



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

SHELDA TRINDADE DE OLANDA

**SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UM BREVE ESTUDO SOBRE SÉRIES DE TAYLOR E
APLICAÇÕES**

SÃO RAIMUNDO NONATO

2018

SHELDA TRINDADE DE OLANDA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UM BREVE ESTUDO SOBRE SÉRIES DE TAYLOR E
APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência parcial para obtenção do diploma
do Curso de Licenciatura em matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí. Campus São Raimundo
Nonato.

Orientador: Prof. M^º. Francisco Teixeira Esteves
Coorientador: Prof. M^º. Adecio da Silva Santos.

SÃO RAIMUNDO NONATO

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O42s Holanda, Shelda Trindade de
Sequências e Séries : Um breve estudo sobre Séries de Taylor e aplicações / Shelda Trindade de Holanda - 2018.
54 f. : il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, Licenciatura em Matemática, 2018.

Orientador : Prof Me. Francisco Teixeira Esteves.
Coorientador : Prof Me. Adecio da Silva Santos.

1. Sequências. 2. Séries de Potências . 3. Séries de Taylor. I.Título.

CDD 510

SHELD A TRINDADE DE OLANDA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UM BREVE ESTUDO SOBRE SÉRIES DE TAYLOR E
APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência parcial para obtenção do diploma
do Curso de Licenciatura em matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí. Campus São Raimundo
Nonato.

Aprovada em: ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. M^e. Francisco Teixeira Esteves
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. M^e. Adécio da Silva Santos
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof^a. M^a. Amaya de Oliveira Santos
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Ao meu Pai Celestial.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao meu Senhor e Salvador, pois dEle proveio toda força e sabedoria para realizar esse trabalho.

Agradeço a minha família, em especial, aos meus pais, Elineide e João Bosco, aos meus irmãos, Charles e Arthur, e a minha avó Adalcina que estiveram sempre me apoiando com ações e palavras motivadoras.

Agradeço ao meu orientador, Prof. M^e Francisco Esteves, pela ajuda na definição do tema e pelas sugestões que foram essências e também ao meu coorientador, Prof. M^e Adecio, pelas dicas e ajuda na revisão.

Agradeço as pessoas maravilhosas que conheci durante o meu curso, em especial, Cleison, Adriana, Tânia Maria, Lucilene, Balbina, Eleutério, Laés, Walber, Maiky Taysson e Gecson.

Por fim, agradeço a todos os professores que tive durante a graduação e ao IFPI pelas oportunidades oferecidas.

Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente.

Amém.

Romanos 11:36

RESUMO

Nem sempre é possível integrar uma função pelos métodos usuais (integração por partes, substituição trigonométrica e integração de funções racionais por frações parciais), ou resolver uma equação diferencial ordinária através da manipulação de funções elementares. Diante desses problemas, o método conhecido por série de Taylor é uma saída para solucioná-los. Ferramenta essencial no cálculo e análise numérica, a série de Taylor nos permite escrever uma função como um “polinômio infinito” (soma infinita de termos). E trabalhar com polinômios é extremamente vantajoso, pois: são infinitamente deriváveis, simples de integrar e fáceis de resolver para qualquer valor $x \in \mathbb{R}$. Nesse sentido, o seguinte trabalho tem como finalidade explanar um breve estudo de sequências e séries com ênfase em séries de Taylor e algumas de suas aplicações.

Palavras-chaves: Sequências. Séries de Potências. Séries de Taylor.

ABSTRACT

It is not always possible to integrate a function by the usual methods (part integration, trigonometric substitution and integration of rational functions by partial fractions), or solve an ordinary differential equation through the manipulation of elementary functions. Faced with these problems, the method known as the Taylor series is an outlet for solving them. Essential tool in calculus and numerical analysis, the Taylor series allows us to write a function as an "infinite polynomial" (infinite sum of terms). And working with polynomials is extremely advantageous because: they are infinitely derivable, simple to integrate, and easy to solve for any $x \in \mathbb{R}$ value. In this sense, the following work aims to explain a brief study of sequences and series with emphasis on Taylor series and some of their applications.

Keywords: Sequences. Series of Powers. Taylor series

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ilustração de um paradoxo de Zenão	11
Figura 2 – Sequência de termo geral $a_n = \frac{1}{n}$	13
Figura 3 – Definição de limite de uma sequência	14
Figura 4 – Análise do termo geral de uma série	23
Figura 5 – Sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$	27
Figura 6 – $f(x)$ e algumas funções $f_n(x)$	28
Figura 7 – Convergência uniforme	29
Figura 8 – Item (iii), teorema 5.1	31
Figura 9 – $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais s_n	33
Figura 10 – $f(x) = \frac{1}{1+x}$ e algumas somas parciais s_n	34
Figura 11 – $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e algumas somas parciais s_n	35
Figura 12 – $f(x) = \ln(x+1)$ e algumas somas parciais s_n	36
Figura 13 – $f(x) = \tan^{-1}(x)$ e algumas somas parciais s_n	37
Figura 14 – $f(x) = e^x$ e alguns polinômios de Maclaurin $T_n(x)$	41
Figura 15 – $f(x) = \sin(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_1(x)$	43
Figura 16 – $f(x) = \sin(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_2(x)$	43
Figura 17 – $f(x) = \cos(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_1(x)$	44
Figura 18 – $f(x) = \cos(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_3(x)$	44
Figura 19 – $f(x) = \sin(x)$ e polinômio de Taylor $T_1(x)$ em torno de $\pi/3$	45
Figura 20 – $f(x) = \sin(x)$ e polinômio de Taylor $T_2(x)$ em torno de $\pi/3$	46

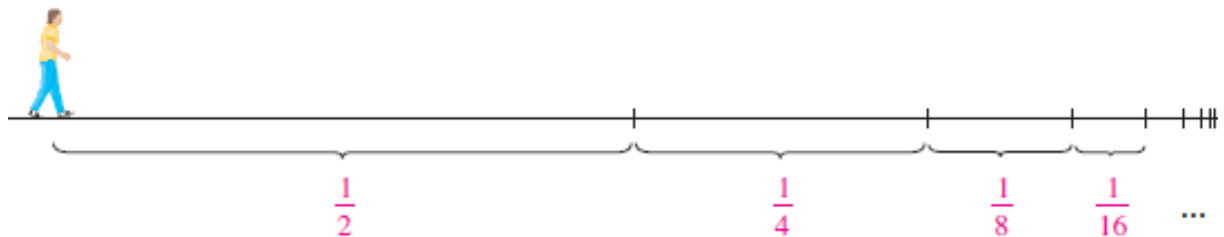
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	13
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	13
2.2	LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA	13
2.3	SEQUÊNCIAS MONÓTONAS	15
2.4	SUBSEQUÊNCIAS	16
2.5	DESIGUALDADES	17
2.6	OPERAÇÕES COM LIMITES	17
3	SÉRIES NUMÉRICAS	20
3.1	CONCEITOS BÁSICOS E ALGUNS TIPOS DE SÉRIES	20
3.2	CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO	22
3.3	SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES	23
3.4	TESTES DE SÉRIES	23
4	SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES	26
4.1	CONVERGÊNCIA SIMPLES	26
4.2	CONVERGÊNCIA UNIFORME	28
5	SÉRIES DE POTÊNCIAS	30
6	REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES COMO SÉRIES DE POTÊNCIAS	33
7	SÉRIES DE TAYLOR	38
8	APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE TAYLOR	40
8.1	APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES AO REDOR DE UM PONTO	40
8.2	INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES	47
8.3	CÁLCULO DE LIMITE.	49
8.4	SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS AO REDOR DE UM PONTO.	50
9	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

Através das séries de Taylor, podemos escrever funções como somas de séries infinitas. A primeira ideia de soma de série remonta o século V a.C. com o filósofo grego Zenão, ele propôs alguns problemas, os chamados paradoxos de Zenão. Esses problemas envolviam noções de limite, soma de séries infinitas e números infinitesimais. Um desses paradoxos que trata sobre séries afirma o seguinte: Para você ir a um lugar qualquer, deve percorrer primeiro a metade da distância, depois, a metade da distância que resta, em seguida a metade da distância que ainda resta, e assim continuamente, então você nunca chegará lá. Veja a Figura 1.

Figura 1 – Ilustração de um paradoxo de Zenão



Fonte: Stewart(2016)

Observe que a distância total é dada por uma soma de infinitas distâncias, expressa por:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

e conforme somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam mais próximas de 1. Isso é explicado pelo fato de $\lim s_n = 1$, com $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Mas, Zenão argumentava ser impossível somar uma quantidade infinita de números e obter um único número finito como resultado. Mais tarde, no século III a.C., Arquimedes de Siracusa provou o contrário do que Zenão argumentava: se dividirmos o todo em um número infinito de partes, elas ainda somarão o único todo quando forem adicionadas. Além disso, note que implicitamente fazemos somas infinitas, por exemplo:

$$\frac{1}{6} = 0,1666\dots = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots$$

Outros matemáticos trabalharam nessa ideia. No século XIV, o destaque nos estudos de séries foi Madhava, seus trabalhos tiveram continuidade por outros mate-

máticos em uma escola região ao sul da Índia chamada Kerala, e se encontram no livro Yuktibhasa.

Em outra época, século XVII, o matemático James Gregory, também descobre vários resultados que foram desenvolvidos outrora por Madhava, principalmente o que conhecemos hoje por "séries de Taylor" de algumas funções trigonométricas. A série de potências da função $tg^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ recebeu nome em homenagem a esse matemático. Um fato interessante da série de Gregory é que para $x = 1$, temos

$$tg^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

resultado chamado fórmula de Leibniz para π . Mas, foi somente em 1715 que surgiu devido ao matemático britânico Brook Taylor, um método brilhante capaz de aplicar séries a todas as funções conhecido como Séries de Taylor. É importante destacar que essa descoberta de Taylor permitiu a conexão entre séries infinitas e cálculo diferencial.

