



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

GECSON RODRIGUES DE FARIAS

DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS: UM FOCO EXPONENCIAL E LOGARÍTMO

SÃO RAIMUNDO NONATO-PI

2018

GECSON RODRIGUES DE FARIAS

DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS: UM FOCO EXPONENCIAL E LOGARÍTMO

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus São Raimundo Nonato.

Orientador: Prof. Me. Adecio da Silva Santos.

SÃO RAIMUNDO NONATO-PI

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F224d Farias, Gecson Rodrigues de
 Demonstrações Matemáticas : Um Foco Exponencial e Logarítmico / Gecson
 Rodrigues de Farias - 2018.
 49 f. : il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, Licenciatura em
Matemática, 2018.

Orientador : Prof Me. Adecio da Silva Santos.

1. Exponencial. 2. Função. 3. GeoGebra. 4. Logaritmo. I.Título.

CDD 510

GECSON RODRIGUES DE FARIAS

DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS: UM FOCO EXPONENCIAL E
LOGARÍTMO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de
Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Piauí. Campus São Raimundo Nonato.

Aprovado pela banca examinadora em 06 de março de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Adecio da Silva Santos
Instituto Federal do Piauí (IFPI-SRN)

Prof^a. Esp. Sergiane Neves Monteiro
Instituto Federal do Piauí (IFPI-SRN)

Prof^a. Me. Leila Soares da Silva
Instituto Federal do Piauí (IFPI-SRN)

Dedico este trabalho primeiramente a DEUS, aos meus pais MARIA RODRIGUES DE SOUSA FARIAS e PEDRO CUSTÓDIO DE FARIAS, ao meu filho RAIMUNDO NETO RODRIGUES DOS SANTOS, aos meus irmãos e minha família em geral, por terem sempre acreditado em mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade e força para cursar e concluir a graduação, concedendo-me saúde e perseverança para vencer os obstáculos e as adversidades do cotidiano no âmbito pessoal e acadêmico. Aos meus pais Maria Rodrigues De Sousa Farias e Pedro Custódio de Farias, por terem sido minhas referências como pessoas, e por ter me incentivado a se dedicar aos estudos, viando um futuro melhor através da transformação que a educação proporciona, mas sem esquecer a origem, pois sempre me ensinaram que o caráter, simplicidade, conhecimento e sabedoria são virtudes que definem um homem.

Ao meu filho, Raimundo Neto Rodrigues dos Santos, por ter sido enviado por Deus em 2015 para ainda mais me motivar e inspirar, abrilhantando assim aos estudos e a conclusão desse trabalho.

Aos meus irmãos Jakson Rodrigues de Sousa Farias, Maria Aparecida Rodrigues de Farias, Odilonara Rodrigues de Farias, Raquel Rodrigues de Farias e Sidinaldo Rodrigues de Farias, por todo apoio e dedicação que me proporcionaram no decorrer da vida.

Aos meus tios Jovelina Custódio Dos Santos e Valter Marinho dos Santos, por terem me acolhido em sua casa e apoiado de forma significativa, uma vez que, sou oriundo de outra cidade.

Ao meu orientador, Prof. MSC. Adécio da Silva Santos, por sua contribuição que por meio de suas aulas demonstrou humildade e paciência, se dedicando sempre ao máximo; em suas excelentes orientações que deram embasamento à superação dos desafios e obstáculos que ocorrem para a conclusão deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Prof. Carlos Alberto da Silva, pelo seu apoio e dedicação, nas orientações e soluções das eventuais dúvidas que surgiram no decorrer deste trabalho.

Aos professores Amaya de Oliveira, Antonia Ravache de Oliveira, Atécio, Etiamara, Francisco Alves Dos Santos, Francisco Frazão Filho, Francisco Texeira Esteves, Gerciane das Neves Lima, Gesivaldo dos Santos da Silva, Janete Cesar, Rejane Fontenele, Rogério Azevedo, Ronyere Cardoso, Sergiane Neves Monteiro pelas suas aulas ministradas e colaboração, que fundamentaram o alicerce de minha graduação, na aquisição de conhecimentos necessários para um bom desempenho acadêmico, pois os mesmos são minhas referências na carreira docente, mas também pessoal.

Aos meus colegas de classe da graduação no IFPI, pela força e pelos momentos

de distrações que auxiliaram para diminuir o estresse e ansiedades durante o curso.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí-IFPI Campus São Raimundo Nonato, Pela estrutura e educação de excelência; e aos seus servidores que contribuíram direto ou indiretamente para que esse sonho fosse possível e torna-se realidade.

Enfim, os meus agradecimentos vão à todos aqueles que acreditaram e torceram por mim, pois todos aqui mencionados fazem parte desta conquista.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que
ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.
Arthur Schopenhauer

RESUMO

Este trabalho intitulado como Demonstrações matemáticas: Um foco exponencial e logarítmico, visa contribuir significativamente para a melhora do ensino matemático dos estudantes da Educação Básica. Nele é abordado uma proposta de ensino das funções exponenciais e logarítmicas através das demonstrações matemáticas (direta, contra positiva, redução ao absurdo e indução matemática) a luz dos conceitos e propriedades básicas do tema. São vistas algumas aplicações da função exponencial no resfriamento de um corpo, em matemática financeira pelos Juros compostos e o estudo do crescimento da população de bactérias através da função logarítmica. O software GeoGebra é explorado como recurso auxiliar para a visualização de situações problemas e como facilitador da construção da lógica dos raciocínios matemáticas mais abstratos, devido à sua capacidade de unir a álgebra e a geometria em uma única interface. Além de um exemplo de como utilizado no estudo da absorção, de um dado medicamento, pelo corpo humano.

Palavras-chaves: Exponencial. Função. GeoGebra. Logaritmo.

ABSTRACT

This work titled as Mathematical Demonstrations: An Exponential and Logarithmic Focus, aims to contribute significantly to the improvement of the mathematics teaching of students of Basic Education. In it, a proposal is proposed to teach exponential and logarithmic functions through mathematical demonstrations (direct, against positive, reduction to absurdity and mathematical induction) in light of the basic concepts and properties of the theme. Some applications of the exponential function in body cooling, in financial mathematics by compound interest, and the study of population growth of bacteria through logarithmic function are seen. GeoGebra software is explored as an aid to the visualization of problem situations and as a facilitator of the construction of the logic of the most abstract mathematical reasoning, due to its ability to combine algebra and geometry in a single interface. In addition to an example of how it is used in the study of the absorption of a given medicine by the human body.

Key-words: Exponential. Function. GeoGebra. Logarithm.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Função constante	22
Figura 2 – Função par	22
Figura 3 – Função ímpar	22
Figura 4 – Funções injetora, sobrejetora e bijetora	23
Figura 5 – Função exponencial ($0 < a < 1$)	24
Figura 6 – Função exponencial ($a > 1$)	25
Figura 7 – Lei de resfriamento	27
Figura 8 – Comportamento do montante	30
Figura 9 – Função logarítmica ($a > 1$)	37
Figura 10 – Função logarítmica ($0 < a < 1$)	38
Figura 11 – Ferramentas GeoGebra	40
Figura 12 – GeoGebra (janela de visualização 3D)	41
Figura 13 – GeoGebra (janela de visualização 3D)	42
Figura 14 – Interface do GeoGebra	43
Figura 15 – Controle Deslizante	44
Figura 16 – Função $x = a$	44
Figura 17 – Habilitar Rastro	45
Figura 18 – Interseção de f com g	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades de funções e equações exponenciais	27
Tabela 2 – Propriedades logaritmos	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO CONTEXTO HISTÓ- RICO	15
3	TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÕES	18
3.1	DEMONSTRAÇÃO DIRETA	18
3.2	CONTRA POSITIVA	19
3.3	REDUÇÃO AO ABSURDO	19
3.4	INDUÇÃO MATEMÁTICA	20
4	FUNÇÕES: ALGUNS EXEMPLOS E IMPORTÂNCIA	22
4.1	FUNÇÃO EXPONENCIAL	25
4.1.1	APLICAÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NO RESFRIAMENTO DE UM CORPO.	27
4.1.2	EQUAÇÃO EXPONENCIAL	28
4.1.3	APLICAÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL EM JUROS COMPOSTOS	30
4.2	FUNÇÃO LOGARÍTMICA	31
4.2.1	LOGARITMO.	32
4.2.2	DEMONSTRAÇÕES DAS PROPRIEDADES DE FUNÇÃO LOGARÍT- MICA.	36
4.2.3	APLICAÇÃO DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA NA POPULAÇÃO DE BAC- TÉRIAS	39
4.2.4	EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS	40
5	GEOGEBRA NO ESTUDO DA ABSORÇÃO DE MEDICAMENTOS .	41
5.1	CONCEITO E CARACTERÍSTICAS DE GEOGEBRA?	41
5.2	ABSORÇÃO DE MEDICAMENTOS	43
5.3	GEOGEBRA: FUNÇÃO DE ABSORÇÃO DE MEDICAMENTOS . . .	44
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área do conhecimento que requer bastante poder de concentração, raciocínio lógico, domínio de métodos de contagem, visão geométrica e imaginação. Por esta razão, para consolidar sua compreensão a dedicação é fundamental.

No decorrer dos tempos o ensino da Matemática ganhou lugar de destaque principalmente com os gregos. Porém, as suas descobertas eram bastante abstratas e muitos dos resultados obtidos não tinham uma aplicação prática no cotidiano.

Atualmente, o ensino da Matemática têm a sua importância consolidada, mas novas técnicas e contextualizações se tornam necessárias devido ao avanço da tecnologia. Entretanto a essência da matemática se sustenta nos seus meios de demonstrações. Uma fórmula, um teorema ou um resultado importante nascem de um grande raciocínio do qual os antecederam. Esse raciocínio no contexto da matemática é chamado de prova ou demonstração.

A motivação á princípio deste trabalho está no fato de muitos alunos e até mesmo professores da educação básica tanto nos níveis fundamental como no médio não terem a prática de utilizar as demonstrações matemáticas para a compreensão dos conteúdos necessários á aquisição de conhecimentos, seus estudos baseiam-se em se restringir apenas em decorar formulas e resolução de problemas, assim não conseguem desenvolver o raciocínio lógico e conseqüentemente não aprendem matemática. Nesse sentido a ideia de trabalhar as técnicas de demonstrações nas funções exponenciais e logarítmicas surgiu pela observação da carência do raciocínio lógico e as dificuldades que os alunos brasileiros a nível fundamental e médio possuem sobre esse tema.

O objetivo geral deste trabalho é disponibilizar novas abordagens e concepções de técnicas de estudos pelas demonstrações matemáticas à discentes e docentes da Educação Básica sobre os temas funções exponenciais e logarítmicas. Já os objetivos específicos são fornecer aos estudantes material didático complementar pelo software GeoGebra como suporte para desenvolver o raciocínio e o discurso matemático, traçar novas estratégias e adquirir poder de criatividade em identificar a matemática em seu próprio cotidiano.

A metodologia abordada foi a da revisão bibliográfica, através de sites especializados em assuntos matemáticos e diversos livros impressos. Um dos métodos adotados é construção de todas as figuras feitas pelo autor através da ajuda dos softwares GeoGebra, Paint e Word.

