



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAEL MATIAS PEREIRA

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DA OBMEP COM ÊNFASE NAS FUNÇÕES
QUADRÁTICAS UTILIZANDO O MÉTODO DE POLYA

SÃO RAIMUNDO NONATO – PI

2021

RAFAEL MATIAS PEREIRA

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DA OBMEP COM ÊNFASE NAS FUNÇÕES
QUADRÁTICAS UTILIZANDO O MÉTODO DE POLYA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo)
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, Campus São
Raimundo Nonato.

Orientador: Carlos Alberto da Silva

SÃO RAIMUNDO NONATO - PI

2021

P436r Pereira, Rafael Matias
Resoluções de problemas da OBMEP com ênfase nas funções
quadráticas utilizando o método de polya / Rafael Matias Pereira – São
Raimundo Nonato, 2021.

27 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -
Instituto Federal do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, 2021.

Orientador: Prof. Me. Carlos Alberto da Silva.

1. Funções quadráticas 2. George Polya 3. OBMEP I. Título

CDD – 515.252

Ficha catalográfica: Josué de Moura Costa (Bibliotecário) – CRB3/1130



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
CAMPUS SAO RAIMUNDO NONATO
Rodovia BR-020, S/N, Primavera, Primavera, SAO RAIMUNDO NONATO / PI, CEP 64.770-000
Fone: (86) 9582-9901 Site: www.ifpi.edu.br

ATA 1/2021 - CCLM/DENS/DG-SRNONAT/CASRN/IFPI

ATA DA DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata dos trabalhos da Comissão Examinadora do Trabalho de Conclusão de Curso do estudante **RAFAEL MATIAS PEREIRA**, matrícula **20161LMAT0317**, para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI). Integraram a Comissão os professores **CARLOS ALBERTO DA SILVA (PRESIDENTE E ORIENTADOR)**, **SERGIANE NEVES MONTEIRO (IFPI)** e **ANA PAULA MONTEIRO DE MOURA (IFPI)**. Aos vinte e um dias do mês de janeiro de 2021 às 16:30 horas, de forma síncrona, através do link: meet.google.com/pxb-rtmf-gkd, realizou-se a apresentação pública do Trabalho de Conclusão de Curso. O orientador abriu a sessão agradecendo a participação dos membros da Comissão Examinadora. Em seguida convidou o estudante para que fizesse a exposição do trabalho intitulado **RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DA OBMEP COM ÊNFASE NAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS UTILIZANDO O MÉTODO DE POLYA**. Finalizada a apresentação, cada membro da comissão Examinadora realizou a arguição do estudante. Dando continuidade aos trabalhos, o orientador solicitou a Comissão Examinadora que se retirasse para uma outra reunião síncrona, com a finalidade de deliberar sobre o trabalho do candidato. Terminada a deliberação, a Comissão Examinadora retornou e o orientador leu a ata dos trabalhos declarando **APROVADO** o trabalho do estudante, em seguida, deu por encerrada a solenidade. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

CARLOS ALBERTO DA SILVA	ANA PAULA MONTEIRO DE MOURA	SERGIANE NEVES MONTEIRO
Presidente e Orientador	Avaliador (IFPI)	Avaliador (IFPI)

Documento assinado eletronicamente por:

- Carlos Alberto da Silva, COORDENADOR - FUC1 - DENS-CAMPUS SAO RAIMUNDO NONATO, em 26/01/2021 11:58:03.
- Ana Paula Monteiro de Moura, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 26/01/2021 11:56:07.
- Sergiane Neves Monteiro, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 26/01/2021 11:04:44.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 26/01/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpi.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 19191

Código de Autenticação: d392c42772



RESUMO

O presente trabalho traz como tema principal, a proposta de resolução de problemas segundo George Polya, no qual, será tomado para fins de exemplificação, exercícios do banco de questões da OBMEP que abordam aplicações sobre funções quadráticas. Evidentemente, o objetivo central consistiu em investigar como a utilização do método de resolução de problemas de Polya possibilita um desenvolvimento mais efetivo em questões sobre funções quadráticas abordadas na OBMEP. O método de análise teve cunho bibliográfico qualitativo, embasando-se, principalmente, em livros e artigos científicos. Assim, espera-se evidenciar as características principais das funções quadráticas, como também, a importância do método de Polya para desenvolver a capacidade de pensar dos estudantes para que estes, possam potencializar seus estudos com intuito de adquirir o máximo de aprendizado.

Palavras-chave: funções quadráticas; George Polya; OBMEP.

ABSTRACT

The present work has as its main theme, the problem solving proposal according to George Polya, in which, for the purposes of exemplification, exercises from the OBMEP question bank that address applications on quadratic functions will be taken. Evidently, the central objective is to investigate how the use of Polya's problem-solving method enables a more effective development in questions about quadratic functions addressed in OBMEP. The method of analysis had a qualitative bibliographic nature, based mainly on books and scientific articles. Thus, it is expected to highlight the main characteristics of quadratic functions, as well as the importance of Polya's method to develop students' ability to think so that they can enhance their studies in order to achieve maximum learning.

