

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO:
A progressão geométrica no triângulo de Sierpinski

ÉRIKA DE SOUSA SANTOS

São Raimundo Nonato – PI

2017

ÉRIKA DE SOUSA SANTOS

AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO:

A progressão geométrica no triângulo de Sierpinski

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para a obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI. Campus São Raimundo Nonato.

Orientador: Prof. Msc. Francisco Teixeira Esteves

São Raimundo Nonato – PI

2017

ÉRIKA DE SOUSA SANTOS

AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO

A progressão geométrica no triângulo de Sierpinski

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para a obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI. Campus São Raimundo Nonato. Professor Orientador: Msc. Francisco Teixeira Esteves.

Aprovado pela banca examinadora em 04 de abril de 2017

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Msc. Francisco Teixeira Esteves
Instituto Federal do Piauí – IFPI
Orientador

Prof. Msc. Amaya de Oliveira Santos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
Examinadora Externo

Prof. Esp. Francisco Alves do Santos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
Examinador Interno

FICHA CATALOGRÁFICA
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S231a Santos, Érika de Sousa
AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO : A progressão
geométrica no triângulo de Sierpinski / Érika de Sousa Santos - 2017.
62 f. : il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, Licenciatura em
Matemática, 2017.

Orientador : Prof Me. Francisco Teixeira Esteves.

1. Geometria. 2. Geometria Fractal. 3. Progressão Geométrica. I.Título.

CDD 510



INSTITUTO FEDERAL
Piauí



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria De Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal De Educação, Ciência E Tecnologia Do Piauí
Campus São Raimundo Nonato
BR-020 - Bairro Primavera, São Raimundo Nonato - PI
CEP 64770-000

ATA DA DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata dos trabalhos da Comissão Examinadora do Trabalho de Conclusão de Curso do estudante ÉRIKA DE SOUSA SANTOS para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI). Integraram a Comissão os Professores **FRANCISCO TEIXEIRA ESTEVES (PRESIDENTE E ORIENTADOR)**, **AMAYA DE OLIVEIRA SANTOS (IFPI)** e **FRANCISCO ALVES DO SANTOS (IFPI)**. Aos quatro dias do mês de abril de 2017 às 16:00 horas, na **SALA 10 DO IFPI – CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO**, realizou-se a apresentação pública do Trabalho de Conclusão de Curso. O orientador abriu a sessão agradecendo a participação dos membros da Comissão Examinadora. Em seguida convidou o estudante para que fizesse a exposição do trabalho intitulado **AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: A progressão geométrica no triângulo de Sierpinski**. Finalizada a apresentação, cada membro da comissão Examinadora realizou a arguição do estudante. Dando continuidade aos trabalhos, o orientador solicitou a todos que se retirassem da sala para que a Comissão Examinadora pudesse deliberar sobre o trabalho do candidato. Terminada a deliberação, o orientador solicitou a presença de todos e leu a ata dos trabalhos declarando **APROVADO** o trabalho do estudante, em seguida, deu por encerrada a solenidade. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Francisco Teixeira Esteves

Prof. Msc. Francisco Teixeira Esteves - Presidente

Amaya de Oliveira Santos

Prof. Msc. Amaya de Oliveira Santos

Francisco Alves dos Santos

Prof. Esp. Francisco Alves do Santos

A minha família.

Aos meus amigos, pelo apoio e por acreditaram que conseguiria.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por permitir que eu esteja aqui hoje e por me dar toda a força necessária para que este trabalho fosse realizado.

Agradeço a todos que me apoiaram e colaboraram para que a realização deste trabalho fosse possível.

Agradeço a todos os meus familiares e amigos que acreditaram em mim.

Agradeço a todos os meus colegas que estiveram comigo durante esta caminhada.

Agradeço também a Msc. professora Ethiamara da Silva Sousa Vênus por sua colaboração neste trabalho, e ao meu orientador Msc. Francisco Teixeira Esteves, pela paciência, tempo e atenção, e finalmente obrigada a todos os professores que tive durante o curso pelos ensinamentos que muito me ajudaram.

“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, o litoral não é um círculo e tampouco um relâmpago viaja em linha reta pelo ar”

Mandelbrot, 1983

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar um ramo da Matemática, a Geometria Fractal. É apresentado o software GeoGebra no qual podemos construir e visualizar melhor os fractais, mostrando por outro ângulo conceitos de Geometria, apresentando uma nova proposta de ensino. As atividades propostas foram aplicadas a alunos que frequentam o 2º ano do Ensino Médio. No decorrer do texto aparecem relatos sobre como decorreu a aplicação das atividades em sala de aula e quais objetivos foram atingidos. Também tem um levantamento histórico sobre o tema como apresentamos de forma breve as definições, principais características, seguidos de exemplos sobre suas aplicações em algumas áreas. A geometria dos fractais apresenta grande beleza e complexidade, ligadas as formas da natureza, são formas geométricas de dimensões fracionárias. Mostrando que essa área é capaz de fascinar os alunos e despertar sua curiosidade e interesse ao observar uma ordem em meio a objetos com formas aleatórias que podem ser notados ao nosso redor.

Palavras Chaves: Geometria, Geometria Fractal, Progressão Geométrica.

ABSTRACT

This work aims to present a branch of Mathematics, Fractal Geometry. GeoGebra software is presented in which we can construct and visualize fractals better, showing by another angle concepts of Geometry, presenting a new teaching proposal. The proposed activities were applied to students who attend the 2^o year of high school. Throughout the text there are reports about how the activities of the classroom took place and what goals were achieved. It also has a historical survey on the subject as we briefly present the definitions, main characteristics, followed by examples about their applications in some areas. The geometry of fractals presents great beauty and complexity, linked to the forms of nature, are geometric forms of fractional dimensions. Showing that this area is able to fascinate students and arouse their curiosity and interest by observing an order amid objects with random shapes that can be noticed around us.

Keywords: Geometry, Fractal Geometry, Geometric Progression.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Brócolis	07
Figura 2 – Relâmpago	08
Figura 3 – Pulmões, Sistema respiratório	08
Figura 4 – Caixas	09
Figura 5 – Conjunto Cantor	12
Figura 6 – Curva de Peano	14
Figura 7 – Curva de Koch	15
Figura 8 – Floco de Neve	15
Figura 9 – Tapete de Sierpinski	16
Figura 10 – Conjunto Julia	17
Figura 11 – Samambaia de Barnsley	18
Figura 12 – Conjunto de Mandelbrot	19
Figura 13 – Curva de Koch	20
Figura 14 – Triângulo de Sierpinski	20
Figura 15 – Esponja de Menger	20
Figura 16 – Árvore Bifurcada	21
Figura 17 – Árvore Pitagórica	21
Figura 18 – Fractal Pentagonal tipo Durer	21
Figura 19 – Fractal Hexagonal tipo Durer	21
Figura 20 – Fractal de Expansão	22

Figura 21 – Conjunto Mandelbrot	22
Figura 22 – Tela inicial do GeoGebra	28
Figura 23 – Conhecendo as ferramentas do GeoGebra	29
Figura 24 – Janela do GeoGebra	29
Figura 25 – Fractal construído no GeoGebra	31
Figura 26 – Interface do GeoGebra com eixos e malhas ocultos	32
Figura 27 – Triângulo equilátero construído no GeoGebra	33
Figura 28 – Identificação dos pontos médios do triângulo	33
Figura 29 – Construção do triângulo de vértices D, E e F	34
Figura 30 – Resultado da primeira iteração	34
Figura 31 – Visualização da janela ferramenta aberta	35
Figura 32 – Ferramenta construída com êxito	36

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Questionários feitos com os alunos37

Tabela 2 – Questionário feito para o professor da turma38

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	01
2.	FRACTAIS	04
	2.1 Origem Dos Fractais	04
	2.2 O que é um fractal?	06
	2.3 Fractais em vários ramos da ciência	10
	2.4 Fractais clássicos	11
	2.5 Categorias dos fractais	19
	2.6 Fractais e as Progressões Geométricas	23
	2.6.1 Progressões Geométricas (P.G.)	23
	2.6.2 Classificação de uma P.G.	24
	2.6.3 Soma dos termos de uma P.G.	25
3.	TRABALHANDO COM FRACTAIS NA SALA DE AULA	27
4.	METODOLOGIA DA PESQUISA	30
5.	ANÁLISE DOS DADOS	37
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	41
7.	REFERÊNCIAS	42
8.	APÊNDICE	

1. INTRODUÇÃO

O interesse em trabalhar com Geometria surgiu da percepção do quão ela está presente no mundo em que vivemos, podemos encontra-la nas tecnologias que nos rodeiam, na natureza, nas artes. Porém, os elementos da natureza não podem ser representados por figuras geométricas como círculos, quadrados e triângulos. E foi a partir dessa insuficiência de representação é que se iniciou o estudo da geometria Fractal e da sua crescente aplicabilidade nas diversas áreas.

Com a geometria fractal pode-se descrever melhor as formas encontradas na natureza, já que a geometria Euclidiana sozinha não é capaz de descreve-las.

Segundo Pimentel e Urban (2003),

As formas fractais podem ser percebidas em todos os lugares do Universo, seja nos recônditos infinitesimais da estrutura do átomo, nos arranjos moleculares das proteínas e dos aminoácidos, nas células do organismo, na organização dos diferentes tecidos, no arranjo íntimo dos cristais inorgânicos, seja nos arroubos geográficos das linhas costeiras, as efêmeras imagens abstratas do movimento das nuvens, o solido e harmônico contorno das montanhas, o inusitado trajeto percorrido pela fumaça do incenso, as fantásticas formações estalagmites encontradas no mundo das cavernas, as mandálicas galáxias que povoam o Universo de formas estelares mirabolantes... (PIMENTEL E URBAN, 2003, p. 18)

Benoit Mandelbrot foi o responsável pelo desenvolvimento desta Geometria da Natureza. Segundo Barbosa (2005), Benoit Mandelbrot é considerado o “Pai da Geometria Fractal” e suas primeiras obras sobre os fractais foram criadas nos anos 70. Hoje se entende por Geometria Fractal um ramo da Matemática que estuda os Fractais, considerada uma Geometria não Euclidiana, pois nenhum dos cinco postulados de Euclides é satisfeito.

Os fractais são objetos que podem ser obtidos aleatoriamente ou geometricamente e possuem características como a auto semelhança, complexidade e dimensão.

Mandelbrot trabalhou em muitas pesquisas e uma delas ele começou pela indagação: "Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha? " obtendo o seguinte resultado:

A resposta possível variará conforme a escala de medição. Baías e penínsulas aparecerão ou não, dependendo da escala adotada. Sabe-se, por exemplo, que em um documento dos dois países vizinhos, a fronteira de Espanha e Portugal difere em cerca de 20%, o mesmo acontecendo por exemplo com a fronteira da Holanda e da Bélgica. Claro que ao efetuar as

medidas cada país empregou instrumentos com unidade de escalas diferentes. (BARBOSA 2005, p. 12)

Para medir o tamanho de um litoral ou limite territorial, é preciso definir a escala. Matematicamente falando a escala para medir com exatidão uma extensão territorial, não é observada pelo conceito de dimensão fractal.

Os fractais podem ser observados em toda natureza e em seus fenômenos, sua compreensão pode despertar a curiosidade, permitindo que os alunos visualizem a matemática de uma forma diferente e prática, percebendo que a mesma não está somente ligada a cálculos, mas que ela também contribui para compreender o meio que nos cerca.

A Matemática ainda é vista por muitos alunos como uma matéria de difícil compreensão, que utiliza cálculos complexos ou que não vêem aplicabilidade em seu cotidiano. E mesmo mostrando exemplos em que a Matemática está inserida em seu dia a dia, os mesmos não conseguem percebê-la e nem aplicá-la, e por consequência desinteressando-se em aprendê-la.

Assim, o professor deve tentar buscar o nascer da curiosidade nos alunos para que os mesmos comecem a perceber a matemática a seu redor e se interessem em aprendê-la. Os alunos vendo como a matemática é importante em outras áreas como engenharia, computação, arquitetura, medicina perceberá a necessidade de sua aplicação no contexto global, na educação e no seu desenvolvimento social.

Uma das formas de incentivar esse interesse, dentre outras, é com a utilização de recursos tecnológicos pois, com tantos e rápidos avanços na área, nossos alunos tem cada vez mais acesso a estes recursos e a escola tem um importante papel na inserção e utilização de tais tecnologias para fins educativos.

Pensando nisso, foi proposto um estudo a partir da construção de um fractal com o auxílio do GeoGebra, software que explora conteúdos da matemática, constrói figuras geométricas, com o objetivo de mostrar a relação entre os elementos constituintes dos fractais e os conceitos estudados na Geometria Euclidianas a partir das progressões geométricas, buscando, com a exploração da Geometria Fractal na sala de aula, despertar no aluno o interesse pela matemática, o desenvolvimento da habilidade em formular e resolver problemas, o desenvolvimento da criatividade além de conhecer os fractais e aplicá-los em outras áreas ou situações matemáticas.

As atividades foram aplicadas em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual na cidade de São Raimundo Nonato - PI e iniciaram com uma breve apresentação da Geometria Fractal desde sua origem até a atualidade. Foram apresentadas as características, os tipos de fractais, os fractais mais conhecidos e seus criadores e sua aplicação em diversas áreas da ciência.

Em um segundo momento aconteceu uma revisão de alguns tópicos da Geometria Euclidiana e uma pequena explanação sobre as Progressões Geométricas e depois a utilização do GeoGebra para a construção do fractal e assim dar continuidade a atividade.