De acordo com [9], os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs da matemática

tratam como prioridade que o papel do ensino de Matemática na Educação Básica, é a “estruturação do pensamento e do raciocínio lógico”.

Vale ressaltar que nem sempre essa estruturação na prática acontece. Assim questiona-se: o raciocínio lógico é estimulado? A estruturação do pensamento é estimulado pela prática docente? Mas as técnicas de demonstração Matemática amparam a consolidação deste parâmetro e pode mudar o contexto que vivemos, que é a ausência do estímulo do raciocínio lógico nas escolas de educação básica.

Neste trabalho ressaltam-se as técnicas de demonstrações diretas, por contra positiva, por redução ao absurdo e indução matemática na área de funções exponenciais e logarítmicas. Além de expor exemplos de aplicações destes temas em situações importantes como o resfriamento de um corpo, os juros compostos e o crescimento de população de bactérias.

Expõe o software GeoGebra como ferramenta auxiliar para estudos matemáticos de modo a fornecer uma visão geométrica através do mesmo de algumas situações problema. Utiliza-o também em aplicação de modelagem envolvendo a função logarítmica.

2 AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo tem-se um pouco da história da matemática na Grécia Antiga e como os gregos utilizavam o raciocínio matemático em suas academias, bem como a de expor de forma referencial e contextualizado a compreensão que os antigos gregos tinham de como construir seus próprios alicerces para estudos algébricos e geométricos de temas matemáticos.

Sendo assim este capítulo aborda a história da matemática e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e lógico com correntes de pensamentos de diversos estudiosos desde a antiguidade até os dias atuais.

Segundo [1], as primeiras demonstrações matemáticas ocorreram na Grécia Antiga no período da Era Helênica, mas os primeiros raciocínios dedutivos surgiu com Tales de Mileto que viveu (624-548 a.C). Em viagem ao Egito, Tales aprendeu geometria e a partir daí criou o raciocínio dedutivo da geometria, surgindo assim as primeiras ideias de demonstrações matemática.

No decorrer do tempo até os dias de hoje, vários filósofos e matemáticos dão mérito e fazem referência à Tales, pois sabem de sua grande contribuição para a matemática.

Ao nascer das áreas do conhecimento pelos filósofos, os mesmos eram excelentes matemáticos. Muitos com grande destaque em suas épocas e até os dias atuais. Um destes é Sócrates, grande filósofo que viveu em (470-399 a.C), mas não se dedicou tanto a essa área do conhecimento, porém seu discípulo Platão (428-340 a.C), foi inspiração para a matemática do quarto século. Ele demonstrou postulados do método analítico, o qual ele mesmo denominou, e além de ser inspiração para outros deu orientação à matemática daquela época, segundo [1].

O método analítico de Platão consistia em uma demonstração da seguinte forma:

Em uma demonstração matemática começa-se com o que é dado, ou, de modo geral, nos axiomas e postulados ou, mais especificamente, no problema a resolver. Avançando passo a passo, chega-se à informação a ser demonstrada. Platão parece ter observado que, com frequência, é conveniente, pedagogicamente, quando a cadeia de raciocínios que leva das premissas à conclusão não é evidente, inverter o processo. Começa-se com a proposição a ser demonstrada e dela deduz-se uma conclusão que se sabe ser válida. Se, então, for possível inverter os passos nesse raciocínio,

o resultante é uma demonstração legítima da proposição, conforme [1].

Dentre os grandes estudiosos matemáticos da antiguidade está Aristóteles (384-322 a.C), discípulo de Platão e mestre de Alexandre, o grande. Além de filósofo era biólogo, mas tinha um enorme domínio em matemática, fundou a lógica dando conceitos e teoremas matemáticos com seus trabalhos e análises, contribuiu de forma significativa no desenvolvimento da matemática, conforme [1].

As grandes contribuições ao desenvolvimento da matemática, com numerosas obras, se deve a Euclides de Alexandria. Entre todas as obras de Euclides mais da metade se perdeu e cinco sobreviveram até os dias atuais: Os elementos, Os dados, Divisão de figuras e Óptica. Os elementos é composto por treze livros, sendo que os seis primeiros aborda geometria plana elementar, os próximos são três de teoria dos números, um sobre incomensuráveis e três descrevendo geometria no espaço. Nesses livros Euclides faz definições, postulados, axiomas, hipóteses, teses, enfim descreve grande parte da matemática daquela época, segundo [1].

No que tange historicamente ao início de funções exponenciais e logarítmica na Antiguidade é difícil descrever, uma vez que, por falta de material para registrar os momentos daquela época ou por materiais que não resistiram ou se perderam ao longo do tempo. Mas há alguns relatos e registro embora sejam em diferentes tempos serão mencionados.

Ainda segundo [1], de todas as civilizações antigas a que se tem mais documentação matemática é da Mesopotâmia, uma vez que, utilizavam tábuas de barro cozido para registrar seus feitos. Essas tábuas eram mais resistentes ao tempo do que os papiros do Egito. Existe inúmeras tábuas dos primeiros séculos do segundo milênio a.C da Babilônia antiga com a escrita cuneiforme contendo cálculo da raiz quadrada com até três casas sexagesimais, além de textos-tabelas, com multiplicação, raiz cúbicas e potências sucessivas de um determinado número, o qual assemelha as tabelas de exponenciais e logaritmos atuais. Como mostra o seguinte problema:

"A que potencia deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado, equivale à nossa: "qual o logaritmo de um número dado em um sistema com um certo número como base?", de acordo com [1]."

Como pode-se observar as ideias iniciais de função e exponenciais já eram conhecidas pelos babilônios mesmo que de maneira implícita, mas foi Nicole Oresme que viveu no século XIV entre os anos (1323-1382), quem apresentou as funções graficamente, embora fosse de forma primitiva. Neste século muitos matemáticos trouxeram grandes contribuições para o desenvolvimento da Matemática como: René Descartes (1596-165) com trabalhos voltados para geometria algébrica, Fermat (1601-1665) apresentou o método analítico em funções juntamente com Descartes e principalmente dois

grandes gênios que criaram o cálculo Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Seus trabalhos voltados para o cálculo, estabelecia uma definição e aplicações de funções nome criado por Leibniz que usa-se até os dias atuais, conforme [1].

Já quanto a formalização de logaritmos veio com o John Napier (1550-1617) em 1614 quando publicou seu trabalho sobre logaritmos, sendo que passou vinte anos em sua criação. Em 1615 Henry Briggs, primeiro professor de geometria de Oxford do Gresham College, sendo admirador de Napier trabalharam juntos fazendo algumas modificações no método de logaritmos, usando logaritmo de 1 igual a 0 e logaritmo de 10 igual 10 elevado a 10. Em 1617 Napier morreu, ficando Briggs responsável por construir a tabela de logaritmos com base em segundo tratado sobre logaritmos deixado por Napier ensinando os métodos para criar as tabelas, Briggs fez algumas readaptações uma delas foi de logaritmo de 10 igual 10 elevado a 10 para logaritmo de 10 igual a 1, e publicou ainda no ano da morte de Napier os logaritmos de 1 a 1.000, o que permite calcular quatorze casas cada um, em 1624 publicou de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 com a mesma quantidade de casas para cada um, o qual usa-se até hoje, segundo [1].

Não podemos deixar de mencionar o nome de uma figura bastante importante que contribuiu para os avanços da matemática, Al-Khwarizmi (780-850), o criador da álgebra e responsável pelo nosso sistema de numeração, de acordo com [1].

3 TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÕES

Antes de qualquer abordagem matemática é necessário entender bem os conceitos, definições e propriedades que serão usadas como “ferramentas de trabalho” no desenvolver do raciocínio lógico das demonstrações.

Este capítulo aborda as principais técnicas de demonstrações matemáticas e alguns exemplos de suas aplicações, objetivando uma base que será usada nos capítulos posteriores.

Os conceitos, princípios e propriedades mais utilizadas nos raciocínios matemáticos são :

Proposição: Todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo, por [3].

Princípio da não Contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, por [3].

Princípio do Terceiro Excluído: Toda proposição ou é verdade ou é falsa, ou seja, sempre verifica um destes casos e nunca um terceiro, por [3].

Axioma: proposição aceita sem qualquer demonstração, por [3].

Teorema: uma proposição **que se demonstra** ser verdadeira, baseada em proposições anteriores, por [3].

Demonstração: prova de que um teorema é verdadeiro, obtida por regras válidas, por [3].

Todos estes são utilizados na construção do raciocínio dedutivo, outros são tomados como conceitos primitivos. É o caso das noções de ponto reta e plano.

3.1 DEMONSTRAÇÃO DIRETA

A forma mais simples e óbvia de demonstração é a prova direta. Nela usa-se as hipóteses através de manipulações matemáticas para chegar em uma afirmação verdadeira.

Por [6], a forma de demonstração direta é entendida segundo a Definição 1.

Definição 1. "Para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assume-se que a hipótese p é verdadeira, deduza afirmações corretas a partir da hipótese e de afirmações anteriores chega-se na tese q ".

Por exemplo, para demonstrar a proposição: Se $a, b \in N$ são números ímpares,

então $a + b$ é par; utiliza-se a demonstração direta da seguinte forma:

Hipótese (assuma como verdade): a, b são números ímpares e Tese (conclusão): $a + b$ é par.

Demonstração. Como a e b são ímpares, então, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k_1 - 1$ e $b = 2k_2 - 1$. Logo, $a + b = 2k_1 - 1 + 2k_2 - 1 = 2(k_1 + k_2 - 1)$. Chamando $k_1 + k_2 - 1 = k_3$ tem-se $a + b = 2k_3$. Concluí-se que $a + b$ é múltiplo de 2, ou seja, $a + b$ é par. $\square$

3.2 CONTRA POSITIVA

As vezes é muito complicado provar certas proposições de forma direta e para sair deste situação a lógica fornece a prova por contra positiva que é equivalente a negação da tese para chegar na negação da hipótese.

Por [6] compreende-se contra positiva segundo a Definição 2.

Definição 2. "Provas por Contra positiva aproveitam a equivalência lógica entre " $p \Rightarrow q$ " é equivalente à " $\sim q \Rightarrow \sim p$ ". Disto resulta que, se " $\sim q \Rightarrow \sim p$ " for verdadeira, então " $p \Rightarrow q$ " também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contra positiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada".

Por exemplo, para demonstrar a sentença: Se $a \in \mathbb{N}$ é tal que a^2 é ímpar, então a também o é.

Ao observar a contra positiva, a prova desta proposição fica:

Demonstração. A contra positiva fica a é par $\Rightarrow a^2$ é par. Logo, como a é par então $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k$, elevando ambos os membros ao quadrado tem-se que $a^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, chamando $2k^2 = w$ tem-se $a^2 = 2w$, ou seja, a^2 é par. $\square$

3.3 REDUÇÃO AO ABSURDO

O próprio nome já explica sua ideia, ou seja, tendo as hipóteses em mãos e manipulando-as chega-se a uma afirmação absurda, sem sentido ou ridícula.

Por [6], entende-se esta técnica de demonstração segundo a definição 3.