A série de Taylor é uma ferramenta essencial em áreas como cálculo e análise numérica. Para entender a importância das séries de Taylor devemos notar que funções polinomiais são simples, mas funções complicadas e "polinômios infinitos" (soma infinita de termos) não são tão óbvios. A soma infinita de termos é facilmente representada usando séries, assim como as funções complicadas são facilmente representadas usando séries de Taylor. A exemplo disso, tentando calcular $\int e^{-x^2} dx$ vemos que pelos métodos usuais é complicado, pois a sua antiderivada não é uma função elementar. Porém, se conseguirmos escrever e^{-x^2} como uma soma de termos ("polinômio infinito"), problema resolvido.

Esse trabalho tem como finalidade abordar um breve estudo sobre as séries de Taylor e três importantes aplicações: 1. Usando séries de Taylor para aproximar funções ao redor de um ponto, 2. Usando Séries de Taylor no cálculo da integral definida 3. Usando séries de Taylor no cálculo de limite, 4. Usando séries de Taylor resolução de equação diferencial ordinária linear. Nos capítulos iniciais serão explanados conteúdos pré-requisitos para o estudo de séries de Taylor: sequências e séries numéricas, sequências e séries de funções e séries de potências. As principais referências para esse estudo são Análise Real: Lima (2016), Cálculo II: Stewart (2016) e Análise I: Figueiredo (2015). Os gráficos apresentados no texto foram construídos utilizando a ferramenta gráfica GeoGebra. Alguns dos principais resultados nesse estudo mostraremos através de exemplos e assim, algumas demonstrações serão omitidas.

2 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

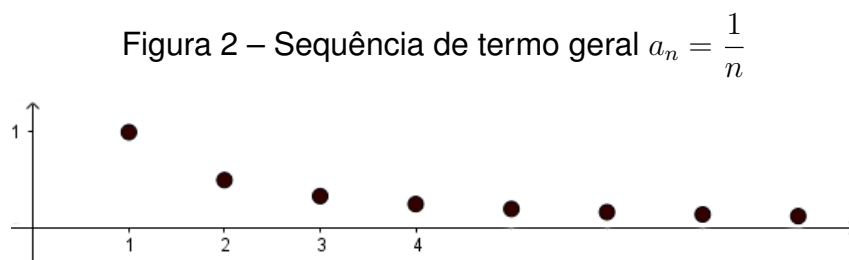
Podemos imaginar uma sequência como uma lista ordenada de números, em geral relacionados através de uma lei. Neste capítulo abordaremos uma noção muito importante para os próximos capítulos: *limite de uma sequência*.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Definição 2.1: Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado *n-ésimo* termo da sequência. Lima(2016, pg. 23). Observamos que os termos x_n não são necessariamente diferentes e a notação (x_n) é usada para designar a sequência.

Definição 2.2: Uma sequência (x_n) diz-se: *limitada superiormente* quando para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq a$; *limitada inferiormente* quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$; *limitada* quando é limitada superiormente e inferiormente. Lima(2016).

Exemplo 2.1: A sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ pode ser descrita pela seguinte fórmula $a_n = \frac{1}{n}$. Vemos que a_n é limitada, pois $0 < a_n \leq 1$. Podemos representá-la usando o gráfico, como na Figura 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

No exemplo, como o domínio da sequência é o conjunto dos naturais o gráfico não é contínuo, mas um conjunto de pontos isolados onde as ordenadas são os termos a_n da sequência. Além disso, no gráfico observamos conforme n cresce arbitrariamente a_n se aproxima de zero.

2.2 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Definição 2.3: Dizemos que o número real L é limite da sequência (x_n) se para todo real $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica todos termos x_n obedecem a

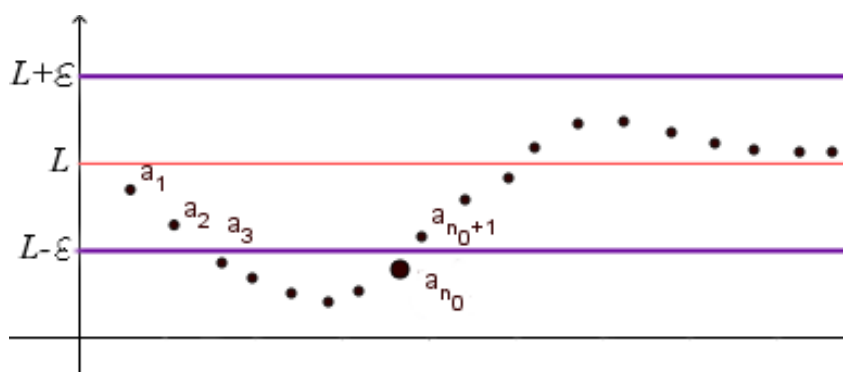
condição

$$|x_n - L| < \varepsilon,$$

isto é, $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Lima(2016)

Escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim x_n = L$. A Figura 3 ilustra essa definição.

Figura 3 – Definição de limite de uma sequência



Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme a Figura 3, em outras palavras, para que $\lim a_n = L$ não interessa o quão pequeno seja escolhido a faixa compreendida entre $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos a partir de a_{n_0+1} obrigatoriamente devem estar nessa faixa.

O teorema a seguir afirma que o limite de uma sequência é único. Seja (a_n) uma sequência. Contrariando o que diz o teorema, imagine se $\lim a_n = a$ e $\lim a_n = b$ com $a \neq b$, teríamos que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $n > n_2 \Rightarrow b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Isso é possível? Completando esse raciocínio temos outra alternativa de demonstração do teorema abaixo.

Teorema 2.1:(Unicidade do limite) *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.* Elon(2016, pg. 25)

Prova: Supondo que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$ e tomando $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$. Existe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$ e $n > n_1$ implica $|x_n - b| < \varepsilon$. Fazendo $n > \max\{n_0, n_1\}$ implica, pela desigualdade triangular, $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = 2 \frac{|a - b|}{2} = |a - b|$. Absurdo! Logo, o limite de toda sequência convergente é único.

Dizemos que a sequência (a_n) converge quando (a_n) tem limite, caso contrário não existe. Se $\lim a_n = \infty$, a sequência (a_n) é divergente. Abaixo temos uma consequência para qualquer que seja a sequência convergente.

Teorema 2.2: *Toda sequência convergente é limitada.* Lima(2016, pg. 25).

Prova: Seja $a = \lim x_n$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1$$

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| + |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

(2.1)

Concluimos, sendo $M = \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_{n_0-1}|\}$, então $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e a sequência é limitada.

2.3 SEQUÊNCIAS MONÓTONAS

Sendo a sequência $(a_n) = \left(\frac{2}{n+5}\right)$, note

$$\frac{2}{n+5} > \frac{2}{(n+1)+5} = \frac{2}{n+6}.$$

Logo, $a_n > a_{n+1}, \forall n \geq 1$. Esse é um caso de sequência *monótona decrescente*, conforme a definição a seguir.

Definição 2.4: Uma sequência (x_n) chama-se *monótona*:

(i) *não-decrescente* quando $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) *não-crescente* quando $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) *crescente* quando $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) *decrescente* quando $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Lima(2016).

Observe que a sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é monótona decrescente e, além disso, limitada. Vimos anteriormente, que se $n \rightarrow \infty$, então $x_n \rightarrow 0$, isto é, $\lim x_n = 0$ e, portanto, a sequência (x_n) é convergente. Mas, será que toda sequência monótona e limitada é convergente? O próximo teorema nos mostra que sim. Esta é a condição suficiente para que uma sequência convirja.

Teorema 2.3: *Toda sequência monótona limitada é convergente.* Lima(2016, pg.26).

Caso 1: (x_n) monótona não-decrescente e limitada.

Prova: Sejam $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ e $a = \sup X$ ¹. Dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior² de X . Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ implicando $\lim x_n = a$.

Caso 2: (x_n) monótona não-crescente.

¹ $a = \sup X$ é o *supremo* do conjunto X , isto é, (i) Para todo $x \in X$, temos $x \leq a$ e (ii) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a \leq c$.

² Dizemos que a é cota superior de X quando $a \geq x, \forall x \in X$

Prova: Sejam $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ e $b = \inf X$ ³. Dado $\varepsilon > 0$, o número $b + \varepsilon$ não é cota inferior⁴ de X . Desse modo, existe $x_{n_1} \in \mathbb{N}$ tal que $b \leq x_{n_1} < b + \varepsilon$. Logo, $n > n_1 \Rightarrow b - \varepsilon < x_n \leq x_{n_1} < b + \varepsilon$ e assim $\lim x_n = b$. Lima(2016)

Veremos agora um exemplo importante de sequência monótona, a que define a base dos logaritmos naturais: o número e . Esse número surgiu no início do século XVIII, em um problema de juros compostos. Ávila(2001).

Exemplo 2.2: Seja (a_n) uma sequência tal que o termo geral

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

obviamente ela é crescente. E também limitada, vejamos:

Como $2^n \leq (n+1)!$ para todo $n \geq 1$, então $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$, assim:

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Mais a frente no exemplo 3.3, mostraremos que:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$$

Logo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Concluimos:

$$2 \leq a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Definimos $e = \lim a_n$.

2.4 SUBSEQUÊNCIAS

Definição 2.5: Seja $A = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. A restrição $x|_A$ de uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada subsequência. Assim, a subsequência $x|_A$ é uma sequência definida de modo que a cada $i \in \mathbb{N}$ temos $x(n_i) = a_{n_i}$. Escrevemos $(x|_A) = (x_n)_{n \in A}$ ou $(x|_A) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$. Lima(2016).

Teorema 2.4: Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a . Lima(2016, pg.25).

³ $b = \inf X$ é o ínfimo do conjunto X , isto é, (i) Para todo $x \in X$, temos $x \geq b$ e (ii) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \geq c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $b \geq c$

⁴ Dizemos que b é cota inferior de X quando $b \leq x, \forall x \in X$

Prova: Seja $(x_{n_1}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ subsequência de (x_n) . Dado qualquer intervalo aberto $A = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in A$. Sabemos que todos os termos x_{n_k} , com $n_k > n_0$ também pertencem a A . Logo $\lim x_{n_k} = a$.