A atividade foi entregue aos alunos para que pudessem responder as questões abertas, conforme os níveis da imagem do fractal triângulo de Sierpinski e conseguissem observar a progressão geométrica. A atividade se encontra no apêndice.

O conceito Geometria Fractal é relativamente novo se comparado a outros conceitos da matemática. Em um mundo com falta de formas geométricas perfeitas, onde tem muitas superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a Geometria Fractal apresenta-se como um meio de tratar aqueles fenômenos até agora considerados imprevisíveis, aleatórios e caóticos. Ela também vem se mostrando uma ferramenta extremamente útil para muitas ciências. Aachamos que no ensino de matemática a Geometria Fractal pode contribuir para motivar e integrar vários tópicos matemáticos.

2 Fractais

2.1 Origem dos Fractais

Na história da Matemática, o que gerou um acontecimento foi o descobrimento de geometrias não euclidianas. Isso abriu caminho para novas geometrias, como, por exemplo, a geometria fractal, a geometria hiperbólica e elíptica. Dentre essas geometrias, temos o surgimento da Geometria Fractal que se diferencia da geometria euclidiana pela formalização da sua dimensão, pois a sua dimensão é fracionada, e a euclidiana utiliza a dimensão inteira.

Barbosa (2005) afirma que a Geometria dos Fractais está intimamente ligada à uma ciência chamada Caos. Segundo a ciência do Caos, na natureza coexistem a ordem (o determinismo) e o Caos (a imprevisibilidade) (JANOS, 2008, p.x). Fornecendo uma certa ordem ao Caos e buscando padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente sem ordem. O estudo dos fractais possibilita a percepção de infinito.

O surgimento da Teoria do Caos começou no final do século XIX, com as ideias de Henri Poincaré, partindo das experiências de Edward Lorenz que era um matemático apaixonado por meteorologia, a área na qual direcionou a matemática. Lorenz começou a montar uma reprodução das condições climáticas, destaca-se que no universo da meteorologia o objetivo fundamental é o prognóstico das condições climáticas, tentando ter uma aproximação do que seria um sistema dinâmico da natureza, coletando os dados para alimentar um modelo que montou num computador.

Os dados obtidos forneceram características de um sistema não-linear, com área de turbulência e caos determinístico, o que ele ainda não conhecia. Lorenz, depois de repetidas experiências, colocou que com uma mínima variação dos valores iniciais que todo sistema dinâmico poderia ser afetado por imprevisões. Assim, o bater de asas de uma borboleta em um hemisfério do planeta, depois de um certo período de tempo, afetariam as condições climáticas do outro hemisfério, o que seria conhecido como efeito borboleta. Um grande impacto da geometria fractal e do caos, seria que padrões complexos teria a grande possibilidade de que sua origem sejam processos simples.

"De uma forma mais geral, o estudo do caos determinista deu origem a inúmeras formas geométricas muito complicadas. A geometria habitual é absolutamente incapaz de as tratar, enquanto a geometria fractal constituía, à partida, uma ferramenta perfeitamente apropriada para o seu estudo. (...)desenvolveram a técnica dos multifractais (sem usar esse nome), com vista ao estudo das formas geométricas criadas pela turbulência no espaço real." (MANDELBROT, 1991, p. 209)

Pode se considerar que a noção de caos leva a pensar que os acontecimentos não teriam uma lógica, que é difícil de saber quem seria o início e o fim, mas se pensarmos que tudo está entrelaçado, seria simples, pois teríamos a possibilidade de desentrelaçar. Seguindo esse raciocínio de partir de um ponto, com a finalidade de ter um início, os conceitos desenvolvidos pela teoria do caos, partem da noção dos sistemas dinâmicos.

Em meio a tudo isso, Benoit Mandelbrot, na tentativa de definir as variações de certas formas e fenômenos matemáticos, concluiu que as variações pequenas e grandes têm uma conexão, e ela seria a *escala*, e a partir daí, ele definiria um conceito, criando o termo fractal. A geometria fractal visa estudar diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, os quais não são regulares, porém rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo assim no mesmo grau ao longo de todas as escalas (MANDELBROT, 1991).

No final do século XIX surgiram os primeiros objetos considerados fractais. Alguns matemáticos como, Cantor, Koch, Sierpinski, Peano investigavam objetos que viriam a ser considerados monstros matemáticos. Podemos dizer que um dos primeiros "monstros matemáticos" foi o Conjunto de Cantor, também conhecido como Poeira de Cantor, publicado em 1883. Sua construção começa a partir de um segmento de reta dividindo-o em três partes iguais e depois eliminando a central. Repete-se esse processo em cada segmento e, assim, sucessivamente.

Em seguida, Helge Von Koch um matemático polonês que em 1904 e 1906 introduziu uma curva que hoje recebe o seu nome de Curva de Koch. Tal curva pode ser modificada com outras construções análogas e é possível que tenha influenciado bastante Mandelbrot.

Outro famoso fractal precursor foi o Triângulo de Sierpinski de Wacław Sierpinski (1882-1969). Veremos mais detalhes sobre este e outros fractais no decorrer do trabalho.

A partir dos estudos do matemático francês Benoit B. Mandelbrot que descobriu a geometria fractal por volta dos anos 70 ao associar alguns objetos e fenômenos da

natureza. O termo fractal foi usado por ele para nomear os objetos dessa geometria desenvolvendo e divulgando a mesma.

Benoit Mandelbrot nasceu em Varsóvia, 1924. Em 1936 sua família mudou para Paris. Quando Paris foi liberada do jugo alemão, Mandelbrot submeteu-se aos exames de admissão da Escola Normal e da Escola Politécnica, sendo aprovado em ambas instituições de prestígio. Iniciou pela Escola Normal, onde ficou pouco tempo, passando à Politécnica.

Nessa época havia o movimento do grupo Bourbaki, onde participava um determinado número de jovens matemáticos, que tinham como objetivo a reconstituição da matemática francesa, e entre esses jovens encontrava-se o seu tio Szolem Mandelbrot.

Mesmo diante das ideias de seu tio, Mandelbrot não suportou o predomínio da abstração imposta por Bourbaki, saindo da França em 1948, indo estudar nos Estados Unidos. Na IBM – Centro de Pesquisas Thomas Watson, deparou-se com ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot resolveu o problema empregando um trabalho de Georg Cantor chamado de Poeira de Cantor, pensando nos erros de transmissão como um desses conjunto de Cantor.

Mandelbrot procurou durante anos, modelos para aplicar suas ideias, que em 1960 reconhecia uma pálida imagem da realidade toda vez que visualizava. Chegou a fama e obteve honrarias, passando a ocupar vários cargos acadêmicos. Com uma gama de variados trabalhos publicados e sua obra reformulada e mais famosa: *The Fractal Geometry of Nature*, New York, Freeman, 1977.

2.2. O que é um fractal?

Mandelbrot usou inicialmente o conceito de dimensão para definir fractal: “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica”. Essa definição recebeu críticas e também não satisfez ao próprio Mandelbrot. Barbosa (2005) reforça a conjectura trazendo para o campo educacional:

O conceito de fractal ainda tem muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal, que caiba ao ser e só ao ser. Entretanto, essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, à qual pode simplesmente convir uma conceituação simples e de fácil compreensão e entendimento. Bastará considerarmos a auto similaridade. (BARBOSA, 2005, p.19)

Essa definição também possui lacunas, mas servira de base para caracterizar um fractal. Para k. J. Falconer (aput BARBOSA, 2005) sugeriu o entendimento de fractal por caracterizações:

Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- F possui alguma forma de “auto similaridade” ainda que aproximada ou estatística;
- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo. (FALCONER apud BARBOSA, 2005, p. 20)

Apesar de não ter uma definição formal são três as características básicas fundamentais para designar um fractal: auto similaridade (ou auto semelhança), a complexidade infinita (iterações) e a dimensão.

A *Auto semelhança* é caracterizada pelo fato de uma parte do fractal ser igual (ou parecido) ao todo, ou seja, se qualquer parte da imagem for ampliada, esta será uma cópia da forma inicial e pode ser de dois tipos: a exata e a aproximada ou estatística.

Na auto semelhança exata cada parte do fractal é uma cópia perfeita do conjunto total, um exemplo é o triângulo de Sierpinski. Já na auto semelhança estatística são aproximações da figura inicial, e pode ser encontrada nas formas naturais, uma vez que as partes são apenas reminiscências da imagem total.

Como exemplo, temos a couve-flor, como mostra a figura 1

Em um objeto auto semelhante como a couve-flor, a auto semelhança se dá até um certo grau de redução no fator de escala. Além disso, a couve-flor pode se decompor em sua estrutura molecular, composta de átomos e partículas elementos, que, obviamente, não são auto semelhantes ao todo. (Janos, p.45)

Figura 1: Brócolis



Fonte: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>

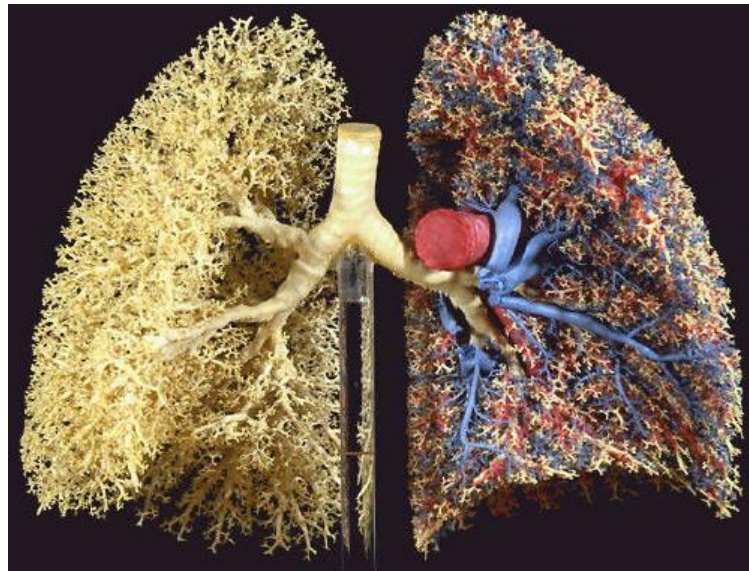
Em alguns vegetais encontrados na natureza, além de fenômenos da natureza, e em nossos corpos, essa propriedade se manifesta, como podemos observar na figuras 2 e 3.

Figura 2: Relâmpago



Fonte: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>

Figura 3: Pulmões, sistema respiratório.



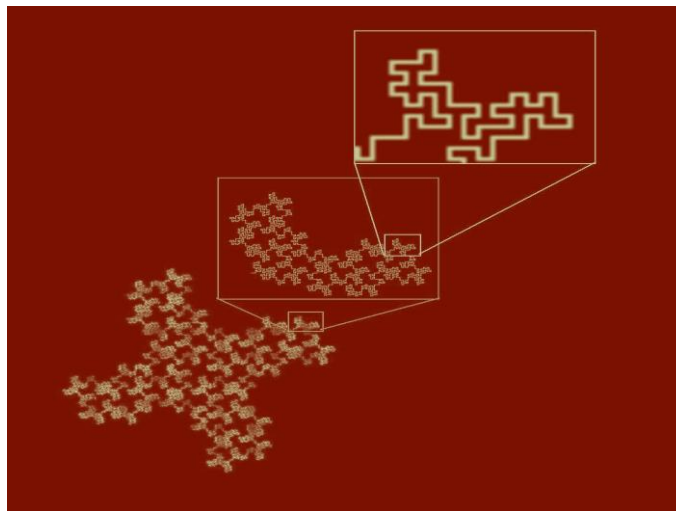
Fonte: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>

Uma outra característica dos fractais é a *complexidade infinita* (iteração) que consiste na repetição de um procedimento consecutivamente. O processo iterativo consiste em aplicar a mesma regra a cada um dos quadrados preenchidos que

resultam da iterada anterior. O processo é repetido (iterado) indefinidamente obtendo-se a figura limite. Quanto maior for o número de iterações deste processo, mais detalhes serão apresentados e assim, nunca obteremos uma “imagem final”. Daí a expressão *complexidade infinita*.

Segundo SOUZA (2014) A caixa de contagem ou "box counting" é um método de coleta de dados para análise de padrões complexos. Quebrando este conjunto de dados obtemos um objeto visualizado em pedaços cada vez menores, normalmente em formas de “caixas”. Como é observado na figura a seguir.

Figura 4: Caixas



Fonte: Souza 2014

A intenção da caixa de contagem é poder quantificar os fractais em escalas para uma melhor visualização e compreensão do fractal, pois ampliando ou reduzindo o objeto, observaremos melhor como ocorrem as mudanças e detalhes do fractal.

Por fim, para poder definirmos a *Dimensão Fractal*, primeiro precisamos saber o conceito de Dimensão na Geometria Euclidiana. Dimensões são parâmetros que descrevem a estrutura dos objetos/conjuntos. De acordo com a natureza dos objetos, associasse, classicamente, quantidades como comprimento, área e volume, de acordo com o número de dimensões que o objeto em questão possui.

A dimensão de um espaço métrico é igual ao número de parâmetros reais, as coordenadas, necessários para endereçar esse elemento no espaço. Nesse sentido, um ponto possuiria dimensão 0, a reta possuiria dimensão 1, pois apenas uma coordenada é suficiente para endereçar cada ponto sobre a reta. O plano possuiria dimensão 2, pois é preciso duas coordenadas para descrever a localização do

mesmo, assim como, por exemplo, o cubo seria dimensão 3, pois necessitaria de três coordenadas para a sua posição no espaço. Generalizando, o espaço Euclidiano R^n é n dimensional e $n = m^d$, onde m é o fator de aumento e d a dimensão.

