curriculares Nacionais, BRASIL (1998), a matemática está incluída na vida de todos, em situações de quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Para isso é de grande importância vencer a aprendizagem centrada em ações mecânicas. Para isso é indicada a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula.

A metodologia de resolução de problemas é uma ferramenta de grande importância para o desenvolvimento intelectual do aluno, pois é a partir dela que se pode incentivar sua criatividade, através da dedução, criação de estratégias, validação de soluções e generalização do processo. De acordo com a Base Comum curricular (BNCC):

Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e

não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos. (BRASIL, 2018, p. 277).

Vários conteúdos de matemática na educação básica possibilitam ser tratados a partir da resolução de problemas, de modo que, leve o aluno a ter uma melhor compreensão do tema proposto e com isso desenvolver o raciocínio lógico e sua criatividade. Um autêntico problema deve se exprimir um real desafio no qual os alunos, através de sequencias de ações, os levarão a obter os resultados desejados.

2.1.2 George Pólya: biografia e o seu método de resolução de problemas

George Pólya, segundo Biographies (2002), foi um dos matemáticos mais importantes do século XX. Nascido em 13 de dezembro de 1887 na cidade de Budapeste, capital do império Austro-húngaro. Faleceu aos 97 anos em 7 de setembro de 1985 na cidade de Palo Alto, Califórnia, Estados Unidos. Possuiu PHD em matemática pela Universidade de Budapeste em 1912 com sua tese em Probabilidade Geométrica. Foi professor de matemática de 1914 a 1940 na Escola Politécnica Federal de Zurique na Suíça e de 1940 a 1953 na Universidade de Stanford, na Califórnia (Estados Unidos). Continuou como professor emérito de Stanford pelo resto de sua vida e carreira.

Os problemas têm grande participação nos currículos desde a antiguidade, porém isso não acontece com a resolução de problemas. Nos últimos anos surgiram educadores matemáticos que voltaram sua atenção para a resolução de problemas, onde esta vem sendo usada como ferramenta de apoio no processo de ensino e aprendizagem de matemática, entre eles George Pólya, considerado o precursor.

Assim, será apresentado a seguir o método para resolução de problemas que foi proposto por George Pólya. Em sua obra “*How to solve it*”, Pólya dividiu o processo de resolução de problemas matemáticos em quatro etapas de forma lógica e simples auxiliando no pensamento, compreensão, obtenção, análise e validação do resultado do problema proposto.

Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. [...] Para agrupar convenientemente as indagações e sugestões da nossa lista, distinguimos quatro fases de trabalho. Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos uma reflexão sobre a resolução completa, revendo-a e discutindo-a. [...] Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa. (PÓLYA, 1995, p.2-3).

Em resumo, segundo Pólya (1995), a resolução de um problema matemático está dividida em quatro etapas, cada uma delas compostas por fases que levam a resolução do problema.

A primeira etapa corresponde a **Compreensão do Problema**. Nessa etapa é preciso compreender o problema, onde faz-se necessário o uso do raciocínio analítico para decompor o problema em partes e entender o todo. Para isso, é preciso recorrer a busca de incógnitas, identificação dos dados, desenho de figuras, busca de condições e observar se estas são necessárias para descobrir o que se quer resolver.

A segunda etapa corresponde ao **Estabelecimento de um Plano**. Nessa etapa é necessário encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares ou similares, se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar a um plano para a resolução, através da conexão entre os dados e a incógnita, onde conhecimentos anteriores levarão à essa conexão.

A terceira etapa corresponde à **Execução do Plano**. Nessa etapa é preciso exercitar as ações pensadas na etapa anterior para executar o plano estabelecido. As teorias, hipóteses, conjecturas são postas à prova e os procedimentos são realizados e as indagações respondidas, verificando se os passos e o raciocínio estão corretos.

A quarta etapa corresponde ao **Retrospecto ou Verificação**. Nessa etapa deve-se examinar a solução obtida, para isso é feita uma reflexão sobre a solução do problema e os passos seguidos, sua eficácia e aplicação em outras situações. O resultado final deve ser reavaliado e novos percursos para chegar à mesma solução podem ser discutidos.