Teorema 2.5: Dada a sequência (x_n) , sejam (x_{2n-1}) e (x_{2n}) subsequências de (x_n) . Se $\lim x_{2n-1} = \lim x_{2n} = a$, então $\lim x_n = a$. Lima(2016).

Prova: Como (x_{2n-1}) e (x_{2n}) convergem para a , existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_{2n-1} - a| < \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow |x_{2n} - a| < \varepsilon$. Tomando $n_0 = \max\{2n_1 - 1, 2n_2\}$. Se $n = 2k - 1$, temos $n > n_0 \Rightarrow 2k - 1 > 2n_1 - 1 \Rightarrow k > n_1 \Rightarrow |x_{2k-1} - a| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Se $n = 2k$, temos $n > n_0 \Rightarrow 2k > 2n_2 \Rightarrow k > n_2 \Rightarrow |x_{2k} - a| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Portanto, $\lim x_n = a$.

Teorema 2.6: Seja k real positivo, se para $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < k\varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, então a sequência (x_{n_j}) converge para L . Figueiredo(2015, pg. 19).

Prova: Dado ε/k e tomando $n_j = n$, como $\varepsilon/k > 0$, pela hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_j} - L| = |x_n - L| < k\varepsilon/k = \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Logo, $\lim x_{n_j} = L$

2.5 DESIGUALDADES

Teorema 2.7: Seja $a = \lim x_n$. Se $b < a$, então para todo n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$, então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande. Lima(2016, pg. 25)

Prova: Seja $\varepsilon = a - b$, temos $\varepsilon > 0$ e $b = a - \varepsilon$. Pela definição 2.3, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow b = a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow b < x_n$.

Para o caso $a < b$, tomando $\varepsilon = b - a$, temos $\varepsilon > 0$ e $b = a + \varepsilon$. Pela definição 2.3, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon = b \Rightarrow x_n < b$.

Teorema 2.8: (Teorema do confronto) Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $\lim z_n = a$. Lima(2016, pg. 27)

Prova: Seja $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então,

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon). \end{aligned}$$

Logo, $\lim z_n = a$.

2.6 OPERAÇÕES COM LIMITES

Teorema 2.9: Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então:

- (i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$
- (ii) $\lim(x_n - y_n) = a - b$
- (iii) $\lim(x_n y_n) = ab$
- (iv) Se (x_n) é limitada e $\lim y_n = 0$, então $\lim x_n y_n = 0$.
- (v) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$

Lima (2016).

Prova:

(i) Dado $\varepsilon > 0$, existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$, logo

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Lima(2016)

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$, logo

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (a - b)| &= |(x_n - a) + (-y_n + b)| \\ &\leq |x_n - a| + |-y_n + b| = |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\lim(x_n - y_n) = a - b$.

(iii) Dado $\varepsilon > 0$, existem números n_1 e n_2 tais que $|x_n - a| < \varepsilon$ para $n > n_1$ e $|y_n - b| < \varepsilon$ para $n > n_2$. Notemos que:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\leq |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|. \end{aligned}$$

Pelo teorema 2.2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n y_n - ab| \leq k|y_n - b| + |x_n - a||b|$$

Desse modo,

$$n > n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |x_n y_n - ab| \leq k\varepsilon + |b|\varepsilon = \varepsilon(k + |b|).$$

Como $k + |b|$ é constante, pelo teorema 2.6, $\lim x_n y_n = ab$. Figueiredo (2015)

(iv) Seja $k > 0$ tal que $|x_n| < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |y_n| < \frac{\varepsilon}{k}$$

Assim, $n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n - 0| = |x_n| |y_n| < \frac{\varepsilon}{k} k = \varepsilon$.

(v) Note $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{y_n b}$. Como o $\lim(x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$, basta mostrar que $(1/y_n b)$ é uma sequência limitada para concluir que $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right) = 0$ e portanto que $\lim(x_n/y_n) = a/b$. Tomando $c = b^2/2$, temos $0 < c < b^2$. Como $\lim y_n b = b^2$, pelo teorema 2.7, para todo n suficientemente grande, temos $c < y_n b$ e assim $1/y_n b < 1/c$. Lima(2016).

Exemplo 2.3: Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = a < 1$ então $\lim x_n = 0$. Lima(2016, pg.29)

Tomando $c \in \mathbb{R}$ com $a < c < 1$, assim $0 < x_{n+1}/x_n < c$ para todo n suficientemente grande. Logo, $0 < x_{n+1} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) x_n < c x_n < x_n$ e assim, para n suficientemente grande, a sequência (x_n) é monótona limitada. Sendo $b = \lim x_n$, como $x_{n+1} < c x_n$ para todo n suficientemente grande, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos $b \leq cb \Rightarrow b(1 - c) \leq 0$. Devido $b \geq 0$ e $0 < c < 1$, então $b = 0$. Lima(2016)

Exemplo 2.4: Sejam $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Seja $x_n = \frac{a^n}{n!}$, temos $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1}$, logo $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = 0$ e, pelo exemplo 2.3, $\lim x_n = 0$. Lima(2016).

3 SÉRIES NUMÉRICAS

Discutiremos nesse capítulo alguns tipos importantes de séries e em seguida aprenderemos a determinar se uma série converge ou diverge.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS E ALGUNS TIPOS DE SÉRIES

Definição 3.1: A expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

onde os termos a_n (n -ésimo termo ou termo geral da série) são números reais dados, é chamada uma *série numérica*. Formamos através da sequência (a_n) uma nova sequência (S_n) , chamada sequência das reduzidas ou somas parciais $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Se existir $S = \lim s_n$, então a série (3.1) *converge* e sua *soma* é S , isto é, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $\lim s_n$ não existir, diremos que a série (3.1) *diverge*. Figueiredo(2015).

Decorre da definição(3.1), para encontrarmos a soma de uma série basta calcularmos o limite da n -ésima reduzida. Essa ideia nos lembra do cálculo da integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x)dx$, isto é, integramos de 1 a b e então aplicamos $b \rightarrow \infty$. Do mesmo modo fazemos em séries, primeiro somamos de 1 a n e em seguida aplicamos $n \rightarrow \infty$.

Recordando do exemplo 2.2, temos $1 + 1 + 1/2! + \dots + 1/n! + \dots$ é uma série convergente, com soma igual a e . Agora veremos alguns exemplos de séries convergentes e divergentes.

Exemplo 3.1: A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ é convergente e sua soma é 1. De fato, utilizando a identidade $\sum_{k=1}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$ ($t \neq 0$ e $t \neq 1$), temos a soma parcial $s_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, temos $\lim s_n = 1$.

Exemplo 3.2: A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ é divergente, pois a soma parcial s_n é igual a zero quando n é par e igual a 1 quando n é ímpar. Logo, $\lim s_n$ não existe. Lima(2016)

Exemplo 3.3: (Série geométrica) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ com soma igual a $1/(1 - a)$ é convergente quando $|a| < 1$. Se $|a| \geq 1$, a série geométrica é divergente. Com efeito,

subtraindo $s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ de $as_n = a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1}$ temos:

$$\begin{aligned} s_n - as_n &= 1 - a^{n+1} \\ \Rightarrow s_n(1 - a) &= 1 - a^{n+1} \\ \Rightarrow s_n &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \\ &= \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a} \end{aligned}$$

Se $|a| < 1$, temos $a^{n+1} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, implicando $\lim s_n = 1/(1 - a)$ e portanto a *convergência* da série. No caso $|a| > 1$, quando $n \rightarrow \infty$ temos $a^{n+1} \rightarrow \infty$ e assim $\lim s_n = -\infty$ concluindo a *divergência* da série. Lima(2016).

Exemplo 3.4: (Série harmônica) A série harmônica é divergente. De fato, se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = s$ fosse convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = a$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = b$ também seriam convergentes. Além disso, como $s_n = a_n + b_n$, fazendo $n \rightarrow \infty$ teríamos $a = b = s/2$. Por outro lado

$$\begin{aligned} a - b &= \lim(a_n - b_n) \\ &= \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &= \lim \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} \right) > 0 \end{aligned}$$

logo $a > b$. Contradição. Lima(2016).

Exemplo 3.5: (Série telescópica)¹. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, no qual o termo geral $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, tem n -ésima soma parcial:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

e, portanto, $\lim s_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

¹ Nessa série os termos se cancelam em pares. Devido a todos os cancelamentos, a soma se contrai (como um antigo telescópio) em apenas dois termos. Stewart(pg. 639, 2016)

3.2 CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO

Teorema 3.1: Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq cb_n$ para todo $n > n_0$, então a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enquanto que a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Lima(2016, pg. 40). Esse teorema é conhecido por **critério de comparação**.

Prova: Supondo $a_n \leq cb_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, as reduzidas s_n e t_n , de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ respectivamente, formam sequências não-decrescentes tais que $s_n \leq ct_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Caso 1 ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente): Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente temos (t_n) limitada, implicando que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $-k \leq s_n \leq t_n \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, assim (s_n) é limitada. Pelo teorema 2.4, s_n é convergente e consequentemente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente.

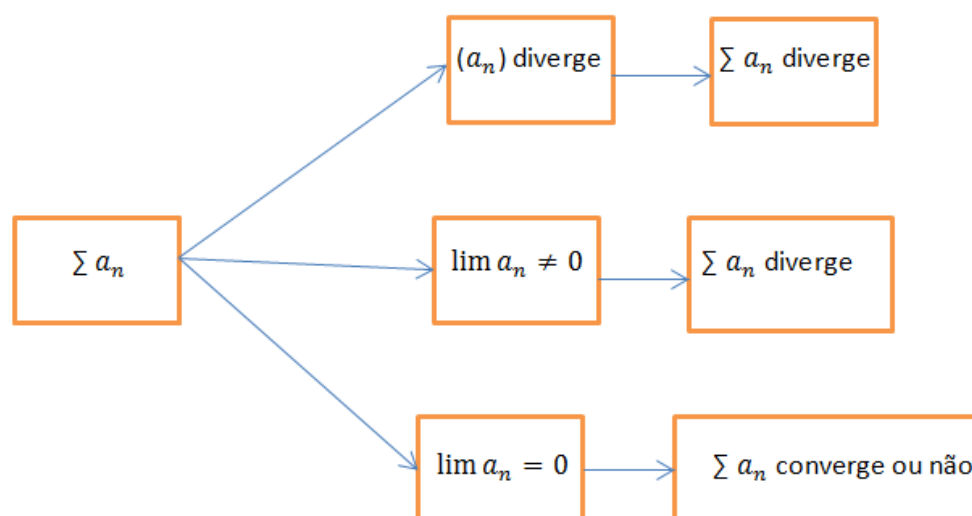
Caso 2 ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente temos (s_n) ilimitada, isto é, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ grande quanto quisermos, vai existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq \frac{s_n}{c} > k$, assim (t_n) é ilimitado, logo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente. Lima(2016).