A dimensão dos fractais não é dada por um número inteiro, mas é uma fração, é um novo tipo de dimensão denominada dimensão fractal, que está mais associada a aspereza, espessura, densidade, textura etc.

A dimensão escolhida por Mandelbrot foi a definição Hausdorff-Besicovitch que excede estritamente a dimensão topológica como afirma Carvalho (2005).

“Não trata propriamente do número de coordenadas independentes que possam descrever os pontos de um objeto, mas ‘torna-se uma maneira de medir propriedades que (...) não tem definição clara: o grau de aspereza, ou de fragmentação ou de irregularidade de um objeto’ (GLEICK, 1989, p. 93). É uma dimensão mais qualificada, que não se restringe aos números 0, 1, 2, 3 e admite números não inteiros e até irracionais”. (CARVALHO, 2005, p.27)

Um exemplo é o triângulo de Sierpinski, onde cada triângulo de um nível é repartido para o nível seguinte em 3 triângulos (sem contar o central que é removido), então $n = 3$, e cada um pode ser ampliado para se igualar ao anterior, duplicando-o, onde o fator de aumento é $m = 2$.

Usando $n = m^d$, teremos $3 = 2^d$, e com logaritmos obteremos $d = \frac{\log 3}{\log 2}$ que será aproximadamente 1,585. Podemos dizer então que a dimensão do triângulo de Sierpinski, está entre os inteiros 1 e 2.

Assim, segue o uso da fórmula para os fractais: $d = \frac{\log n}{\log m}$.

2.3 Fractais em outros ramos da ciência

Com o avanço da computação, permitiu-se uma maior precisão na construção dos fractais já que necessita de muitos processos iterativos, e estes são infinitos como afirma Cunha (2013):

A construção de fractais demanda processos iterativos, por isso não é possível sua representação fiel, haja visto que tais processos são infinitos. Os fractais se difundiram a partir da década de 80, com o avanço da computação, o que permitiu maior precisão na construção deles.(CUNHA, 2013. p. 8)

Assim, a geometria fractal fica cada vez mais conhecida e vem tendo uma enorme aplicação em diversas áreas. Na biologia, por exemplo, as formas estranhas

e caóticas dos fractais descrevem alguns fenômenos naturais, como o desenvolvimento das árvores, a estrutura da casca de uma árvore, a forma de algumas raízes, a linha de costa marítima, as nuvens. É importante ressaltar que figuras que no século passado eram vistas como anomalias matemáticas, hoje apresentam um papel fundamental na interpretação da realidade.

Uma outra área do conhecimento, onde se aplica a teoria dos fractais é a Medicina. De maneira geral, esta teoria matemática apresenta características em fenômenos cardíacos e pulmonares, além de uma aplicação notável na tomografia computadorizada, através da análise de imagens geradas, possibilitando aos médicos uma nova visão da anatomia interna do corpo humano.

Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrincadas (distribuição das galáxias); para os médicos, dão uma visão da anatomia interna do corpo (doenças crônicas e outros campos da medicina); na engenharia, nas comunicações telefônicas (ruídos); na arte (pinturas); na matemática (conceitos geométricos); na economia (economia de ações e de mercado); ou seja, a Geometria fractal está associada a uma série de fenômenos da natureza e em outras áreas, como ratifica Barbosa (2005)

Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (BARBOSA, 2005, p. 10)

Além disso, a geometria fractal aplica-se em variados outros ramos como na Arte, na Astronomia, no Cinema, na Economia, na Hidráulica, na Geologia, na Meteorologia e até na Linguística, onde a teoria dos fractais é utilizada na evolução dos dialetos.

2.4 Fractais Clássicos

Como já foi dito, Benoit Mandelbrot que na década de 70 criou a denominação Fractais, entretanto objetos propostos por matemáticos, com diversas finalidades precederam anos antes e devem ter contribuído para a criação de Mandelbrot.

Abordaremos a seguir, em ordem cronológica, alguns dos famosos monstros ou patológicos matemáticos

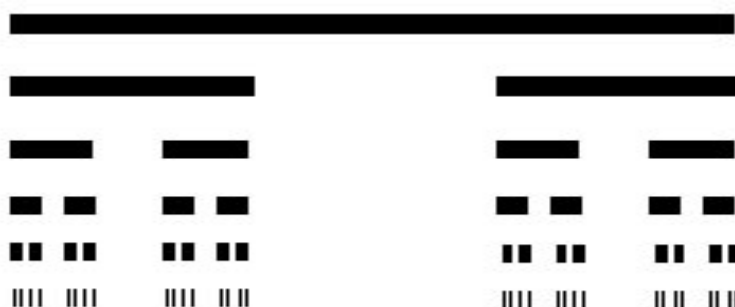
Conjunto Cantor

George Cantor (1845 - 1918) foi um matemático descendente de portugueses, nascido na Rússia, e adotou nacionalidade alemã, foi professor da Universidade de Halle, dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente no tocante à parte hoje conhecida como Teoria dos Conjuntos, um ramo importante da matemática.

Em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual foi construído um conjunto, chamado hoje “Conjunto de Cantor” ou “Poeira de Cantor” que, segundo Janos (2008), foi o primeiro objeto reconhecido como fractal. O Conjunto de Cantor constitui um modelo de imaginação abstrata na Matemática e sua construção é a seguinte:

1. Considere um segmento de reta;
2. Divida-o em três partes iguais e elimine a do centro;
3. Repetir a fase dois em cada segmento e, assim, sucessivamente e indefinidamente, como podemos verificar na figura 5.

Figura 5: Conjunto de Cantor



Fonte: <https://fractalescio.wordpress.com/2014/11/14/conjunto-de-cantor/>

Na construção do conjunto Cantor, iniciamos de um segmento unitário $[0,1]$, o que se divide em três partes iguais e retiramos a parte do meio, processo conhecido

como “remoção do terceiro meio”. Em seguida, usamos o mesmo processo de remover o terceiro meio nas duas partes que sobraram. Repetindo esse procedimento infinitas vezes.

Percebemos que no 1º passo, retiramos $\left(\frac{1}{3}\right)$ do comprimento do segmento unitário; no 2º passo, retiramos 2 segmentos de comprimento $\left(\frac{1}{3^2}\right)$, isto é, removemos $\left(\frac{2}{3^2}\right)$; no 3º passo, retiramos 4 segmentos de comprimento $\left(\frac{1}{3^3}\right)$, ou seja, tiramos $\left(\frac{2^2}{3^3}\right)$ e assim por diante.

O total retirado é, então:

$$1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right) + 2^3 \cdot \left(\frac{1}{3^4}\right) + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots\right) \quad (1.1)$$

Observe que a soma (1.1) corresponde a soma dos termos de uma PG (progressão geométrica) de razão $\frac{2}{3}$, e pode ser calculada como:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \quad (1.2)$$

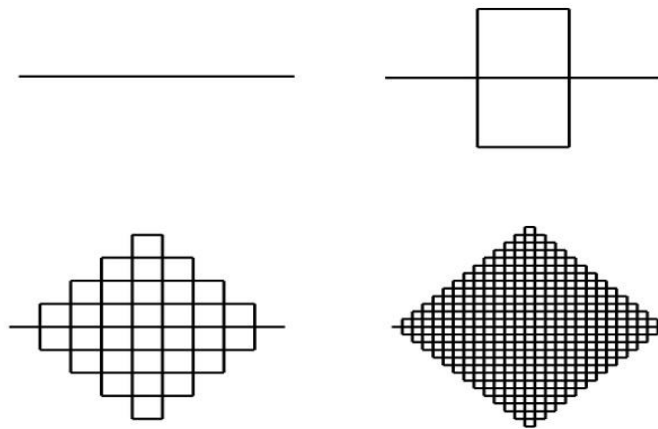
Curva de Peano

Giuseppe Peano (1858 - 1932), italiano, nasceu em Cuneo e faleceu em Turim. Foi professor da Academia Militar de Turim, com enormes contribuições à Matemática. Seus trabalhos, utilizando notações e rigor da lógica. Parece que foi talvez um dos primeiros a dar uma definição formal de espaço vetorial (BARBOSA, 2005).

Em 1890, publicou a sua famosa curva, outro monstro matemático, proposta como cobrindo totalmente uma superfície plana quadrangular. Sua construção segue abaixo:

1. Iniciamos com um segmento de reta
2. Substituímos por uma curva de nove segmentos
3. Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos.

Figura 6: Curva de Peano



Fonte:

http://www.avaad.ufsc.br/moodle/mod/hiperbook/view.php?id=2089&pagenum=10&target_navigation_chapter=3713&show_navigation=1

Nota-se, na figura 6, que a curva vai preenchendo uma região quadrada cuja a diagonal é dada pelo segmento inicial. O comprimento da curva no início tem o próprio comprimento, ou seja, 1. Na próxima fase o comprimento será dado pela soma das medidas dos nove segmentos, isto é, $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$, na fase seguinte, cada um dos nove se transformam-se em 9 outros segmentos, onde teremos portanto $81 \cdot \frac{1}{9} = 9 = 3^2$. Em resumo, os sucessivos comprimentos da curva de Peano serão dados pelas potências de 3, com expoentes iguais à ordem da iteração. Daí ao aumentar a ordem da iteração, o comprimento da curva de Peano aumenta indefinidamente multiplicando-a pelo fator 3, tendendo ao infinito.

Curva de Koch

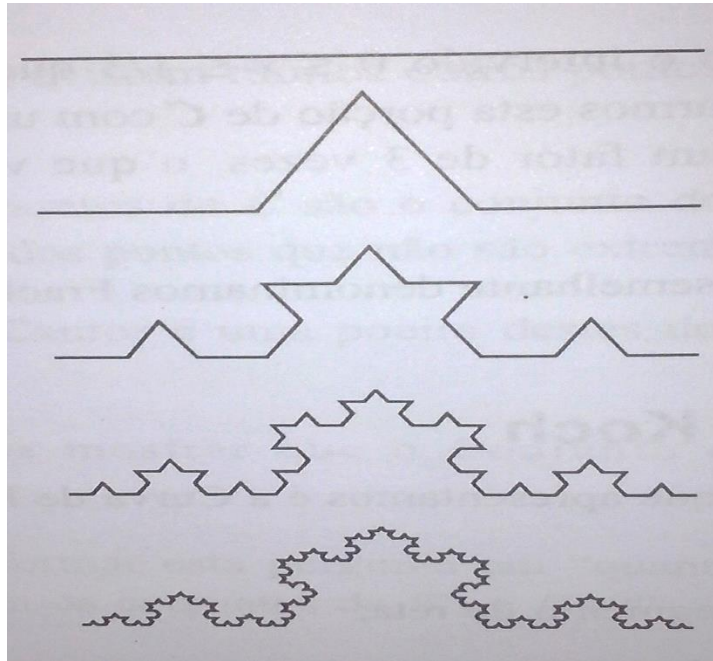
Helge Von Koch, matemático polonês que em 1904 e 1906 introduziu uma curva que hoje recebe seu nome, Curva de Koch (figura 7). Além de sua curva ser um belo exemplo de curva tangente, ela deve ter influenciado bastante Mandelbrot, pois tem muito de uma linha costeira.

Sua construção segue a seguinte sequência:

1. Considere um segmento de reta;

2. Dividir o segmento em 3 segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes; intermediário por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário (a base);
3. Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim por diante e iterativamente.

Figura 7 – Curva de Koch

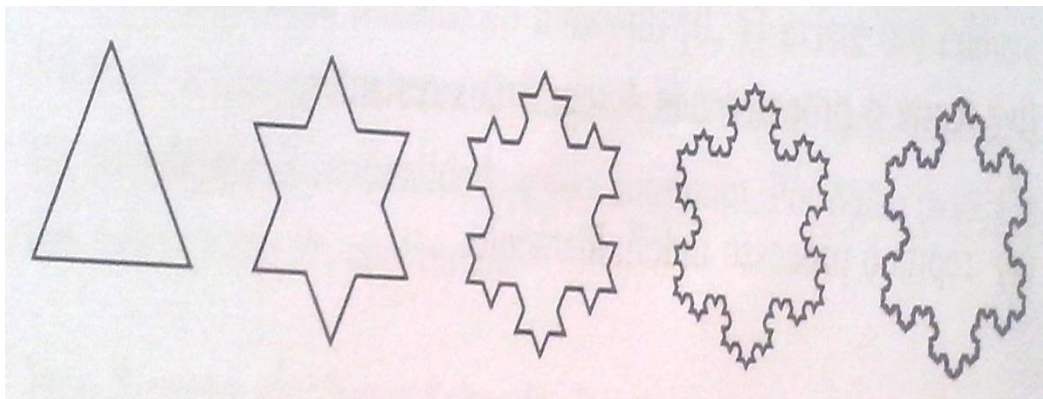


Fonte: Janos 2008

Segue que a curva de Koch é outra curva gerada fazendo copias de copias, a escala de redução adotada será dada por uma potência de $1/3$.

A também uma outra imagem chamada de Ilha de Koch ao mesmo tempo conhecida como Floco de Neve (figura 8), que é obtida a partir do triângulo equilátero.