Definição 3. "Uma demonstração por redução ao absurdo é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se, alguma proposição do tipo q fosse verdadeira, ocorreria uma contradição lógica, e portanto q só pode ser falsa, disto resultando que $\sim q$ é verdadeira".

Por exemplo, prove que $\sqrt{11}$ não é racional.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{11}$ fosse racional, logo $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{a}{b} = \sqrt{11}$ seria uma fração irredutível. Através de manipulações algébricas tem-se que $a = b\sqrt{11} \Rightarrow a^2 = (b\sqrt{11})^2 \Rightarrow a^2 = b^2 \cdot 11 \Rightarrow 11|a^2 \Rightarrow 11|a \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $11n = a \Rightarrow 11^2n^2 = b^2 \cdot 11 \Rightarrow 11n^2 = b^2 \Rightarrow 11|b^2 \Rightarrow 11|b$. Portanto, $11 | a$ e b , contradição. $\square$

3.4 INDUÇÃO MATEMÁTICA

Imagine que tenha-se as peças de um jogo de dominó todas em “pé” em fila, juntas uma da outra de tal forma que quando derrubar a primeira peça a peça na sua frente seja tocada e caia também, e assim por diante. Ou seja, este movimento é conhecido como “efeito dominó”.

A indução matemática funciona semelhantemente como um efeito dominó.

Por [6], indução matemática é entendida segundo a definição 4.

Definição 4. "Para provar $\forall n P(n)$ para todo $n \geq q$, é suficiente mostrar que:

1. $P(q)$ é verdadeira;
2. $k \geq q$ e se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira".

Por Exemplos, prove que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ qualquer que seja o n pertencente aos naturais.

Demonstração. Na Definição 4 tome $q = 1$ e $k =$ algum n maior do que 1. Daí vem:

Caso $n = 1$ tem-se que a proposição é verdadeira, pois $\sum_{k=1}^1 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Suponha, por hipótese de indução, que a sentença seja válida para algum $n > 1$. Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum_{k=1}^n k &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)}{2} \cdot (n+2-n) \\ &= \frac{(n+1)}{2} \cdot 2 \\ &= n+1 \end{aligned}$$

, ou seja, $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum_{k=1}^n k = n+1$, o que implica,

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)}{2} &= n+1 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \sum_{k=1}^{n+1} k$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição é verdadeira qualquer que seja n pertencente ao conjunto dos números naturais. $\square$

4 FUNÇÕES: ALGUNS EXEMPLOS E IMPORTÂNCIA

Neste capítulo estuda-se o conceito de função e sua importância para as aplicações exponenciais e logarítmicas. Além de servir como base para mostra as definições e propriedades das funções exponenciais e logarítmicas nas aplicações envolvendo o raciocínio lógico no capítulo 4.

Conforme [2], defini-se função como abaixo.

Definição 5. "Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ ".

Outra definição segundo [10] é entendida como segue

Definição 6. "Dizemos que uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y ".

Mais uma definição por [5]

Definição 7. "Entendemos por uma função f uma terna $(A, B, a \mapsto b)$ onde A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único elemento b de B . O conjunto A é o domínio de f e indica-se por D_f , assim $A = D_f$. O conjunto B é o contra domínio de f . O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$ ".

Por [4], função também pode ser definida como

Definição 8. "Dados dois conjuntos, A e B , denomina-se aplicação ou função f de A em B toda relação que a cada elemento de associa um e um só elemento de B ".

Vários estudos precisam das funções como ferramenta de trabalho, na astronomia, por exemplo, usa-se função para medir o grau de achatamento de uma galáxia elipsoidal; na economia usa-se as funções custo, a receita e lucro; na medicina usa-se função para calcular o IMC (Índice de Massa Corporal), na engenharia usa-se a função Hortone de Fuller para medir a vazão de enchentes, na computação em várias programações, etc

Nota-se que o estudo de funções matemáticas é bem amplo com diversas aplicabilidades, porém o foco deste trabalho mostra tanto as funções exponenciais e as logarítmicas de uma forma além de aplicações, mas uma forma didática de entender estas funções pelo raciocínio matemática das demonstrações. Entretanto, esta parte

do TCC pode ser explorada por leitores como meta para desenvolver essas outras funções aqui apresentadas.

As funções podem ser classificadas também como função constante, par, ímpar, injetiva, sobrejetiva e bijetiva. Respectivamente, o gráfico de cada uma dessas funções estão representados nas Figuras 1, 2, 3 e 4; todas feitas pelo autor.

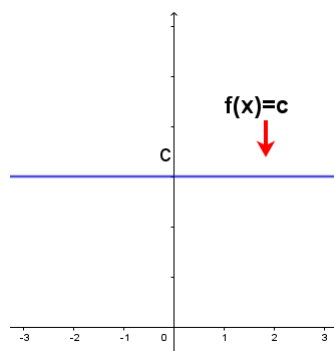


Figura 1 – Função contante

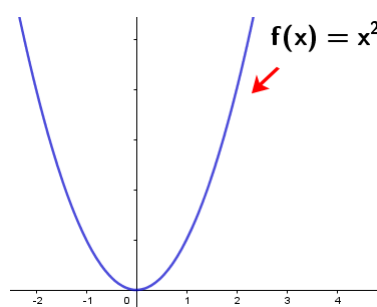


Figura 2 – Função par

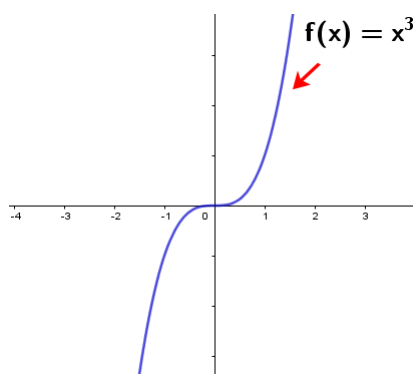


Figura 3 – Função ímpar

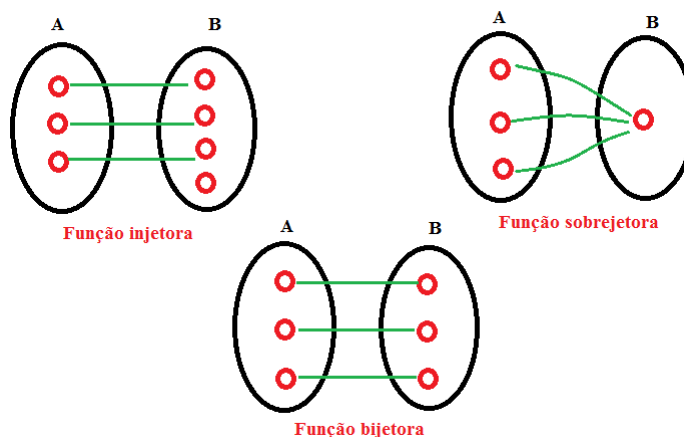


Figura 4 – Funções injetora, sobrejetora e bijetora

Uma função será injetora quando cada elemento da imagem tiver apenas um domínio, ela será sobrejetora quando a imagem for igual ao contra domínio e cada elemento da imagem poderá ter um, dois ou mais elementos no domínio e será uma função bijetora quando for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Para uma melhor compreensão de injetividade, sobrejetividade e bijetividade, tem-se os exemplos I, II e III em conformidade com [2]:

I) "A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ é injetiva, pois faz corresponder a cada número real x o seu dobro $2x$ e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro". Simbolicamente:

Para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

II) "A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 + x$ é sobrejetiva, pois todo elemento de $\mathbb{R}$ é imagem de um elemento de $\mathbb{R}$ pela função $[x = f(x) - 2]$ ".

III) "A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ é bijetiva pois ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, cada número real do contradomínio $\mathbb{R}$ tem como correspondente no domínio a sua terça parte, que sempre existe e é única."

Existem diversas funções, por exemplo, as funções afins, quadráticas, modulares, trigonométricas; mas este trabalho estuda-se as funções exponenciais e logarítmicas.

As funções exponenciais e as logarítmicas tem aplicações não só na matemática, ela pode ser aplicada em diversas áreas do conhecimento como por exemplo: na física e química, para calcular a desintegração de substâncias radioativas; na sociologia e biologia no cálculo de populações; medicina, para determinar o princípio ativo de um remédio no organismo; sismologia, na descrição de um fenômeno seja ele muito grande ou pequeno; astronomia, para medir e classificar o brilho e a magnitude de uma estrela; são apenas algumas das muitas áreas de aplicação.

4.1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

As funções exponenciais tem aplicações não só na matemática, ela pode ser aplica em diversas áreas do conhecimento como por exemplo: na física pra calcular o resfriamento de um corpo; na sociologia e biologia no cálculo de populações ou de bactérias são apenas algumas das muitas áreas de sua aplicação.

Neste capítulo mostra-se as definições e propriedades básicas das funções exponenciais com aplicações, envolvendo o raciocínio lógico, além do método de demonstração direta na prova da função exponencial ser crescente ou decrescente e esboço de seus comportamentos por meio de gráficos.

Segundo [8], as funções exponenciais são definidas como abaixo.

Definição 9. "Dado um número real a , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos funções exponenciais de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x ".

Propriedades

1. Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

Sendo $x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$ isto é, o par ordenado $(0,1)$ pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Isto é significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

Quando $0 < a < 1$ a função exponencial é chamado decrescente e seu gráfico é mostrado na Figura 5.

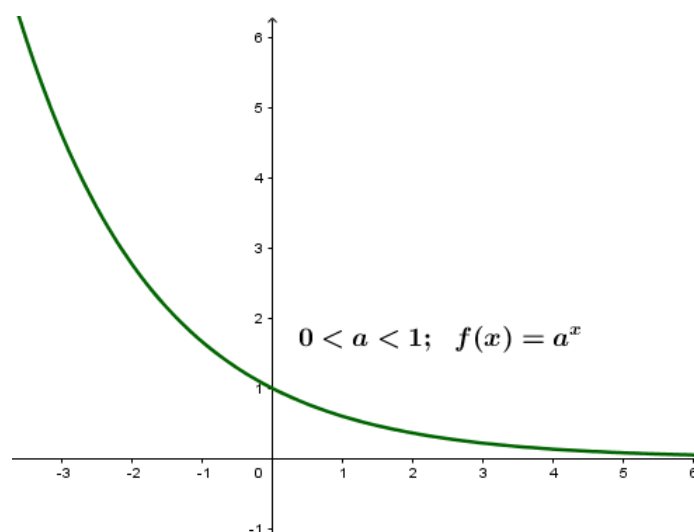
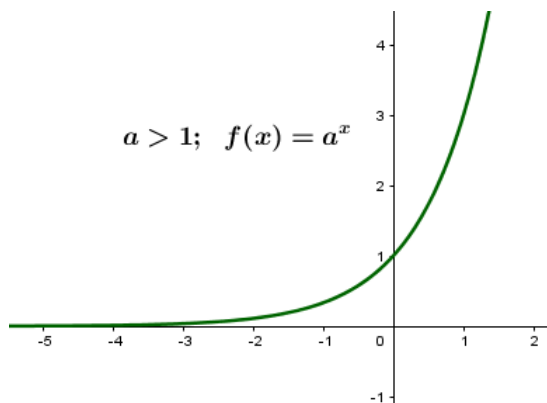


Figura 5 – Função exponencial ($0 < a < 1$)

Fonte: Autor.