Teorema 3.2: O termo geral de uma série convergente tem limite zero. Lima(2016, pg.40).

Prova: Supondo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, com reduzida s_n e soma S . Como $a_n = s_n - s_{n-1}$, então $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = S - S = 0$. Desse teorema vem que: Se $\lim a_n$ não existir ou se $\lim a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. Lima(2016).

Em outras palavras o teorema afirma que se o limite do termo geral de uma série é diferente de zero, então a série diverge. Agora, quando o termo geral tem limite igual a zero, apenas com essa informação, nada podemos concluir a respeito da série. A Figura 4 resume os casos.

Figura 4 – Análise do termo geral de uma série



Fonte: Elaborada pelo autor

3.3 SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Definição 3.2: Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Caso, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ chama-se *condicionalmente* convergente. Lima(2016).

Teorema 3.3: *Toda série absolutamente convergente é convergente.* Lima(2016, pg. 41).

3.4 TESTES DE SÉRIES

Teorema 3.4: (Teste de Leibniz.) Seja (a_n) uma sequência de números reais não-negativos, tais que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ e $\lim a_n = 0$. A série $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ converge. Figueiredo(2015).

Prova: Seja $s_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$. Inicialmente, observe que a sequência das reduzidas de ordem par é não-decrecente, pois

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

onde a cada parêntese a expressão formada é não-negativa.

E as reduzidas de ordem ímpar formam uma sequência não-crescente:

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

onde a cada parêntese a expressão formada é não-negativa.

Além disso, como $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$, temos $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0$ implicando $s_{2n-1} \geq s_{2n}$, isto é:

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1$$

Concluimos que as sequências (s_{2n}) e (s_{2n-1}) são monótonas limitadas e, portanto, pelo teorema 2.3 convergentes.

Como $\lim a_n = 0$, pelo teorema 2.4, $\lim a_{2n} = 0$, logo $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$. Devido ao teorema 2.5, temos (s_n) converge, isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n)$ converge. Figueiredo (2015).

Uma reduzida s_n de qualquer série convergente é uma aproximação para a soma total S . É útil pensar nisso somente se pudermos estimar a precisão da aproximação. O erro envolvido na aproximação $S \approx s_n$ é o resto $R_n = S - s_n$. O teorema a seguir nos mostra que para séries que satisfazem as condições do teste de Leibniz, o erro é menor que a_{n+1} , que é valor absoluto do primeiro negativo.

Teorema 3.5(Estimativa de séries alternadas) Se $s = \sum (-1)^{n-1} a_n$ for a soma de uma série alternada com $a_{n+1} \leq a_n$ e $\lim a_n = 0$, então $|R_n| = |s - s_n| \leq a_{n+1}$. Stewart(2016).

Prova: De fato, sabemos que s está entre duas somas parciais s_n e s_{n+1} quaisquer. Assim,

$$\begin{aligned} s_{n+1} \leq s \leq s_n &\Rightarrow s_{n+1} - s_n \leq s - s_n \leq 0 \\ &\Rightarrow |s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Teorema 3.6: Seja uma série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência (a_n/b_n) for limitada (em particular, se for convergente) então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será absolutamente convergente. Lima (2016, pg. 42)

Corolário 3.6.1 (Teste de d' Alembert ou da razão): Seja $a_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma constante c tal que $|a_{n+1}/a_n| \leq c < 1$ para todo n suficientemente grande (em particular, se $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$), então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será absolutamente convergente. Lima (2016, pg. 42).

Observação:

(i) Se $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente e, portanto converge.

(ii) Se $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) Se $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, então a série pode convergir (por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$) ou divergir (por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$).

Teorema 3.7 (Teste de Cauchy): Quando existe um número real c tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (em particular, quando o $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$) a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente. Lima (2016, pg. 43).

Observação:

(i) Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente e, portanto converge.

(ii) Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então a série pode convergir (por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$) ou divergir (por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$).

Teorema 3.8: Seja (a_n) uma sequência cujos termos são diferentes de zero. Se $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$, então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Lima (2016, pg. 43).

4 SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Imagine a seguinte situação: uma sequência de funções $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ dada por uma regra, na qual se aproxima da função $f(x)$ conforme $n \rightarrow \infty$. Essa ideia será abordada nesse capítulo e servirá de base para o estudo de séries de funções. Vale ressaltar que em sequências e séries numéricas há apenas uma noção de limite, mas para funções há várias. Aqui estudaremos apenas duas dessas várias: Convergência simples e convergência uniforme.

Definição 4.1 (Sequências de funções): Uma sequência de funções é uma sequência $n \mapsto f_n$ ($n \in \mathbb{N}$), onde cada f_n é uma função. Aqui estudaremos apenas sequências de funções de uma variável real.

4.1 CONVERGÊNCIA SIMPLES

Definição 4.2 Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{N}$ converge simplesmente para $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ se, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ existe n_0 (dependendo de ε e de x) tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

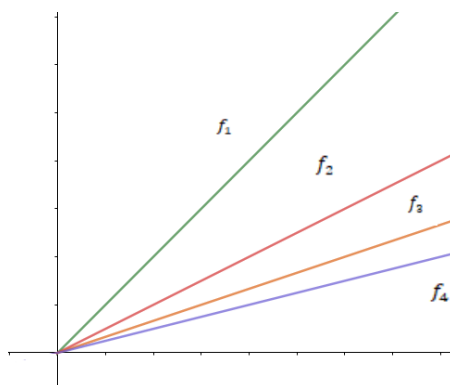
Lima(2016).

Para compreender melhor a definição de convergência simples, vejamos um exemplo interessante.

Exemplo 4.1: A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, na qual $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge simplesmente para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é identicamente nula. Concluimos isso, de fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixo, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$. Lima(2016).

Observe a Figura 5.

Figura 5 – Sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 4.2: Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = x^n$. A sequência de funções f_n converge simplesmente, em $] -1, 1]$, à função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Isso significa que para todo $x \in] -1, 1]$

$$\lim f_n(x) = f(x).$$

De fato, para $x = 1$, temos:

$$\lim f_n(1) = \lim 1^n = 1 = f(1).$$

Para $-1 < x < 1$, temos:

$$f_n(x) = \lim x^n = 0 = f(x)$$

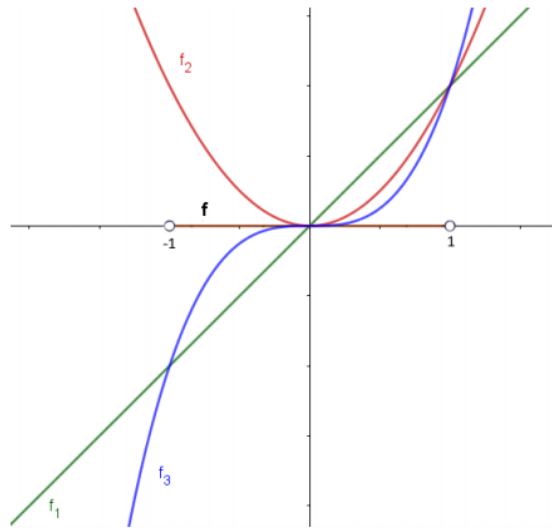
Para $|x| > 1$, temos:

$$f_n(x) = \lim x^n = +\infty$$

e para $x = -1$ $f_n(x) = \lim x^n$ diverge, pois $\lim f_{2n}(x) \neq \lim f_{2n-1}$. Portanto,

$$\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in] -1, 1].$$

O comportamento do gráfico do exemplo 4.2 segue na Figura 6:

Figura 6 – $f(x)$ e algumas funções $f_n(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Um tipo de convergência mais restrito do que a simples é a *convergência uniforme*.

4.2 CONVERGÊNCIA UNIFORME

Definição 4.3 Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ *converge uniformemente* para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe n_0 (dependendo apenas de ε) tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

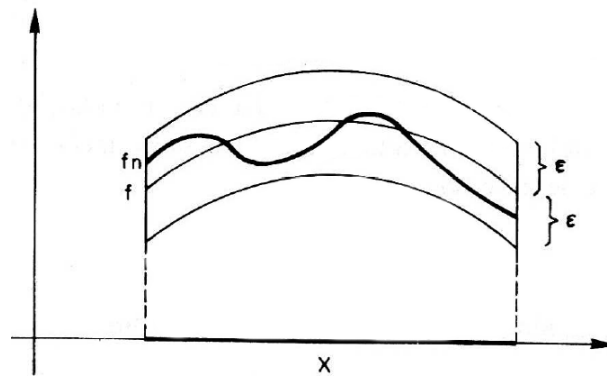
Lima(2016).

Observe a Figura 7.

Geometricamente é fácil interpretar a convergência uniforme. Significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que os gráficos de todas as funções estão contidos na faixa delimitada pelos gráficos das funções $f(x) + \varepsilon$ e $f(x) - \varepsilon$. Caso a convergência não seja uniforme, para uma infinidade de valores n , existe $\varepsilon > 0$ tal que gráfico de f não está totalmente contido na faixa de raio r .