Figura 8 – Floco de Neve



Fonte: Janos 2008

Curva, Tapete e Triângulo de Sierpinski

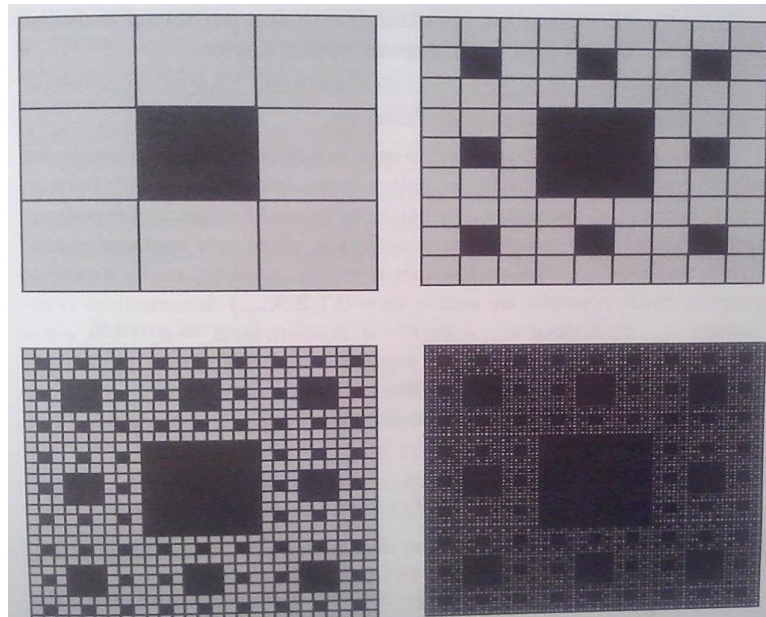
Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês, teve grande reputação, principalmente na década 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter seu nome.

No ano 1916, apresentou um dos famosos monstros matemáticos em seu trabalho, que complementava uma publicação sua de 1915.

Construção do Tapete de Sierpinski (figura 9):

1. Inicia-se partindo de um quadrado
2. Dividindo-o em 9 pequenos quadrados congruentes, e eliminando o central
3. Em seguida, aplicar o procedimento 2 em cada um dos oito quadrados restantes, e assim sucessivamente e iterativamente.

Figura 9: Tapete de Sierpinski



Fonte: Barbosa 2005

O resultado que se obtém após algumas iterações é conhecido como Carpete de Sierpinski ou Tapete de Sierpinski.

Fatou e Julia

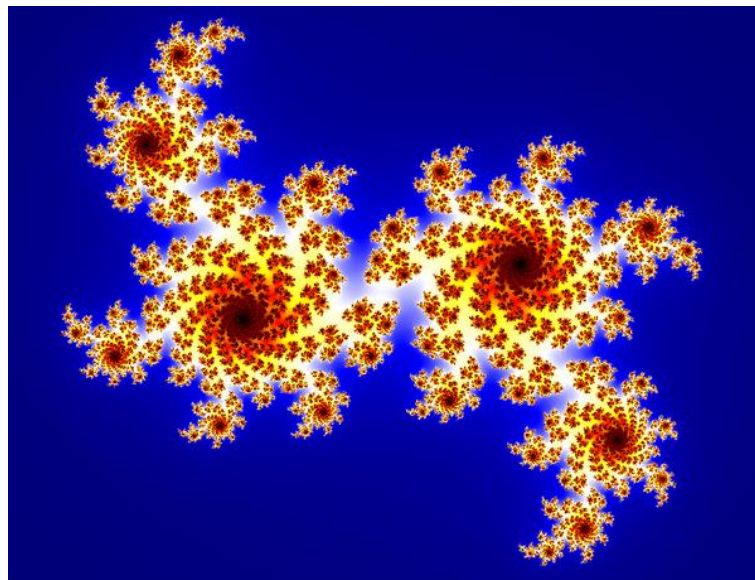
Do período da primeira grande guerra, dois franceses Pierre Fatou (1878-1929) e Gastou Julia (1893-1978) merecem ser lembrados por seus trabalhos, mesmo em pesquisas não conjuntas, como cita Barbosa (2005):

Seus resultados forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot e os famosos conjuntos de Julia, pois esses estavam completamente esquecidos. (BARBOSA 2005, p. x)

Julia, servindo como soldado, foi gravemente ferido. Consta que sua pesquisa foi desenvolvida quando estava internado num hospital, resultando no seu principal trabalho de 199 páginas, com apenas 25 anos.

Eles estudaram o que acontece com imagem no plano complexo quanto se aplica iterações a transformação $f(z) = z^2 + c$, para um z complexo inicial e c , complexo constante, um exemplo pode ser visto na figura 10.

Figura 10: Conjunto Julia



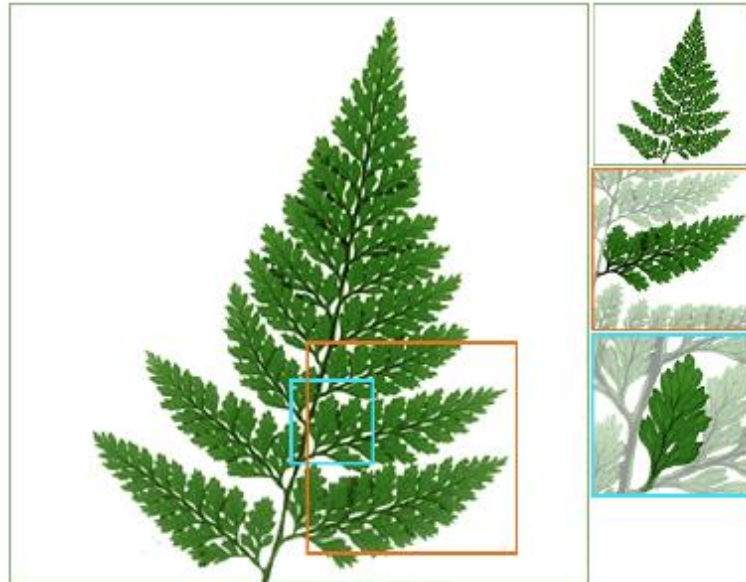
Fonte: <https://www.codeproject.com/Articles/38514/The-beauty-of-fractals-A-simple-fractal-rendering>

Samambaia de Barnsley

Observando a figura 11, percebe-se que se parece com uma folha de samambaia, mas é um fractal criado por Barnsley, onde os ramos se assemelham

com o caule e é uma cópia reduzida da samambaia grande. A figura foi construída com a repetição de algumas regras e o que existe na imagem da natureza é uma semelhança aproximada em diferentes escalas.

Figura 11 – Samambaia de Barnsley



Fonte: <http://pfs1224.blogspot.com.br/2013/05/elementos-da-fractal-de-kock-e-sierpinski.html>

Conjunto Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot é um dos fractais mais famosos, formado por intermináveis formas. É o conjunto dos pontos (a, b) pintados de preto. Sua construção pode ser feita a partir do sistema de duas equações:

$$X_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$

$$Y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

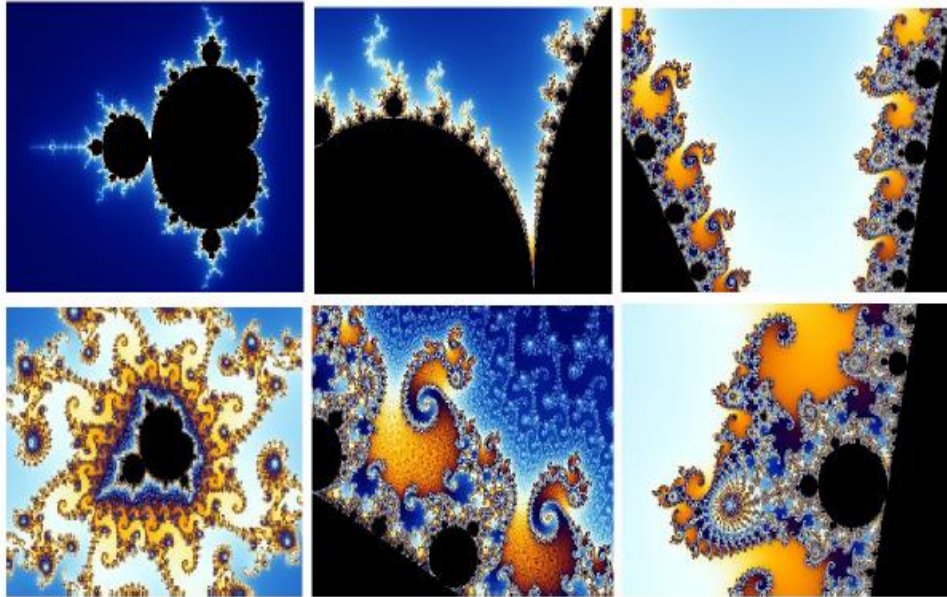
Onde para cada par a e b são obtidos os valores limites de x_n e y_n .

Construção:

1. Centrado na origem do plano cartesiano (x, y) desenhe um círculo de raio 2;
2. Tome $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$;
3. Escolha um valor para a e um para b ;

4. Calcule os valores de $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{100}, y_{100}$;
5. Se o ponto (x_{100}, y_{100}) estiver dentro do círculo, pinte de preto, caso o contrário deixe-o inalterado;
6. Repita o processo do passo 2 ao 6.

Figura 12 – Conjuntos Mandelbrot



Fonte: Andrade, 2012

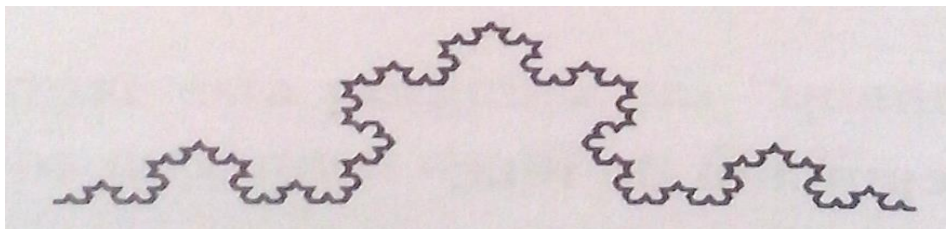
A figura 12, representa o Conjunto de Mandelbrot, onde a partir da primeira a imagem vai se aproximando mais, neste caso a escala, até chegar na última figura.

2.5 Categorias dos Fractais

Barbosa (2005) classifica os fractais em categorias que levam em consideração a forma de obtê-los. As categorias são as seguintes:

a) Fractais pela fronteira: os procedimentos para construção dos fractais são gerados por sua fronteira (linha ou contorno) do polígono inicial. Exemplos, Curva de Peano, Curva de Koch (figura 13).

Figura 13: Curva de Koch



Fonte: Barbosa 2005

b) Fractais por remoção: os procedimentos para criação destes fractais são obtidos por remoção de regiões internas semelhantes da figura inicial (figura geométrica geradora do fractal). Exemplos, Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski (figura 14), Esponja de Menger (figura 15).

Figura 14 – Triângulo Sierpinski

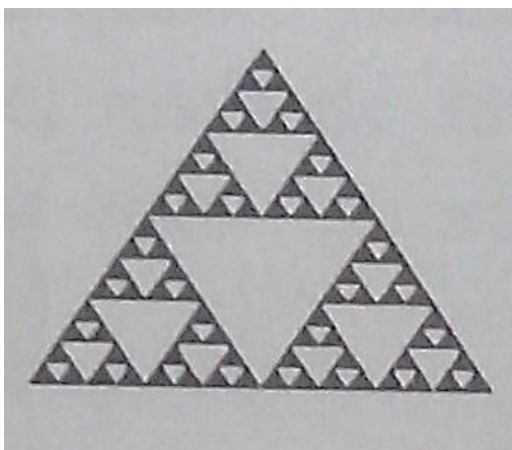
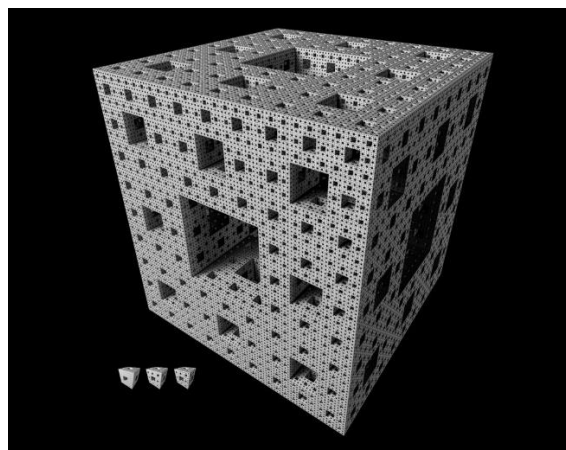


Figura 15 - Esponja de Menger



Fonte: Janos 2008

Fonte: <http://micro.cibermitanios.com.ar/post/11748856750/fractales-3d>

c) Fractais tipo Árvore: são ramificações que se assemelham a árvore. Exemplos: Árvore Bifurcada (figura 16), Árvore Pitagórica (figura 17)

Figura 16 – Árvore Bifurcada

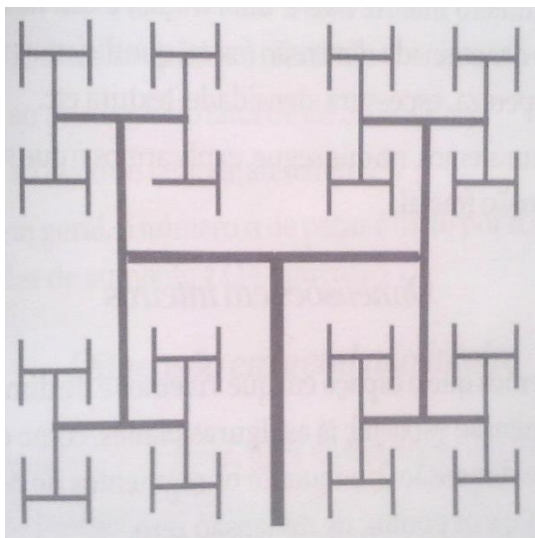
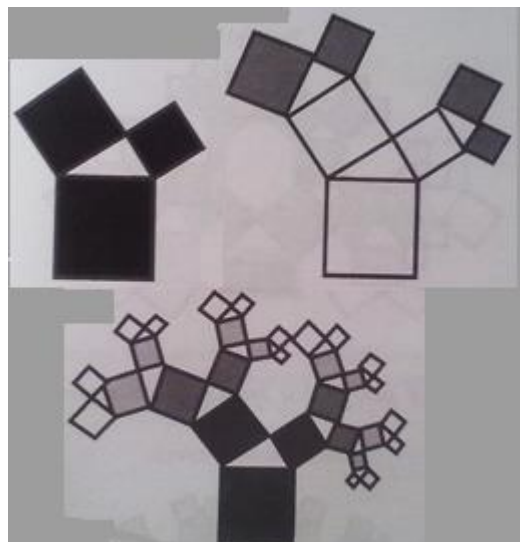


Figura 17 – Árvore Pitagórica



Fonte: Barbosa 2005

d) Fractais de Durer: os procedimentos para a obtenção dos fractais consistem em fazer as interações do mesmo polígono regular em seus vértices num processo recursivo. Exemplos: fractal pentagonal (figura 18) e fractal hexagonal (figura 19) tipo Durer.

