



**CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

GILVAN APARECIDO ARAÚJO SANTANA

SISTEMAS LINEARES 2×2 E 3×3 E SUAS INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

SÃO RAIMUNDO NONATO

ABRIL / 2016

GILVAN APARECIDO ARAÚJO SANTANA

SISTEMAS LINEARES 2x2 E 3x3 E SUAS INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática sob orientação do Prof. Msc. Atécio Alves.

SÃO RAIMUNDO NONATO

ABRIL / 2016

GILVAN APARECIDO ARAUJO SANTANA

SISTEMAS LINEARES (2 x 2) e (3 x 3) E SUAS INTERPRETAÇÕES
GEOMÉTRICAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Prof. Msc. Atécio Alves – Orientador (IFPI)

- Examinador

- Examinador

São Raimundo Nonato – Piauí ____ de _____ 2016

DEDICATÓRIA

A meus pais que me apoiaram incansavelmente e me incentivaram a escolher o caminho da formação acadêmica.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”.

Isaac Newton

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela dádiva de existir e por me manter firme perante esse desafio, a meus familiares pelo apoio, aos colegas de cursos pela parceria em todos os momentos.

Ao meu orientador, professor Msc. Atécio Alves, e a todos os meus professores da graduação pelos ensinamentos.

“Ajuda o teu semelhante a levantar a carga, mas não a levá-la”.

Pitágoras

RESUMO

O presente trabalho tendo em vista que um conceito matemático possui várias formas de representação buscou contribuir de forma teórica e prática para o ensino dos sistemas de equações lineares, neste estudo, abordamos os sistemas de equações lineares por meio de situações problemas considerando seu tratamento algébrico e significado geométrico em interação com o software Geogebra. O objetivo pretendido é dar ênfase às características de alguns métodos algébricos de solução e na visualização da geometria que está envolvida no decorrer de todo o procedimento escolhido para determinar soluções dos sistemas lineares, limitaremos aos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas para permitir o uso da intuição geométrica de forma acessível aos educandos da educação básica. Intuito de destacar o uso de programas computacionais como ferramenta didática para tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e interativas, afim descreveremos um conjunto de casos para a aplicação do Geogebra nas soluções de um sistema linear, entendendo que a proposta constitui uma ferramenta importante para o ensino aprendizagem dos Sistemas Lineares.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares. Interpretação geométrica. Geogebra.

ABSTRACT

This work considering that a mathematical concept has several forms of representation sought to contribute theoretically and practices for teaching systems of linear equations, in this study, we address the systems of linear equations through problem situations considering their algebraic treatment and geometric meaning in interaction with the Geogebra software. The intended goal is to emphasize the characteristics of some algebraic methods of solution and geometry visualization that is involved throughout the entire procedure chosen to determine solutions of linear systems, will limit the linear system with two equations and two unknowns and three equations and three unknowns to allow the use of geometric intuition affordably to students of basic education. Order to highlight the use of computer programs as a teaching tool to make the most dynamic math classes and interactive in order describe a set of cases for the application of Geogebra the solutions of a linear system, understanding that the proposal is an important tool for teaching and learning of Linear Systems.

Keywords: Systems of Linear Equations. Geometric interpretation. Geogebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO 1	13
SISTEMAS LINEARES- DEFINIÇÕES E MÉTODOS DE RESOLUÇÕES	13
1. ELEMENTOS HISTÓRICOS	13
1.1 DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES	14
1.1.1 EQUAÇÃO LINEAR	14
1.1.2 SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR	14
1.1.2 SISTEMA LINEAR.....	16
1.1.3 SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR.....	17
1.1.5 CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR.....	18
1.2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	19
1.2.1 MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO	20
1.2.2 MÉTODO DE ESCALONAMENTO	22
CAPITULO 2.....	26
MATRIZES E DETERMINANTES APLICADOS AOS SISTEMAS LINEARES.....	26
2. MATRIZ	26
2.1 DETERMINANTE	27
2.3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR	29
2.4 REGRA DE CRAMER.....	30
2.5 DISCURSÃO DE UM SISTEMA LINEAR POR DETERMINANTES	33
CAPITULO 3	36
SISTEMAS LINEARES: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA.....	36
3. GEOGEBRA.....	36
3.1 ALGUMAS FERRAMENTAS E RECURSOS DO GEOGEBRA	36
3.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 2X2 E 3X3 NO GEOGEBRA	40
3.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO SISTEMA LINEAR (2X2)	40
3.2.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO SISTEMA LINEAR (3X3)	49

3.2.3 SISTEMAS EQUIVALENTES: ALGÉBRICOS X GEOMÉTRICO	60
CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
REFERÊNCIAS.....	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- interface da janela de álgebra.....	37
Figura 2- ícone Mover objetos.....	37
Figura 3- Ícone Novo Ponto.....	38
Figura 4- Mover Janela de Visualização	38
Figura 5- Interface Janela 3D.....	38
Figura 6- Ícone Interseção de duas Superfícies	39
Figura 7- Eixo 3 Dimensões	39
Figura 8- Representação da reta a.....	41
Figura 9- Representação dos pontos da reta a	41
Figura 10- Representação da interseção reta a e b	42
Figura 11- Representação do ponto de interseção das retas a e b.....	42
Figura 12-Representação da reta a.....	43
Figura 13- Representação dos pontos da reta a	44
Figura 14- Representação das Retas a e b coincidentes.....	44
Figura 15- Representação das retas a e b	45
Figura 16- Representação da reta b.....	45
Figura 17- Representação da reta a.....	46
Figura 18- Representação da reta a.....	47
Figura 19- Representação dos pontos da reta a	47
Figura 20- Representação das retas a e b	48
Figura 24-Representação da interseção entre os 3 planos.....	52
Figura 26-Representação dos 3 Planos Paralelos	53
Figura 27- Representação de 2 planos paralelos intersectados por outro plano	54
Figura 28- Representação das retas r e s de interseção dos planos	55
Figura 31- Representação da interseção dos 3 planos	57
Figura 32- Representação das retas r, s e t interseção dos 3 planos	58
Figura 33- Representação da interseção dos 3 planos	58
Figura 34- Representação do ponto a interseção das retas r e s.....	59
Figura 35- Representação do sistema original.....	59
Figura 36- Representação do sistema modificado	60

INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem de matemática nas escolas brasileiras tem sido fonte de inúmeros debates. É fato que na atual conjuntura o mesmo passa por diversas dificuldades, um dos pontos que contribui para essas barreiras no ensino da matemática é sua abordagem de forma abstrata sem conexão com o ambiente que o aluno está inserido, essa abstração acaba resultando em um desinteresse maior dos alunos.

No Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, a Matemática é uma parcela essencial para o desenvolvimento do conhecimento do aluno, proporcionando a construção de uma visão do mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino Médio - PCNEM (2000, p.40) [3] destacam que:

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Neste trabalho iremos destacar os Sistemas Equações Lineares ou Sistema Lineares estes aparecem em aplicações de diversas áreas como, por exemplo, a Física, a Engenharia, a Geometria analítica, Química.

O estudo de sistemas de equações lineares começa a ser abordado no 7º ano do ensino fundamental sendo aprofundado no ensino médio, Lima (2007) [8] destaca que,

Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares.

De acordo com os PCN + Ensino Médio (2002) [2], o ensino de sistemas lineares no Ensino Médio deve ser uma expansão do que foi estudado no ensino fundamental, intensificando o tratamento algébrico e geométrico, além de estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de

primeiro e segundo grau e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares três equações e três incógnitas, aplicando este estudo à resolução de problemas das diversas outras áreas do conhecimento.

Lima (2007) em [8] ressalta que os Sistemas Lineares podem ser analisadas por diversos pontos de vista, essa variedade de interpretações como: geométrica, matricial e vetorial enriquece a variedade de aplicações que tem seu estudo e, por outro lado, permite a utilização de diferentes instrumentos para resolvê-lo como resoluções de problemas, interpretação geométrica entre outros.

São estes fatores que norteiam o objetivo deste trabalho que é destacar a importância do uso de recurso tecnológico para que ensino e aprendizagem de matemática tornem-se mais dinâmicos e significativos, despertando no alunado um interesse maior pelo estudo da Matemática.

O trabalho justifica-se pela necessidade de desenvolver novas práticas de ensino aprendizagem, que possibilitem uma abordagem mais ampla desse conteúdo e que levem os alunos a relacionar e entender a solução de um Sistema Linear. Assim este trabalho visa a apresentar os Sistemas de Equações Lineares numa perspectiva que articula o cálculo algébrico e a interpretação geométrica, em interação com software Geogebra.

A utilização do Geogebra trás a este trabalho um dos temas debatidos na educação matemática, a saber, o uso de tecnologia na educação matemática. Tais tecnologias permitem experimentações, muitas vezes difíceis de serem alcançadas sem o uso das mesmas além de facilitarem visualizações, manipulações permitindo a construção do conhecimento de forma crítica e reflexiva.

Essas visualizações e manipulações são importantíssimas para o ensino dos Sistemas lineares, para [9] Peixoto *et al* (2015) o estudo de sistemas lineares, sem a análise gráfica não favorece o alcance de um nível de compreensão adequado, pois o enfoque somente na parte algébrica acaba tornando os procedimentos muito mecânicos.

Para desenvolver esse trabalho, usaremos a seguinte estrutura. No capítulo 1, traremos elementos históricos dos sistemas de equações lineares, bem como a generalidades das definições de Equação Linear e Sistemas de Equações Lineares,

abordando por meio de situações problemas e as características dos principais métodos de resolução de um Sistema linear 2×2 e 3×3 .

Abordaremos, no capítulo 2, a associação dos Sistemas Lineares a Matrizes e Determinantes, estudando as características fundamentais da Regra de Cramer e a discussão dos sistemas lineares por determinantes. .

No capítulo 3, apresentamos de forma introdutiva o software Geogebra, em seguida aborda-se como se pode utilizá-lo para a representação geométrica dos sistemas lineares 2×2 e 3×3 .

O propósito do trabalho é auxiliar os professores de Matemática bem com discentes de nível médio ou superior na utilização do programa para o ensino e aprendizagem desse conteúdo e divulgar outra forma de abordagem que possa contribuir para melhorar ensino aprendizagem entendimento do mesmo, por parte dos alunos.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES- DEFINIÇÕES E MÉTODOS DE RESOLUÇÕES

Neste capítulo trataremos da origem, definição e de alguns métodos de resolução algébricos dos sistemas de equações lineares. No tópico 1 utilizamos como fonte de referência BOYER [1] nas definições contidas nos tópicos 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 e 1.1.4 usamos como principais referências IEZZI e HAZZAN [5] e LIMA [7].