Mas caso $a > 1$ então a função $f(x) = a^x$ é chamada crescente e seu gráfico fica como na Figura 6.

Figura 6 – Função exponencial ($a > 1$)

Fonte: Autor.

2. A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$). Portanto, dados os reais x_1 e x_2 , temos:

I) Quando $a > 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = a^{x_1} < a^{x_2} = f(x_2)$

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2$. Tomamos, então, $p > 0$ tal que $x_2 = x_1 + p$.

Segue que $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+p} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^p - 1)$. Temos $a^{x_1} > 0$. Logo, $a^{x_1} < a^{x_2}$ se, e somente se, $a^p > 1$. Como $p > 0$, $a^p > 1$ se, e somente se, $a > 1$. Concluimos que, $f(x_1) < f(x_2)$ se, e somente se, $a > 1$.

□

II) Quando $0 < a < 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow$

$$f(x_1) = a^{x_1} > a^{x_2} = f(x_2)$$

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2$. Tomamos, então, $p > 0$ tal que $x_2 = x_1 + p$.

Segue que $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+p} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^p - 1)$. Temos $a^{x_1} > 0$. Logo, $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $0 < a^p < 1$. Como $p > 0$, então $0 < a^p < 1$ se, e somente se, $0 < a < 1$. Concluimos que, $f(x_1) > f(x_2)$ se, e somente se, $0 < a < 1$.

□

A Tabela 1 mostra um resumo das principais propriedades das funções e equações exponenciais.

PROPRIEDADES
$0 < a < 1; f(x) = a^x$ decrescente
$a > 1; f(x) = a^x$ crescente
$a^r a^s = a^{r+s}$
$(a^r)^s = a^{rs}$
$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
$(ab)^r = a^r b^r$

Tabela 1 – Propriedades de funções e equações exponenciais

Fonte: Autor.

4.1.1 Aplicação de Função Exponencial no Resfriamento de um Corpo

Uma forma de aplicação da função exponencial em nosso dia a dia, pode ser na área do conhecimento da física, através da observação de uma formula como por exemplo, a Lei do resfriamento:

$$t(n) = a + (b - a)^{-0,06 \cdot n}$$

Onde, a = temperatura ambiente, b = temperatura da água no início, n = tempo em minutos do resfriamento e t = temperatura final da água.

Conforme [13], tem-se por definição que

Definição 10. "A Lei do resfriamento de Newton expressa que a taxa de perda de calor de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e a vizinhança enquanto estiver sob efeito de uma brisa. ... Por fim, para o caso de transferência de calor por radiação térmica, a Lei de resfriamento de Newton não é verdadeira".

Agora, suponha que a varie de 0°C até 100°C e $b = 200^\circ \text{C}$, então substituindo em $t(n) = a + (b - a)^{-0,06 \cdot n}$ tem-se que a lei de resfriamento fica $t(n) = a + (200 - a)^{-0,06 \cdot n}$, com $0 \leq a \leq 100$ e $b = 200$.

Geometricamente pode-se analisar esta lei através do gráfico da Figura 7

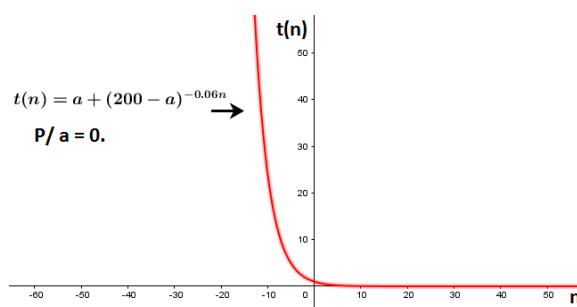


Figura 7 – Lei de resfriamento

Fonte: Autor.

Note que $t(n) = a + (200 - a)^{-0,06 \cdot n} = a + \frac{1}{(200 - a)^{0,06n}} = a + \frac{1}{[(200 - a)^{0,06}]^n}$.

Agora, fazendo $n \rightarrow +\infty$, tem-se $t(n) \rightarrow a$. Mas caso $n \rightarrow -\infty$ então $t(n) \rightarrow +\infty$.

4.1.2 Equação Exponencial

Quando na função exponencial $f(x)=0$, então a mesma se torna uma equação exponencial.

Por [10], é chamada Equação Exponencial como na definição 11.

Definição 11. "Equação exponencial é toda equação que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1".

Para solucionar uma equação exponenciais existem dois métodos fundamentais, conforme [8]. O primeiro é o método da redução à base comum e o outro são pelas propriedades de logaritmos.

O método da redução à base comum pode ser escrito em símbolos como

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

Algumas propriedades com potência de Expoente Racional são consequentes da definição 11.

Listamos abaixo estas propriedades e demonstraremos de forma direta as mesmas.

Conforme [5], Sejam $a > 0$ um real e $r = \frac{m}{n}$, $n > 0$, um racional. Definimos $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Além disso, sejam $a > 0$ e $b > 0$ dois reais quaisquer e r, s dois racionais quaisquer.

Logo, pelas propriedades das potências com expoentes inteiros e das raízes seguem as seguintes propriedades com expoentes racionais:

$$1. a^r a^s = a^{r+s}$$

Demonstração. Como $r = \frac{m}{n}$ e chamando $s = \frac{p}{q}$, temos que

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n \cdot q]{a^{mq}} \cdot \sqrt[n \cdot q]{a^{np}} = \sqrt[n \cdot q]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[n \cdot q]{a^{mq+np}}$$

Pelas propriedades dos radicais, a última expressão pode ser escrita como

$$a^r a^s = \sqrt[n \cdot q]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

Portanto,

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

□

$$2. (a^r)^s = a^{rs}$$

Demonstração. Como $r = \frac{m}{n}$ e chamando $s = \frac{p}{q}$, temos que

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{qn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

Portanto,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

□

$$3. \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Demonstração. Como $r = \frac{m}{n}$ e chamando $s = \frac{p}{q}$, temos que

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^{mq}}}{\sqrt[q]{a^{np}}} = \sqrt[q]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[q]{a^{mq-np}}.$$

Agora, usando as propriedades dos radicais temos

$$\frac{a^r}{a^s} = \sqrt[q]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{r-s}$$

Logo,

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

□

$$4. (ab)^r = a^r b^r$$

Demonstração. Como $r = \frac{m}{n}$ temos que

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$$

Portanto,

$$(ab)^r = a^r b^r$$

□

A ligação das demonstrações matemáticas a este assunto pode ser mostrada pela conclusão da fórmula de juros compostos $M = C(1 + i)^n$, onde M = montante, C=capital, i = taxa e n = tempo.

Usando a **Definição 4** tem-se a prova abaixo para essa fórmula.

Demonstração. Em uma aplicação onde não se passou nenhum tempo, ou seja, $n = 0$, tem-se que não rendeu juros algum. Isto é, $M = C(1 + i)^0 = C \cdot 1 = C$. Suponha, por hipótese de indução que a fórmula é válida para algum $n > 1$. Agora, note que para encontrar o próximo montante em cima da hipótese, calcula-se a porcentagem i de $M = C(1 + i)^n$ e soma-se ao mesmo o valor encontrado, ou seja,

$$i \cdot C(1 + i)^n + C(1 + i)^n = C(1 + i)^n(i + 1) = C(1 + i)^{n+1}$$

Portanto, a proposição é válida qualquer que seja o n natural.

□

Alguns exemplos importantes de uso das funções exponenciais em nossa sociedade atual são as aplicações financeiras de financiamentos de veículos, imóveis ou empréstimos em bancos através de diversos sistemas financeiros de capitalização.

4.1.3 Aplicação de Equação Exponencial em Juros Compostos

Esta seção deste capítulo, mostra a aplicação de equação exponencial em juros compostos, que nada mais são do que rendimentos financeiros que provém de um determinado capital, e que a cada período passado gera um montante e consequentemente um novo capital sujeito a outras correções gerando montantes sucessivos no decorrer do tempo.

Os juros compostos são os mais usados no sistema financeiro, uma vez que, gera uma maior rentabilidade. Para compreendermos melhor vejamos a seguinte situação:

Uma situação hipotética poderia ser a compra de um imóvel em um banco a regime de juros composto, onde a entrada seria 20 000 reais, a taxa seria 3% ao mês

e pergunta-se quanto custará ao todo este imóvel sendo que o acordo da venda foi efetivada para um ano.

Solução:

Pela fórmula de juros compostos $M = C(1 + i)^n$, tem-se que:

$C = 20\,000$ reais, $i = 0,03$ ao mês e $n = 1$ ano = 12 meses. Substituindo os valores na fórmula tem-se:

$$M = C(1 + i)^n = 20000(1 + 0,03)^{12} =$$

$$M = 20000(1,03)^{12} =$$

$$M = 20000 \cdot 1,42576 =$$

$$M = 28515,20$$

Portanto, o imóvel custará ao todo 28 515,20 reais.

Pelo gráfico da Figura 8 pode-se analisar o comportamento do montante no problema anterior ao longo de um ano.

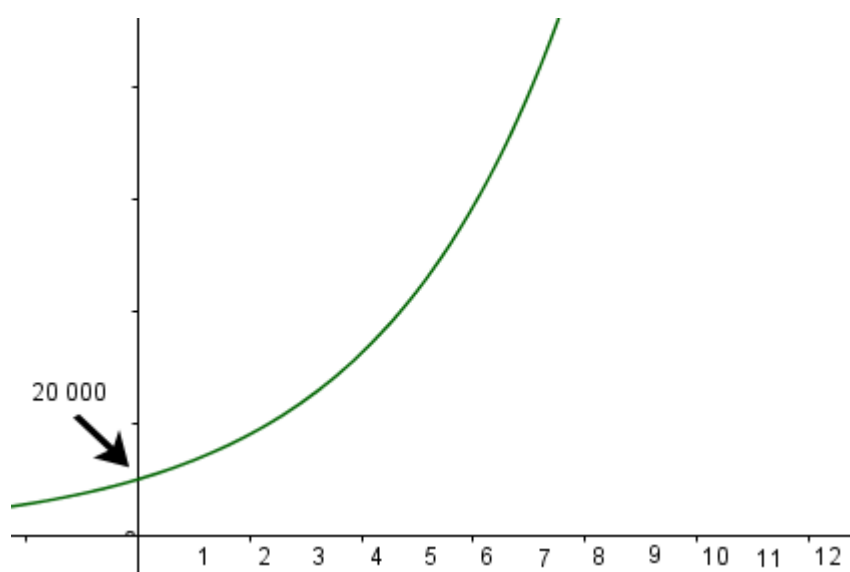


Figura 8 – Comportamento do montante

Fonte: Autor.

4.2 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

As funções logarítmicas têm aplicabilidade tanto em matemática como também em outros ramos do conhecimento como por exemplo: química, para calcular a desintegração de substâncias radioativas; medicina, para determinar o princípio ativo de um remédio no organismo; sismologia, na descrição de um fenômeno seja ele muito

grande ou pequeno; astronomia, para medir e classificar o brilho e a magnitude de uma estrela. Estas são apenas algumas das inúmeras áreas de sua aplicação.