Figura 18 – Pentagonal Durer

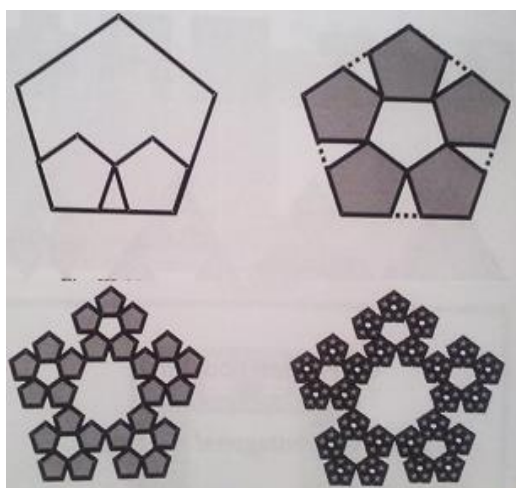
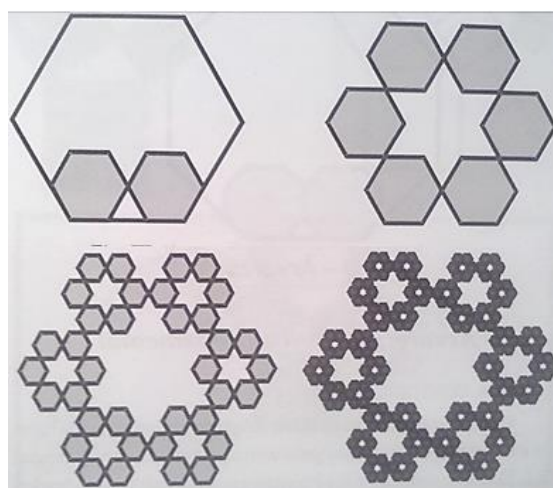


Figura 19 – Fractal Hexagonal Durer

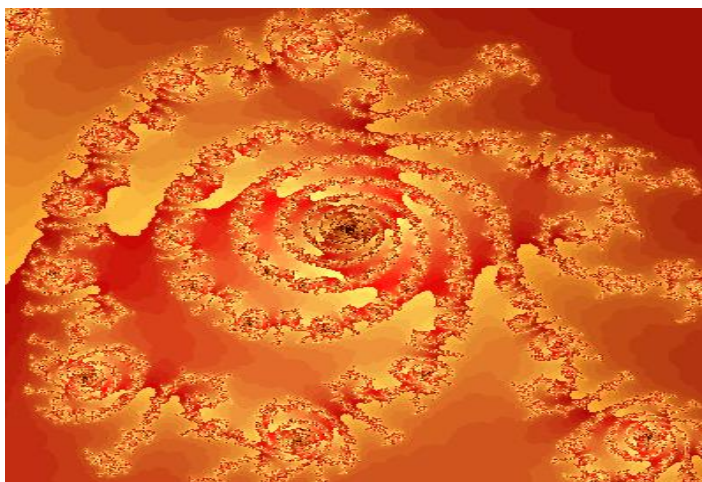


Fonte: Barbosa 2005

e) Fractais por expansão: os procedimentos para as construções são obtidos por expandir polígonos para a região exterior da figura inicial que diferencia das

categorias anteriores, pois a figura geométrica geradora do fractal é constituída por mais de uma figura geométrica. Exemplo: fractal de expansão (figura 20)

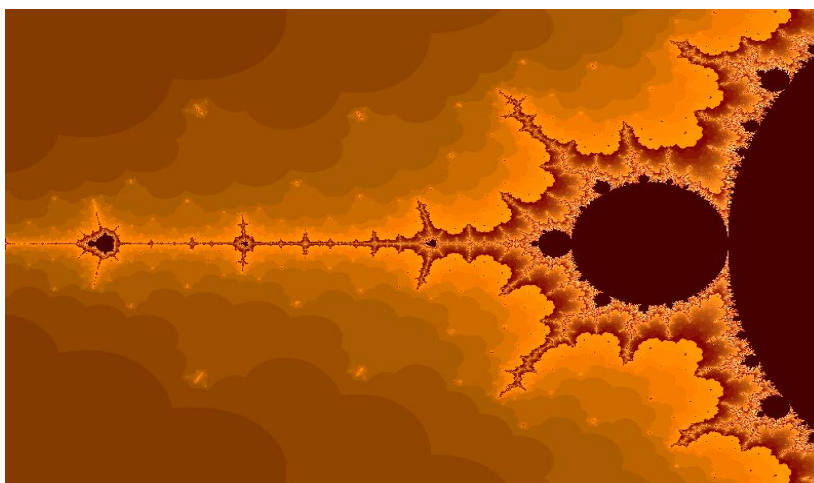
Figura 20 – Fractal de Expansão



Fonte: Software Nfract 2016

f) Fractais algébricos: são obtidos por equações matemáticas não-lineares e não por figuras geométricas regulares, com um grau de complexidade superior aos fractais citados anteriormente. Baseiam-se em sequências numéricas reais ou complexas, em sistemas de funções e representação gráfica de pontos no sistema cartesiano, e suas concepções acerca do comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares estão apoiadas na Teoria do Caos. Exemplos: conjunto Mandelbrot (figura 21) e Julia

Figura 21 – Conjunto Mandelbrot



Fonte: Software Nfract 2016

2.6 Fractais e as Progressões Geométricas (PG)

No papiro de Ahmes (ou de Rhind), um pergaminho egípcio, escrito na forma de manual prático, copiado em 1650 a.C. pelo escriba Ahmes, de um trabalho ainda mais antigo possui vários problemas de progressões aritméticas e progressões geométricas. Este papiro é uma fonte rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências claras de que os Egípcios sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética e geométrica. Isto mostra que o estudo e aplicações de Progressões vem de muito tempo atrás.

Por exemplo, o problema 79 diz apenas “7 casa, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares de grãos”, que é encontrado no papiro.

Podemos perceber a utilização das progressões na construção dos fractais clássicos já apresentados e no fractal que será utilizado como aplicação neste trabalho. Por exemplo, que no Triângulo de Sierpinski, para representar uma sequência de termos que indique a quantidade de triângulos brancos a cada nível da figura, veremos que se trata de uma P.G.

2.6.1 Progressões Geométricas (P.G.)

Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o n -ésimo termo da sequência.

Escreve-se $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) , para indicar a sequência cujo n -ésimo termo é x_n . (LIMA, 2014)

A definição de Progressão Geométrica, segundo Iezzi 2004

Chama-se *progressão geométrica* (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$a_1 = a$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

em que a e q são números reais dados.

Assim, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada. (IEZZI 2004, p. 18)

Com base na definição de uma P.G. podemos deduzir a formula do termo geral para uma P.G.

Considerando uma PG de termos ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$) e razão q . São válidas as seguintes relações:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

De modo geral, vale $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ou seja, o n -ésimo termo geral de uma PG com razão q é dado por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (1.3)$$

Nesta fórmula temos que:

- a_n representa um termo qualquer;
- a_1 representa o primeiro termo;
- n representa o número de termos;
- q representa a razão.

2.6.2 Classificação de uma Progressão Geométrica

As P.G. podem ser classificadas em cinco categorias:

- *Crescentes* são as P.G. em que cada termo é maior que o anterior
 $q > 1$ e $0 < q < 1$
- *Constantes* são as P.G. em que cada termo é igual ao anterior $q = 1$
- *Decrescente* são as P.G. em que cada termo é menor que o anterior.
 $0 < q < 1$ e $q > 1$

- *Alternantes* são as P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Ocorre quando $q < 0$.
- *Estacionárias* são as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$. Ocorre quando $q = 0$.

2.6.3 Soma dos termos de P.G.

Abaixo teremos descrita a dedução da fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita e em seguida, de uma P.G. infinita, conforme (IEZZI GELSON; HAZZAN 2004)

Dada uma P.G., isto é, conhecendo-se os valores de a_1 e q , procuremos uma fórmula para calcular a soma S_n de seus n primeiros termos.

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}. \quad (1.1)$$

Multiplicando ambos os membros de (1.1) por q , obtemos:

$$q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n. \quad (1.2)$$

Observando os segundos membros de (1.1) e (1.2), vemos que a parcela a_1 só aparece em (1.1), a parcela $a_1 q^n$ só aparece em (1.2) e todas as outras parcelas são comuns às duas igualdades, assim, subtraindo, temos:

$$(1.2) - (1.1) \rightarrow q S_n - S_n = a_1 q^n - a_1 \rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^n - a_1$$

Supondo $q \neq 1$, resulta:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

Dada uma P.G. infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, dizemos que $a_1 + a_2 + \dots = S$ se, formada a sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$, em que essa sequência converge para S , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$$

Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma P.G. com razão q tal que $-1 < q < 1$, então:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + na + \dots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração:

Vamos provar que o limite da sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ das somas parciais dos termos da P.G. é $\frac{a_1}{1-q}$. Temos.

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$$

Lembrando que a_1 e q são constantes, e lembrando que, para $-1 < q < 1$, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. Resulta, portanto, o seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{a_1}{1-q} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = 0$$

Isto é:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

3. TECNOLOGIAS PARA A SALA DE AULA

Os jovens da atualidade estão cercados da cultura tecnológica e são atraídos por ela que está presente na vida de todos. Os professores devem estar preparados para conviver com essas tecnologias junto com os estudantes, pois sabendo adequar os recursos tecnológicos, eles podem contribuir com o processo de ensino aprendizagem.

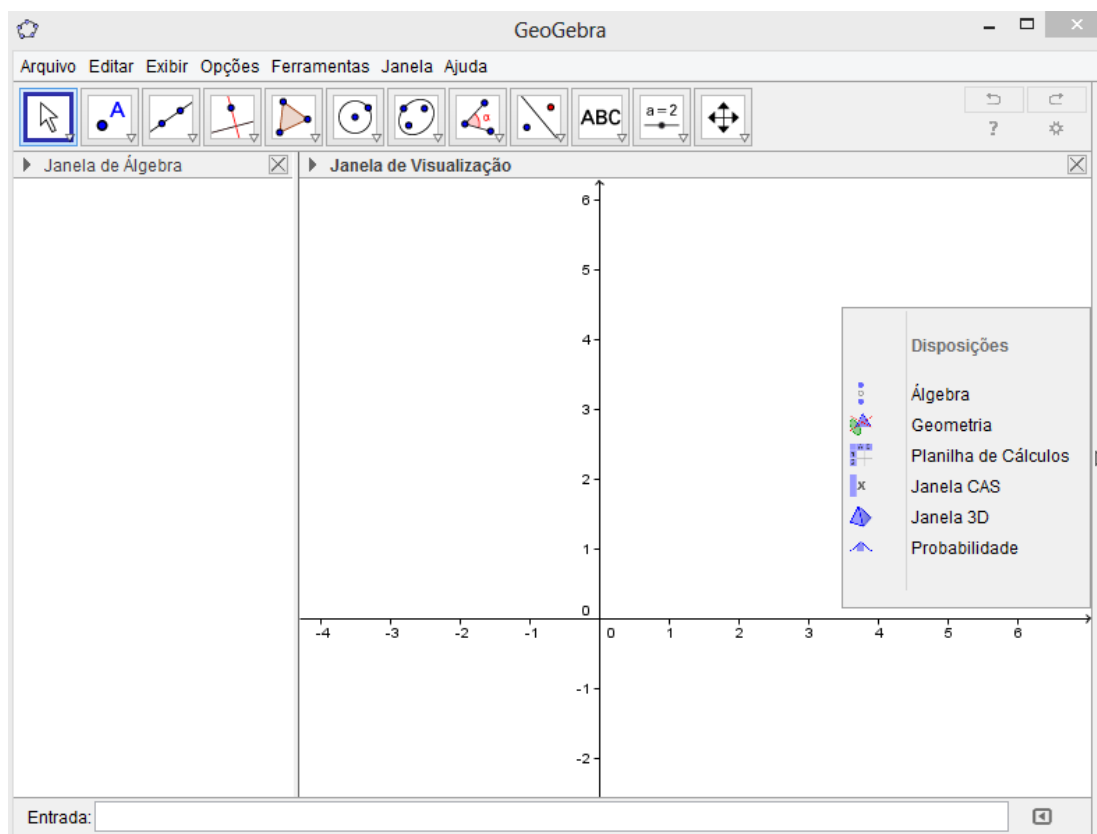
Ao ensinar conteúdos da Geometria, muitas vezes se necessita de ilustrações, que as vezes não ficam com a forma desejada e se perde muito tempo em suas construções. Segundo diz Silva (2015),

Perde-se muito tempo na construção de figuras e por vezes elas não ficam com boa qualidade. Além disso, não é possível manipular tais imagens. Com a utilização de um software conseguimos construir figuras e gráficos com boa qualidade e podemos manipular tais figuras permitindo, ao estudante uma boa exploração dos conceitos geométricos.