1. Elementos históricos

Segundo Boyer (1996) [1] os primeiros registros de estudo dos sistemas de equações lineares, vem do Oriente, aproximadamente do século II a.C. encontrado no livro chinês *Chiu-chang Suan-shu* (Nove Capítulos sobre a arte matemática). O capítulo 8 dos Nove capítulos é significativo por conter a solução de problemas sobre equações lineares simultâneas, usando tanto números positivos negativos. O último problema no capítulo envolve quatro equações em cinco incógnitas. Neste livro encontra-se resolvido o sistema S abaixo, de maneira semelhante ao método de eliminação que é abordado nos livros de hoje.

$$S : \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

A ideia de determinante para resolver equações simultâneas veio ser fortalecida num trabalho do japonês Seki Kowa, só em 1683, considerado o maior matemático japonês do século XVII, Seki Kowa chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês para o caso de duas equações apenas.

Em uma carta direcionada a L'Hospital em 1693, Leibniz escreveu que usava ocasionalmente números indicando linhas e colunas em uma coleção de equações simultânea e fez menção do uso determinantes para resolver esse tipo de problema, essa antecipação dos determinantes por Leibniz só veio a ser publicada em 1850.

A conhecida Regra de Cramer foi publicada em 1750 por Gabriel Cramer, mas provavelmente já era conhecida desde 1729 por Maclaurin, a mesma esta no seu livro *Treatise of Algebra* como a regra para resolver equações simultâneas por determinante publicado em 1748, dois anos antes de Cramer.

1.1 Definições e Notações

1.1.1 Equação linear

Define-se equação linear, toda equação do tipo,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

onde: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as *variáveis* ou *incógnitas*;

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são números reais chamados de *coeficientes*;

b é um número real chamado de *termo independente* da equação.

São exemplos de equações lineares;

Exemplo 1: $3x = 6$, para equações com uma incógnita usaremos x como representação.

Exemplo 2: $3x + 4y = 5$, neste casos como temos duas incógnitas usaremos x e y para representar.

Exemplo 3: $2x - y - z = 0$, de modo análogo a representação para equações com três incógnitas usaremos x , y e z .

Equações do tipo $2x^2 + y = 1$ e $xy + 3 = 0$ não são equações lineares, pois possuem incógnitas com potência e produto entre incógnitas respectivamente.

Temos que uma equação linear é uma equação envolvendo apenas somas ou produtos de constantes e variáveis do primeiro grau, de forma característica uma equação linear não pode conter potências nem produtos de variáveis e podem ter uma ou mais variáveis.

1.1.2 Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

é uma solução da equação linear com n variáveis

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

se, e somente se, $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + \dots + a_n \alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

A fim de exemplificar a definição anterior considere os seguintes exemplos.

Exemplo: - **Um número somado com o seu dobro é igual a 21. Qual é esse número?**

Solução:

- Considere x a variável que representa o número
- $x + 2x$ representa o número somado ao seu dobro
- Podemos agora representar o problema numa equação linear do tipo $ax = b$;
O problema nos trás a seguinte situação, $x + 2x = 21 \Rightarrow 3x = 21$, que obtemos $x = 7$.

Portanto $3x = 21$, é uma equação linear na variável x , e a solução é $x = 7$.

Se tivermos uma equação com duas variáveis, por exemplo, $x + y = 10$, a solução não é única, já que poderemos ter um número infinito de pares ordenados que satisfaçam à equação, como por exemplo, $(1,9)$, pois $1 + 9 = 10$, $(4,6)$, pois $4 + 6 = 10$, para este caso todos pares ordenado da forma $(x, 10 - x)$ sendo x um número arbitrário, irão satisfazer a equação $x + y = 10$.

Consideremos agora, uma equação com três incógnitas, por exemplo: $x + y + z = 5$, algumas soluções possíveis são $(1,4,0)$, pois $1 + 4 + 0 = 5$, $(3,7,-5)$ pois $3 + 7 + (-5) = 5$, todos os ternos ordenados da forma $(x, y, 5 - x - y)$ para x e y arbitrários, ou seja as soluções são os infinitos ternos ordenados que satisfazem à equação dada.

1.1.2 Sistema Linear

Define-se que um Sistema de Equações Lineares é um conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

$$\text{Assim o sistema } S_n: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é linear de m equações e n incógnitas.

Os problemas 1 e 2 logo abaixo exemplificam a definição anterior.

Problema 1: Dado a seguinte situação problema: *“Em uma competição escolar, nas modalidades de handebol e basquetebol, participaram 32 equipes e 344 atletas. Cada equipe de handebol inscreveu 12 jogadores, e cada equipe de basquetebol, 10 jogadores. Quantas equipes handebol participaram da competição?”*

Indicando x à quantidade de equipes de handebol e y a quantidade de equipes basquetebol, podemos formar equações lineares;

- A soma da quantidade de equipes participantes é dada por,

$$x + y = 32$$

- A soma de jogadores por equipes sendo,

$$12x + 10y = 344$$

Temos assim um conjunto de Equações Lineares que da forma a um Sistema de Equações Lineares sendo (S_1) esse sistemas podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$(S_1): \begin{cases} x + y = 32 \\ 12x + 10y = 344 \end{cases}$$

Problema 2: Três escolas participaram de um torneio esportivo com provas de dez modalidades diferentes. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, prata e bronze aos respectivos 1º, 2º e 3º lugares. A soma do valor de cada medalha gerou a pontuação final de cada equipe, sendo que a equipe A conquistou 2 ouros, 1prata e 1 bronze totalizando 23 pontos, a equipe B

conquistou 5 ouros, 3 pratas e 1 bronze com pontuação final igual a 57 pontos e a equipe C obteve 53 pontos conquistando 4 ouros, 3 pratas e 3 bronzes. Determine quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze.

Indicando x o valor das medalhas de ouro, por y o valor das medalhas de prata e z o valor das medalhas de bronze, podemos formar as seguintes equações lineares, em relação à equipe A temos que $2x + y + z = 23$, da equipe B $5x + 3y + z = 57$ e da equipe C $4x + 3y + 3z = 53$, temos assim um conjunto de Equações Lineares que podemos escrevê-las na forma de um Sistema de Equações Lineares, como segue abaixo.

$$S_2 = \begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

1.1.3 Solução de Um sistema Linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução de um sistema S_n , se, e somente se, for solução *todas* as equações (S_n) , isto é, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ torna todas as sentenças de equações do S_n verdadeiras conforme como está elucidado abaixo:

$$(S_n): \begin{cases} a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a_{12}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

Tomando com exemplo o Sistema Linear do problema 1 anterior:

$$(S_1): \begin{cases} x + y = 32 \\ 12x + 10y = 344 \end{cases}$$

A o conjunto solução de (S_1) é igual a $\{(12, 20)\}$, pois esse par ordenado satisfaz as duas equações do Sistema como podemos observar,

$$(S_1): \begin{cases} 12 + 20 = 32 \\ 12 \times 12 + 10 \times 20 = 344 \end{cases} \text{ (sentenças verdadeiras)}$$

Já no Sistema Linear do problema 2 anterior temos,

$$S_2 \begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Teremos como solução o conjunto $\{(8, 5, 2)\}$, pois este terno ordenado é único satisfaz as três equações de (S_2) , como segue abaixo,

$$(S_2): \begin{cases} (2 \cdot 8) + 5 + 2 = 23 \\ (5 \cdot 8) + (3 \cdot 5) + 2 = 57 \\ (4 \cdot 8) + (3 \cdot 5) + (3 \cdot 2) = 53 \end{cases} \quad (\text{sentenças verdadeiras})$$

1.1.5 Classificação de um sistema linear

A quantidade de elementos do conjunto solução de um sistema linear determina a forma com que o próprio sistema é classificado, podemos obter em um sistema linear, uma única solução ou uma infinidade de soluções e existe casos que é impossível obtermos solução, a seguir elucidaremos com exemplos de sistemas lineares 2×2 .

Um sistema linear pode ser classificado como:

- **Possível e Determinado (S.P.D.)**, quando admite uma única solução ordenada.

O sistema $S: \begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ é um exemplo desse caso, onde o conjunto solução $\{(1, -3)\}$ é o único par ordenado que satisfaz simultaneamente as duas equações do sistema dado.

- **Possível e Indeterminado (S.P.I.)**, quando admite uma infinidade de soluções.

Como no caso do sistema $S \begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$, onde os pares ordenados do tipo $(x, \frac{4-x}{-3})$ para todo valor real de x , $\{(1, -1), (-2, -2), \dots\}$ são exemplos de solução desse caso.

- **Sistema Impossível (S. I.)** nesse caso o sistema não admite nenhum conjunto solução.

O sistema $S: \begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$ é um exemplo de sistema impossível, pois podemos observar que pela equação $x - y = 5$ temos que $x = 5 + y$, já a equação $x - y = 2$ temos que $x = 2 + y$, o que para um valor real qualquer de y , obteríamos dois valores para de x , o que gera uma impossibilidade de encontramos solução para o sistema.

1.1.6 Sistema linear homogêneo e equivalente

Um Sistema de Equação Linear (S) é chamado homogêneo quando todas as equações têm termo independente igual à zero.

$$\text{Exemplo: } S \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 4x + 5y + 0z = 0 \\ 3x + 1y + 7z = 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogêneo é possível, pois admite, pelo menos, a solução trivial. Se esta solução for única, o sistema é possível determinado. Se, além da solução trivial, admitir outras, é possível indeterminado.

[6] Diz que um Sistema (S) é equivalente a outro Sistema linear (S') se, e somente se, toda solução de (S) é também solução de (S') e, reciprocamente, toda solução de (S') é também solução de (S).

1.2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

São vários os métodos algébricos de resolução existentes para se resolver um Sistema de Equações lineares, daremos atenção a seguir dois métodos mais abordados nos livros didáticos, método da substituição e método de escalonamento,

faremos suas devidas definições e resolveremos sistemas lineares (2x2) e (3x3) utilizando-os.

Conceitualmente um Sistema de Equações lineares (S) com duas equações e duas incógnitas, é chamado de Sistema de Equações Lineares (2x2), (*Lê-se: Sistema de Equações Lineares dois por dois*) é composto da seguinte forma:

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

O Sistema de Equações lineares (S) da forma:

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases},$$

É um Sistema de Equações Lineares com três equações e três incógnitas, de maneira usual chama-se Sistema de Equações Lineares (3x3) (*Lê-se: Sistema de Equações Lineares três por três*).