4.2.1 Logaritmo

Por [8], o logaritmo é definido e possui as propriedades como mostra logo abaixo.

Definição 12. Sendo a e b reais e positivos, com $a \neq 1$ chama-se logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar a base a de modo que a potência obtida seja igual a b .

Em símbolos temos que $a^b = a^c \Leftrightarrow b=c$ com $0 < a \neq 1$.

Se $a, b \in IR$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Como vemos na definição 8, $\log_a b = x$, com isso chamamos a de a base do logaritmo, b será o logaritmando e x será o logaritmo.

A partir dessas informações podemos continuar com nossos estudos de logaritmos, para isso é preciso conhecer algumas propriedades derivadas de sua definição e outras operatórias, as quais usaremos a demonstração direta para prová-las.

1. O logaritmo de 1 em qualquer base é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0$$

A justificativa dessa propriedade é trivial, uma vez que, $a^0 = 1$.

2. O logaritmo da base, independente de qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1$$

A justificativa dessa propriedade também é trivial, já que $a^1 = a$.

3. A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b .

$$a^{\log_a b} = b$$

Demonstração. Suponhamos $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, logo $a^{\log_a b} = a^x = b$

□

4. Dois logaritmos na mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos também forem iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Demonstração. Para provarmos essa propriedade é preciso provar tanto a $(\Leftarrow)$ como a $(\Rightarrow)$.

$$(\Rightarrow) \log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$

Pela de definição 8, temos que $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b$, por meio da propriedade 3 desta definição logo $c = b$.

$$(\Leftarrow) b = c \Rightarrow \log_a b = \log_a c$$

Suponhamos que $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$ e pela definição 8 temos que $a^x = b$ e $a^y = c$, como $b = c$, temos que $a^x = a^y \Rightarrow x = y$, logo $\log_a b = \log_a c$.

Portanto pela $(\Leftarrow)$ e $(\Rightarrow)$, $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

□

5. Logaritmo do produto

Segundo [7], quando nos deparamos com um logaritmo com qualquer base, sendo essa base maior que zero e diferente de 1, o logaritmo do produto com dois números reais e positivos será igual a soma dos logaritmos das parcelas desses números.

Em símbolos Matemáticos, fica da seguinte forma:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0 \text{ então } \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \text{ por [8].}$$

A demonstração dessa propriedade está em conformidade com [8].

Demonstração. Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b \cdot c) = z$, provemos que $z = x + y$.

De fato:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$$

$$\log_a(b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c$$

$$\Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y.$$

□

Podemos concluir da demonstração acima que:

Como o $\log_a(b \cdot c) = x + y$ e que $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, concluímos que $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

6. Logaritmo do quociente

Conforme [7], diante de um logaritmo do quociente com dois números reais, positivos e em qualquer base, sendo essa base maior que zero e diferente de 1, o logaritmo do quociente será igual a diferença do logaritmo do numerador com o logaritmo do denominador.

Em símbolos Matemáticos fica da seguinte forma:

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$.

por[8]

A demonstração dessa propriedade está de acordo com [8].

Demonstração. Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = z$, mostraremos que $z = x - y$.

De fato:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Rightarrow a^x = b$$

$$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c \Rightarrow a^y = c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y.$$

□

Analisando a demonstração acima para compreendermos seus passos.

Como o $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = x - y$ e que $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, podemos concluir que:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$$

7. Logaritmo da potência

Segundo [7], ao abordarmos um logaritmo de uma potência em qualquer base, sendo essa base maior que zero e diferente de 1 com uma constante pertencente aos reais, o logaritmo da potência de base real e positiva será igual ao produto do expoente com o logaritmo da base dessa potência.

Em símbolos Matemáticos fica da seguinte forma:

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ por [8].

A demonstração da referida propriedade segue por [8]

Demonstração. Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^\alpha = y$, provaremos que $y = \alpha \cdot x$.

De fato:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$\log_a b^\alpha = y \Rightarrow a^y = b^\alpha$$

$$\Rightarrow a^y = (a^x)^\alpha \Rightarrow a^y = a^{\alpha \cdot x} \Rightarrow y = \alpha \cdot x. \quad \square$$

Em resumo desta demonstração podemos notar que: como o $\log_a b^\alpha = y$, quando aplicamos a definição 8, implicará $a^y = b^\alpha$, substituímos b por a^x e aplicando a distributiva, teremos que $a^y = a^{\alpha \cdot x}$ e pela propriedade 4, $y = \alpha \cdot x$ substituindo x por $\log_a b$, chegaremos a conclusão que $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$.

8. Mudança de base

Para [8], existe momentos que nos deparamos com logaritmos que requerem artifícios que auxiliem em sua demonstração ou resolução. Em situações que envolvem logaritmos com bases diferentes é necessário mudá-los de base.

Se a , b e c são números reais positivos e a e c diferentes de 1, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

A demonstração dessa propriedade também segue [8],

Demonstração. Consideremos $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$ e notemos que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$.

Provemos que $x = \frac{y}{z}$.

De fato:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$\log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$

$$\log_c a = z \Rightarrow c^z = a$$

$$\Rightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow z x = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \quad \square$$

Para compreendermos a demonstração basta observar que houve uma substituição da terceira e da segunda equação na primeira, implicando em $(c^z)^x = c^y$, novamente pela transitividade e propriedade 4, teremos $z \cdot x = y$, pelo princípio multiplicativo $x = \frac{y}{z}$ substituímos essas variáveis na hipótese, temos a conclusão que:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

A Tabela 2 mostra um resumo das principais propriedades dos logaritmos.

PROPRIEDADES
$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$
$a^{\log_a b} = b$
$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$
$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$
$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Tabela 2 – Propriedades logaritmos

Fonte: Autor.

4.2.2 Demonstrações das Propriedades de Função logarítmica

Definição 13. Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), chamamos função logarítmica de base a a função f de IR_+^* em IR que associa a cada x o número $\log_a x$, por [8].

Em símbolos: $f(x) = \log_a x$.

Propriedades

As provas das propriedades desta definição, serão por demonstrações diretas.

1. Se $0 < a \neq 1$, então as funções f de IR_+^* em IR definida por $f(x) = \log_a x$ e g de IR em IR_+^* definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Tanto esta propriedade como sua demonstração a seguir estão em conformidade com [8].

Demonstração. para provar esta propriedade basta mostrarmos que $f \circ g = I_{IR}$ e $g \circ f = I_{IR_+^*}$.

De fato:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x \text{ e } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{\log_a x} = x.$$

□

2. A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$), por [8].

Demonstração. Mostraremos que, quando $a > 1$, ela será crescente, $\forall x_1$ e $\forall x_2$ ambos $\in IR_+^*$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

Para isso é preciso provarmos $(\Leftarrow)$ e $(\Rightarrow)$.

$$(\Rightarrow) x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Suponhamos $\log_a x_1 = y_1$ e $\log_a x_2 = y_2$, pela definição 8 resultará em $x_1 = a^{y_1}$ e $x_2 = a^{y_2}$, substituindo-os na hipótese temos:

$a^{y_1} < a^{y_2}$, como as bases são iguais pela propriedade 4 desta mesma definição, tem-se: $y_1 < y_2$, substituindo-os por $\log_a x_1$ e $\log_a x_2$, respectivamente logo:

$$\log_a x_1 < \log_a x_2, \text{ e portanto}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

$$(\Leftarrow) \log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$$

Suponhamos $\log_a x_1 = y_1$ e $\log_a x_2 = y_2$, pela definição 8, resulta em $x_1 = a^{y_1}$ e $x_2 = a^{y_2}$, substituindo-os na hipótese temos:

$$\log_a a^{y_1} < \log_a a^{y_2} \text{ e pela propriedade 4 desta mesma definição teremos:}$$

$$a^{y_1} < a^{y_2}, \text{ o que implicará em } x_1 < x_2, \text{ logo:}$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

□

Quando $a > 1$, a função logarítmica será crescente, e sua demonstração segue da seguinte forma:

Demonstração. Mostraremos que, quando $0 < a < 1$, ela será decrescente, $\forall x_1$ e $\forall x_2$ ambos $\in IR_+^*$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

Do mesmo modo que na demonstração anterior provaremos tanto $(\Leftarrow)$ como $(\Rightarrow)$.

$$(\Rightarrow) x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

$$\text{Provaremos por absurdo, ou seja, } x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \leq \log_a x_2.$$

Suponhamos $\log_a x_1 = y_1$ e $\log_a x_2 = y_2$, pela definição 8 resultará em $x_1 = a^{y_1}$ e $x_2 = a^{y_2}$, substituindo-os na hipótese temos:

$a^{y_1} < a^{y_2}$, pela propriedade 3, temos que $y_1 < y_2$, logo $\log_a x_1 < \log_a x_2$, o que é uma contradição.

$$(\Leftrightarrow) \log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2.$$

Provaremos por absurdo, ou seja, $\log_a x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 \geq x_2$.

Suponhamos $\log_a x_1 = y_1$ e $\log_a x_2 = y_2$, pela definição 8 resultará em $x_1 = a^{y_1}$ e $x_2 = a^{y_2}$, substituindo-os na hipótese temos:

$\log_a a^{y_1} > \log_a a^{y_2}$, pela propriedade 3 desta definição teremos que $a^{y_1} > a^{y_2}$, logo $x_1 > x_2$, o que é uma contradição.

□

Observando o comportamento do gráfico produzido no geogebra da figura 9, nota-se a função logarítmica crescente.

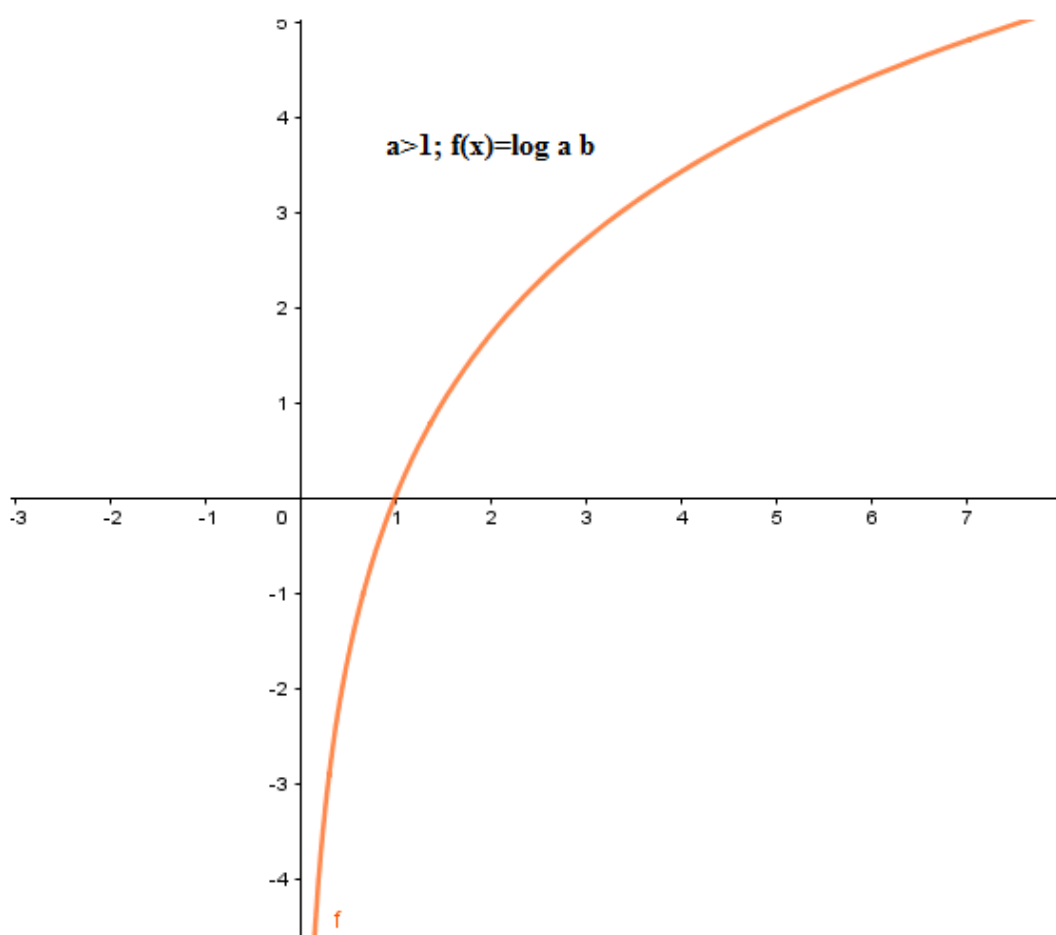


Figura 9 – Função logarítmica ($a > 1$)

Fonte: Autor.