Keywords: quadratic functions; George Polya; OBMEP.

1 INTRODUÇÃO

Este texto aborda como temática central, a resolução de problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, que enfatizem as aplicações de funções quadráticas com uma concepção na resolução de Polya. Pretendemos com isso, fazer uso do método de Polya para abordar as situações problemas que serão apresentadas no quinto tópico.

As motivações que nos conduziram a esse tema, decorrem especialmente, a estarmos de acordo com Dante (2010), quando este afirma, através de exemplificações, que a função polinomial do segundo grau, se faz presente em inúmeras situações, tais como, na geometria, nos fenômenos físicos, nos esportes, entre outros. Dessa forma, compreendemos ser importante relacionar esse tema com resolução de problemas, tendo em vista que essa função está presente em nosso cotidiano.

Com isso, este trabalho tem como objetivo principal, investigar como a utilização do método de resolução de problemas de Polya possibilita um desenvolvimento mais efetivo em questões sobre funções quadráticas abordadas na OBMEP. Em âmbito específico, os objetivos que norteiam esse estudo são os seguintes: analisar conceitos básicos de funções quadráticas, bem como suas particularidades e o desenvolvimento da equação canônica; apresentar o método de resolução de problemas segundo George Polya; identificar modos de aplicação do método de resolução de Polya no estudo de funções polinomiais do segundo grau.

Portanto, daremos ênfase às funções quadráticas e ao método de resolução de problemas de George Polya. Desse modo, esperamos compreender o processo de abordagem de problemas matemáticos sob a perspectiva de Polya, assim como, conhecer características importantes a respeito das funções quadráticas.

2 METODOLOGIA

A metodologia aplicada, conforme classificação de Marconi e Lakatos (2011), teve cunho bibliográfico qualitativo, no qual, fez-se estudos, sobretudo, em livros e artigos científicos. Isso se deu, visando a obtenção de informações relevante sobre as funções quadráticas e de maneiras de abordar exemplos pertinentes que corriqueiramente nos deparamos na educação básica.

Para o desenvolvimento, foram selecionados dados a partir de alguns problemas do banco de questões da OBMEP, os quais, envolve funções quadráticas. Ocasionalmente, fez-se uso de figuras com auxílio do software GeoGebra, com intensão de facilitar a percepção dos detalhes do tema em questão.

Desse modo, seguimos inicialmente com o conhecimento sobre a função quadrática, mostrando o papel que cada coeficiente desempenha em seu gráfico. Em seguida, fez-se uma análise de suas raízes por meio do método de completar quadrado para que fosse possível expressa-la em sua forma canônica.

Adiante, buscou-se, verificar o ponto de máximo ou mínimo dessa função, bem como apresentar uma prova de que seu gráfico é uma parábola. Por fim, dedicamos o ultimo tópico para uma breve apresentação do método de resolução de problemas de Polya, aplicando-o a exemplos de função quadrática disponíveis no banco de questões da OBMEP.

3 MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA

Segundo Balieiro Filho (2004), George Polya (1887-1985), era natural de Budapest (Hungria), sendo um importante pesquisador do ensino de matemática, também “interessou-se por Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática tendo, em 1912, concluído o seu doutoramento” (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 137). Dentre suas notáveis contribuições, nos concentraremos sobre sua metodologia de resolução de problemas.

O método apresentado por Georg Polya objetiva auxiliar professores e alunos, a pensar formas de solucionar problemas propostos na forma de exercícios. Para isso, faz-se uso de todos os conhecimentos adquiridos, fazendo com que o professor possa conduzir os discentes a encontrarem a solução por si mesmo. Esse método consiste em quatro fases, nas quais estão elencadas e encadeadas abaixo.

3.1 FASE 1: Compreensão

A primeira etapa da resolução de problemas consiste em ter boa compreensão do problema em si. Nesse sentido, Polya (2006, p.5) afirma que “[...] o aluno deve compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua [...]”. Desse modo, o problema escolhido deve ser acessível ao discente, tal que, seja possível compreender os detalhes do enunciado e possa motivar-se a tentar resolver.

Nesta fase, “[...] o aluno deve também está em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante [...]” (POLYA, 2006, p.5). Conforme afirma o autor, sempre que necessário e/ou possível deve-se utilizar recursos como gráficos, esquemas ou diagramas para nortear o entendimento e a busca da solução correta.

3.2 FASE 2: Planejamento

Após a compreensão do problema, o próximo passo é estabelecer um plano de resolução. Segundo Polya (2006, p. 7), “temos um plano quando conhecemos,

pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita [...]”. Para o autor, ter um plano é essencial para a realização de resolução de um problema.

Nesta fase, lembrar-se de conceitos matemáticos e/ou de um problema semelhante é muito relevante para alcançar o sucesso. Assim, cabe ao professor, escolher um problema adequado que possa conduzir o aluno a pensar e refletir sobre maneiras de como resolve-lo.