1.2.1 Método de substituição

O Método de substituição consiste em “isolar” uma das incógnitas em qualquer equação do sistema e substituí-la nas demais, obtendo-se, assim, um novo Sistema de Equações Lineares, com uma incógnita a menos. Repete-se o processo até que se obtenha uma equação que dependa apenas de uma incógnita. A partir da determinação desta incógnita se for possível, substitui-se seu valor nas equações que dela dependam, o que possibilita a determinação das demais incógnitas.

Resolvendo o (*problema 1* da seção 1.1.3) passo a passo sistema pelo método da substituição, assim dado o sistema:

$$S_1 \begin{cases} x + y = 32 \\ 12x + 10y = 344 \end{cases}$$

1º Passo: Podemos escolher a equação $x + y = 32$ e isolar a incógnita x . Assim temos:

$$\begin{aligned}
 x + y &= 32 \quad \text{somando } (-y) \text{ em ambos os lados} \\
 x + y - y &= 32 - y \\
 x &= 32 - y
 \end{aligned}$$

2º Passo: substituímos x por $(32 - y)$ na equação $12x + 10y = 344$, temos:

$$\begin{aligned}
 12x + 10y &= 344 \Rightarrow \\
 12(32 - y) + 10y &= 344 \Rightarrow \\
 384 - 12y + 10y &= 344 \Rightarrow \\
 -2y &= -40 \Rightarrow \\
 y &= \frac{-40}{-2} \Rightarrow y = 20
 \end{aligned}$$

3º Passo: Substituímos $y = 20$ na equação $x + y = 32$ encontramos o valor de x :

$$\begin{aligned}
 x + y &= 32 \Rightarrow \\
 x + 20 &= 32 \Rightarrow \\
 x &= 32 - 20 \Rightarrow \\
 x &= 12
 \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado $(12, 20)$, portanto, 12 equipes de handebol participaram da competição.

Resolveremos a seguir o (*problema 2 da seção 1.1.3*) passo a passo pelo método da substituição:

Nomearemos as equações do sistema como I, II e III respectivamente,

$$S_2 \begin{cases} 2x + y + z = 23(I) \\ 5x + 3y + z = 57(II) \\ 4x + 3y + 3z = 53(III) \end{cases}$$

1º Passo: Escolher uma equação e isolar uma incógnita, escolhendo x na equação I, em função das outras duas incógnitas, em seguida substituí-la nas outras equações, como segue;

$$(I): 2x + y + z = 23 \Rightarrow x = \frac{23 - y - z}{2}$$

Substituindo x nas equações (II) e (III) daí vem,

$$\begin{cases} 5\left(\frac{23-y-3}{2}\right) + 3y + z = 57 \\ 4\left(\frac{23-y-3}{2}\right) + 3y + 3z = 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 3z = -1 \\ y + z = 7 \end{cases}$$

Temos então um novo Sistema Linear agora (2x2).

2º Passo: Escolher uma equação do no sistema e isolar uma incógnita, isolando y na segunda equação e substituindo na primeira equação temos,

$$\Rightarrow y + z = 7 \Rightarrow y = 7 - z$$

Têm-se,

$$\Rightarrow 7 - z - 3z = -1 \Rightarrow -4z = -8 \Rightarrow z = 2$$

3º Passo: Substituir o valor encontrado para z na equação, assim temos,

$$\Rightarrow y + z = 7 \Rightarrow y + 2 = 7 \Rightarrow y = 5$$

4º passo: Substituir os valores encontrados para y e z na equação (I), encontrando o valor de x:

$$(I): 2x + y + z = 23 \therefore$$

$$2x + 5 + 2 = 23 \therefore$$

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

Logo o conjunto solução do sistema é $\{(8,5,2)\}$, portanto os valores da medalhas de ouro, prata e bronze são respectivamente (8,5,2).

1.2.2 Método de Escalonamento

O método de Escalonamento também conhecido como eliminação gaussiana, é um método para classificar, resolver e discutir sistemas lineares de quaisquer ordens tem-se, que dado um Sistema Linear S, o objetivo é encontrar um sistema equivalente S', "triangular"[6].

Em outras palavras dizemos que um Sistema Linear (S) esta escalonado quando em cada uma de suas equações, o primeiro elemento não-nulo está situado

à esquerda do primeiro elemento não-nulo da equação seguinte. Além disso, equação com todos os elementos nulos devem estar abaixo de todas as outras.

É um exemplo de sistemas escalonado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z + t = 9 \\ 4z + 5t = 10 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z + t = 9 \\ 0y + 4z + 5t = 10 \\ 0z + 0t = 0 \\ 0t = 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo o (*problema 1* da seção 1.1.3) pelo método de escalonamento passo a passo como segue abaixo:

$$S_1 \left\{ \begin{array}{l} x + y = 32 \quad (I) \\ 12x + 10y = 344 \quad (II) \end{array} \right.$$

1º Passo: Eliminar o termo a_2 da equação II de S_1 , fazendo a equação II uma combinação de I e II, multiplicando I por (-12) e somando com a equação II, teremos assim um sistema equivalente a S_1 ,

$$S'_1 \left\{ \begin{array}{l} x + y = 32 \\ 0x - 2y = -40 \end{array} \right.$$

2º Passo: Da equação II de S'_1 temos $-2y = -40 \Rightarrow y = 20$, substituindo y na equação I de S'_1 teremos assim que $x + 20 = 32 \Rightarrow x = 12$, logo temos que a solução de S_1 é o par ordenado $(12, 20)$, portanto, 12 equipes de handebol participaram da competição.

Resolveremos novamente o (*problema 2 da seção 1.1.3*) agora passo a passo pelo método do escalonamento assim temos:

$$S_2 \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 23 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{array} \right.$$

1ºPasso: Eliminar os termos a_2 e a_3 , das equações I e II respectivamente. Para isso, substituiremos a equação II por uma combinação entre as equações I e II, e a equação III por uma combinação entre as equações I e III, faremos $II = 5I - 2II$ e $III = -2I + III$, assim temos um novo sistema:

$$S'_2: \begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ -y + 3z = 1 \\ y + z = 7 \end{cases}$$

2º Passo: Eliminar o termo b_3 da equação III do sistema S' , substituiremos equação III por uma combinação das equações II e III, faremos $III = II + III$. Logo temos uma nova matriz de forma triangular;

$$S'_2: \begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ -y + 3z = 1 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

3º Passo: Resolver o sistema S'' , da ultima equação de S'' temos $4z = 8 \Rightarrow z = 2$, substituindo $z = 2$ na segunda equação II de S'' temos,

$$\begin{aligned} -y + 3z = 1 &\Rightarrow -y + (3 \cdot 2) = 1 \Rightarrow \\ -y = -5 &\Rightarrow y = 5 \end{aligned}$$

Substituindo os valores de y e z na primeira equação permite encontrarmos o valor de x , assim,

$$2x + y + z = 23 \Rightarrow 2x + 5 + 2 = 23 \Rightarrow x = 8$$

De onde se conclui que o sistema admite como conjunto solução o terno ordenado $\{(8,5,2)\}$, portanto os valores das medalhas de ouro, prata e bronze são respectivamente $(8,5,2)$.

Algumas considerações importantes para classificar um sistema linear escalonado observando a última linha.

Podemos ter as seguintes situações na última linha:

- Uma equação do linear do 1º grau com uma incógnita, por exemplo, $(3z = 6; w = 2; 2z = 0, \dots)$, neste caso temos que o sistema é SPD;
- Uma igualdade sem incógnitas que é verdadeira, como por exemplo, $(1 = 1; 0 = 0; 5 = 5, \dots)$ neste caso o sistema é SPI;

- Uma igualdade sem incógnitas que é falsa, como por exemplo, $(0=1; 0=9; 1=5, \dots)$ neste caso o sistema é SI;

Note que um sistema escalonado só não tem os coeficientes da última linha nulos se ele for possível e determinado.

CAPITULO 2

MATRIZES E DETERMINANTES APLICADOS AOS SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo abordaremos a associação dos sistemas lineares a matrizes e determinantes, estudando as características fundamentais da Regra de Cramer e a discussão dos sistemas lineares por determinantes. Usamos como principais referências IEZZI e HAZZAN [5] e LIMA [7].

2. Matriz

Definição: Matriz $m \times n$ é uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais).

De maneira geral representa-se uma matriz A do tipo $m \times n$ por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde os dois índices que acompanham os elementos indicam, respectivamente, a linha e as colunas ocupadas pelos elementos.

Ainda pode ser abreviada como, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, onde i e j representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa, $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 2 \times 3; \text{ (Lê-se, matriz 2 por três, ou seja, uma}$$

matriz com duas linhas e três colunas)

Entre as matrizes há alguns tipos especiais entre eles está a *Matriz quadrada*, definida como toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, com o mesmo número de linhas e colunas. Neste caso, dizemos que a matriz é de ordem n .

Numa matriz quadrada de ordem n os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ isto é, os elementos a_{ij} com $(i = j)$, formam a *diagonal principal* da matriz.

A outra diagonal da matriz quadrada formada pelos elementos a_{ij} com $(i + j = n + 1)$ denomina-se *diagonal secundária*.

Neste trabalho omitiremos as operações usuais de matrizes, que podem ser encontradas nas bibliografias [4],[8]e [9].

2.1 Determinante

Determinante é um número real que está associado a uma matriz quadrada, utiliza-se os determinantes no cálculo da matriz inversa, resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares; cálculo da área de um triângulo, quando são conhecidas as coordenadas dos vértices entre outras.

Seja $M = [a_{ij}]_{n \times n}$, denotaremos o determinante da matriz M de ordem n por

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dada uma matriz quadrada de ordem 1, isto é, $M = [a_{11}]$, chamamos de determinante associado à matriz M o número real a_{11} .

Notação: $\det M$ ou $|a_{11}| = a_{11}$

Exemplo:

$$M_1 = [3] \Rightarrow \det M_1 = 3$$

Determinante de segunda ordem

Dada a matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de 2ª ordem, por definição, temos que o determinante associado a essa matriz, ou seja, o determinante de 2ª ordem é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21})$$

Assim $\det M = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21})$ é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo: Sendo a matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Logo: $\det M = -2$

Existem alguns métodos para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem n , explanaremos a seguir sobre a Regra de Sarrus dispositivo prático utilizado para o caso das matrizes de ordem 3.