Exemplo 4.3 Seja ainda a sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Não é possível delimitar uma faixa $(f(x) + \varepsilon, f(x) - \varepsilon)$ que possa conter o gráfico de uma função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, essa sequência não converge uniformemente para zero. Mas, se restringirmos o domínio das funções f_n ao intervalo $|x| \leq c$ para todo $x \in X$, então $f_n \rightarrow 0$ uniformemente. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0 > c/\varepsilon$, então $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |x|/n < c/n_0 < \varepsilon$. Lima(2016).

Figura 7 – Convergência uniforme



Fonte: Lima(2006)

Teorema 4.1 Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx.$$

Lima (2016, pg. 161).

Teorema 4.2 (Teste de Weierstrass): Dada a sequência de funções $f_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de números reais $a_n \geq 0$ tais que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{X}$. Assim, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ são uniformemente convergentes. Lima (2016, pg. 163-164).

Definição 4.3: (Séries de funções) Uma série de funções é uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ onde cada f_n é uma função. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge, em X à função $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $x \in X$,

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

O que significa que, para cada $x \in \mathbb{X}$, $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n f_n(x)$

A função $s = s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, denomina-se soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Note que o domínio de s é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Guidorizzi (2013, v.4)

5 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesse capítulo veremos o conceito chave para o estudo de séries de Taylor e alguns dos seus resultados principais.

Definição 5.1 Seja (a_n) , $n \geq 0$, uma sequência numérica dada e seja x_0 um número real. A série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

é chamada série de potências centrada em x_0 . Séries desse tipo formam uma generalização natural de polinômios. Se $x_0 = 0$, temos a série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

Lima(2016).

Exemplo 5.1: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n / n!$ é uma série de potências centrada em zero e com coeficientes $a_n = 1/n!$. Essa série converge para todo valor de x , pelo Corolário 3.5.1. Guidorizzi (2013, v.4)

Teorema 5.1: Seja a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Existem apenas as seguintes possibilidades:

(i) ou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge apenas para $x = 0$;

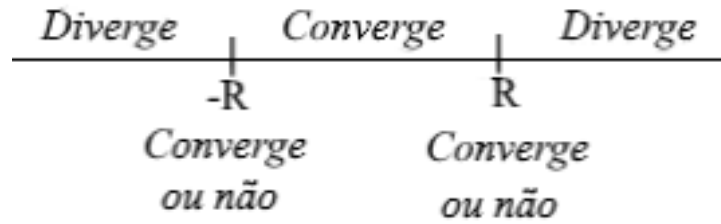
(ii) ou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x real;

(iii) ou existe $R > 0$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x no intervalo $(-R, R)$ e diverge fora do intervalo $[-R, R]$. Nos extremos $-R$ e R a série pode convergir ou não. Guidorizzi (2013, v.4). Graficamente, temos:

Exemplo 5.2: Para encontrarmos o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1} x^{n-1}}{\sqrt{n}},$$

Figura 8 – Item (iii), teorema 5.1



Fonte: Elaborada pelo autor

seja $a_n = (-3)^{n-1}x^{n-1}/\sqrt{n}$. Então,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(-3)^{n-1} x^{n-1}} \right| \\ &= \left| -3x \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right| = 3 \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} |x| \\ \Rightarrow \lim 3 \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} |x| &= 3|x| \end{aligned}$$

Pelo teste da razão a série converge se $3|x| < 1$ e diverge se $3|x| > 1$, isto é, converge se $|x| < 1/3$ e diverge se $|x| > 1/3$. Implicando que o raio de convergência é $1/3$.

A série converge no intervalo $(-1/3, 1/3)$, testando a convergência nas extremidades: Se $x = -1/3$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1} x^{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$$

que diverge. Se $x = 1/3$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1} x^{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

que converge, pelo teorema 3.4. Concluimos, o intervalo de convergência da série é $(-1/3, 1/3]$. Stewart(pg. 672, 2016)

Teorema 5.2: Se os coeficiente a_n forem diferentes de zero e existir $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$, então o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é $r = 1/L$. Lima(2016, pg. 166)

Teorema 5.3 (Derivação termo a termo): Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) =$

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, é derivável, com $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_nx^{n-1}$ e a série de potências de $f'(x)$ ainda tem raio de convergência r . Lima (2016, pg. 166).

Teorema 5.4 (Integração termo a termo): Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Então,

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = K + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n + 1}$$

Stewart(pg. 675, 2016)

6 REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES COMO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Como vimos anteriormente, séries de potências formam uma generalização natural de polinômios. Assim, representar certos tipos de funções como séries de potências é útil, pois seus termos: são simples para integrar, infinitamente diferenciáveis e fáceis de resolver para qualquer número x . Mais a frente veremos que esse método é essencial para aproximar uma função ao redor de um ponto, integrar funções que não tem antiderivadas elementares e resolver equações diferenciais. Nesse momento, representaremos funções como séries de potências utilizando as seguintes estratégias: manipulação de séries geométricas; derivação; integração. Essas estratégias foram utilizadas por Newton no início do Cálculo, no século XVIII.

Vejamos:

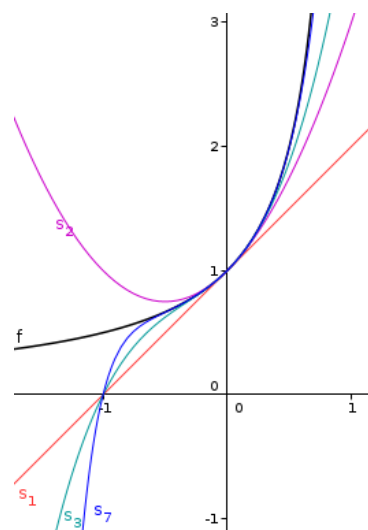
Série da função $\frac{1}{1-x}$

Anteriormente vimos no exemplo 3.3:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad (6.1)$$

Sendo $s_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ e $f(x) = \frac{1}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, graficamente temos a Figura 9:

Figura 9 – $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais s_n



Fonte: Elaborada pelo autor

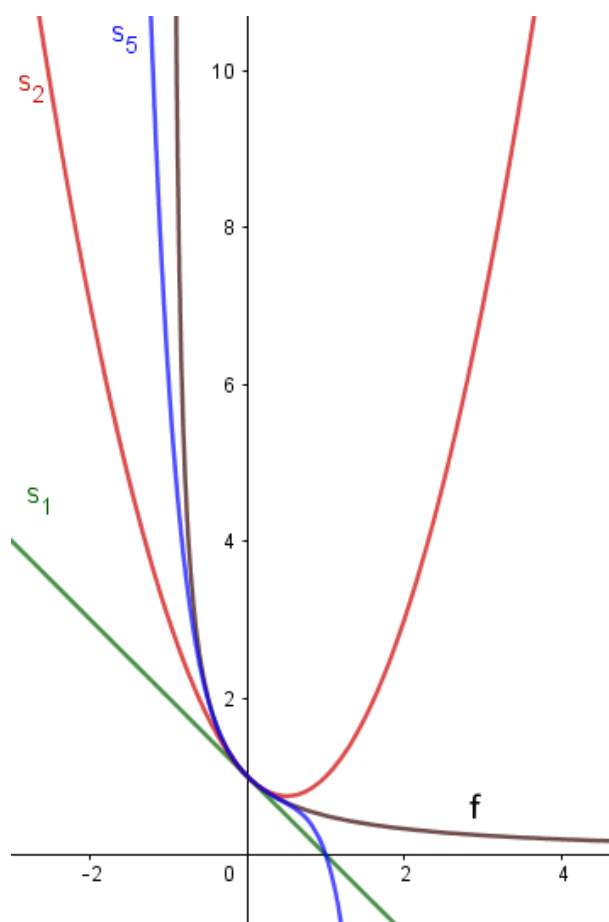
Série da função $\frac{1}{1+x}$

Da equação 6.1, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\end{aligned}$$

Devido essa ser uma série geométrica, a mesma converge quando $|-x| < 1$, ou seja, $-1 < -x < 1$ implicando $|x| < 1$. Assim seu intervalo de convergência é $(-1,1)$. Sendo $s_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ e $f(x) = \frac{1}{1+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, a Figura 10 ilustra o comportamento dessa série:

Figura 10 – $f(x) = \frac{1}{1+x}$ e algumas somas parciais s_n



Fonte: Elaborada pelo autor

Série da função $\frac{1}{1+x^2}$

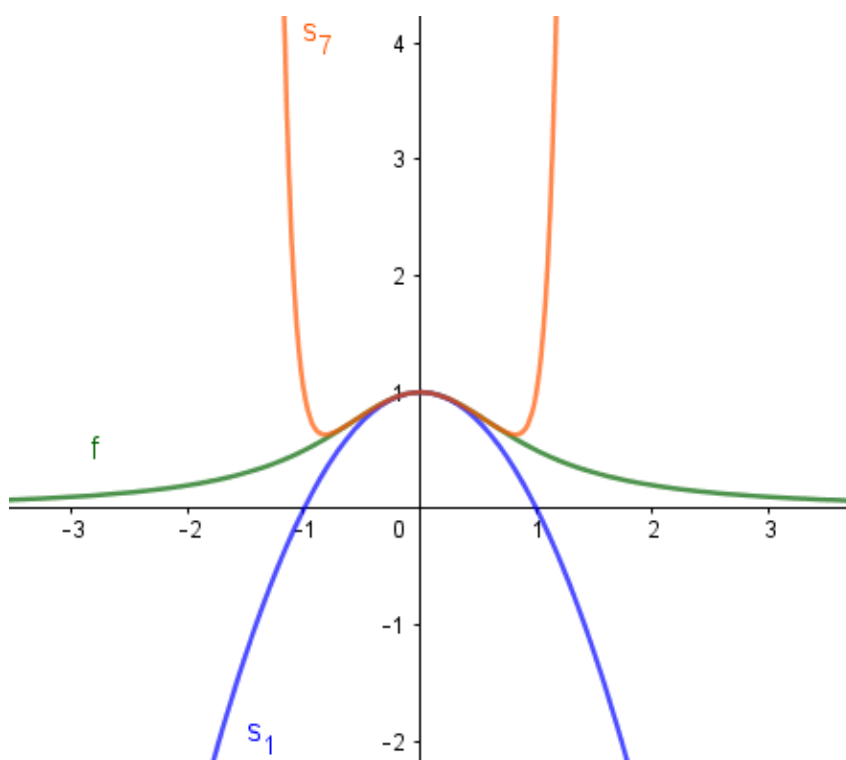
Substituindo x por x^2 na equação 6.1, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots\end{aligned}\quad (6.2)$$

Stewart(2016).