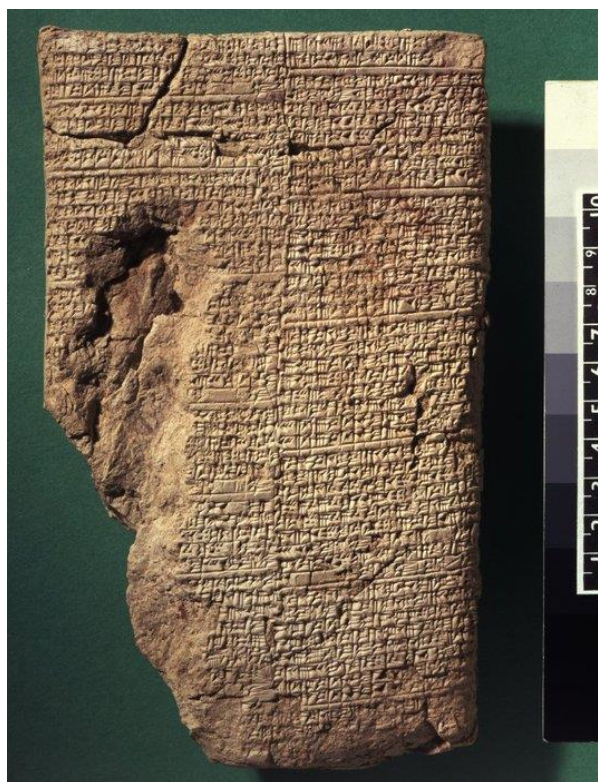
Essas quatro fases interagem entre si, permitindo a ida e o retorno entre as fases durante o processo de resolução, tornando-o assim, cíclico e dinâmico. Isso

possibilita aos alunos pensar produtivamente auxiliando no seu raciocínio, contribuindo para seu desenvolvimento cognitivo e o raciocínio lógico, munindo-o de estratégias para chegar a solução dos problemas a eles apresentados.

2.1.3 Equação do segundo grau: história, definição e representação

Vários escritos dizem que babilônicos, chineses, hindus, gregos e árabes contribuíram para a solução de inúmeros casos de uma equação do segundo grau. Os primeiros indícios de equações do segundo grau tratam de registros impressos em tabletes, ossos, carapaças de tartarugas e papiros.

Figura 1: Equação do segundo grau em tabletes de argila.



Fonte: Disponível em <https://www.escoladematematicapontal.com.br//equacao-polinomial-de-grau-dois/>

Segundo Domingues (2000) há aproximadamente quatro mil anos já apareciam problemas que incidiam numa equação do segundo grau. Em textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia ou em papiros no Egito com registros de exercícios do tipo $ax^2 = b$, as antigas civilizações tratavam problemas antes mesmo do termo álgebra ser criado. Estes problemas eram resolvidos em prosa por meio de receitas, que mostravam o que deveria ser feito para determinar as raízes,

utilizando exemplos concretos com coeficientes numéricos, até a famosa fórmula geral de resolução que conhecemos hoje.

Além disso, babilônios e gregos já faziam uso de técnicas capazes de resolver essas equações. Os babilônicos se dispunham de textos e símbolos como ferramenta no auxílio da resolução dos cálculos. Os gregos findavam suas resoluções através de associações com a geometria, devido sua forma geométrica para solucionar problemas relacionados a equações do segundo grau.

Na China, foram encontrados exercícios de equação de segundo grau, porém, sem registro concreto de quem o escreveu e nem o período da publicação destes. Já na Grécia, há a maior concentração de problemas envolvendo equações do segundo grau, dos quais dominavam a técnica de resolução de raízes quadráticas de números incomensuráveis.

Na mesopotâmia, evidências levam a crer que os babilônicos buscavam saber a relação entre a área de um retângulo e o seu perímetro. Já na Índia dois matemáticos foram importantes para o desenvolvimento das equações do segundo grau: Brahmagupta que apresentou tipos de equações do segundo grau e os primeiros registros do número zero assim como os números negativos e Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi que classificou as equações em seis casos, incluindo os três primeiros casos citados na obra de Brahmagupta.

Agora serão apresentadas algumas definições sobre o conteúdo de equações do grau segundo como base lezzi (2018). Este trabalho não tem o intuito de ensinar o conteúdo, parte-se já da compreensão do mesmo. Vamos nos prender aos problemas de equação do segundo grau e as técnicas de Pólya, portanto, fica como sugestão o aprofundamento das definições, métodos de resolução do conteúdo para o enriquecimento de conhecimento e melhor compreensão deste trabalho.