Consideremos a matriz M genérica de ordem n , $M: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o

determinante é obtido pela regra de Sarrus da seguinte forma.

1º passo: repetem-se as duas primeiras colunas da matriz ao lado da terceira coluna, como segue,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2º passo: calcula-se o produto dos elementos da diagonal principal e suas paralelas estes procedido do sinal positivo $= +(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$ e o produto da diagonal secundaria e suas paralelas procedidas do sinal negativo

$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$ adicionando as duas expressões temos que o,
 $\det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

2.3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR

Além da forma usual de um sistema linear, vista anteriormente, podemos escrevê-lo na sua forma matricial, separando seus coeficientes das incógnitas e dos termos independentes.

Recorrendo a definição de produto de matrizes, notemos que um sistema,

$$(S_n) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial:

$$S_n = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_B$$

Aplicando o produto nas matrizes A e X igualando com matriz B obtemos o sistema (S_n) dado.

Por exemplo, o problema 2 da seção 1.1.3, um sistema linear com três equações e três incógnitas pode ser escrito com as seguintes matrizes

$$S_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 23 \\ 57 \\ 53 \end{bmatrix}}_B$$

Um sistema Linear pode ainda ser associado a duas matrizes, a matriz principal que é composta pelos coeficientes das equações do sistema a matriz

aumentada formada pelos coeficientes e os termos independentes, por exemplo, um

o sistema com de três equações com três incógnitas $S: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, temos

as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} (m) \text{ e } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} (M)$$

Sendo m a matriz principal e M a matriz aumentada[8].

2.4 Regra de Cramer

Um das aplicações mais utilizada dos determinantes é a Regra de Cramer, método frequentemente utilizado no Ensino Médio para resolver Sistemas de equações Lineares.

Consideremos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, nessas condições A é uma matriz quadrada; $D = \det(A)$.

Definição:

Seja S um sistema linear em que o número de equações é igual ao de incógnitas. Seja $D = \det(A)$. $D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Em que D_i é o determinante da matriz obtida de A , substituindo-se a i -ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações.

Seja o sistema linear $S = \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + y + 5z = 8 \end{cases}$, resolvendo-o pela a Regra de

Cramer

1º passo: Calcular o Determinante da matriz (A) dos Coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ pela regra de Sarrus}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= -(-1) \times (-1) \times (-1) - 2 \times 2 \times 5 - 1 \times 3 \times 1 + 1 \times (-1) \times 5 + 2 \times 3 \times (-1) + (-1) \times 2 \times 1 \\ &= -(-1) - (+20) - (+3) + (-5) + (-6) + (-2) \\ &= -35 \end{aligned}$$

Temos que o $\det(A) \neq 0$, logo S é um sistema **possível determinado**.

2º passo: Calcular o Determinante da matriz (A_x) , ou seja, substitui-se a 1ª coluna da matriz A pela matriz coluna dos termos independentes de S :

$$A_x = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_x) =$$

$$\begin{aligned} &= -3 \times (-1) \times 5 + 2 \times 3 \times 8 + (-1) \times 9 \times 1 - (-1) \times (-1) \times 8 - (-3) \times 3 \times 1 - 2 \times 9 \times 5 \\ &= 15 + 48 - 9 - 8 + 9 - 90 \\ &= -35 \end{aligned}$$

3º passo: Calcular o Determinante da matriz (A_y) , ou seja, substitui-se a 2ª coluna da matriz A pela matriz coluna dos termos independentes de S :

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_y) =$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times 9 \times 5 + (-3) \times 3 \times (-1) + (-1) \times 2 \times 8 - (-1) \times 9 \times (-1) - 1 \times 3 \times 8 - (-3) \times 2 \times 5 \\ &= 45 + 9 - 16 - 9 - 24 + 30 \\ &= 35 \end{aligned}$$

4º passo: Calcular o Determinante da matriz (A_z) , ou seja, substitui-se a 3ª coluna da matriz A pela matriz coluna dos termos independentes de S :

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_z) =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \times (-1) \times 8 + 2 \times 9 \times (-1) + (-3) \times 2 \times 1 - (-3) \times (-1) \times (-1) - 1 \times 9 \times 1 - 2 \times 2 \times 8 \\
&= -8 - 18 - 6 + 3 - 9 - 32 \\
&= -70
\end{aligned}$$

5º passo: Calcular os respectivos valores das variáveis (x, y, z) utilizando dos determinantes encontrados:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} \Rightarrow \frac{-35}{-35} \Rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} \Rightarrow \frac{35}{-35} \Rightarrow y = -1$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} \Rightarrow \frac{-70}{-35} \Rightarrow z = 2$$

Assim, obtemos o terno ordenado $\{(1, -1, 2)\}$ como o conjunto solução do Sistema Linear S.

Observações:

- A Regra de Cramer só é válida quando o $\det(A) \neq 0$, neste caso temos que o sistema é possível e determinado;
- Caso $\det(A) = 0$ teremos que o sistema será SPI (Sistema Possível e Indeterminado) ou SI (Sistema Impossível)[7].

Pois em ambos os casos o fato pode ocorrer como exemplificaremos abaixo:

Exemplos:

$$\text{O sistema } S_1 \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + 3z = 9 \end{cases} \text{ se resolvermos por outro método temos que é}$$

um sistema **possível e indeterminado** e o conjunto solução é $\{(x, \frac{(3-x)}{2}, 0)\}$ para todo valor de x real.

Pela regra de Cramer teremos $\det(A_{s_1}) = 0$ e $\det(A_x) = 0$, $\det(A_y) = 0$ e $\det(A_z) = 0$

Já o sistema $S_2 \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=4 \end{cases}$ é claro que este sistema não possui

solução, pois $x+y+z=1$ então a equação $3x+3y+3z$ deve ser igual a 3 não a 4 logo o sistema é **impossível**. Mas a regra de Cramer nos oferece $\det(A_{S_2})=0$ e $\det(A_x)=0$, $\det(A_y)=0$ e $\det(A_z)=0$.

- Quando $\det(A) = 0$, e algum dos $D_i \neq 0$, então o sistema é impossível[7].

O sistema $S = \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+4y-2z=10 \\ x+2y+z=9 \end{cases}$ exemplifica este caso.

Pela regra de Cramer teremos o determinante da matriz A do sistema S, isto é, $\det(A_S)=0$ e quanto aos D_i $\det(A_x)=-16$, $\det(A_y)=0$ e $\det(A_z)=0$, portanto o sistema dado é **impossível**.

2.5 Discursão de um Sistema Linear por Determinantes

Considerando o Sistema Linear a seguir:

$$\begin{cases} kx+3ky=0 \\ 2x+ky=4 \end{cases}$$

As variáveis do sistema são **x** e **y**, enquanto **k** é a constante.

- Inicialmente encontraremos o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{cases} kx+3ky=0 \\ 2x+ky=4 \end{cases}, \text{ a matriz dos Coeficientes é } A = \begin{bmatrix} k & 3k \\ 2 & k \end{bmatrix}$$

Determinante da matriz A:

$$\begin{bmatrix} k & 3k \\ 2 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = k \times k - 2 \times 3k \Rightarrow \det A = k^2 - 6k$$

- Analisaremos para quais valores de **k** o Sistema é possível e determinado:

Sabemos que a condição para o sistema seja *possível e determinado* é que o

determinante da matriz A deve ser diferente de zero, Daí:

$$k^2 - 6k \neq 0 \Rightarrow k \times (k - 6) \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ e \\ k - 6 \neq 0 \Rightarrow k \neq 6 \end{cases}$$

Portanto, se $k \neq 0$ e $k \neq 6$, então o sistema é *possível e determinado*.

• Agora, vamos analisar o que acontece quando o determinante da matriz A é igual a zero.

$$k^2 - 6k = 0 \Rightarrow k \times (k - 6) \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ ou \\ k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6 \end{cases}$$

Ou seja, para que o determinante seja igual à zero é necessário que tenhamos $k = 0$ ou $k = 6$.

Analisaremos agora como será classificado o sistema, quando tivermos $k = 0$, para encontrar a resposta, devemos substituir **k** por **zero** no sistema dado. Teremos:

$$\begin{cases} kx + 3ky = 0 \\ 2x + ky = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot x + 3 \cdot 0 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x + 0 \cdot y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

O valor de **x** é igual a 2, e como o valor de **y** não ficou definido, então ele pode assumir qualquer valor. E desta forma, o sistema torna-se *possível e indeterminado*.

Analisaremos agora a classificação do sistema, quando tivermos $k = 6$.

Substituiremos **k** por **6** no sistema. E teremos:

$$\begin{cases} kx + 3ky = 0 \\ 2x + ky = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \cdot x + 3 \cdot 6 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x + 6 \cdot y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 18y = 0 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

Simplificando cada uma das equações do sistema: dividindo por 6 a primeira equação e por 2 a segunda equação, obteremos:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Observe que o primeiro membro das equações do sistema são iguais. Mas os valores dos termos independentes a direita das igualdades são diferentes ($0 \neq 2$), então o sistema é classificado como *impossível*.

CAPITULO 3

SISTEMAS LINEARES: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Neste capítulo apresentamos de forma introdutiva o software Geogebra, em seguida abordaremos como se pode utilizá-lo para a representação geométrica dos sistemas lineares 2×2 e 3×3 . Usamos como principais referências LIMA [7] e HOHENWARTER [4].

3. GEOGEBRA

O software Geogebra teve sua primeira versão desenvolvida na Áustria no final de 2001, na Universidade de Salzburg pelo austríaco Markus Hohenwarter, que desde então tem liderado o desenvolvimento do aplicativo. O objetivo principal do Geogebra é proporcionar o estudo dinamizado da geometria e da álgebra em diferentes modalidades de ensino de matemática, de modo a facilitar a investigação e o aprendizado de diversos conceitos matemáticos.

É um software livre, que pode encontrado com facilidade nos diversos sites de busca ou no endereço www.geogebra.org, é escrito em Java, esta disponível em múltiplas plataformas.

Utilizaremos neste estudo a versão 5.0 do geogebra, a escolha é porque nesta ultima versão disponibilizada o software traz como novidade a janela 3D, que possibilita o estudo no espaço tridimensional, além da janela 2D das versões anteriores.

3.1 Algumas ferramentas e recursos do Geogebra

A seguir faremos algumas descrições de ferramentas e recursos do geogebra na qual serão importantes para o estudo que faremos a seguir sobre a interpretação geométrica dos Sistemas Lineares.