Neste caso também temos uma série geométrica, assim ela converge quando $|-x^2| < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$. Tomando $s_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ e $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, graficamente na Figura 11:

Figura 11 – $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e algumas somas parciais s_n



Fonte: Elaborada pelo autor

Série da função $\ln(x+1)$

Sabemos que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \int (1 - x + x^2 - \dots) dx \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + K \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + K \quad |x| < 1 \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

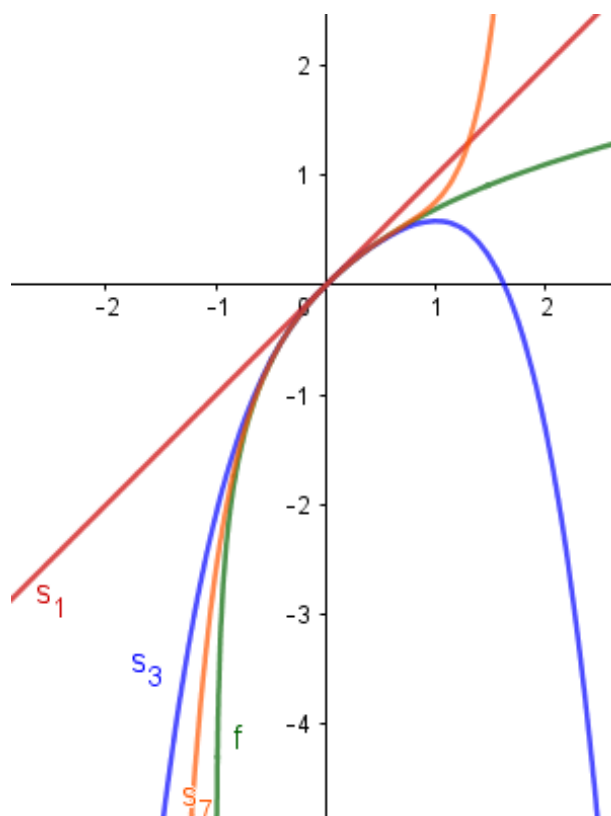
Para encontrar o valor de K tomamos $x = 0$ na equação 6.4 e obtemos $\ln(1+0) = K \Rightarrow K = 0$.

Esta série converge no intervalo aberto $(-1,1)$ e pelo teorema 3.4 também converge para $x = 1$ e diverge para $x = -1$. Stewart(2016).

Seja $s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ e $f(x) = \ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, graficamente na

Figura 12:

Figura 12 – $f(x) = \ln(x+1)$ e algumas somas parciais s_n



Fonte: Elaborada pelo autor

Série da função $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x)$ (Série de Gregory)

Como $f'(x) = 1/(1+x^2)$ e pela equação 6.3, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1}(x) &= \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8) dx \\ &= K + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

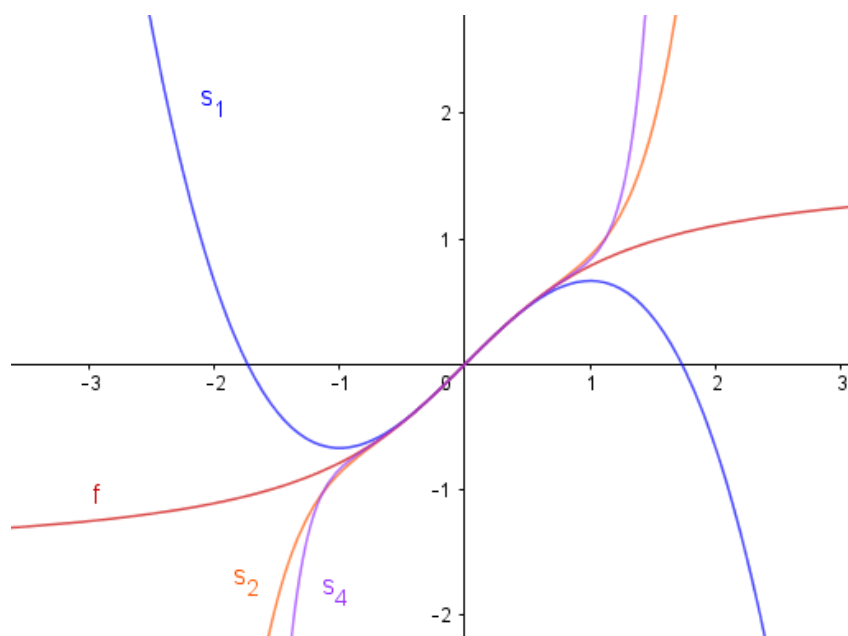
Para determinarmos K , tomamos $x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^{-1}(0) = 0 = K$. Assim,

$$\operatorname{tg}^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (6.4)$$

A série da função $\operatorname{tg}^{-1}(x)$ converge no intervalo $[-1, 1]$.

Tomando $s_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ e $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, graficamente na Figura 13:

Figura 13 – $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x)$ e algumas somas parciais s_n



Fonte: Elaborada pelo autor

No capítulo 8 veremos como representar outras funções: exponencial e trigonométricas ($\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{cos}(x)$ e $\operatorname{tg}(x)$)

7 SÉRIES DE TAYLOR

No capítulo anterior aprendemos a escrever funções como séries de potências, mas chega a um ponto que os métodos que aplicamos se tornam restritos. Veremos agora uma ferramenta que expande esse horizonte.

Observação: A série de Taylor é um tipo de série de potências e ainda temos uma subcategoria de séries de Taylor: Séries de Maclaurin. As séries de Maclaurin são mais simples de trabalhar, porém as séries de Taylor são mais eficazes embora mais trabalhosas do que as de Maclaurin.

Teorema 7.1: Se f tiver uma representação em séries de potências em a , ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad |x-a| < R,$$

então, seus coeficientes são dados por:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Stewart(2016) **Prova:** Seja f uma função qualquer que pode ser representada por uma série de potências.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots \quad |x-a| < R \quad (7.1)$$

Quando $x = a$ na equação 7.1, obtemos: $f(a) = c_0$.

Aplicando o teorema 5.5 na equação 7.1:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \quad |x-a| < R \quad (7.2)$$

e fazendo $x = a$ na equação 6.5, decorre: $f'(a) = c_1$

Derivando membro a membro da equação 7.1:

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + 3.4c_4(x-a)^2 + \dots \quad |x-a| < R \quad (7.3)$$

Na equação 7.3 colocando $x = a$, temos $f''(a) = 2c_2$ Aplicando novamente a mesma ideia na equação 7.3:

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4(x-a) + \dots \quad |x-a| < R \quad (7.4)$$

e substituindo $x = a$ na equação 7.4, obtemos $f'''(a) = 2.3c_3 = 3!c_3$

É possível perceber o padrão. Continuando a derivar e substituir $x = a$, temos:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= 2.3.4.5. \dots .n.c_n = n!c_n \\ \Rightarrow c_n &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{aligned}$$

Substituindo $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ em $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots \end{aligned} \quad (7.5)$$

A série da equação acima é conhecida por **série de Taylor da função f em torno de a** . Para $a = 0$, temos o caso especial da série de Taylor: **Série de Maclaurin**, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots \quad (7.6)$$

Observação: Se f puder ser representada como uma série de potências em torno de a , então f é igual soma de sua série de Taylor. Por outro lado, existem funções que não são iguais a soma de suas séries de Taylor. Stewart(2016).

Teorema 7.2: Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n -ésima grau de f em a e

$$\lim R_n(x) = 0$$

para $|x-a| < R$, então f é igual a soma de sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$. Stewart(2016, pg.682).

Teorema 7.3 (Desigualdade de Taylor): Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \quad \text{para } |x-a| \leq d.$$

Stewart(2016, pg.682).

8 APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE TAYLOR

8.1 APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES AO REDOR DE UM PONTO

Agora, aplicaremos as séries de Taylor para representar funções através de séries e fazer um estudo de aproximações de funções ao redor de um ponto.

Série da função exponencial

Sendo $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, logo $f^{(0)} = e^0 = 1$ para todo n . Assim, a série de Taylor para f em 0 (série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (8.1)$$

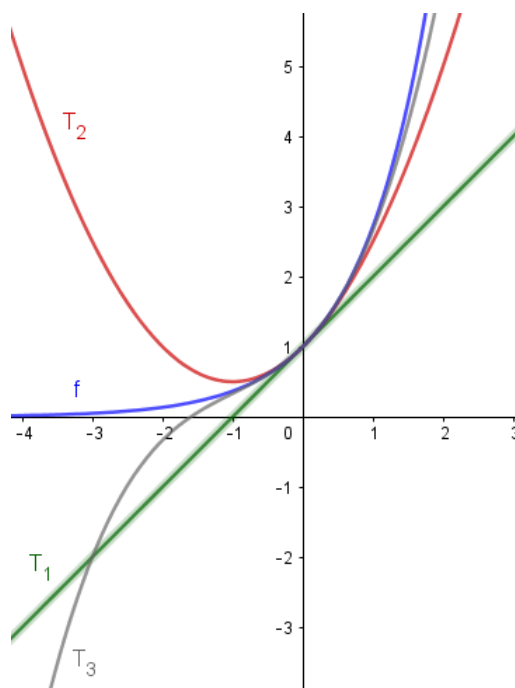
Mostrando que $f(x) = e^x$ é igual a soma da sua série de Maclaurin. Vemos que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n . Se d é um número positivo qualquer. Logo, a desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

A mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n . Porém, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para todo x real (exemplo 2.4), temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} = e^d \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Pelo teorema do confronto $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ e, assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x . Decorre do teorema 7.2, $f(x) = e^x$ é igual a soma de sua série de Maclaurin. Seja $T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, graficamente temos na Figura 14:

Figura 14 – $f(x) = e^x$ e alguns polinômios de Maclaurin $T_n(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Veja que T_n é um polinômio de grau n , conhecido como polinômio de Taylor de n -ésimo grau da função f em a . Observamos na Figura 14, quando n aumenta $T_n(x)$ aproxima-se de $f(x) = e^x$.