Equação do 2º grau na incógnita real x é toda equação colocada na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a , b e c como coeficientes reais e $a \neq 0$. Um número é raiz de uma equação do segundo grau quando este valor colocado no lugar da incógnita, a equação se transforma em uma sentença verdadeira.

Existem vários métodos para resolução de equações do segundo grau, entre eles o método da soma e do produto, método de Viète, método de Euler, método do quadrado e da diferença, método de completar quadrados e o método conhecido popularmente aqui no Brasil por método de “Bhaskara”, entre outros.

Para a resolução dos problemas envolvendo equações do 2º grau através do método de Pólya neste trabalho, será utilizada a formula resolutive geral que desenvolveremos a partir do método de completar quadrados, método difundido por influência dos japoneses.

Seja a equação na sua forma geral temos:

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

Multiplicando por 4a, com $a \neq 0$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$$

Adicionando b^2 em ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac;$$

Fatorando o primeiro membro:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac;$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac};$$

Isolando x, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O número $b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação, sendo representado pela letra grega Δ (delta). Dessa forma a fórmula pode ser assim representada:

$$\text{Com } \Delta = b^2 - 4ac, \text{ temos } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Observe-se que o valor de Δ é que determina quantas raízes reais a equação possui. Quando:

$\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes;

$\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais;

$\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Este conteúdo foi escolhido devido sua presença e aplicação em vários campos, como na matemática, física, engenharias através dos cálculos nos projetos de construção, economia na bolsa de valores, em aplicações de alta e queda da bolsa. Também se faz presente no cotidiano e em diversos fenômenos na natureza.

Sua aplicação é visível por meio da sua representação gráfica através da curva da parábola nas pontes, faróis, antenas, etc. Isso permite uma ampla

abordagem que permite sua associação com a vida real, possibilitando um maior envolvimento de quem o estuda, bem como mostrar que este conteúdo é muito mais que a memorização e aplicação de uma única fórmula.

2.2 Metodologia

A metodologia pode ser compreendida como a forma que será desenvolvida a pesquisa, qual abordagem, o tipo de pesquisa que será utilizada, as fontes estudadas, qual o instrumento de coleta de dados, para que se chegue aos resultados obtidos na pesquisa e se alcancem objetivos respondendo ao problema que foi proposto.

O trabalho parte de uma pesquisa bibliográfica onde serão analisados livros, artigos, documentos que nortearam o trabalho afim de possibilitar atingir os objetivos propostos para este trabalho.

De acordo com Gil:

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. (Gil, 1999, p.50).

Para o método utilizado neste trabalho partiu-se de uma pesquisa descritiva onde foram apresentados os métodos de Pólya, as definições sobre equações do segundo grau bem como os documentos que permeiam a resolução de problemas bem como as equações do segundo grau no nono ano do ensino fundamental, para a partir disto, discutir o método de Pólya para resolução de problemas de equação do segundo grau.

De acordo com Gil (1999), as pesquisas descritivas têm como objetivo principal a descrição das características de determinada população ou fenômeno, ou o estabelecimento de relações entre variáveis.

Para coleta de dados teremos como fontes de pesquisa primarias os livros: “*How to solve it*”, em português “A arte de resolver problemas” de George Pólya (1995) para utilização do seu método na resolução de problemas envolvendo equações do segundo grau e “Matemática e realidade” de Iezzi (2018) para revisão do conteúdo de equações do segundo grau e escolha dos problemas.

Além disso, foram seguidas as diretrizes dos documentos oficiais, entre eles o PCN (1998) e a BNCC (2018) e como estes documentos norteiam a abordagem dos

conteúdos de equação do segundo grau, e como a resolução de problemas pode ser aplicada no ensino básico.