Quando ($0 < a < 1$), a função logarítmica será decrescente, como mostra o gráfico produzido no geogebra da Figura 10.

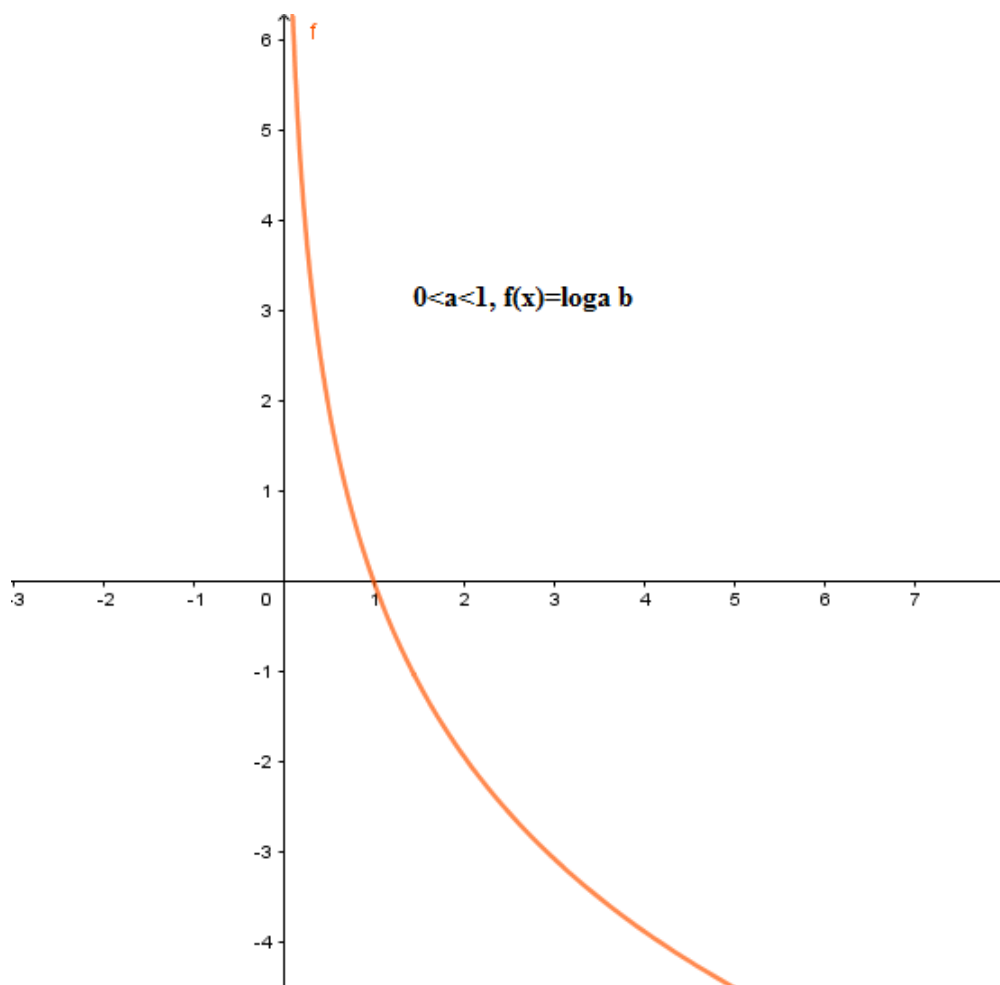


Figura 10 – Função logarítmica ($0 < a < 1$)

Fonte: Autor.

4.2.3 Aplicação de Função logarítmica na população de bactérias

Mostra-se aqui uma aplicação de função logarítmica na população de bactérias.

As bactérias são micro organismos que estão presentes no cotidiano em diferentes ambientes, uma vez em contato com seres humanos, pode desencadear vários problemas de saúde podendo até causar a morte de indivíduos.

Uma população de bactérias cresce a uma taxa diretamente proporcional a sua população inicial. Para determinar o número de uma certa população de bactérias, usaremos a fórmula $N = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$, onde N_0 é a população inicial, r é uma constante que representa a taxa de crescimento e t o tempo, por [2].

Suponhamos que uma determinada população de bactérias cresce a uma taxa de 10% ao minuto, quanto tempo levará para que sua população seja o dobro da inicial?

Analisando os dados do problema proposto, procuraremos em quanto tempo $N = 2N_0$, sendo assim tem-se:

$$N = N_0 \cdot e^{rt} \Rightarrow 2N_0 = N_0 \cdot e^{0,1t} \Rightarrow 2 = \frac{N_0 \cdot e^{0,1t}}{N_0} \Rightarrow 2 = e^{0,1t}$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados da última igualdade temos:

$\ln 2 = \ln e^{0,1t}$, aplicamos a propriedade 7 da definição 12 temos:

$\ln 2 = 0,1t \cdot \ln e$, como $\ln 2 = 0,6931$ e $\ln e = 1$, segue-se que:

$$0,6931 = 0,1t \Rightarrow t = \frac{0,6931}{0,1} = 6,9 \text{ min} = 6 \text{ min e } \frac{9}{10} \text{ min} = 6 \text{ min } 54 \text{ s.}$$

Logo a população de bactérias dobrará em 6 minutos e 54 segundos.

4.2.4 Equações logarítmica

Definição 14. "Equações logarítmicas é toda equação que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base do logaritmo", por [10].

As equações logarítmicas podem ser de três tipos:

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, com $a(0 < a \neq 1)$.

Se $0 < a \neq 1$, então $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0$.

2. $\log_a f(x) = \alpha$.

Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\log_a f(x) = \alpha \Rightarrow f(x) = a^\alpha$.

3. incógnita auxiliar São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

5 GEOGEBRA NO ESTUDO DA ABSORÇÃO DE MEDICAMENTOS

Este capítulo mostra o comportamento da absorção de medicamento pelo corpo humano através de uma função exponencial e seu gráfico elaborado no GeoGebra. apresenta as principais ferramentas e características do GeoGebra.

5.1 CONCEITO E CARACTERÍSTICAS DE GEOGEBRA?

O GeoGebra é um software para estudar trabalhos na área das exatas o qual combina conceitos de geometria e álgebra. O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, etc, conforme [11]. A maior vantagem que possui é o fato de representar ao mesmo tempo e em um único ambiente visual as propriedades geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

As principais ferramentas que o GeoGebra possui são a janela de álgebra, janela de visualização 2D, janela de visualização 3D, Entrada, Mover, ponto, reta, reta perpendicular, Polígono, Círculo dado centro e um de seus pontos, Elipse, Ângulo, Reflexão em relação a uma reta, Controle Deslizante, mover janela de visualização.

A Figura 11 mostra destacado com a seta vermelha a janela de álgebra, janela de visualização 2D e Entrada.

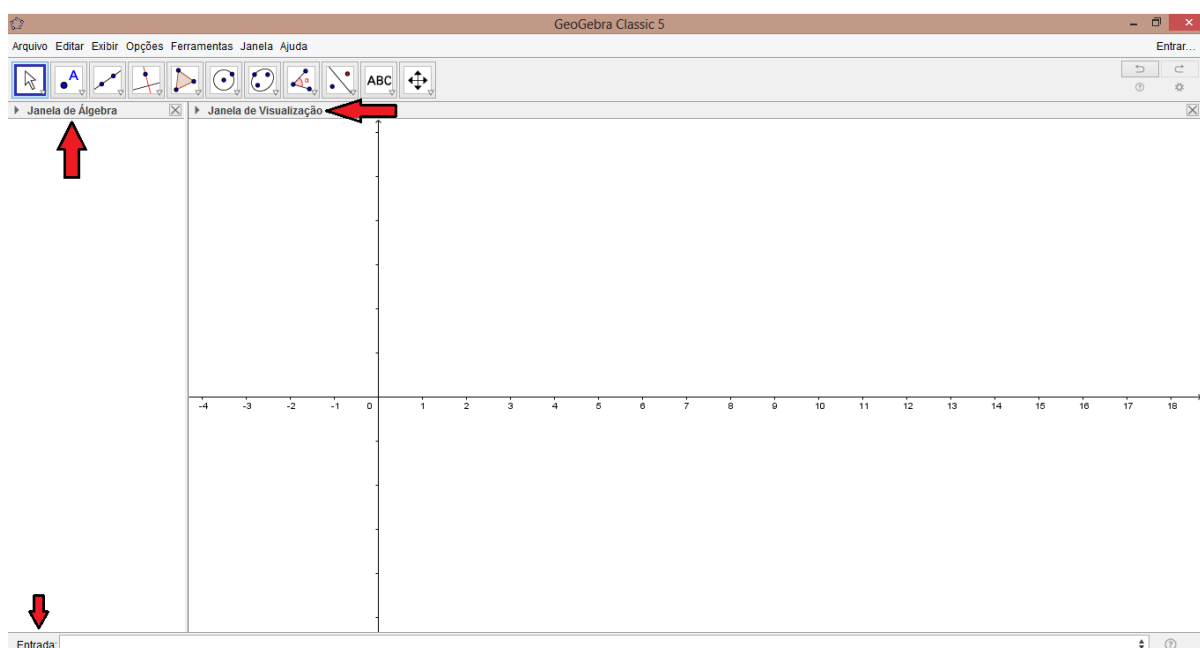


Figura 11 – Ferramentas GeoGebra

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

A Figura 12 mostra a janela de visualização 3D.