3.3 FASE 3: Execução

Posteriormente, após estabelecer um plano, vem a execução deste, no qual, Polya (2006, p. 10) nos diz que, “conceber um plano, a ideia de resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo [...]”. Assim, a partir do momento que temos um plano estabelecido, executá-lo se torna tarefa natural, sendo que nessa fase, é importante ter calma para colocar em prática aquilo que se planejou.

3.4 FASE 4: Retrospectiva

Por fim, vem a fase de retrospecto ou verificação do problema. Esta etapa é de suma importância e nela o aluno verifica se não houve nenhum erro durante a execução do plano. Nesta fase, se tem novamente contato com o problema, podendo assim, reforçar o conhecimento sobre o assunto, a técnica e as equações utilizadas para solucionar o problema proposto.

Polya (2006, p.12), relata que “até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrito a demonstração, fecham os Livros e passam a outros assuntos”. No entanto, deveriam fazer um retrospecto do processo de resolução do problema que acabará de solucionar, podendo assim, melhorar suas habilidades.

Conforme exposto, as quatro (4) etapas deste método apresentam um modo que possibilita ao estudante pensar em um procedimento que possa leva-lo a soluções dos problemas propostos. Para isso, o mesmo necessita compreender, com clareza, a situação problema e daí estabelecer um plano, por vezes, não tão

fácil, mas que guie a execução da resolução, tornando-a, uma tarefa menos complexa e por fim orienta-se que seja realizada um retrospecto ou verificação a fim de melhorar a técnica de resolução.

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Segundo o método de Polya, antes de tentar resolver determinada questão, é necessário que se tenha pelo menos uma noção sobre o conteúdo abordado. Diante disso, iremos nos familiarizar com a função quadrática, para em seguida resolver problemas acerca do tema proposto.

Neste sentido, Dante (2010, p.72) diz que “uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b, c , com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ”. Isto significa dizer que uma função f é quadrática sempre que ao aplicar qualquer que seja o número real x , resulte no número real $ax^2 + bx + c$, desde que o coeficiente a seja não-nulo.

Nesse contexto, estudaremos algumas implicações pertinentes que decorrem dessa definição. As características de maior relevância que destacaremos são as suas raízes e seu gráfico.

4.1 RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Com base em Dante (2010), encontraremos as raízes de uma função quadrática qualquer. Isso consistirá em determinarmos os valores de x , quando existe, que independentemente do valor dos coeficientes, o resultado da aplicação é nulo, isto é, $f(x) = 0$. Para isso, nos valeremos da técnica de complementar quadrados, bem como do desenvolvimento de um quadrado perfeito que nos permitirá calcular o valor de x .

Problema 01: Calcular o valor $x \in \mathbb{R}$ quando $f(x) = 0$.

Solução:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, ao considerarmos $f(x) = 0$, temos:

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx = -c$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 & \Rightarrow x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} & \therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \blacksquare \\
\Rightarrow x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}
\end{aligned}$$

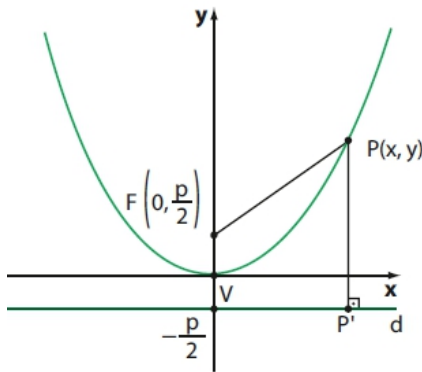
Notemos que a existência de x , tal que, $f(x) = 0$ depende do fato de $b^2 - 4ac \geq 0$. Conforme destacado pelo autor supracitado, ao fazermos $\Delta = b^2 - 4ac$ podemos escrever a equação fechada $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, as quais, nos fornecem as soluções para $f(x) = 0$ sempre que $\Delta > 0$. Diante disso, caso $\Delta = 0$ a solução é única dada por $x = -\frac{b}{2a}$. No entanto, quando $\Delta < 0$, temos que $\sqrt{b^2 - 4ac} \notin \mathbb{R}$, e por isso, não há raiz real para f .

4.2 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Iezzi et al (2016) definem *parábola* como a reunião dos pontos de um plano que possuem igual distância de um ponto F e de uma reta d , chamados respectivamente de foco e diretriz. Partindo dessa definição podemos resolver o problema 02 destacado a seguir.

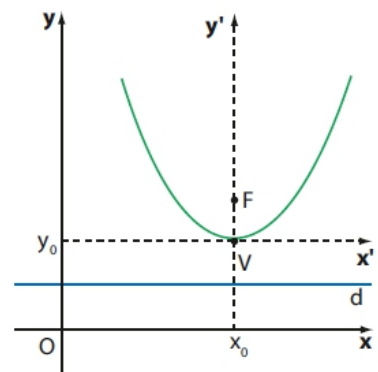
Entretanto, é preciso recordar que a distância entre dois pontos, $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, conforme expressam os autores citados, é dada pela equação: $d(A, B) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$. Neste ponto, para um melhor aprofundamento, convidamos o leitor a realizar uma leitura da referência citada. Dito isso, para nos dar apoio na resolução do próximo problema, exibiremos as figuras 01 e 02, onde são expressas parábolas com vértices V respectivamente nos pontos $(0,0)$ e (x_0, y_0) .