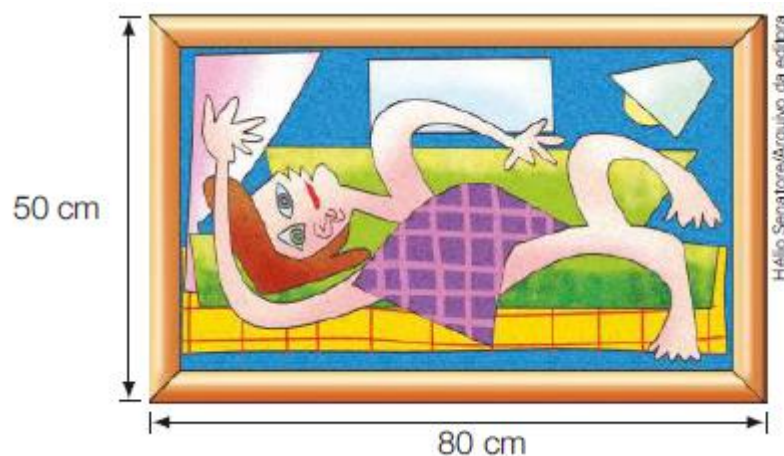
A aplicação do método será analisada através de uma abordagem qualitativa, de forma que se possa entender qual o caminho para a utilização do método de Pólya ao ensino de equação do segundo grau para verificar e confirmar sua aplicabilidade confrontando com a tomada de decisão para solução do problema proposto neste trabalho.

A pesquisa de caráter qualitativo pode ser definida segundo Oliveira (2005, p. 60) “como sendo um estudo detalhado de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou ator social e fenômenos da realidade”.

2.3 Resultados e discussões

Problema 1: Um quadro tem forma retangular de dimensões externas de 80cm x 50cm. A moldura tem largura x uniforme. Calcule a medida da largura, sabendo que a área da tela é de 2800cm^2 .

Figura 1: Imagem do problema



Fonte: Iezzi (2018).

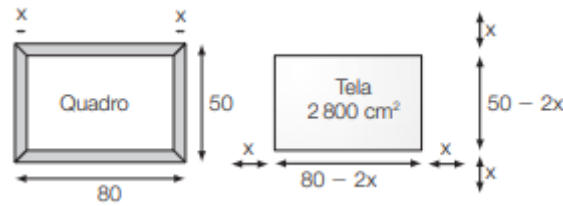
Usando o método de resolução de problemas de Pólya:

Primeira etapa: Compreensão do problema;

Queremos encontrar a medida “x” correspondente a largura da moldura. Para isso temos as dimensões externas do quadro com a moldura de 80cm por 50cm e a área da tela de 2800cm^2 .

Além disso é possível traçar uma figura para melhor visualizarmos o problema (Figura 1).

Figura 2 - Esboço do problema 1



Fonte: Iezzi (2018).

Segunda etapa: Estabelecimento de um plano;

Para resolução desse problema precisamos lembrar da definição de área, de um retângulo é dada por base $\times$ altura, pois queremos encontrar a medida da largura da moldura a partir das dimensões do quadro completo e a área da tela.

Como temos a medida da área da tela, podemos encontrar a largura da moldura utilizando as dimensões externas subtraindo a incógnita “ x ” correspondente a largura da moldura.

Terceira etapa: Execução do plano;

Como as dimensões externas do quadro são de 80cm $\times$ 50cm. Podemos subtrair “ x ” de cada dimensão, que é correspondente a medida da largura, obtendo as novas dimensões: $(80 - x)$ e $(50 - x)$ e o seu produto que é igual a área da tela que possui 2800cm². Igualando os valores, chegamos a uma equação do 2º grau e resolvendo-a temos:

$$\begin{aligned}(80 - x) \cdot (50 - x) &= 2800 \\ \Leftrightarrow 4000 - 160x - 100x + 4x^2 &= 2800 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 260x + 1200 &= 0 \quad (\div 4) \\ \Leftrightarrow x^2 - 65x + 300 &= 0\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula definida através do método de completar quadrado temos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{65 \pm \sqrt{(-65)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 300}}{2 \cdot 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{65 \pm 55}{2} \\ \Leftrightarrow x' &= 5\text{cm ou } x'' = 60\text{cm}\end{aligned}$$

Note que $x'' = 60\text{cm}$ não pode ser, devido as dimensões do quadro, logo a largura da moldura é de 5cm.

Quarta etapa: Retrospecto;

O resultado pode ser verificado a partir da substituição da raiz encontrada correspondente a largura da moldura que mede 5cm na incógnita, permitindo comparar a área da tela.

Poderíamos utilizar outros métodos para a resolução de problemas de segundo grau, ou também fazer por partes, encontrando primeiro o discriminante e o substituindo na fórmula geral.