A série de Maclaurin da função $\text{sen}(x)$

Determinando as primeiras derivadas da função e substituindo 0 por x em cada uma dessas derivadas, temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{sen}(x) & f(0) &= 0 \\
 f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\
 f''(x) &= -\text{sen}(x) & f''(0) &= 0 \\
 f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\
 f^4(x) &= \text{sen}(x) & f^4(0) &= 0
 \end{aligned}$$

Note que as derivadas se repetem a cada quatro, podemos usar a série de Maclaurin, escrevendo do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\
 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots
 \end{aligned}$$

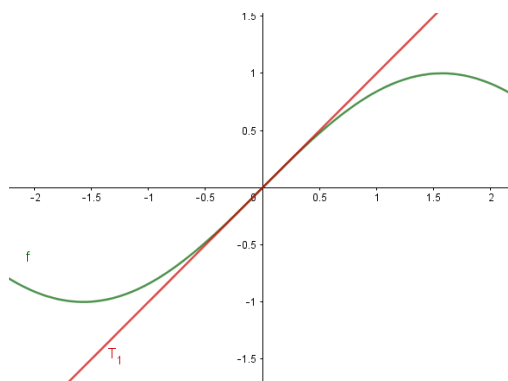
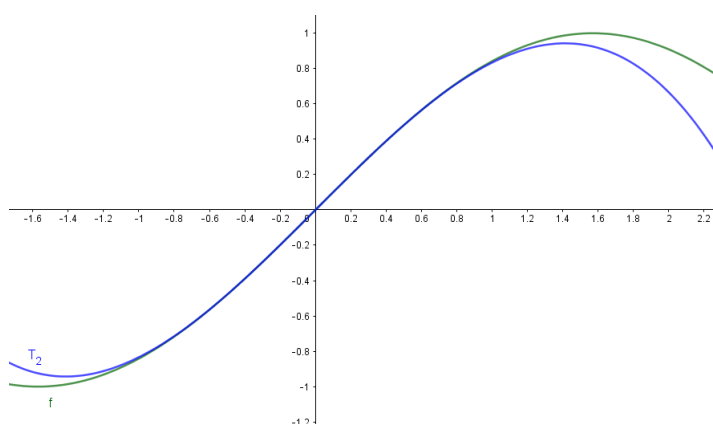
Como $f^{(n+1)}$ é $\pm \text{sen}(x)$ ou $\pm \cos(x)$, concluímos que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo x . Logo, tomando $M = 1$ na desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Novamente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, o lado direito da desigualdade tende para zero quando n tende ao infinito, desta forma $|R_n(x)| \rightarrow 0$ pelo teorema do confronto. Assim, $|R_n(x)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, portanto, $\text{sen}(x)$ é igual a soma de sua série de Maclaurin pelo teorema 7.2. Isto é,

$$\begin{aligned} \text{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \end{aligned} \quad (8.2)$$

Abaixo nas Figuras 15 e 16 observamos o comportamento do polinômio de Maclaurin $T_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$ próximo de 0 e da função $f(x) = \text{sen}(x)$. Vemos que o polinômio $T_n(x)$ é uma boa aproximação de $f(x) = \text{sen}(x)$ para valores de x próximos de 0.

Figura 15 – $f(x) = \text{sen}(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_1(x)$ Figura 16 – $f(x) = \text{sen}(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_2(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

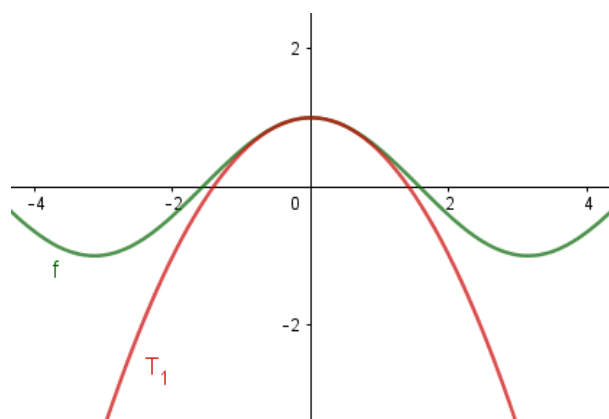
Série de Maclaurin da função $\cos(x)$

$$\begin{aligned}
 \cos(x) &= \frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\
 &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

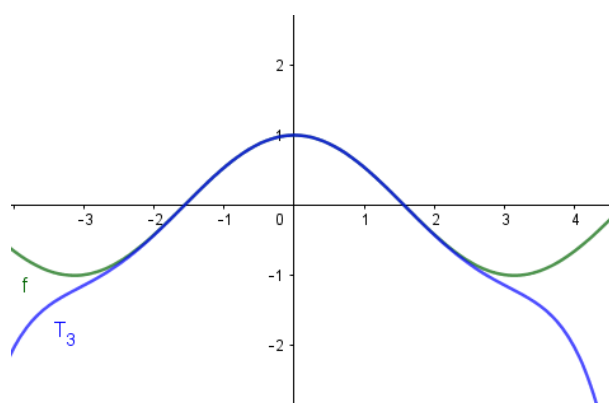
A série de Maclaurin para $\text{sen}(x)$ converge para todo x , assim pelo teorema 5.5 a série para $\cos(x)$ também converge para todo x . Logo,

$$\begin{aligned}
 \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Nas Figuras 17 e 18 observamos o comportamento do polinômio $T_{n-1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$ próximo de 0 e da função $f(x) = \cos(x)$. Vemos que o polinômio $T_n(x)$ é uma boa aproximação de $f(x) = \cos(x)$ para valores de x próximos de 0.

Figura 17 – $f(x) = \cos(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_1(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18 – $f(x) = \cos(x)$ e polinômio de Maclaurin $T_3(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Série de Taylor da função $\sin(x)$ ao redor do ponto $\pi/3$

Representaremos agora a função $f(x) = \sin(x)$ como uma soma de série de Taylor centrada em $\pi/3$. Determinando as primeiras derivadas da função e substituindo $\pi/3$ por x em cada uma dessas derivadas, temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x) & f(\pi/3) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 f'(x) &= \cos(x) & f'(\pi/3) &= \frac{1}{2} \\
 f''(x) &= -\sin(x) & f''(\pi/3) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(\pi/3) &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{8.5}$$

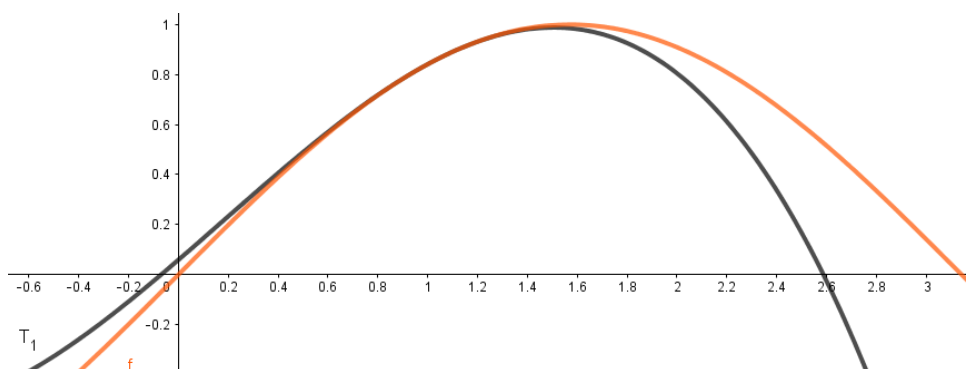
Esse padrão se repete. Substituindo os valores encontrados, termo a termo, na equação da série de Taylor, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2.1!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2.2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2.3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \quad (8.6)
\end{aligned}$$

Observamos nas Figuras 19 e 20 observamos o comportamento do polinômio

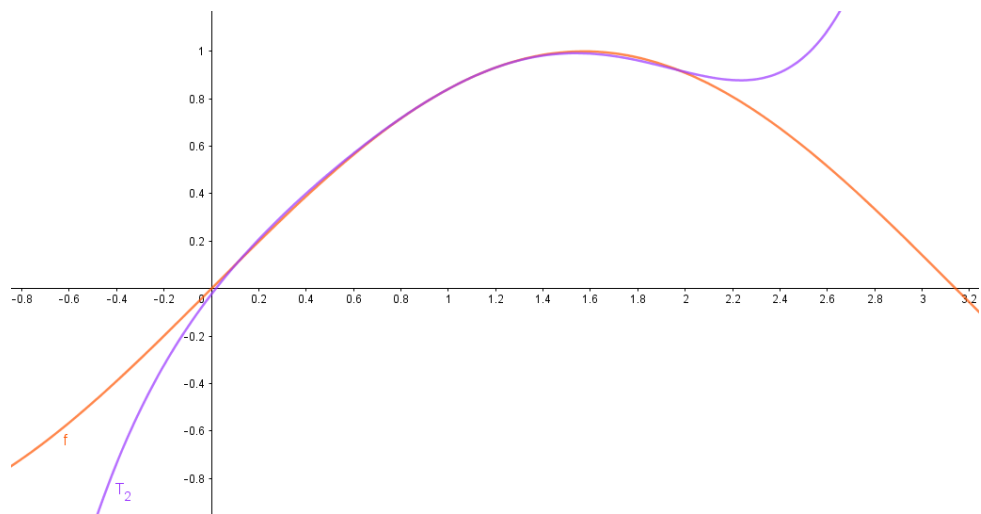
$$T_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \sqrt{3}}{2(2i)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2i} + \sum_{n=0}^i \frac{(-1)^i}{2(2i+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2i+1} \text{ próximo de } \pi/3 \text{ e da função } f(x) = \operatorname{sen}(x).$$

Figura 19 – $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e polinômio de Taylor $T_1(x)$ em torno de $\pi/3$



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 20 – $f(x) = \text{sen}(x)$ e polinômio de Taylor $T_2(x)$ em torno de $\pi/3$



Fonte: Elaborada pelo autor

Vemos que o polinômio $T_n(x)$ é uma boa aproximação de $f(x) = \text{sen}(x)$ para valores de x próximos de $\pi/3$, mas não é tão boa para x próximo de 0, assim como o polinômio T_n de Maclaurin da função seno. Compare o polinômio de Maclaurin T_2 na figura 16 com o polinômio de Taylor T_2 na figura 20.