É evidente que o avanço das tecnologias, estão contribuindo com as diversas áreas da sociedade e a escola tem o importante papel de mostrar essa contribuição e seu desenvolvimento além de incentivar alunos e professores a conhecer esses recursos, pois o professor ao utilizar um programa em sala de aula precisa analisar se esse programa escolhido é adequado para atingir os objetivos planejados para ensinar o conteúdo.

Hoje em dia, existem vários softwares voltados para o ensino de Matemática, cada um com suas particularidades. Para a realização de nossa pesquisa, utilizamos o GeoGebra que é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino, do básico ao universitário, criado por Markus Hohenwarter professor na universidade de Salzburg e reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente, como mostra a figura 22.

Figura 22: Tela inicial do GeoGebra



Fonte: autora deste trabalho

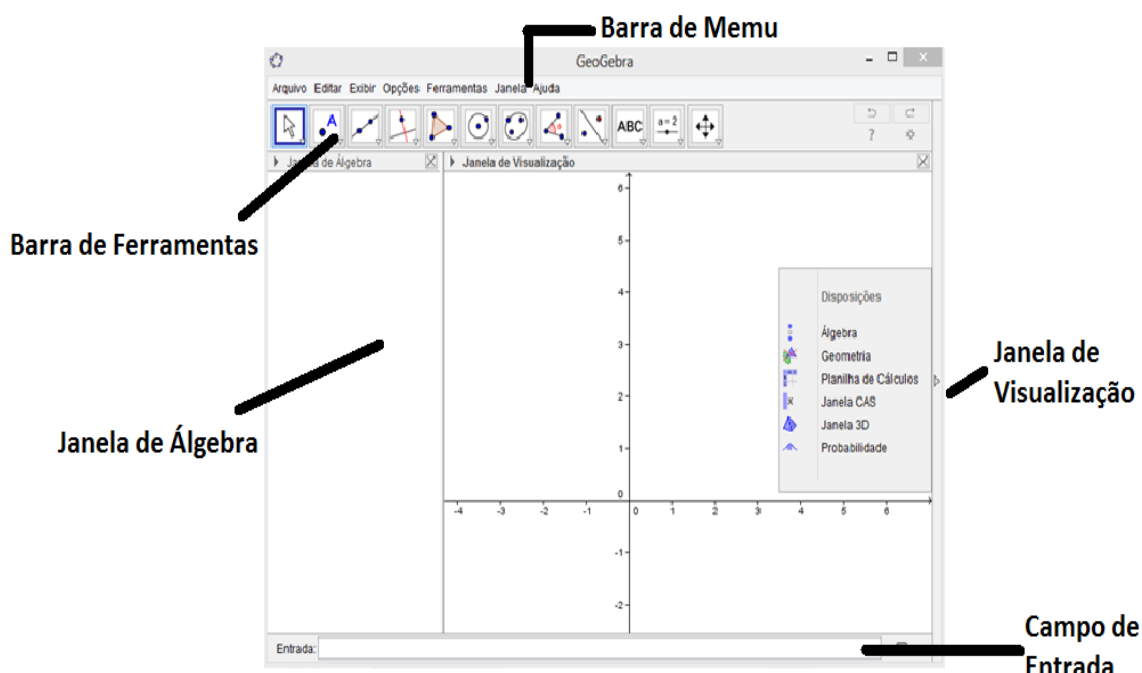
O GeoGebra é uma boa alternativa para as aulas de Matemática, pois pode complementar as explicações dada pelo professor sobre os conteúdos, fazendo com que o aluno visualize os dados e com isso possa compreender melhor o assunto, tornando as aulas mais produtivas, desde que o professor tenha domínio do conteúdo, e que os aspectos operacionais do programa sejam problemas de segundo plano.

De acordo com Dias (apud Pereira 2012)

A utilização de softwares de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem de Geometria tanto pode ser mais uma ilustração para a aula como um rico material didático que instiga a curiosidade dos alunos e aguça seu espírito investigativo, levando-os a elaborar conjecturas sobre situações diversas. (DIAS, 2009, p.49)

O aluno vivenciando a construção da figura, não só apenas vendo a imagem pronta, pode compreender as propriedades que se necessita para se chegar na figura desejada. Essa observação da construção de uma figura geométrica possibilita o incentivo do aluno pelos conteúdos da matemática.

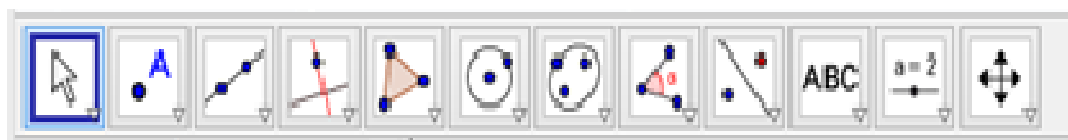
Figura 23: Conhecendo as ferramentas do GeoGebra



Fonte: autora deste trabalho

A Barra de Ferramentas está dividida em 12 janelas como a que apresentamos na Figura 24

Figura 24: Janela do GeoGebra



Fonte: autora deste trabalho

Cada janela do software possui várias ferramentas que podem ser visualizadas com um clique na parte inferior do ícone. Cada ícone tem um desenho e um nome para ajudar a lembrar o que a ferramenta faz. O Campo de Entrada fica no rodapé da janela do GeoGebra. Por meio dele é possível operar o programa usando comandos escritos, que desempenham praticamente as mesmas funções da Barra de Ferramenta. A Janela da Álgebra, que geralmente aparece quando iniciado o GeoGebra, pode ser ocultada a partir da Barra de Menu.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

Para o desenvolvimento da pesquisa foi escolhida uma turma de 2º ano do Ensino médio de uma escola pública estadual da cidade de São Raimundo Nonato. A escola funciona no turno da manhã com turmas do ensino fundamental maior e ensino médio, no turno da tarde com o ensino médio. Possui um laboratório, uma biblioteca, uma quadra, cantina e salas espaçosas.

No primeiro momento foram apresentados slides sobre os Fractais destacando: a história dos fractais, suas principais características, os tipos, um pouco sobre Benoit Mandelbrot dentre outras características.

No segundo momento, aconteceu a apresentação do software GeoGebra e suas principais ferramentas, pois com ele podemos visualizar o passo-a-passo da construção do fractal escolhido possibilitando uma melhor compreensão do conteúdo a ser estudado.

O fractal escolhido foi o Triângulo de Sierpinski, pois através dele podemos estudar diversos assuntos, como: área do triângulo, perímetro, semelhança entre triângulos, conceito de progressão geométrica, entre outros. Com enfoque na P.G., pois nesse fractal é possível trabalhar esses conteúdos de maneira mais simples e sua construção também é simples.

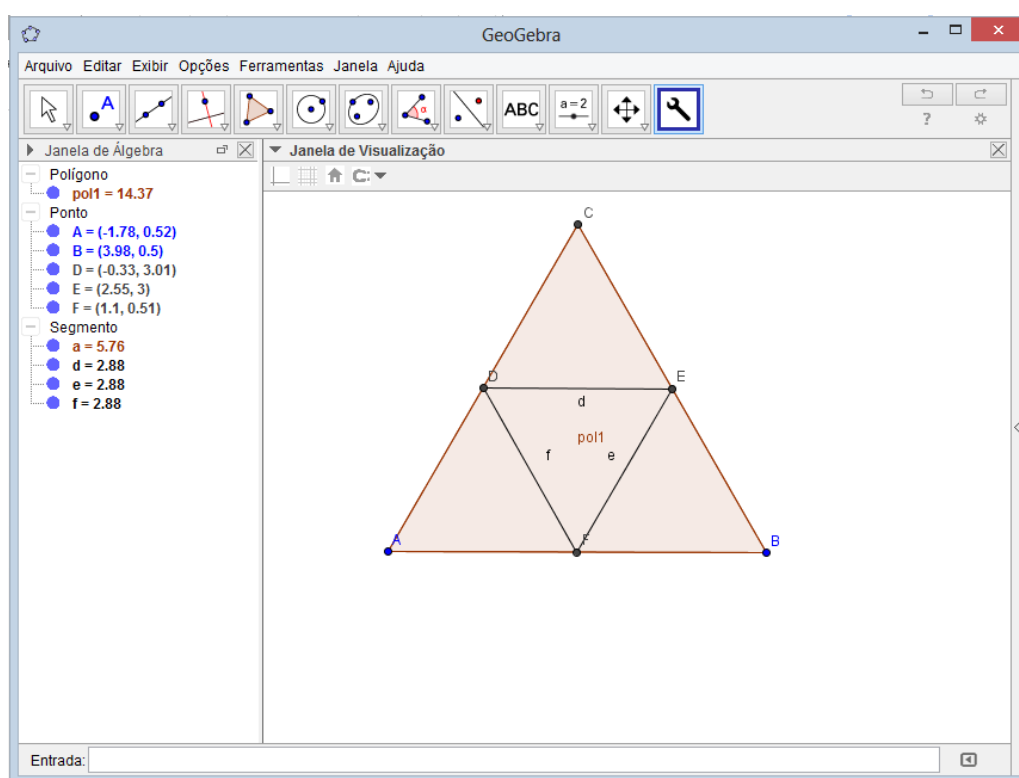
Durante a construção os alunos foram levados a relembrar alguns conceitos de geometria como: ponto médio, congruência, área, em especial do triângulo equilátero.

Vejamos os passos para a construção Triângulo de Sierpinski:

- Parte-se de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações;
- Marcam-se os pontos médios de cada um dos três segmentos que se delimitam o triângulo obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior;

- Ligam-se esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos congruentes, cujo lado é a metade do lado do triângulo original e a área é $1/4$ da área deste triângulo (figura 25);
- Retira-se o triângulo central, ficando 3 novos triângulos equiláteros;
- Repetem-se indefinidamente os três últimos passos com os triângulos restantes.

Figura 25 – Fractal construído no GeoGebra



Fonte: autora deste trabalho

O fractal obtido é estritamente auto semelhante, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura.

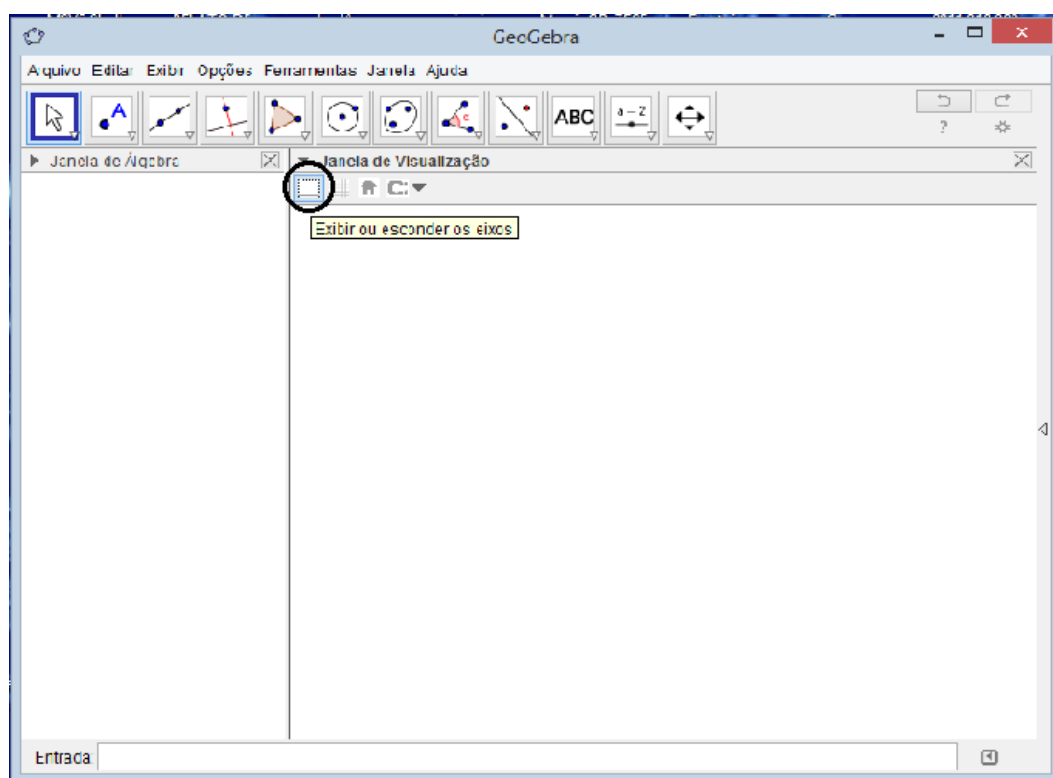
Partindo da primeira análise do triângulo e de sua primeira interação, os alunos são levados a observar que a cada interação, cada triângulo que faz parte do Triângulo de Sierpinski dá origem a quatro novos triângulos, sendo que destes quatro triângulos o do centro, que está invertido, é retirado.