A partir do resultado, poderíamos trabalhar com a medida da largura da moldura onde é possível comparar a área do quadro total com a área da tela.

Problema 2: Dado $y = 1 - 2 \cdot (1 - 2x^2)^2$, determine os valores de x para $y=0$.

Primeira etapa: Compreensão do problema;

Neste problema queremos encontrar os valores de x que faz com que y seja igual a zero. Para isso temos uma igualdade onde no primeiro membro temos a variável y e no segundo membro uma expressão na variável x .

Segunda etapa: Estabelecimento de um plano;

Como queremos que o valor de y seja igual a zero, alternaremos a ordem dos membros da igualdade e no lugar de y substituiremos por 0, nos dando assim a seguinte equação:

$$1 - 2 \cdot (1 - 2x^2)^2 = 0$$

Ao observarmos o primeiro membro da equação e o desenvolvendo rapidamente notaremos que a incógnita x terá expoente quatro, o que nos faz associar com uma equação biquadrada, onde será necessário relembrar os procedimentos necessários para sua resolução.

Terceira etapa: Execução do plano;

Montando a equação e executando as ações estabelecidas na etapa anterior temos:

$$-8x^4 + 8x^2 - 1 = 0$$

Fazendo $z = x^2$ (*), temos:

$$-8z^2 + 8z - 1 = 0$$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$z = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-8)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}}{-16}$$

Logo:

$$z' = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad \text{ou} \quad z'' = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Retornando a variável x em (*), temos:

Para $x^2 = z'$:

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Para $x^2 = z''$:

$$x^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Logo os valores de x para que y seja igual a zero são:

$$x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Quarta etapa: Retrospecto;

O resultado pode ser verificado a partir da substituição dos valores de x encontrados na equação inicial. Além disso, poderíamos utilizar outros métodos para a resolução de problemas de segundo grau, ou também fazer por partes, encontrando primeiro o discriminante e o substituindo na fórmula geral.

3 Conclusão

Ensinar matemática na educação básica deve possibilitar condições para os alunos terem autonomia suficiente para relacionar os conteúdos aprendidos com os modelos de seu cotidiano.

O uso do método de Pólya no ensino de equações do segundo grau permite aos alunos uma nova estratégia para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas por meio da sua compreensão, análise e coleta de dados, buscando escolher o melhor caminho para a solução, e que após o resultado consigam realizar uma análise crítica, sendo capazes de formular hipóteses e verificar sua veracidade. Dessa forma os alunos passam a ter mais

opções e não se tornem reféns de processos de memorização de uma única fórmula ou de padrões pré-estabelecidos.

Ainda que o método de Pólya não seja uma ferramenta milagrosa, é importante pensar sobre sua aplicação e possível uso em um grande número de problemas. Esta estratégia, se aplicada desde cedo no cotidiano escolar dos alunos, permitirá a estes um meio facilitador no processo de tomada de decisão em inúmeros problemas que o acompanharão no percurso estudantil.

O tema buscou possibilitar ao aluno desenvolver novas habilidades com o objetivo de fortalecer seu pensamento crítico e raciocínio lógico, permitindo sua inserção através das etapas, fazendo com que o método de Pólya estivesse no percurso entre a resolução e a compreensão da questão.

A sequência temática aqui apresentada é apenas uma sugestão de modo a contribuir com o ensino em salas de aula no ensino básico. Que ela possa servir de ponto de partida para novas abordagens e discussões, ampliando seus campos e níveis de ensino. Que a temática seja discutida, trabalhada, transformada e aperfeiçoada por cada um que tiver acesso a esse trabalho.

REFERÊNCIAS

MacTutor History of Mathematics. **George Pólya (1887 – 1985) - Biography**. Escócia. Nov. 2002. Disponível em [http:// https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/](http://https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/). Acesso em 23 maio de 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit e.pdf. Acesso em 28 maio 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 26 maio 2022.

DOMINGUES, H. H., Síntese da História das Equações Algébricas, In. **Caderno: Ensino Aprendizagem de Matemática**, Publicações da SBEM-SP, nº2, 2000.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

LUPINACCI, M. L. V. e BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 2004, p. 1–5.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis: Vozes, 2005.

ONUCHIC, L. de la R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.