Figura 01 – parábola com $V(0,0)$.



Fonte: lezzi et.al (2016, p. 108).

Figura 02 – parábola com $V(x_0, y_0)$.



Fonte: lezzi et.al (2016, p. 110).

Problema 02: Mostrar que os pontos da parábola são dados por $y = ax^2 + bx + c$.

Solução:

Para início, consideremos a figura 01 que apresenta um eixo com origem em $V(0,0)$. Pela definição da parábola sabemos que a distância entre $P(x, y)$ e $F(0, \frac{p}{2})$, é igual a distância entre $P(x, y)$ e $P'(x, -\frac{p}{2})$, o qual, diremos que mede p . Assim, aplicando a equação que nos fornece a medida da distância entre dois pontos temos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + [y-(-\frac{p}{2})]^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y(-\frac{p}{2}) + (-\frac{p}{2})^2 = y^2 + 2y(-\frac{p}{2}) + (-\frac{p}{2})^2 \Rightarrow x^2 - yp = yp \therefore x^2 = 2py.$$

Levando-se em conta a figura 02 que apresenta o sistema $x'Oy'$ com origem em $V(x_0, y_0)$, sendo tal que, $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$. A partir do resultado $(x')^2 = 2p(y')$, temos a seguinte equação da parábola para este sistema: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

$$\Rightarrow x^2 + 2x(-x_0) + (-x_0)^2 = 2py + 2p(-y_0) \Rightarrow y = \frac{1}{2p}x^2 + \left(-\frac{x_0}{p}\right)x + \left(\frac{x_0^2}{2p} - y_0\right)$$

Por simplicidade ao fazermos $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2}{2p} - y_0$, como $p \neq 0$ temos:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \in \mathbb{R}^* \blacksquare$$

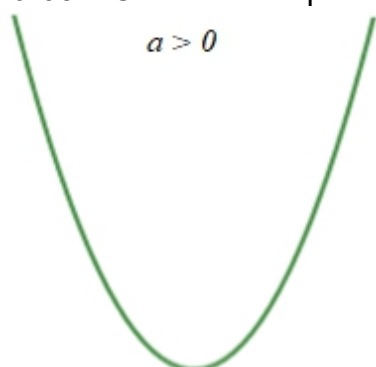
Assim, dada uma função quadrática, basta considerar seus coeficientes para determinar a parábola correspondente. Fato que nos permite afirmar que o gráfico da função quadrática é uma parábola.

4.3 INFLUÊNCIA DOS COEFICIENTES NO GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

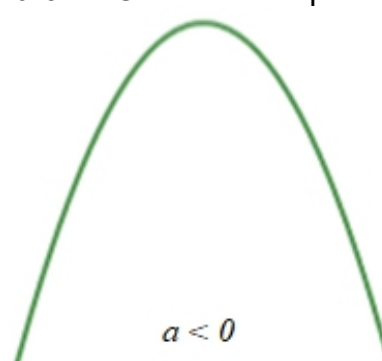
Analisaremos agora, o papel que desempenha os coeficientes a , b e c no gráfico da nossa função de estudo. Para isso, lançaremos mão de alguns exemplos ilustrativos gerados através do software GeoGebra.

4.3.1 Coeficiente a

Para início de estudo, analisemos o coeficiente a . Este, segundo Iezzi et al (2016), é o coeficiente responsável pela concavidade do gráfico, a depender de seu sinal ser positivo ou negativo, isto é, se $a > 0$, a concavidade da parábola estará virada para cima e caso $a < 0$ a curva é côncava para baixo. As figuras 03 e 04 ilustram essa situação.

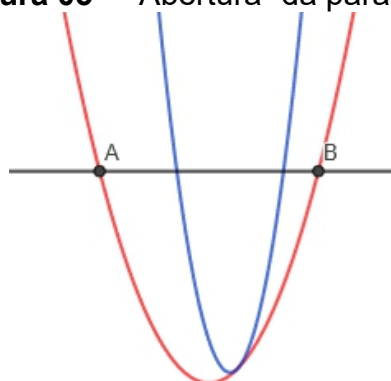
Figura 03 – Concavidade para cima.

Fonte: GeoGebra, 2020.

Figura 04 – Concavidade para baixo.

Fonte: GeoGebra, 2020.

Uma característica importante decorrente do coeficiente a , está relacionada com a forma ou abertura da parábola. Segundo Silva (2020), para exemplificarmos isso, basta tomar os pontos, A e B , de interseção entre uma parábola e uma reta horizontal, inicialmente na parábola em vermelho da figura 05. Assim, conforme aumenta-se o valor absoluto de a , mais próximo estarão pontos considerados, acompanhando o movimento da parábola em azul da mesma figura. A figura 05 exemplifica essa situação.