Tela de trabalho do Geogebra é composta por uma barra de menus contendo as seguintes funcionalidades: arquivo, editar, exibir, opções, ferramentas, janela e ajuda, uma barra de ferramentas contendo 12 ícones, uma janela de álgebra, uma

janela de visualização gráfica com o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, um campo de entrada de comandos e um Menu com as opções de disposições da janela de visualização: álgebra, Geometria, planilha de calculos, janela CAS, janela 3D com plano cartesiano $\mathbb{R}^3$ e probabilidade, ver figura 1.

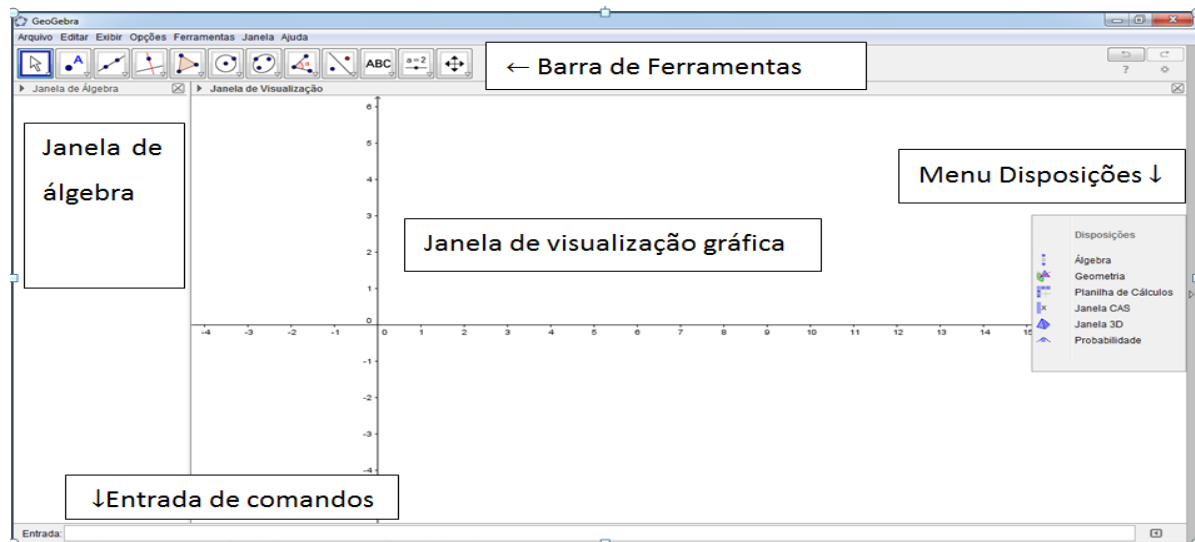


Figura 1- interface da janela de álgebra

O Primeiro ícone da barra de ferramentas, considerando o sentido esquerdo para direita, tem como recursos Mover, girar em torno de um ponto, isto é, seleciona e move objetos contidos nas construções, ver na figura 2.

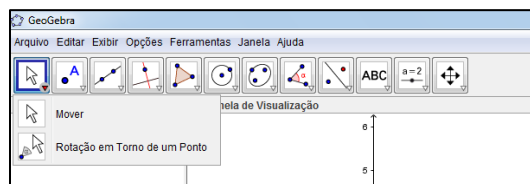


Figura 2- ícone Mover objetos

O segundo ícone apresenta os seguintes recursos Ponto, Ponto em objeto, Vincular/ Desvincular Ponto, Interseção de dois objetos, Ponto médio ou centro, ver figura 3, que possibilita criar um ponto qualquer sobre um objeto, determina o ponto médio entre dois pontos entre outras.

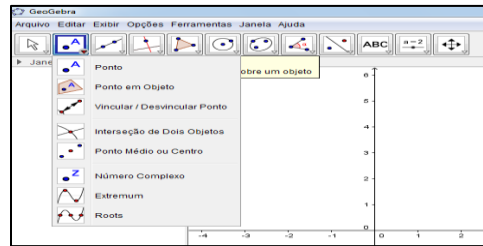


Figura 3- Ícone Novo Ponto

No último ícone da barra ferramentas, temos recursos que nos possibilita mover a Janela de Visualização, ampliar ou reduzir os objetos representados, exibir ou esconder os objetos e rótulos construídos, ilustrado na figura 4.

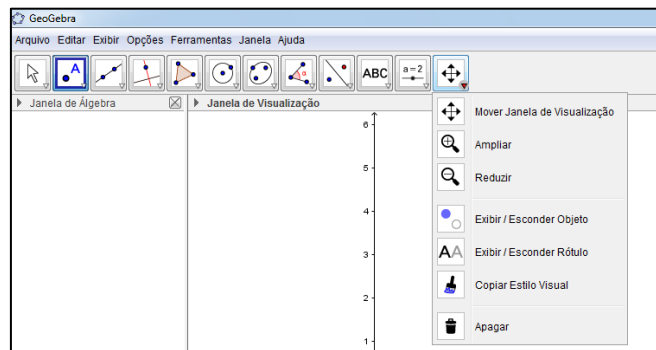


Figura 4- Mover Janela de Visualização

A Janela 3D do Geogebra traz para este software a possibilidade de trabalharmos no espaço de três dimensões a interface segue na figura 5, temos na janela de visualização, os eixos do espaço $\mathbb{R}^3$ e um plano, contido na caixa de clipping, como podemos observar na figura 5:

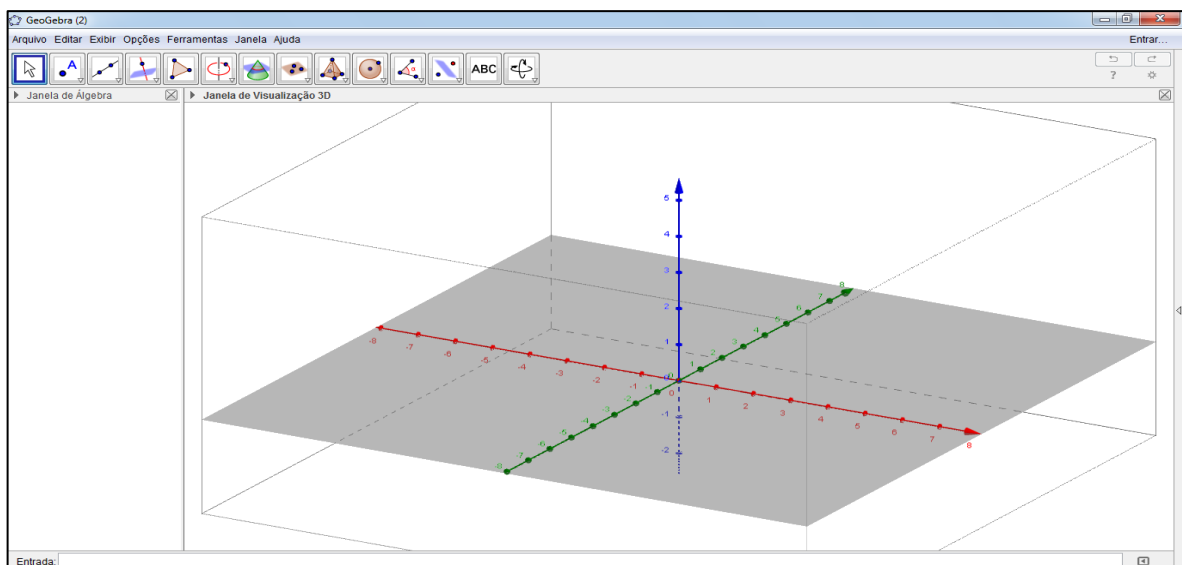


Figura 5- Interface Janela 3D

Na barra de ferramentas tem-se a disponibilidade de novos recursos, destacaremos aqui a interseção entre duas superfícies, que possibilita obter, por exemplo, ponto ou equação entre dois objetos construídos ver figura 6.

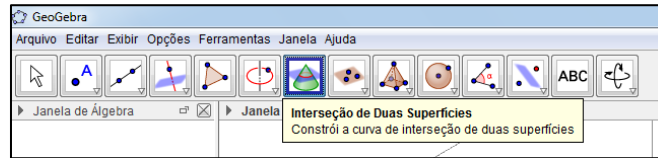


Figura 6- Ícone Interseção de duas Superfícies

A figura 7 ilustra a interface da janela 3D alterada, através do menu “exibir – layout” podemos desativar e habilitar recursos, temos a janela de visualização contendo apenas os eixos do espaço $\mathbb{R}^3$:

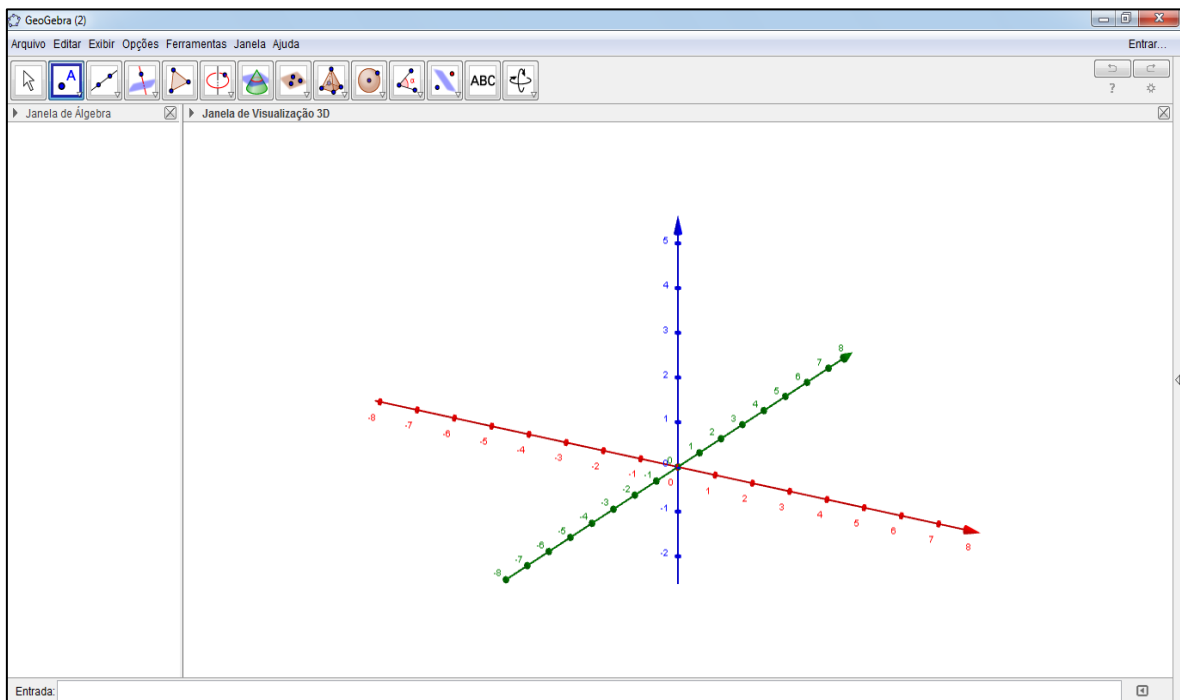


Figura 7- Eixo 3 Dimensões

O manual completo do software Geogebra esta disponível no link https://app.geogebra.org/help/docuPT_PT.pdf, e no link <http://www.geogebra.org> está disponível diversos materiais de ajuda. O Instituto Geogebra no Brasil disponibiliza em seu site www.geogebra.im-uff.mat.br/ diversos tutoriais e pesquisas aplicada a educação matematica desenvolvida com a utilização do Geogebra.