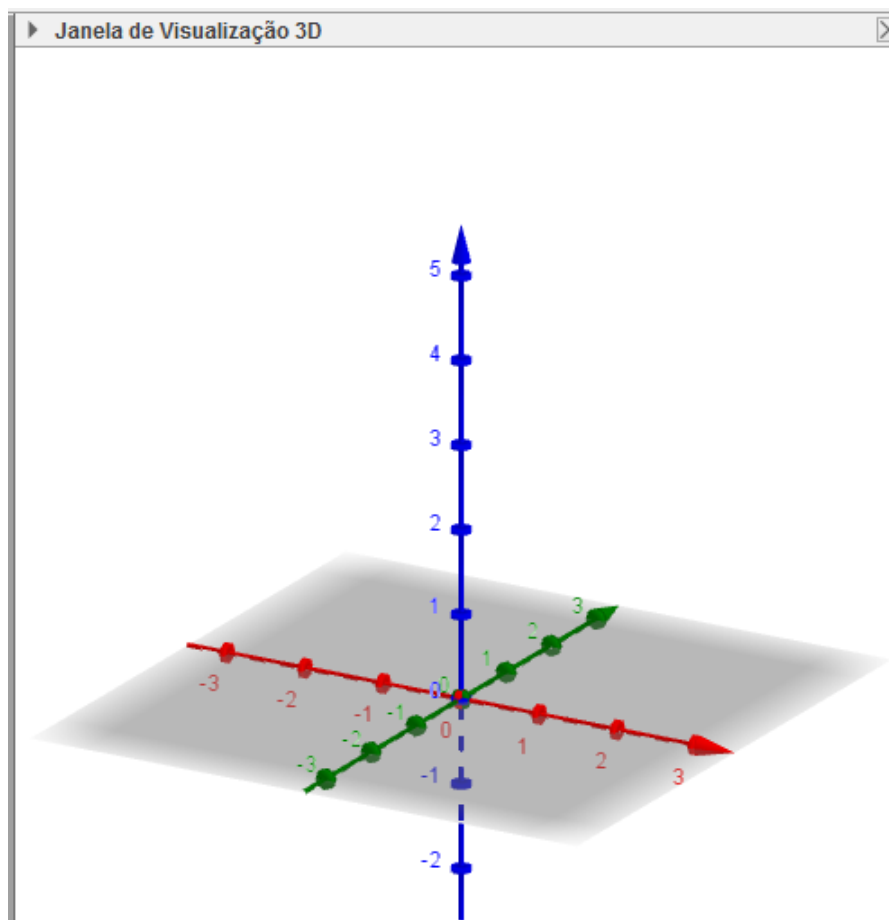


Figura 12 – GeoGebra (janela de visualização 3D)

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

A janela de visualização 3D serve para que se tenha uma visão tridimensional de figuras geométricas. Esta janela não foi usada nas situações que envolveram as funções exponenciais e logarítmicas neste trabalho. Mas fica a proposta para abordagens mais aprofundada pelo leitor para futuros trabalhos acadêmicos que venham a utilizar o software GeoGebra como ferramenta didática pedagógica.

O GeoGebra possui uma infinidade de ferramentas, pelo seu poder de unir a álgebra com a geometria em uma única plataforma fornece uma visualização excelente para trabalhos matemáticos, além de ajudar no raciocínio lógico de demonstrações, pois estas últimas são as vezes muito abstratas, além de um rigor matemático predominante. Caso a prova seja da área de geometria o software facilita muito a visualização e compreensão de propriedades das mesmas.

A Figura 13 indica com uma seta verde os pontos Mover, ponto, reta, reta perpendicular, Polígono, Círculo dado centro e um de seus pontos, Elipse, Ângulo, Reflexão em relação a uma reta, Controle Deslizante, mover janela de visualização.

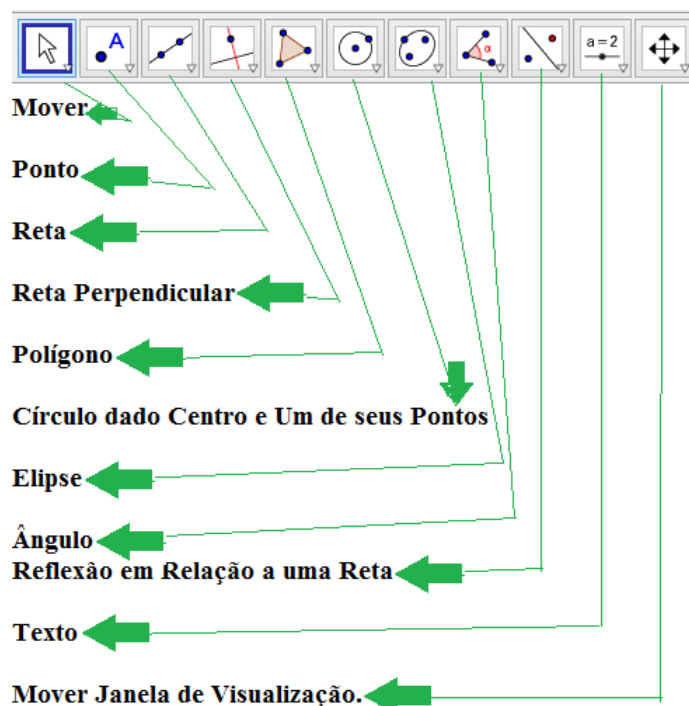


Figura 13 – GeoGebra (janela de visualização 3D)

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

5.2 ABSORÇÃO DE MEDICAMENTOS

Na medicina, conforme [12], para exemplificar a aplicação das funções exponenciais observe a seguinte situação(adaptada): Uma pessoa ingere um certo medicamento, ao entrar na corrente sanguínea e passar pelos rins e fígado, é metabolizada e eliminada a uma taxa que é proporcional à quantidade presente no corpo.

Se o paciente sofre uma dosagem muito alta de um certo medicamento cujo princípio ativo é de 600 mg, a quantidade Q , em gramas (g) do princípio ativo que continuará no organismo após t horas da ingestão é dada pela seguinte expressão:

$$Q(t) = 600 \cdot (0,7)^t$$

Com isso é possível determinar o tempo necessário para que a quantidade da droga presente no organismo seja igual a 200 g.

Para solucionar este problema basta substituir os valores numéricos correspondentes à suas respectivas variáveis, sendo assim tem-se que:

$$Q(t) = 600 \cdot (0,7)^t \Rightarrow 600 \cdot (0,7)^t = 200 \Rightarrow (0,7)^t = \frac{200}{600} \Rightarrow (0,7)^t = \frac{1}{3}$$

aplicando $\log$ em ambos os lados da última expressão teremos o tempo, como podemos

notar:

$$\log(0,7)^t = \log\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow t \cdot \log(0,7) = \log 1 - \log 3 \Rightarrow t \cdot \log\left(\frac{7}{10}\right) = 0 - \log 3 \Rightarrow t = \frac{-\log 3}{\log 7 - \log 10}$$

Agora, como $\log 3 = 0,477$, $\log 7 = 0,845$ e $\log 10 = 1$ tem-se que

$$t = \frac{-0,477}{0,845 - 1} = \frac{-0,477}{-0,155} = 3,077.$$

Portanto, o tempo necessário para que a quantidade da droga presente seja igual 200 g é de 3,077 horas.

5.3 GEOGEBRA: FUNÇÃO DE ABSORÇÃO DE MEDICAMENTOS

Para estudar e analisar a função $f(x) = 600 \cdot (0,7)^x$ no software GeoGebra, através de suas ferramentas, faz-se necessário a visualização geométrica para a melhor compreensão do problema.

Primeiro, digite na caixa de entrada a função $f(x) = 600 \cdot (0,7)^x$. A Figura 14 ilustra esta situação. Aparecerá na interface do GeoGebra o gráfico da função em estudo em destaque.

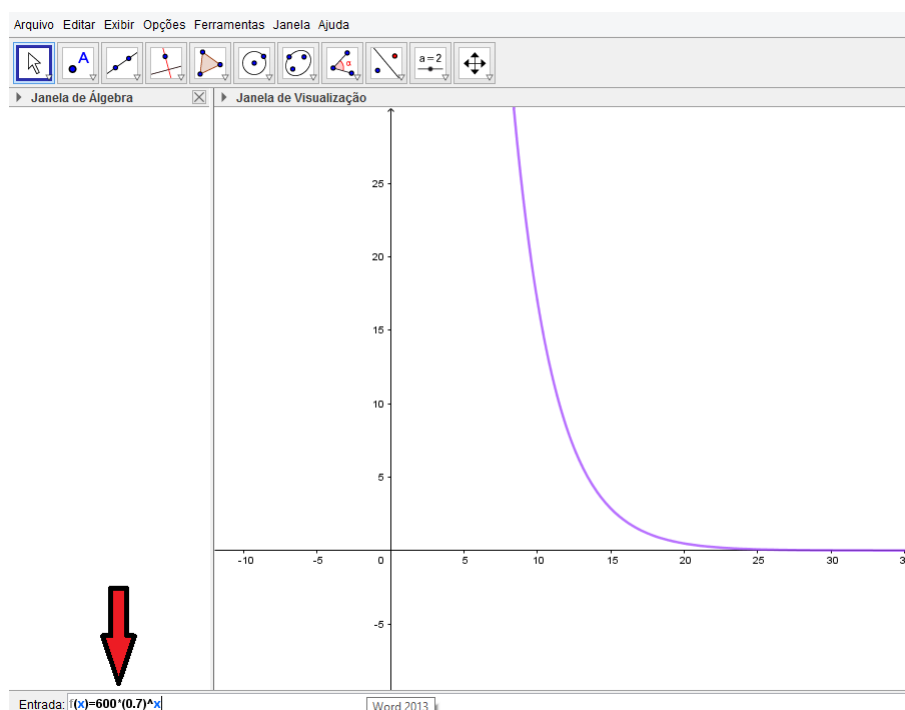


Figura 14 – Interface do GeoGebra

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

Depois, na ferramenta controle deslizante crie o controle **a** com valor mínimo de 10 e máximo de 60 com incremento 0.1 - veja a Figura 15.

Em seguida, na caixa de entrada digite $x = a$, aparecerá o gráfico da função contante na interface. Veja a Figura 16.