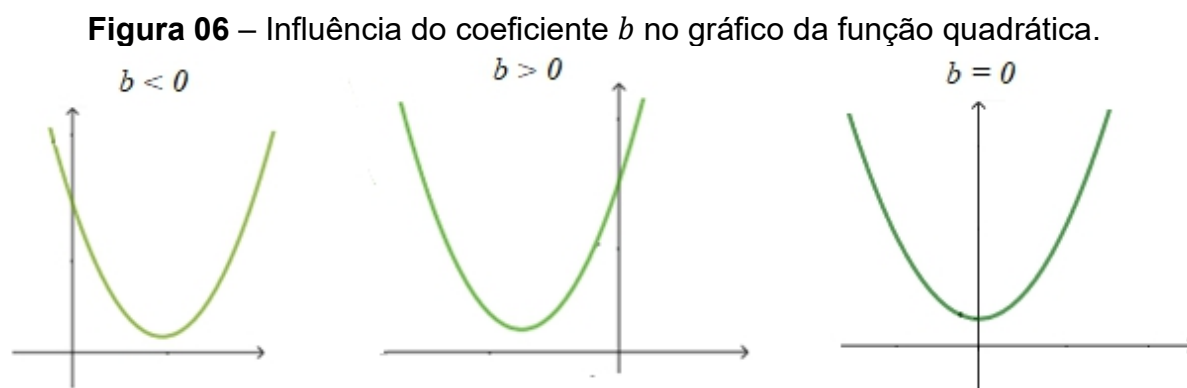
Figura 05 – “Abertura” da parábola.

Fonte: GeoGebra, 2020.

Por outro lado, caso o módulo de a , for um número pequeno, maior será a distância entre os pontos A e B . Observemos que por definição $a \neq 0$, pois caso contrário, não teríamos uma parábola, mas sim, uma reta.

4.3.2 Coeficiente b

Conforme Tutorbrasil (2018) e os autores anteriormente mencionados, o coeficiente b determina a inclinação da parábola ao interceptar o eixo cartesiano y . As ilustrações da figura 06, apresentam exemplos ilustrativos a respeito da influência desse coeficiente.



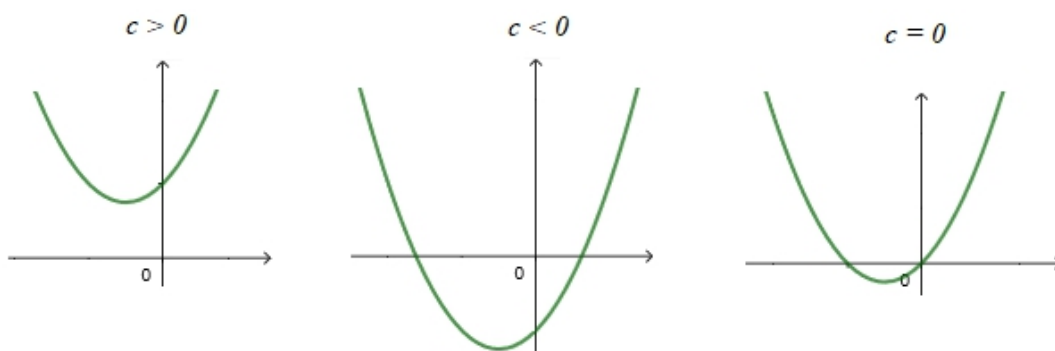
Fonte: GeoGebra, 2020.

Na figura 06, $b < 0$, indica que a parábola fará uma curva decrescente após o ponto de interseção da parábola com o eixo y . Já quando, $b > 0$, nos permite dizer que a curva será ascendente após o ponto de interseção da parábola com o eixo y . No entanto, quando $b = 0$, após o ponto de corte não haverá inclinações. Essa análise também se aplica quando a concavidade está voltada para baixo.

4.3.3 Coeficiente c

O coeficiente c , segundo Tutorbrasil (2018), influencia na interseção da parábola com o eixo y . Na figura 07 estão expressos os casos em que c atua sobre o gráfico da função quadrática dependendo do sinal desse coeficiente.

Figura 07 – Influência do coeficiente c no gráfico da função quadrática.



Fonte: GeoGebra, 2020.

Isso significa afirmar que, se $c > 0$, a parábola intercepta o eixo y a cima do ponto $(0,0)$. Caso $c < 0$, a interseção da parábola com o eixo y ocorre abaixo do ponto $(0,0)$. Enquanto isso, sempre que $c = 0$, a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0,0)$. Analogamente, também se tem as mesmas conclusões para o caso em que a concavidade estará voltada para baixo.

4.4 PONTO MÁXIMOS OU MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Para começarmos essa discussão, retomemos a configuração abordada no problema 01 do tópico 4.1 e novamente recorrer ao processo de completar quadrados. No entanto, não iremos destacar o valor da variável, mas encontrar uma forma que nos permita identificar novas informações a respeito desta função. Segundo lezzi et al (2016), tal formato é denominado *forma canônica de $f(x) = y$* .