3.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 2X2 E 3X3 NO GEOGEBRA

Nessa etapa do trabalho faremos a descrição do estudo das interpretações geométrica dos Sistemas lineares 2x2 e 3x3 com o auxílio do software Geogebra, descrevendo passo a passo a discussão de cada caso.

3.2.1 Interpretação geométrica do sistema linear (2x2)

Como definimos anteriormente a solução de um Sistema linear quando possível é formada por ênupla ordenadas, isto é, no caso dos sistemas lineares (2 x 2, a solução são pares ordenados (x, y) e para os Sistemas Lineares 3x3 ternos ordenados (x, y, z) .

Quanto aos sistemas lineares 2x2 temos que cada equação representa uma reta no plano cartesiano, e a classificação quanto a soluções dos Sistemas Lineares, ou seja, SPD, SPI e SI está ligada as posições relativas das retas formadas pelas equações do Sistema.

Sabemos, entretanto que as posições relativas de duas retas no plano são concorrentes, paralelas e coincidentes analisaremos a seguir cada caso.

1º caso: **Concorrentes**, neste caso há somente um ponto de interseção entre as restas consequentemente.

Seja o sistema $S: \begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ um exemplo desse caso

Estudando este sistema no Geogebra, adiciona-se as equações na caixa de entrada uma a uma para que seja analisada cada equação separadamente, assim temos ao adicionarmos a primeira equação $3x - y = 10$ obtemos o seguinte o gráfico. (ver figura 8)

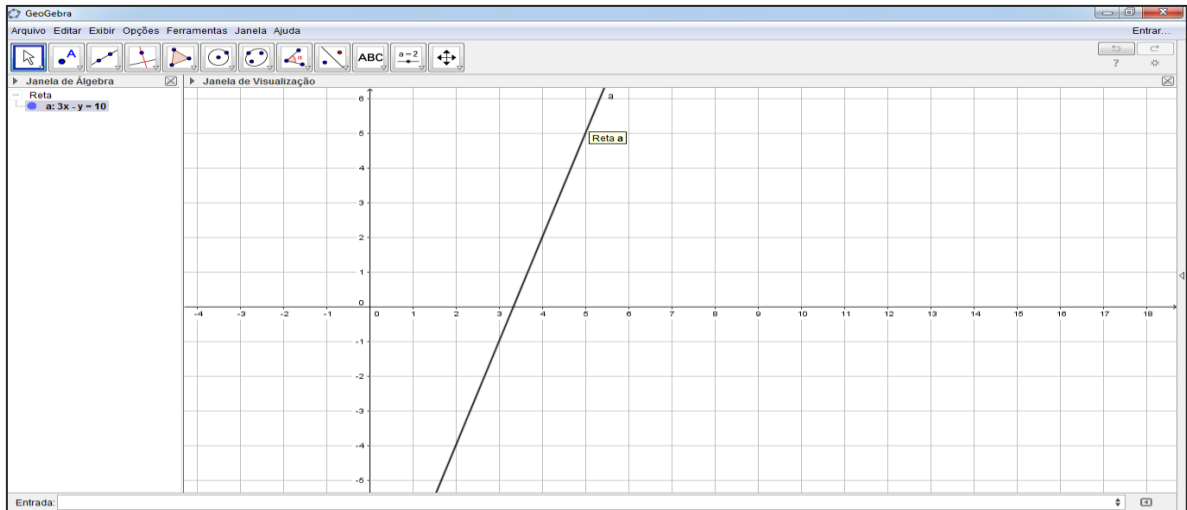


Figura 8- Representação da reta a

Note que além do gráfico na janela de visualização, temos na janela de álgebra a equação da reta neste caso $r: 3x - y = 10$ optamos neste caso em exibir o recurso malha que é adicionado recorrendo o menu exibir- layout- preferências- malha, seguindo com o estudo selecionando o recurso Novo Ponto na barra de ferramentas, podemos com o mouse marcar os pontos que pertence à reta, como podemos ver na figura 9.

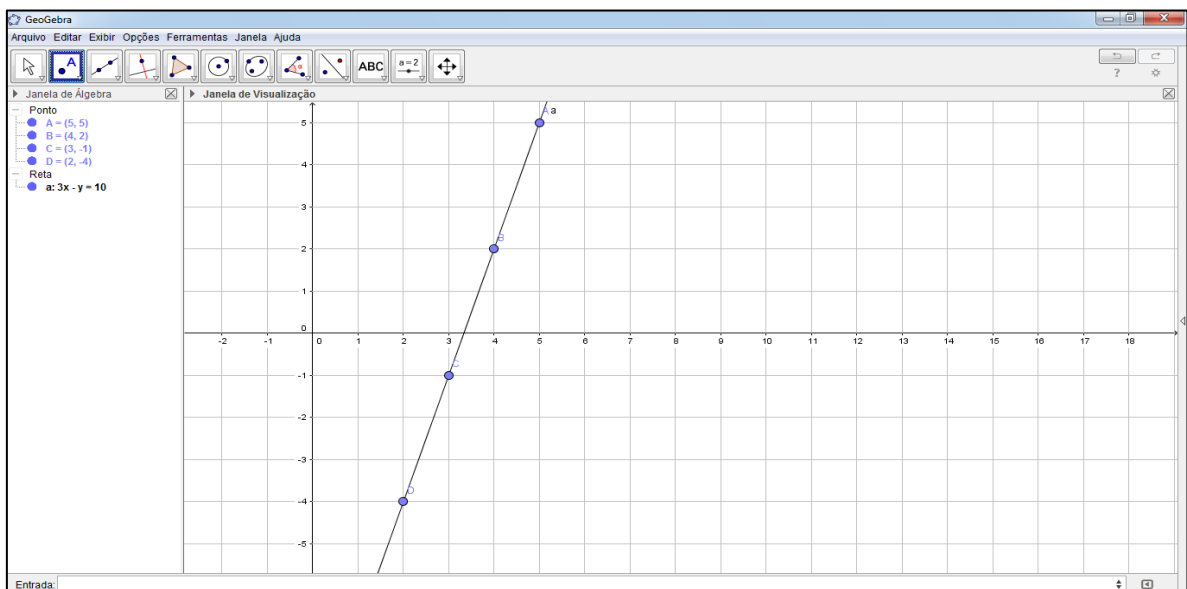


Figura 9- Representação dos pontos da reta a

Observe que as coordenadas dos pontos pertencentes à reta aparece na janela de álgebra, esses pontos são soluções da equação $a: 3x - y = 10$.

Inserindo agora a segunda equação do sistema $2x + 5y = 1$, na mesma janela visualização que a equação anterior, após adicionada repetindo os mesmos passos equação anterior, ou seja, usar o a ferramenta Novo Ponto, obtemos os pontos pertencentes a reta (*b*), como mostra a figura 10.

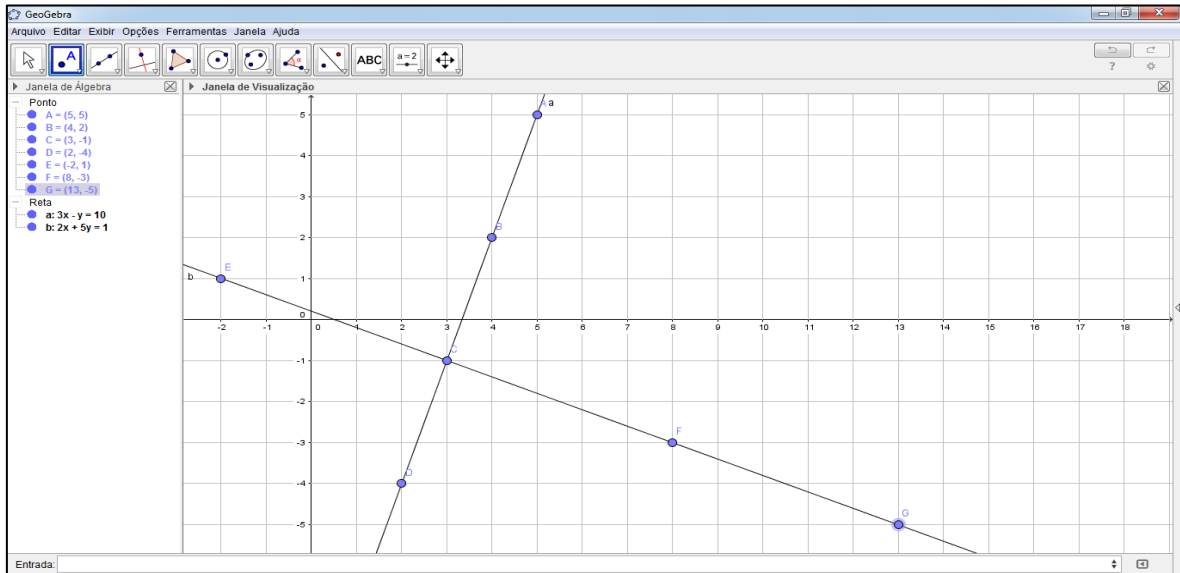


Figura 10- Representação da interseção reta a e b

Nota-se que o ponto C (3,-1) pertence tanto a reta *a* como a reta *b*, logo as retas são concorrentes neste ponto, podemos ainda utilizar o recurso Ponto de intercessão, na barra de ferramentas seleciona o ícone Ponto- intercessão de dois objetos, clicando na reta a em seguida na reta b obtém-se o ponto de intercessão das reta a e b, neste caso o ponto H(3,-1) coincidente com o ponto C, único ponto de intercessão das retas. Como mostra a figura 11.