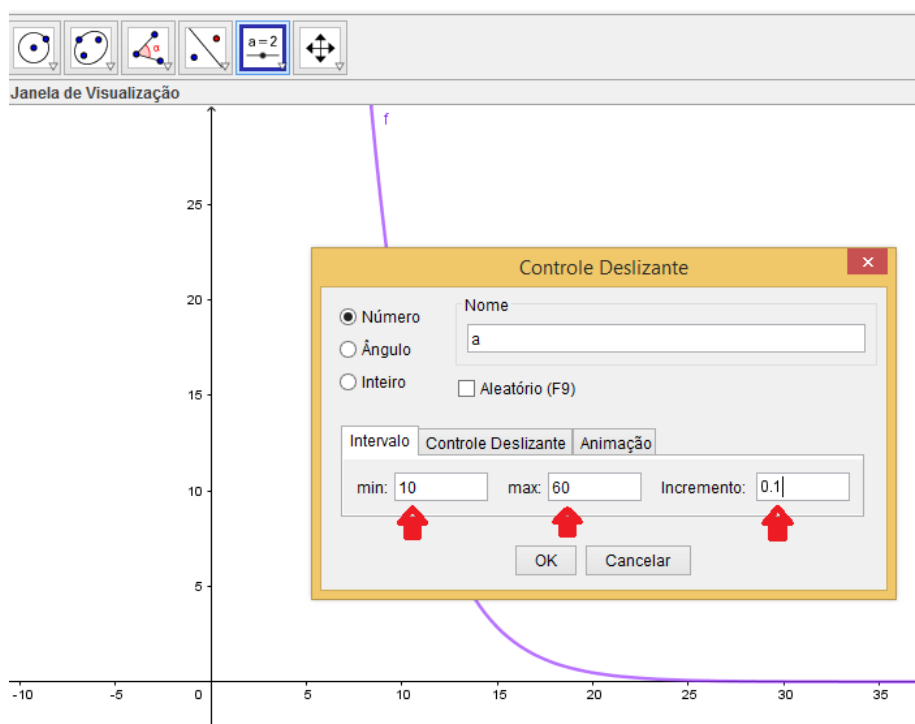


Figura 15 – Controle Deslizante

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

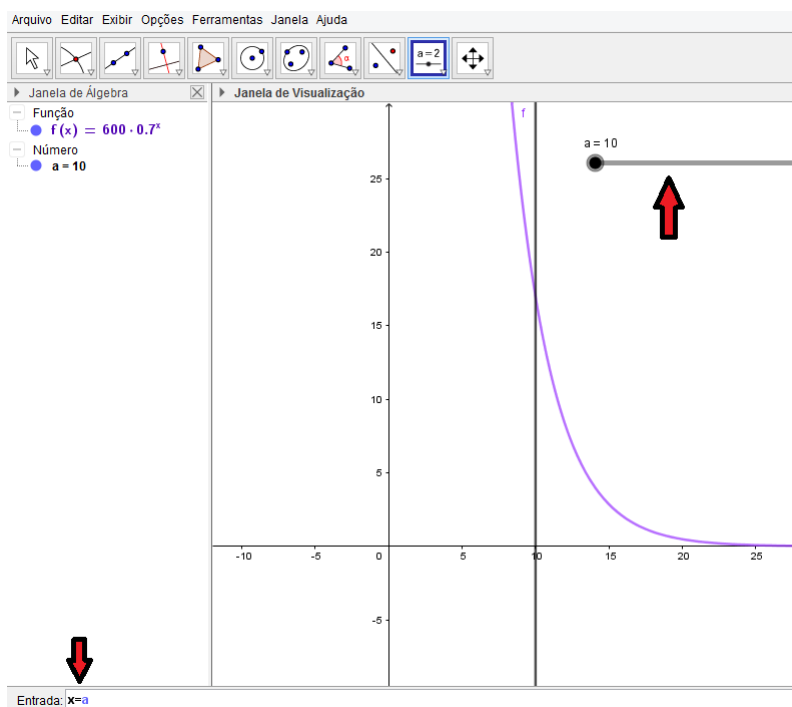


Figura 16 – Função $x = a$

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

Finalmente, clique na opção interseção de dois objetos e selecione o gráfico da função exponencial e o gráfico da função contante, anime o controle deslizante **a** e habilite o rastro do ponto **A**. Veja Figura 17.

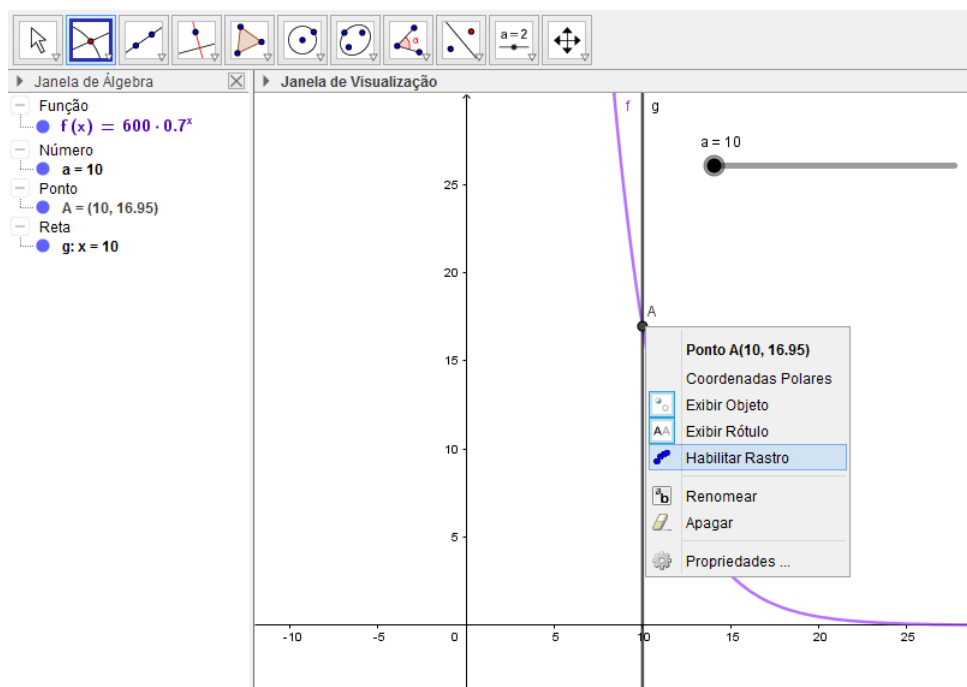


Figura 17 – Habilitar Rastro

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

O gráfico final após todas estas etapas fica conforme a Figura 18.

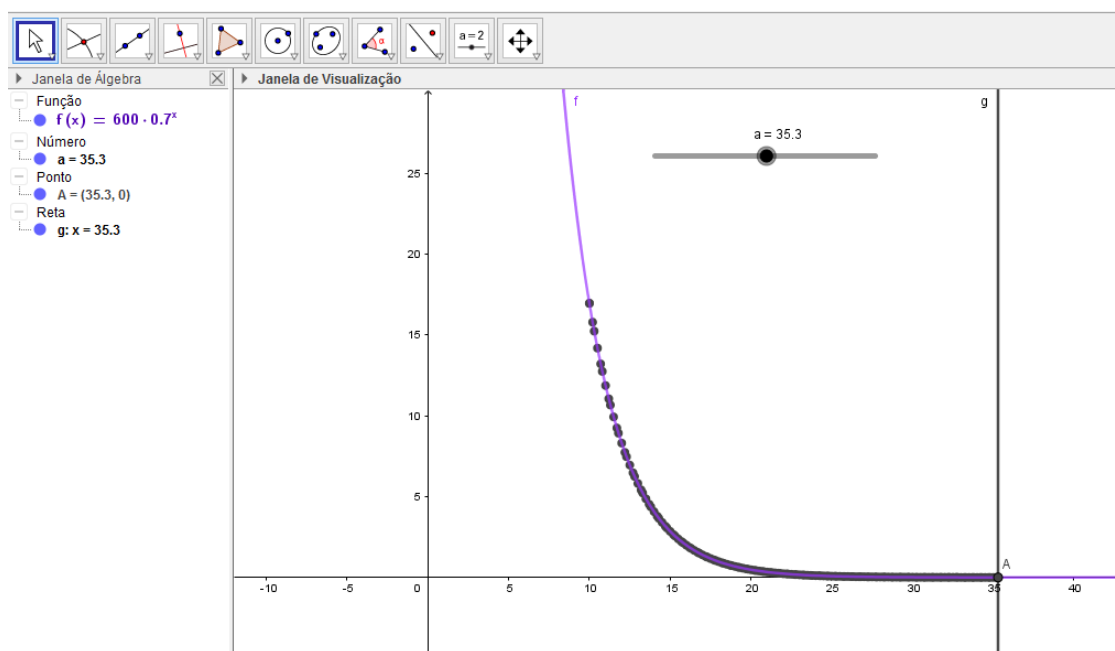


Figura 18 – Interseção de f com g

Fonte: <http://www.geogebra.com.br/site/>

Note que fazendo $x \rightarrow +\infty$ implica que a função $f(x) = 600(0,7)^x$ tende a 0. Por outro lado, quando $x \rightarrow -\infty$ a função f tende para o $+\infty$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação á princípio deste trabalho está no fato de muitos alunos e até mesmo professores da educação básica tanto nos níveis fundamental como no médio não terem a prática de utilizar as demonstrações matemáticas para a compreensão dos conteúdos necessários á aquisição de conhecimentos, seus estudos baseiam-se em se restringir apenas em decorar formulas e resolução de problemas, assim não conseguem desenvolver o raciocínio lógico e conseqüentemente não aprendem matemática.

Por meio deste estudo foi possível disponibilizar e mostrar abordagens diferenciadas e construtivas de estudos, através das técnicas demonstrações como: demonstração direta, contra positiva, redução ao absurdo e indução matemática na forma algébrica, as quais foram aplicados em funções exponenciais e logarítmicas de modo que suas definições e propriedades foram explanadas e compreendidas, logo após mostrou como e onde aplicar esses temas no dia a dia, o software GeoGebra pôde mostrar graficamente o comportamento dessas funções quando crescente ou decrescente além de facilitar a interpretação de suas aplicações. Diante do que foi abordado neste trabalho, pode-se concluir que os objetivos foram alcançados e o mesmo servirá como fonte para futuros pesquisadores.

Este trabalho contribuiu significativamente para aquisição de novos conhecimentos para a formação do futuro professor de matemática e possibilita adoção destas técnicas no futuro exercício da carreira docente.

Desse modo acredita-se que a prática das demonstrações matemáticas nas aulas estimula o raciocínio cognitivo dos alunos fortalecendo à aprendizagem dos mesmos, e deve ser uma prática em todos e qualquer conteúdo de matemática e não somente ao tema que este trabalho foca, sendo útil como fonte de pesquisa e de material de apoio para discentes e docentes no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

- [1] BOYER, Carl B. **História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach**; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.
- [2] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.
- [3] FILHO, Edgard de Alencar. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.
- [4] GIOVANNI, José Ruy; Bonjorno, José Roberto. **De olho no vestibular: Matemática1: Relações e Funções, Função Exponencial, Logaritmos**. São Paulo: FTD, 1996.
- [5] GUIDORIZZI, Hammilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [6] HAUSEN, Rodrigo. **Bases Matemáticas**. Compscinet. Disponível em: <http://www.compscinet.org/hausen/courses/bm/aulas/aula2.pdf>. Acessado em 12 de janeiro de 2018.
- [7] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: Ciência e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- [8] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol.2: Logaritmos. 9.ed.-São Paulo: Atual, 2004.
- [9] MEC. **Parâmetros curriculares nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p. Disponível em: <http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acessado em 06 de janeiro de 2018.
- [10] PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.
- [11] Portal GeoGebra. **O GeoGebra**. Disponível em: <http://www.geogebra.com.br/site/>. Acessado em 14 de janeiro de 2018.
- [12] Portal do tutorbrasil. **Função Logarítmica**. Disponível em: <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=56179>. Acessado em 17 de fevereiro de 2018.
- [13] Portal do wikipédia. **Lei do Resfriamento de Newton**. Disponível em: https://www.pt.wikipedia.org/wiki/Lei_do_resfriamento_de_Newton. Acessado em 12 de fevereiro de 2018.