Em um primeiro momento, a atividade iria ser aplicada no laboratório da escola, mas o mesmo não possuía computadores suficientes para cada aluno, assim como ainda teria que ser instalado o software e, também por causa do curto tempo. O professor da turma disponibilizou poucas aulas para a aplicação da atividade, por esse fato a construção da figura foi apenas expositiva.

Explicaremos o roteiro para a construção do Triângulo de Sierpinski no programa GeoGebra:

- 1- Abrir uma janela no GeoGebra e esconder os eixos e a malha quadriculada, caso estejam visíveis, clicando no símbolo exibir ou esconder os eixos (figura 26).

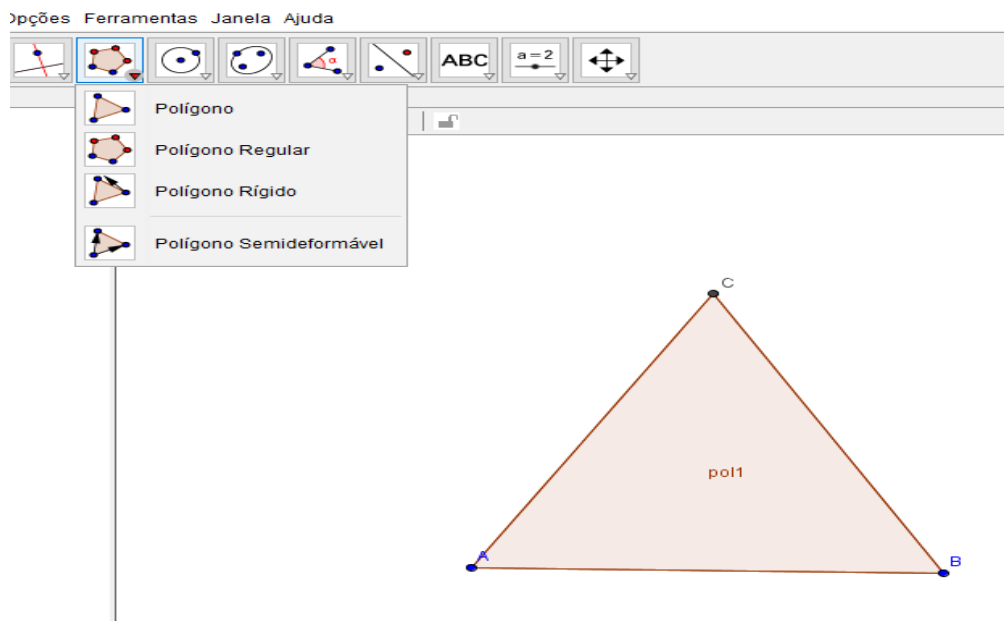
Figura 26: Interface do GeoGebra com eixos e malha ocultos.



Fonte: autora deste trabalho

- 2- Construir um triângulo equilátero de vértices A, B e C utilizando o ícone polígono regular, que corresponde ao quinto ícone da barra de ferramentas (figura 27).

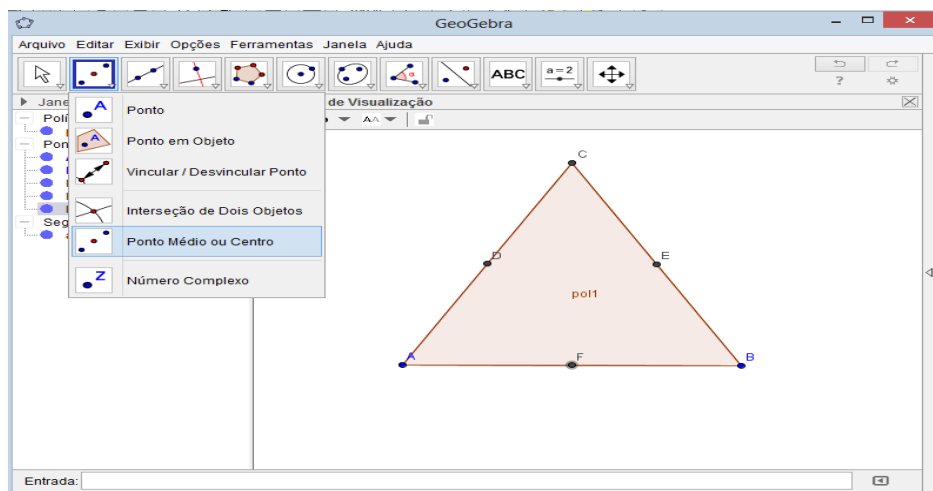
Figura 27: Triângulo equilátero construído no GeoGebra.



Fonte: Interface do GeoGebra com atividade produzida pela autora.

- 3- Marcar os pontos médios D, E e F utilizando o 2º ícone e opção ponto médio (figura 28).

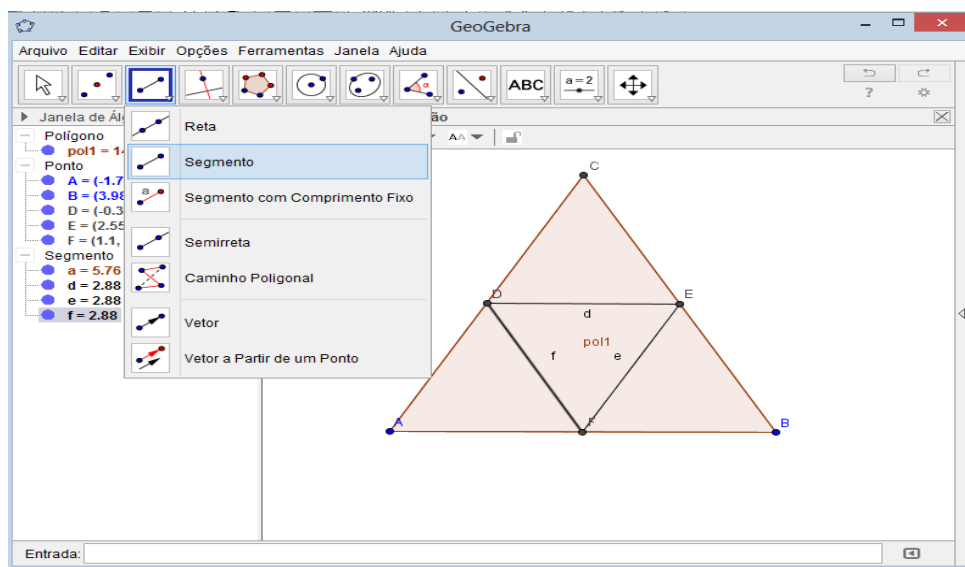
Figura 28: Identificação dos pontos médios dos lados do triângulo.



Fonte: Interface do GeoGebra com atividade produzida pela autora.

- 4- Construir um novo triângulo equilátero que tenha como vértices os pontos médios do triângulo feito inicialmente a partir do 3º ícone na opção segmento (figura 29).

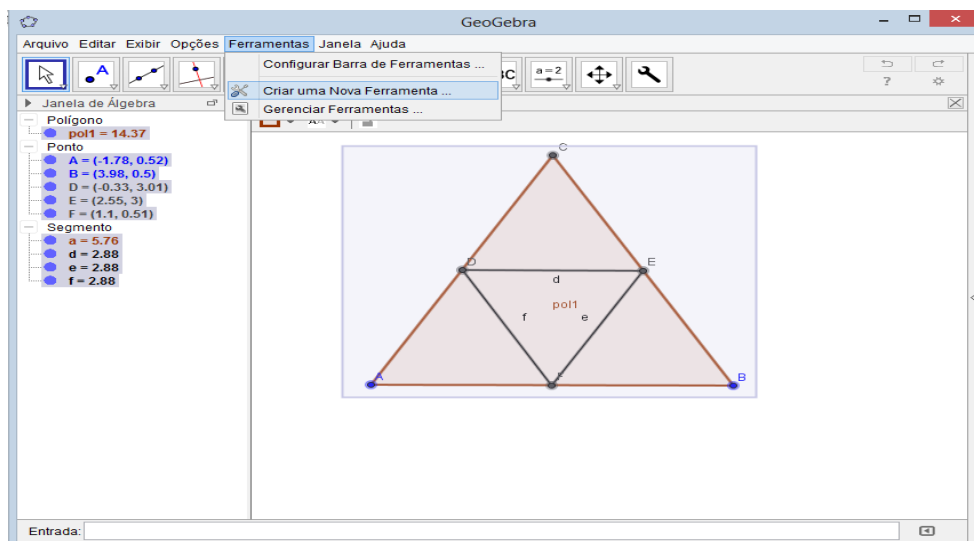
Figura 29: Construção do triângulo de vértices D, E e F.



Fonte: Interface do GeoGebra com atividade produzida pela autora.

- 5- Desconsiderar o triângulo central que será pintado de uma cor diferente a fim de termos nossa primeira iteração (figura 30).

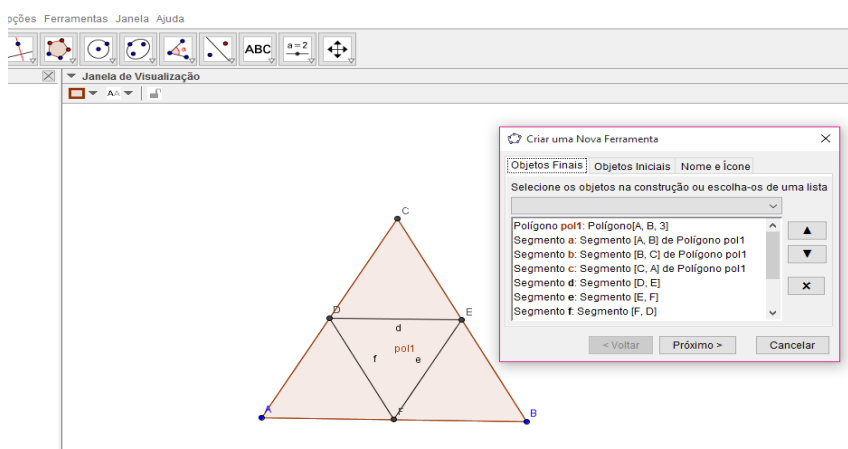
Figura 30: Resultado da primeira iteração



Fonte: Interface do GeoGebra com atividade produzida pela autora.

Esse processo deve ser repetido marcando-se o ponto médio de cada um dos lados dos demais triângulos. Em seguida, unir os segmentos e desconsiderar o triângulo do meio e assim, sucessivamente. Para isso, utilizaremos a criação de uma nova ferramenta na interface do GeoGebra que nos facilitará essa repetição. Ela se encontra no ícone Ferramentas- criar nova ferramenta e, sendo utilizada, abrirá uma nova aba na tela, conforme figura 31.

Figura 31: Visualização da janela “Ferramenta” aberta.



Fonte: Interface do GeoGebra com atividade produzida pela autora.

Para criar a nova ferramenta, temos que selecionar a figura e clicar no ícone ferramentas, onde apareceram as seguintes opções abaixo.

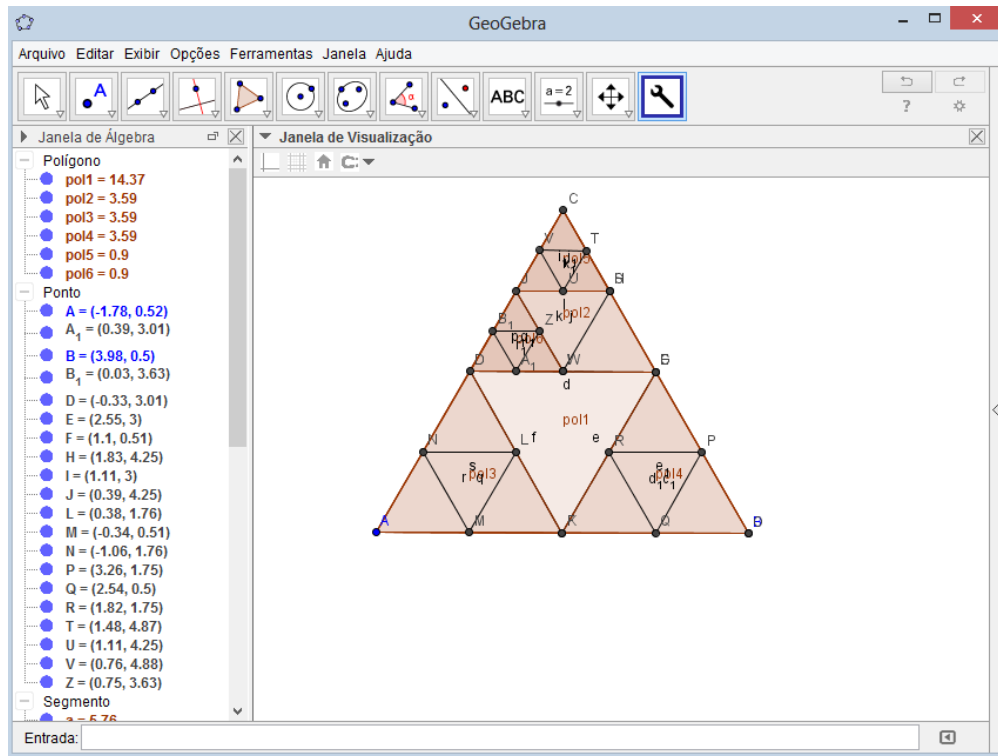
Objetos finais: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros.

Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depende toda a construção.

Nome e ícone: nome dado, conforme desejado, ao novo ícone para a ferramenta.