Problema 03: Escrever $f(x) = ax^2 + bx + c$ em sua forma canônica.

Solução:

Dado $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, por complemento de quadrado temos:

$$f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \blacksquare$$

A partir deste resultado, podemos identificar características relevantes dessa função, em particular, as coordenadas do vértice. Para isso, os autores citados

afirmam que basta determinar x de modo que o valor $y = f(x)$ seja máximo ou mínimo a depender da concavidade de f .

Problema 04: Encontre x , tal que, y seja máximo ou mínimo e determine esse valor.

Solução:

Conhecida a forma canônica $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$, o valor $y = f(x)$ será mínimo quando a diferença $\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ for mínima, o qual, ocorre quando $\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, isto é, $x = -\frac{b}{2a}$. Assim, aplicando em $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem-se:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Analogamente, conclui que essa relação também se aplica ao caso de a função admitir valor máximo. Assim temos que o vértice da função é $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ ■

Como visto no tópico anterior, o vértice é o ponto de máximo ou mínimo da função. Isso dependendo do valor do coeficiente a , ou seja, para $a > 0$, V é mínimo, enquanto isso, caso $a < 0$, V é máximo.

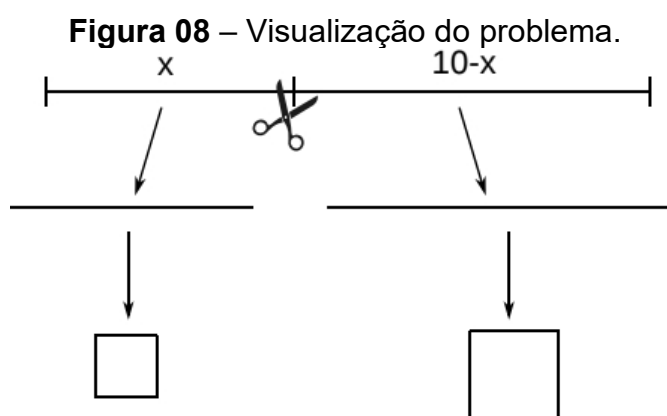
5 RESOLVER POR MEIO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA PROBLEMAS DA OBMEP

Segundo Polya (2006, p.5), compreender o problema é fundamental, para o autor, “é uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas”. Perante esse cenário, percebe-se a necessidade de procurar alternativas para que professores possam oportunizar que seus discentes tenham maior compreensão dos conteúdos selecionados.

Diante disso, uma alternativa trata-se de resolver as situações problemas utilizando-se, as quatro fases de resolução de problemas apresentadas por George Polya. Assim, com a utilização deste método, os alunos terão a possibilidade de ter maior clareza ao resolver as situações problemas.

Para efeito de exemplificação, iremos resolver os exemplos 01 e 02 retirados do banco de questões da OBMEP referente aos anos de 2014 e 2020, as quais, dão ênfase nas funções quadráticas. Note que em ambos os exemplos seguintes, destacaremos apenas o item b, pois destacam aplicações da função (ou equação) do segundo grau.

Exemplo 01: (OBMEP – 2014. Nível 3) Augusto tem um arame com 10 m de comprimento. Ele realiza um corte em um ponto do arame obtendo assim dois arames. Um com comprimento x e outro com comprimento $10 - x$ como mostra a figura abaixo:



Fonte: OBMEP, 2014.

Augusto usa os dois pedaços do arame para fazer dois quadrados.

b) Qual é o valor do comprimento de cada um dos dois pedaços do arame para que a soma das áreas dos quadrados obtidos seja mínima?

Solução:

Para resolver este exemplo, seguiremos as orientações de Polya. Por isso, dividiremos a resolução em quatro (4) partes que consiste em: compreender o problema; planejar a resolução; executar aquilo que planejamos; por último, verificar o processo que nos conduziu ao resultado.

1° - Entendendo a questão:

Para entendermos esse problema, precisaremos saber um pouco sobre área de um quadrado. Também necessitaremos de um conhecimento básico sobre a função do segundo grau, em especial, sobre seu vértice que nos permite encontrar as coordenadas de máximo ou mínimo da função.

Podemos ainda realizar as seguintes indagações: Qual é a incógnita? Quais as medidas dos lados de cada quadrado? Como podemos calcular a área dos quadrados? Realmente existe uma área mínima? Com os dados fornecidos, quais equações podemos aplicar para solucionar o problema?

A partir desses questionamentos, podem nos dar uma ideia de como podemos planejar um esboço da solução. Desse modo, podemos ser mais assertivos em nossos cálculos.

2° - Planejando um esboço da resolução:

Notemos de imediato que se trata de um problema sobre funções quadráticas, em particular, sobre determinar o mínimo dessa função. No entanto, teremos inicialmente que encontrar a área dos quadrados e para isso, devemos antes calcular a medida do lado de cada um dos quadrados a partir do comprimento inicial do arame.