A tabela abaixo apresenta um resumo das séries de Maclaurin desenvolvidas até o momento.

Tabela 1 – Algumas séries de Maclaurin e seus intervalos de convergência

Função	Série de Maclaurin	Intervalo de convergência
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$	$(-1, 1)$
$\ln(x+1)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$(-\infty, \infty)$
$\text{tg}^{-1}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1, 1]$
$\text{sen}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty, \infty)$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty, \infty)$

Fonte: Elaborada pelo autor

Série de Maclaurin da função $\operatorname{tg}(x)$

Usando a tabela, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots} \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots \end{aligned}$$

Informação adicional

Vimos anteriormente, por exemplo, no gráfico da figura 14 conforme aumentamos n no polinômio $T_n(x)$ melhor a aproximação para a função $f(x) = e^x$. Quando fazemos o uso de polinômios para aproximar funções, temos que se questionar quão boa é aproximação e quão grande devemos fazer n para obtermos a precisão desejada. A resposta para esses questionamentos está no resto: $|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$. Segue os métodos que podemos utilizar para estimar o tamanho do erro:

(i) Se a série for alternada use o teorema da estimativa de séries alternadas (Teorema 3.5).

(ii) Para todos os casos use a desigualdade de Taylor (Teorema 7.2).

No momento esse não é nosso objeto de estudo, para mais detalhes consulte a referência Stewart (2016).

8.2 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES

Outra razão pela qual as séries de Taylor são úteis é que permitem integrar funções que não são resolvidas com as técnicas usuais como: Integração por partes; substituição Trigonométrica; integração de funções Racionais por frações parciais.

Cálculo de $\int e^{-x^2} dx$

Como já sabemos a série de Maclaurin para $f(x) = e^x$, basta substituir x por $-x^2$ na série para a função $f(x) = e^x$.

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int e^{-x^2} dx &= \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx \\ &= K - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + K\end{aligned}$$

Cálculo de $\int x \cos(x^3) dx$.

Vimos anteriormente que:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\cos(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} \\ \Rightarrow x \cos(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+1}}{(2n)!}\end{aligned}$$

Pelo teorema 5.6,

$$\int x \cos(x^3) dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!} + K$$

Cálculo de $\int \frac{e^x - 1}{x} dx$.

Sabemos pela equação (8.1) obtida anteriormente:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Logo,

$$\begin{aligned}e^x - 1 &= \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \frac{e^x - 1}{x} &= \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n)!}\end{aligned}$$

Concluimos,

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n \cdot n)!} + K$$

Cálculo de $\int tg^{-1}(x^2)dx$.

Pela equação 6.5:

$$\begin{aligned} tg^{-1}(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1} \end{aligned}$$

Decorre do teorema 5.6:

$$\int tg^{-1}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} + K$$

8.3 CÁLCULO DE LIMITE

No cálculo de limites as vezes nos deparamos com a indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$. A saída para esse tipo de problema é aplicação da regra de L' Hôpital, mas em alguns casos é preferível aplicar a série de Maclaurin.

Exemplo 8.3.1 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Aplicando a série de Maclaurin da função e^x , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 - x}{x^2} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stewart(2016, pg. 688)

Exemplo 8.3.2 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x) - x}{x^3}$.

Usando a série de Maclaurin para a função $tg(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots - x}{x^3} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} + \frac{2}{5}x^2 + \dots = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{8.3}$$

8.4 SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS AO REDOR DE UM PONTO

Nem sempre é possível encontrar a solução de uma equação diferencial ordinária através da manipulação de funções elementares e assim temos que recorrer a séries.

A aplicação desse método se dá pelos seguintes passos:

- (i) Escrevemos a possível em soma de série;
- (ii) Derivamos a quantidade de vezes necessárias de acordo com a EDO.
- (iii) Substituímos as derivadas na EDO.
- (iv) Calculamos os coeficientes da série.

A equação de Bessel, de Legendre, de Airy, de Jacobi, dentre outras, são casos de equações diferenciais ordinárias importantes nesse âmbito. Vejamos alguns exemplos:

Equação $y''(x) = -y(x)$ ao redor do ponto $a = 0$

Encontrarmos solução em série para esta equação seguindo os passos mencionados anteriormente. Considerando $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ e derivando-a quantas vezes necessário em torno do ponto $a = 0$, temos:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \\ y'(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots \\ y''(x) &= 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots \end{aligned}$$

Da igualdade $y''(x) = -y(x)$, temos:

$$\begin{aligned} 2c_2 &= -c_0 \\ 6c_3 &= -c_1 \\ 12c_4 &= -c_2 \\ 20c_5 &= -c_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos que os coeficientes de índices pares estão relacionados:

$$\begin{aligned} c_2 &= -c_0/2 = -c_0/2! \\ c_4 &= -c_2/12 = c_0/24 = c_0/4! \\ &\vdots \\ c_n &= (-1)^n \frac{1}{2n!} c_0 \end{aligned}$$

Observamos também que os coeficientes de índices ímpares estão relacionados:

$$\begin{aligned} c_3 &= -c_1/6 = -c_1/3! \\ c_5 &= -c_3/20 = c_1/120 = c_1/5! \\ &\vdots \\ c_{2n+1} &= (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} c_1 \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a solução geral da equação

$$y''(x) = -y(x)$$

como

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Se aplicarmos o teste da razão veremos que essa série converge para $-\infty < x < \infty$. c_0 e c_1 são definidas pelas condições iniciais. Pelas equações 7.13 e 7.14 a solução geral é equivalente a

$$y(x) = c_0 \cos(x) + c_1 \sin(x)$$

Equação de Airy ao redor do ponto $a = 1$

A equação de Airy é dada por

$$y'' - xy = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

A seguir encontraremos a solução geral dessa equação ao redor do ponto $a = 1$.

Considerando a solução geral igual a $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ e derivando-a quantas vezes necessário em torno do ponto $a = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n \\
y'(x) &= c_1 + 2c_2(x-1) + 3c_3(x-1)^2 + 4c_4(x-1)^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n(x-1)^{n+1} a_{n+1}(x-1)^n \\
y''(x) &= 2c_2 + 6c_3(x-1) + 12c_4(x-1)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n
\end{aligned}$$

Substituindo na equação de Airy, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = 0$$

Podemos determinar a série de Taylor de $f(x) = x$ em torno do ponto $c_0 = 1$, tomando $x = 1 + (x-1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n - [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^{n+1} \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}(x-1)^n
\end{aligned}$$

Segue a equação:

$$2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}(x-1)^n$$

Igualando os coeficientes dos termos correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned}
2c_2 &= a_0 \Rightarrow a_2 = a_0/2 \\
3.2a_3 &= a_1 + a_0 \Rightarrow a_3 = a_0/6 + a_1/2 \\
4.3a_4 &= a_2 + a_1 \Rightarrow a_4 = a_0/24 + a_1/12
\end{aligned}$$

Deste modo a solução geral será:

$$y(x) = a_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{24} + \dots \right] + a_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \dots \right]$$

Como não temos uma fórmula geral, não podemos usar o teste da razão para mostrar a convergência da razão. Mas, isso é resolvido com o chamado *teorema de Fuchs*. ITA(2007). Que não será nosso objeto de estudo nesse trabalho.

9 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi proposto o estudo de funções quando representadas através de suas séries de Taylor. A questão que motivou a pesquisa foi determinar integrais de algumas funções que outrora não havia conseguido resolver pelos métodos estudados anteriormente em meu curso. A elaboração desse trabalho exigiu bastante dedicação, mas produziu bons frutos, pois apliquei, aperfeiçoei e adquiri novos conhecimentos.

Os primeiros capítulos foram destinados ao estudo de sequências e séries numéricas, essenciais para aprendizado de conceitos e técnicas importantes como: limite de uma sequência, convergência e divergência de séries e os testes de convergência.

No quarto capítulo vimos que a noção de limite de uma função vai além do que estudamos nos primeiros capítulos e enunciamos, porém omitimos as demonstrações de alguns teoremas acerca de sequências e séries de funções.

Nos capítulos 5 e 6 estudamos um tipo de série de suma importância que é a "ponte" para o estudo de séries de Taylor: Séries de potências. E ainda aprendemos a representar algumas funções através de séries com ideias que foram explanadas nos capítulos anteriores.

Nos últimos capítulos, definimos Séries de Taylor e algumas de suas aplicações. Vimos que Séries de Taylor expande as possibilidades de representar funções como séries. E em suas aplicações abordadas aqui, representamos e aproximamos funções ao redor de um ponto e isso foi fundamental nas outras aplicações: Integração de funções, Cálculo de limite e soluções de Equações diferenciais ordinárias.

Por fim, Séries de Taylor é um tema com dimensão de aplicações bem maior do que a apresentada nesse trabalho. Apesar de termos apenas abordado um estudo superficial, esse trabalho pode abrir possibilidades para estudos mais complexos em torno de Séries de Taylor.

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. Análise Matemática para Licenciatura. São Paulo: Blucher, 2006.
- _____. Introdução à análise matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.
- BOYER, C. História da matemática. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1996.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise I. – 2 ed. -[Reimpr.] -Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA-ITA. Resolução de Edo's por séries (resumo) . Disponível em: <http://www.mat.ita.br/botelho/sites/default/files/resumo32wk16.pdf>. Acesso em: 05 de Janeiro de 2018.
- LIMA, Elon Lages. Análise real volume 1. 12 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2016.
- _____. Análise real volume 1. 8 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2006.
- STEWART, James. Cálculo: Volume 2. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.