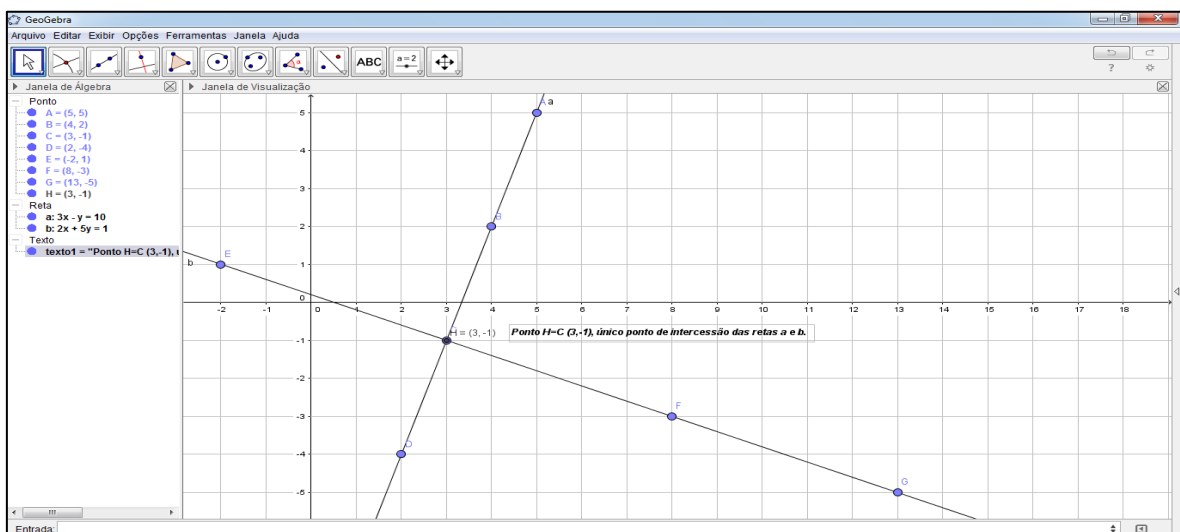


Figura 11- Representação do ponto de interseção das retas a e b

Portanto o Sistema Linear (S) tem uma única solução o par ordenado (3,-1), portanto é (SPD) Sistema Possível e determinado.

2º Caso: **Coincidentes**, neste caso existe uma infinidade de pontos na interseção das retas.

Um exemplo deste caso é o sistema $S \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$ utilizando o Geogebra temos:

1º passo: Escolhemos a equação $x - 3y = 4$ e a inserimos na caixa de entrada do software de imediato na janela de visualização gráfica, teremos a reta a ver figura 12.

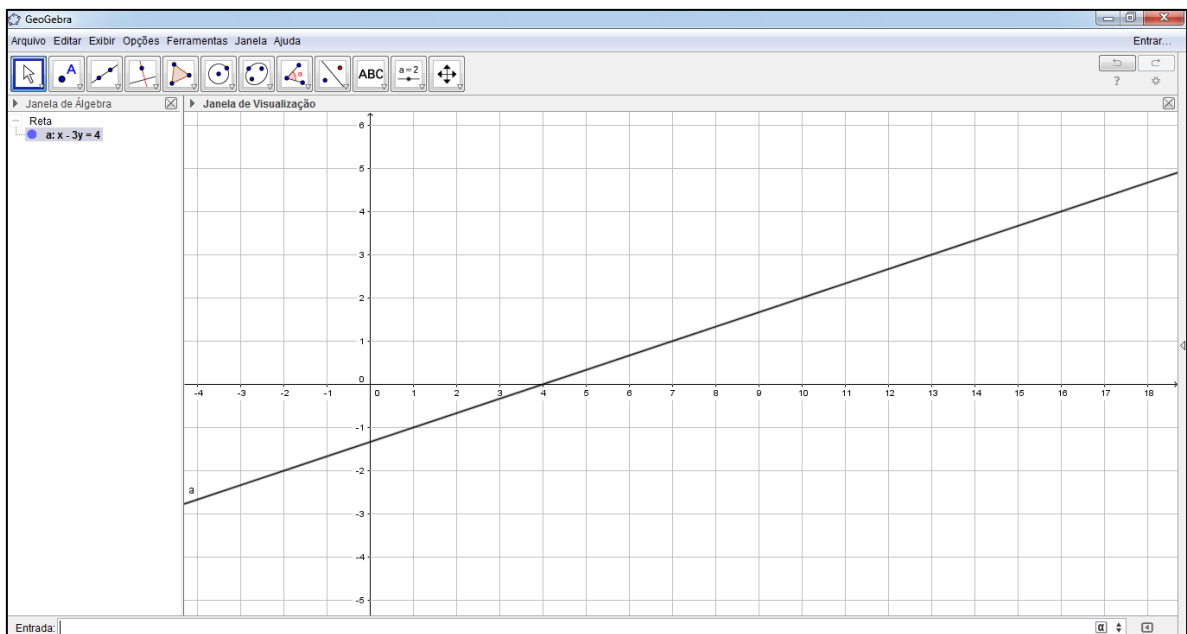


Figura 12-Representação da reta a

Observa-se que na janela de Álgebra temos a equação inserida, neste caso o software a nomeia de reta $a: x - 3y = 4$, podemos agora selecionar o recurso Novo Ponto na barra de ferramentas, e determinarmos alguns pontos pertencentes a reta, optaremos a exibir os pontos apenas com números inteiros, ver figura 13.

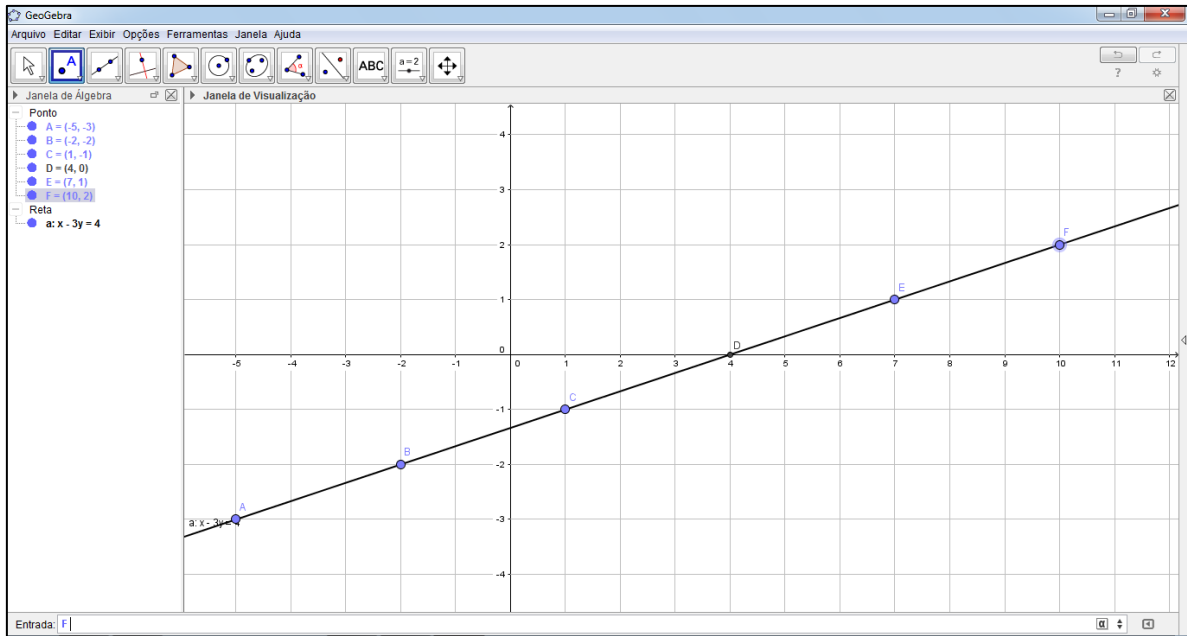


Figura 13- Representação dos pontos da reta a

2º Passo: Inserimos agora a segunda equação do sistema na caixa de entrada, na mesma janela da primeira equação então teremos a seguinte representação gráfica ver figura 14.

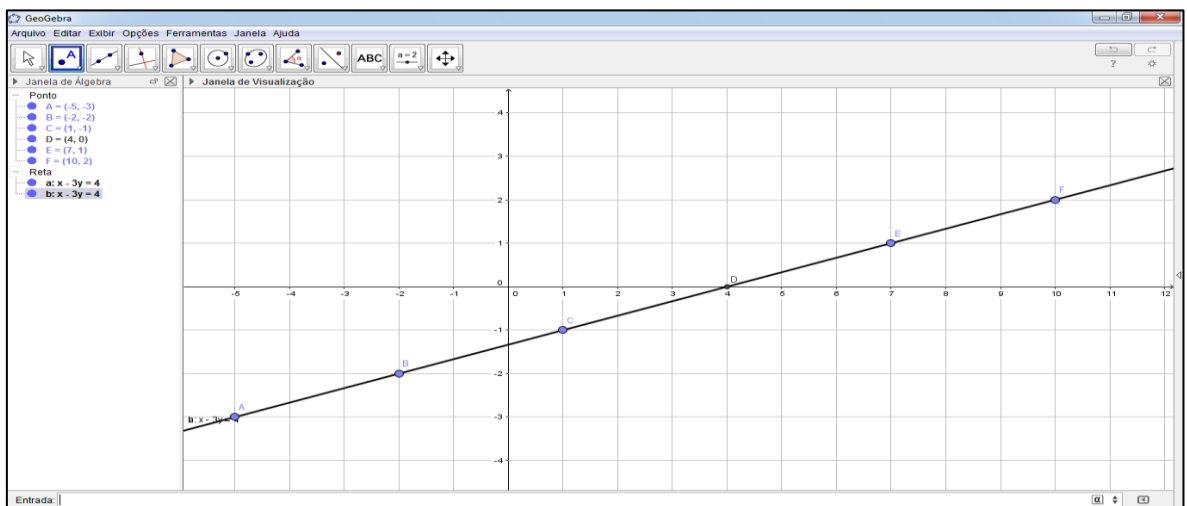


Figura 14- Representação das Retas a e b coincidentes

Nota-se a uma nova reta (b) coincide com a reta (a), na Janela de Álgebra temos agora uma reta b e o Software a reconhece com idêntica primeira equação $a: x - 3y = 4$ e exibe $b: x - 3y = 4$, isso acontece porque as equação da retas são múltiplas, também é fácil verificar que todos os pontos da reta a também pertence a reta b, para melhor visualização podemos clicar com o botão direito do mouse em

cima da equação da reta b, ir na opção propriedades e em seguida cor, escolhendo uma nova cor diferenciarmos as retas, escolhemos aqui a cor vermelha, ver figura 15.