Para este propósito, Iezzi et al (2016, p.230) diz que “todo quadrado é um retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura”, além do mais, “a área do quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado” (IEZZI et al, 2016, p.230), isto é, sendo A a área de um quadrado de lado l , podemos concluir que $A = l^2$. De posse dessas informações extras, podemos começar as contas.

3° - Efetuação do plano:

Como o arame foi dividido em duas partes de medidas x e $10 - x$ e sabendo que a medida da base de um quadrado é igual a medida da altura, temos que os quadrados possuem lados medindo respectivamente $l_1 = \frac{x}{4}$ e $l_2 = \frac{10-x}{4}$. A partir disso, a área de cada quadrado será $A_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$ e $A_2 = \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$. Como precisamos analisar o mínimo da soma das áreas, temos:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{2x^2 - 20x + 100}{16} \\ &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Dado que $a > 0$, sabemos do tópico 4.4 que existem um ponto mínimo é dado por $x = -\frac{b}{2a}$. Como $a = \frac{1}{8}$ e $b = -\frac{5}{4}$, temos:

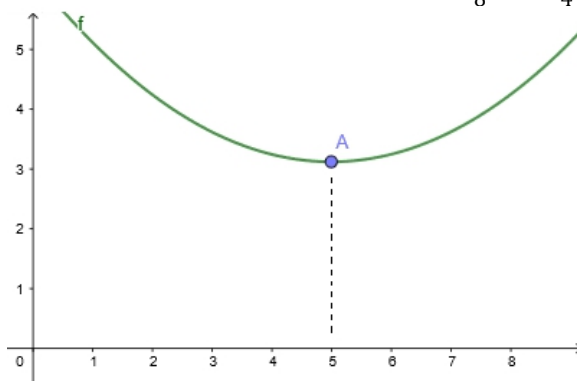
$$x = -\frac{\left(-\frac{5}{4}\right)}{2 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{1} = 5$$

Visto que o arame mede $10m$, este deve ser cortado ao meio para que a área dos quadrados seja mínima. Logo, o valor do comprimento de cada um dos dois pedaços do arame mede $5m$.

4° - Verificação dos fatos:

Com o problema resolvido, é o momento de verificar nosso processo de cálculo para certificarmos que não houve nenhum erro de cálculo, ou de interpretação no momento em que estávamos compreendendo o problema, ou mesmo, quando tentávamos planejar um modo de resolver a questão. Como obtivemos uma função do segundo grau e tivemos que buscar por um ponto específico do seu gráfico, uma forma de confirma nosso resultado é aplicar essa função em uma calculadora gráfica como o GeoGebra.

Figura 09 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4}$.



Fonte: GeoGebra, 2020.

Conforme mostra o gráfico de $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4}$ exibido na figura 09, $x = 5$ é a abscissa do vértice dessa parábola. Portanto, verificamos que o valor encontrado é realmente o mínimo para este problema.

Exemplo 02: (OBMEP – 2020. Nível 2) O professor M. A. Luco escreveu no quadro a expressão:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4}$$

Então, ele diz aos alunos que n pode ser qualquer número natural, com exceção de 4.

- b) Marcos substituiu n por um número natural e verificou que o valor da expressão é 5. Marcos substituiu n por qual número?

Solução:

Novamente, procederemos conforme orienta Polya. Assim como no exemplo anterior, dividiremos o processo de resolução em quatro (4) fase para uma melhor percepção dos detalhes do problema.

1° - Entendendo o problema a ser resolvido:

A fim de discutirmos com proveito esta situação problema, nos será exigido somente um conhecimento elementar sobre a equação do segundo grau. Para nos ajudar na compreensão, podemos levantar os seguintes questionamentos:

Qual é a incógnita? Quais os valores dos coeficientes a , b e c ? Quais são os dados fornecidos? As informações e condições são suficientes para determinar a solução? Como podemos encontrar os valores de n que fazem com que a equação seja igual a 5?

Essas indagações nos fornecem a possibilidade de compreender o problema e por vezes contribuem para pensarmos em um plano para solucionarmos. Assim, temos a possibilidade de estarmos melhor preparados para estabelecer uma sequência de ideias para encontrarmos uma solução.

2° - Elaboração de um plano para encontrar a solução:

Como já estamos familiarizados com as funções quadráticas, podemos observar que se trata de uma situação problema sobre esse tema. Para este exemplo em especial, ter conhecimentos prévios sobre proporção será de grande ajuda para que possamos nos valer da propriedade relacionada ao produto dos meios pelos extremos, o qual, encontra-se evidenciada em Iezzi, Hazzan e

Degenszajn (2004, p.2) e nos afirma que “em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”.

Após resolvermos a questão da proporção, estaremos em condições de aplicarmos a equação discutida no tópico 4.1 para determinarmos as raízes da equação e conseqüentemente a solução para o problema. Agora é o momento de executarmos o que acabamos de planejar.