Após clicar em concluído irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída (figura 32). Para utilizá-la, iremos clicar no ícone com o nome dado e nos pontos desejados.

Figura 32: Ferramenta construída com êxito.



Fonte: Interface do GeoGebra com atividade produzida pela autora.

Depois de criada a ferramenta, fica mais fácil fazer quantas iterações desejarmos. Assim, Podemos observar nas figuras que a cada iteração, a área do triângulo de Sierpinski é igual a área do triângulo anterior multiplicado por $\frac{3}{4}$ e que seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo anterior multiplicado por $\frac{3}{2} = (3 \cdot \frac{1}{2})$.

De fato, analisando cada iteração podemos associar ao conteúdo de progressão geométrica.

Por fim, após as construções feitas no Geogebra, foram aplicados os questionários para o professor da turma e os alunos (Apêndices A e B)

5. ANÁLISE DOS DADOS

Para entender de forma mais clara os resultados do trabalho, os resultados foram separados e analisados conforme cada uma das questões que possuía, dessa forma, para melhor compreensão dos dados obtidos, dividiu-se as questões em quadros, cada quadro referente a uma das perguntas propostas nos questionários dos alunos e do professor, com a devida discussão do resultado logo em seguida.

Depois da construção do Triângulo de Sierpinski no programa GeoGebra, os alunos e o professor da turma responderam uma atividade referente ao triângulo. Participaram da pesquisa 17 alunos da turma e mais o professor.

Os resultados da atividade aplicada com os alunos estão na tabela 1:

Tabela 1: Resultado da atividade aplicada com os alunos

Questões	Corretas	Incorretas
01- Escreva os quatro primeiros termos da sequência onde o 1º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível original, o 2º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 1, o 3º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 2, e o 4º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 3.	100%	0%
02- O que acontece a cada novo termo?	76,47%	23,53%
03- Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente?	70,59%	29,41%
04- Tente encontrar um termo geral da sucessão que permita calcular o número de triângulos brancos na n-ésima geração.	64,71%	35,29%
05- Concluímos que a cada novo termo a área se aproxima da área do triângulo inicial, ou seja, a área tende a A. Esse valor é resultado de		

05- Na sua formação, já estudou alguma das Geometrias Não-Euclidianas? Se sim, quais? () Sim (x) Não
06- Você já ouviu falar sobre Geometria Fractal? Se sim, o que você conhece sobre o assunto. () Sim (x) Não
07- Quais temas de Matemática você poderia explorar com os fractais? <i>Formas geométricas, área, potencias, etc.</i>
08- A Geometria Fractal é um bom tema para ser explorado em sala de aula? Justifique. <i>Sim, ela ilustra o que acontece na potenciação, na geometria euclidiana.</i>
09- Analisando as imagens acima você consegue perceber algum padrão? (x) Sim () Não
10- Você acha que elas apresentam estruturas geométricas de grande beleza e complexidade? (x) Sim () Não
11- Escreva os quatro primeiros termos da sequência onde o 1º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível original, o 2º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 1, o 3º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 2, e o 4º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 3. <i>1, 3, 9 e 27</i>
12- O que acontece com a área a cada nova iteração? <i>A área cai $\frac{1}{4}$ enquanto a quantidade de triângulos brancos é uma sequência de potência com expoentes naturais consecutivos.</i>
13- Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente? <i>Enésimos</i>
14- Tente encontrar um termo geral da sucessão que permita calcular o número de triângulos brancos na n-ésima geração. <i>3^n</i>

15- Com a construção do triângulo de Sierpinski podem ser abordados quais conteúdos?

Questão não respondida

A exploração da geometria fractal desafiou os alunos possibilitando estabelecer relações entre o conteúdo de Progressões Geométricas e os elementos da natureza que os rodeiam.

A abordagem da geometria fractal facilitou o progresso observado, visto que tornou a aprendizagem menos mecânica, pois eles mesmos durante a resolução das questões encontraram uma ordem nas imagens e conseguiram achar um termo, por exemplo, para saberem a quantidade de triângulos no próximo nível. Só com a observação dos primeiros níveis, os alunos conseguiram identificar o processo que estava ocorrendo na construção do Triângulo de Sierpinski.

Observou-se na aplicação da atividade que utilizar a geometria fractal pode ser um complemento no estudo da Geometria Euclidiana. Ampliar a abordagem dos conteúdos à geometria fractal proporcionou uma ampliação do campo de visão geométrico do aluno. As construções fractais também possibilitaram o de alguns tópicos como área, perímetro, potenciação, semelhança, frações, dentre outros.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos nosso trabalho com um levantamento histórico sobre o tema Fractal, suas características, tipos, classificações, e uma apresentação dos fractais clássicos. Um dos objetivos foi o de apresentar os conceitos de progressão geométrica através de um fractal famoso.

Propondo uma alternativa de ensino, lançamos mãos na estrutura geométrica dos fractais. Abordando fatos históricos, seus criadores e as relações matemáticas presentes em cada figura, descobrindo dimensão, comprimento, área, progressões, entre outros.

No contexto das transformações, o professor de matemática se sente no dever de acompanhar os avanços tecnológicos, de mudar sua metodologia de ensino e de criar estratégias que seduzam a atenção dos alunos.

Acreditamos que a beleza presente em cada construção possa prender a atenção dos alunos e que, com a participação ativa do professor, eles possam encontrar todas as relações matemáticas presentes na figura.

A inserção da geometria fractal na sala de aula é ter uma outra visão da geometria convencional, é uma nova maneira de ver e organizar uma geometria não euclidiana, é buscar na Natureza formas que expliquem o significado da geometria para o aluno, fazendo ele compreender melhor o que ele estuda. Mas é evidente que continuará a trabalhar as outras Geometrias, mas também inserindo a Geometria Fractal, uma geometria encontrada fora dos parâmetros regulares, aquela que enriquece e se apresenta de forma surpreendente no cotidiano do aluno.

Esperamos ter contribuído no sentido de divulgação de uma alternativa sobre Geometria, neste caso da Geometria Fractal contemplando aspectos para o ensino da matemática e despertando o interesse de professores para a inserção do tema em suas aulas.

7. REFERÊNCIAS

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. VIDYA, v. 32, n. 2, p.113-132, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012. ISSN 0104-270 X

ANDRADE, Emerson Rodrigues. **Geometria Fractal e Outros Tópicos Relacionados:** novos conteúdos e atividades a serem explorados na Educação Básica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/SBM) Universidade Federal de São João Del-Rei, 2014

BARBOSA, Ruy Madsen. **DESCOBRINDO A GEOMETRIA FRACTAL:** para a sala de aula. 3. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria Fractal:** perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática. Belém – PA, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal do Pará.

CUNHA, Márcio Macário de. **PROGRESSÃO ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E FRACTAIS.** Campo Grande – MS, 2013. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática) Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

JANOS, Michel. **GEOMETRIA FRACTAL.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA 2014.

LIMA, Gelson Iezzi; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar, 4:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7.ed. – São Paulo: Atual, 2004.

MANDELBROT, Benoit B. **Objetos Fractais.** Lisboa: Gradiva, 1991.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. **O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA EM UMA ESCOLA PÚBLICA:** interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. Juiz de Fora - Setembro 2012. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática) Universidade Federal de Juiz de Fora.

PIMENTEL, Homero; URBAN, Paulo. **Fractais da história:** a humanidade no Caleidoscópico. São Paulo: Masdras, 2003.

SILVA, Deusaguimar Divino de. **O GeoGebra como ferramenta de ensino em Geometria Analítica.** Barra do Garças – MT, 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/ SBM) Universidade Federal de Mato Grosso.

SOUZA, Karin Daniele Francisco da Silva. **Estudo acerca da geometria fractal possíveis aplicações em sala de aula.** Birigui – SP, 2014. Trabalho de conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Instituto Federal de São Paulo.

APÊNDICE A

APÊNDICE A

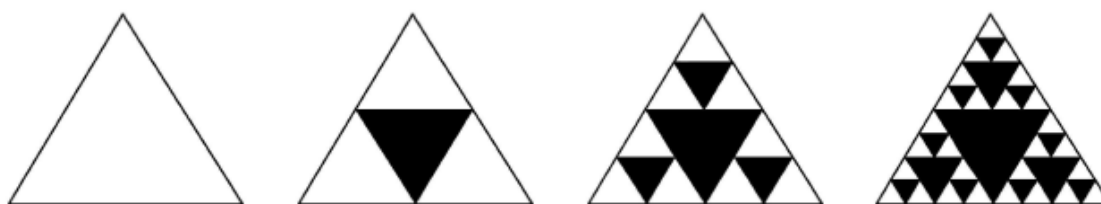
Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática

Aluna: Érika de Sousa Santos

Orientador: Francisco Teixeira Esteves

GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO

Triângulo de Sierpinski



- Parte-se de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações.
- Marcam-se os pontos médios de cada um dos três segmentos que se delimitam o triângulo obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior;
- Ligam-se esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos congruentes, cujo lado é a metade do lado do triângulo original e a área é $1/4$ da área deste triângulo;
- Retira-se o triângulo central, ficando 3 novos triângulos equiláteros;
- Repetem-se indefinidamente os três últimos passos com os triângulos restantes.

01- Escreva os quatro primeiros termos da sequência onde o 1º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível original, o 2º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 1, o 3º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 2, e o 4º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 3.

02- O que acontece a cada novo termo?

03- Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente?

04- Tente encontrar um termo geral da sucessão que permita calcular o número de triângulos brancos na n-ésima geração.

05- Concluimos que a cada novo termo a área se aproxima da área do triângulo inicial, ou seja, a área tende a A. Esse valor é resultado de

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$$

APÊNDICE B

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática

Aluna: Érika de Sousa Santos

Orientador: Francisco Teixeira Esteves

GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO

OBS.: Este questionário será utilizado somente para fins de pesquisa científica, não se faz necessária a identificação por parte do questionário, como também não há obrigação quanto à participação.

PROPOSTA DE ATIVIDADE SOBRE GEOMETRIA FRACTAL

01- Você já participou de alguma uma formação continuada na área de Geometria?
Justifique

() Sim

() Não

02- Utiliza de novas estratégias pedagógicas em sala de aula, além do uso do livro didático? Quais/como:

() Sim

() Não

03- Quais as dificuldades encontradas para utilização de novas estratégias de ensino?

04- Cursou disciplinas específicas de geometria na graduação? Se afirmativo, responda: Quais foram? Quais conteúdos foram explorados?

05- Na sua formação, já estudou alguma das Geometrias Não-Euclidianas? Se sim, quais?

() Sim

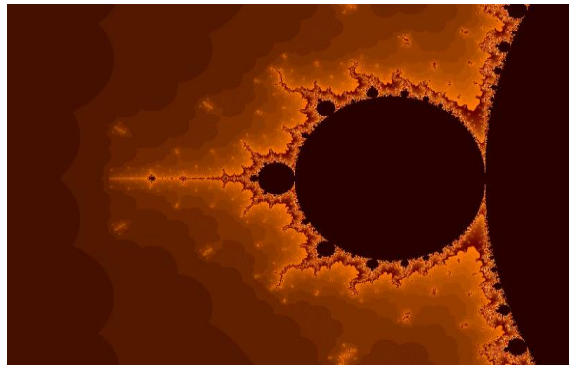
() Não

06- Você já ouviu falar sobre *Geometria Fractal*? Se sim, o que você conhece sobre o assunto.

07- Quais temas de Matemática você poderia explorar com os fractais?

08- A Geometria Fractal é um bom tema para ser explorado em sala de aula? Justifique.

Observe as imagens abaixo.



09- Analisando as imagens acima você consegue perceber que a um padrão?

() Sim

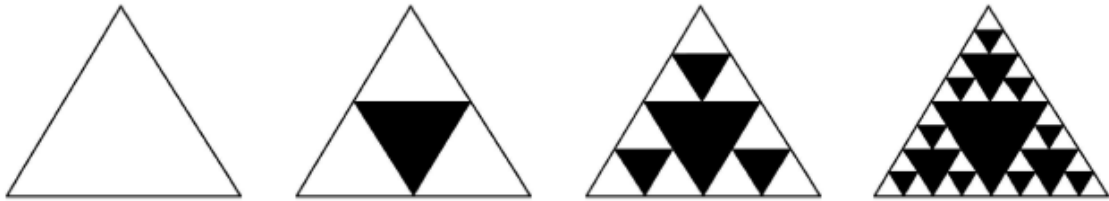
() Não

10- Você acha que elas apresentam estruturas geométricas de grande beleza e complexidade?

() Sim

() Não

Analisar o processo de construção do Triângulo de Sierpinski e responder as questões seguintes:



- Parte-se de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações.
- Marcam-se os pontos médios de cada um dos três segmentos que se delimitam o triângulo obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior;
- Ligam-se esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos congruentes, cujo lado é a metade do lado do triângulo original e a área é $1/4$ da área deste triângulo;
- Retira-se o triângulo central, ficando 3 novos triângulos equiláteros;
- Repetem-se indefinidamente os três últimos passos com os triângulos restantes.

11- Escreva os quatro primeiros termos da sequência onde o 1º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível original, o 2º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 1, o 3º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 2, e o 4º termo indica a quantidade de triângulos brancos no nível 3.

12- O que acontece a cada novo termo?

13- Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente?

14- Tente encontrar um termo geral da sucessão que permita calcular o número de triângulos brancos na n -ésima geração.

15- Com a construção do triângulo de Sierpinski podem ser abordados quais conteúdos?

Agradeço sua colaboração!