3° - Pondo o plano em pratica:

Seja $\frac{n^2-5n+4}{n-4} = 5$, podemos aplicar a propriedade do produto dos meios pelos extremos, isto é, $n^2 - 5n + 4 = 5(n - 4) \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 5n - 20 \Rightarrow n^2 - 10n + 24 = 0$. Neste ponto, basta determinarmos as raízes da equação a partir dos seus coeficientes, no qual, $a = 1$, $b = -10$ e $c = 24$ aplicados na equação $n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Assim temos: $n = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$, o que implica que $n = 4$ ou $n = 6$. No entanto, pelo enunciado, n não pode ser igual à 4. Logo, n deve ser igual à 6.

4° - Verificação dos fatos:

Encontrado o resultado, podemos rever os passos para assegurar que não cometemos erros de interpretação ou de execução dos cálculos. Neste exemplo, por se tratar de uma equação, temos a possibilidade de fazer uma verificação rápida da solução, isto é, podemos substituir o valor que encontramos para n na expressão $\frac{n^2-5n+4}{n-4}$ e observar se o resultado é igual a 5. Assim, fazendo $n = 6$, temos, $\frac{6^2-5 \cdot 6+4}{6-4} = \frac{36-30+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$ ■

A partir desse ponto, somos capazes de prosseguir com o conhecimento a respeito das equações de segundo grau ou das funções quadráticas. Especificamente, temos potencial para introduzir, por exemplo, a teoria de gráficos relacionados a essa função.

Com esse intuito, nos arrisquemos a levantar os seguintes questionamentos: Qual a concavidade dessa parábola? Existe um ponto de máximo ou de mínimo?

Qual é esse ponto (vértice)? Qual a influência dos coeficientes para a disposição do gráfico da função?

Desse modo, será possível explorar as potencialidades de cada exemplo exposto. Por conseguinte, dar ainda mais “profundidade” e significância ao conteúdo abordado. Para exercitar e tornar a experiência mais completa, pode-se ainda, examinar exemplos semelhantes, como o destacado a seguir.

Exemplo 03: (OBMEP – 2020. Nível 3) Ache todos os valores de x satisfazendo:

$$\frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}} = \frac{11}{5}$$

Ao observarmos atentamente este exemplo, é razoável pensarmos que a solução pode ser encontrada de modo análogo ao exemplo 02, como de fato faz todo sentido. Com isso, podemos fazer uma análise inicial similar e tentar aplicar um plano semelhante, mas se for necessário, não hesite em fazer as adaptações coerentes ou pode-se ainda questionar se existe um outro modo de resolver esse problema. Assim deixamos esse exemplo para o deleite do leitor, para que o mesmo possa também apreciar a arte da resolução de problemas matemáticos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, discorremos sobre os pensamentos de resolução de problemas sob a perspectiva de George Polya. Nisto, apresentamos as quatro (4) fase que segundo Polya, permitem desenvolver organizadamente um problema matemático, isto é, conhecemos um modo de abordar uma questão do qual se deseja encontrar a solução, mas sobretudo, extrair o máximo de conhecimento que tal problema nos permite adquirir.

Para ilustrar esse método, nossas exemplificações foram baseadas nos conhecimentos sobre função quadrática, o qual, utilizamos como objeto de aplicação, o método de Polya. Na parte final, inserimos duas (2) situações problemas proveniente do banco de questões da OBMEP com intuito de evidenciar as fases da resolução de problemas.

Diante disso, foi possível notar que esse método empregado a resolução de problemas, é essencial quando o intuito é instigar a capacidade de pensar dos estudantes, além de possibilitar o desenvolvimento do senso crítico que o direcionará para o aprimoramento do conhecimento sobre o assunto. Isto pois, ao utilizar o método de Polya, professores poderão oportunizar aos seus alunos a serem mais reflexivos, e conseqüentemente, terão maiores chances de obterem êxito na arte de resolver problemas.

REFERÊNCIAS

BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya: Quatro episódios da história da heurística**. 2004. 217 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2004. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/102082>>. Acesso em: 02 nov. 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único**. São Paulo: Ática, 2010.

GEOGEBRA. [Site]. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>. Acesso em: 18 set. 2020.

IEZZI, Gerson. et al. **Matemática, vol. 1: Ciência e Aplicação**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gerson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de matemática elementar, vol. 11: Matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva**. São Paulo: Atual, 2004.

MARCONI, Maria de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia Científica**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2011.

OBMEP. [Site]. Disponível em: < <http://www.obmep.org.br/banco.htm>>. Acesso em: 18 set. 2020.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Relação entre os coeficientes e o gráfico de uma função do segundo grau**, 2020. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/relacao-entre-os-coeficientes-grafico-uma-funcao-segundo-grau.htm>>. Acesso em: 02 nov. 2020.

TUTORBRASIL. [Site]. **Estudo dos coeficientes**, 2018. Disponível em: <<https://www.tutorbrasil.com.br/aulas-de-matematica/funcoes-2-grau/estudo-dos-coeficientes-equacao-2-grau/>>. Acesso em: 02 nov. 2020.