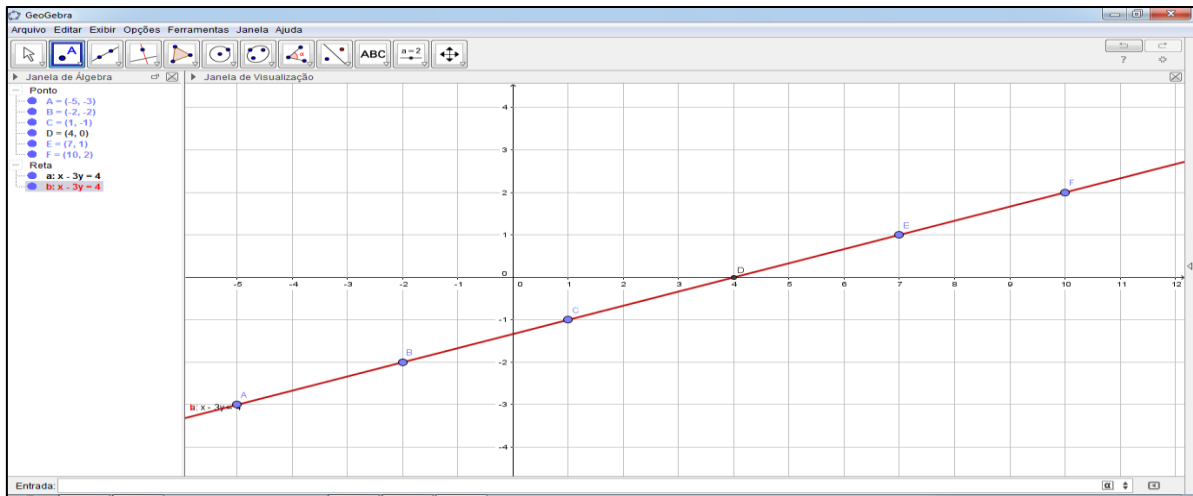


Figura 15- Representação das retas a e b

Observa-se que há uma alteração na cor da reta, nesse caso uma cor se sobressai sobre a outra, mas com o botão direito mouse clicando em cima das equações pode escolhendo a opção Exibir Objetos, que nos possibilita ocultar e exibir representação gráfica da equação, optando a equação da reta (a) e realizando esse procedimento teremos a exibição gráfica apenas da reta (b) ver figura 16.

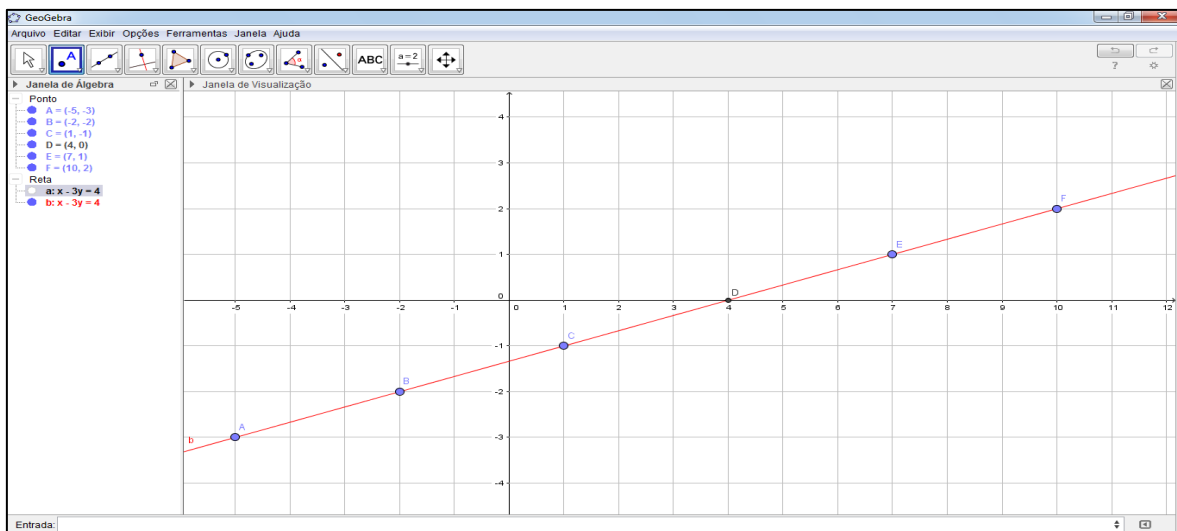


Figura 16- Representação da reta b

Temos então na Janela de Visualização a reta da cor vermelha que tínhamos definido anteriormente, e que os pontos pertencentes às retas não se altera, se

tivéssemos escolhido a equação da reta (b) e ocultado a representação gráfica da mesma, teríamos na janela de visualização a representação gráfica da reta (a), observe a figura 17.

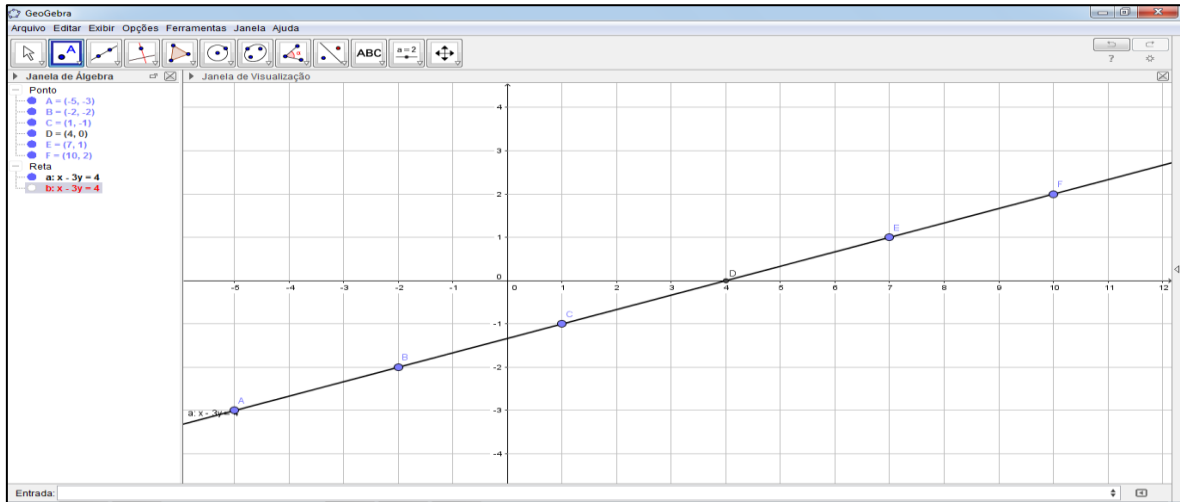


Figura 17- Representação da reta a

Notemos que os pontos continuam inalterados, podemos concluir que qualquer ponto que pertencer à reta (a) também pertencerá a reta (b), logo as retas possuem todos os pontos em comum então são coincidentes, sabemos ainda que uma reta possui uma infinidade de pontos, na verdade é a própria reta, isto é, $a \cap b = r$. Portanto quando isso ocorre o sistema (S) possui infinitas soluções (SPI), esse fato nos garante que o sistema aqui estudado possui uma infinidade de pares ordenado como solução algebricamente eles são do tipo $(x, \frac{4-x}{-3})$, para qualquer valor de x, Portanto o Sistema linear(S) é possível e indeterminado.

3º caso: **Paralelas**, neste caso não há interseção entre as retas, ou seja, não apresentam ponto em comum.

Um exemplo desse caso é o sistema $S_3 \begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

Analisando S_3 no Geogebra, iniciamos inserindo a equação $x - y = 5$ na caixa de entrada de comandos temos a representação gráfico que temos na figura 18

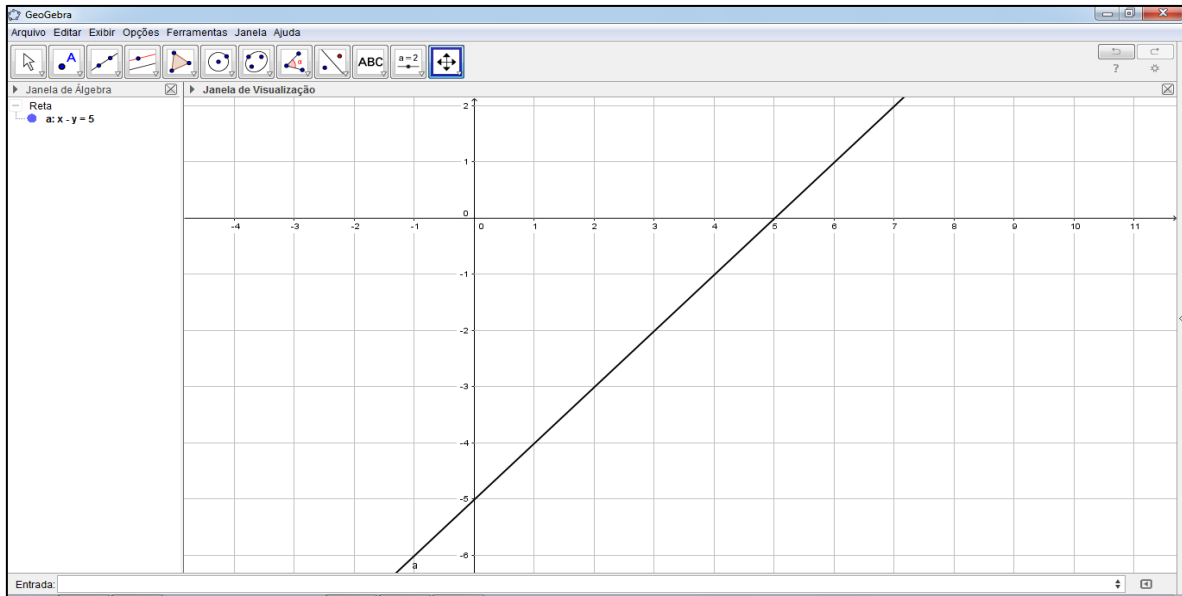


Figura 18- Representação da reta a

Utilizando o recurso Novo Ponto na barra de ferramentas ficará fácil determinar os pontos que satisfaçam à equação da reta a representada na figura, ou seja, as coordenadas desses pontos são soluções da equação da reta a, como podemos observar na figura 19.

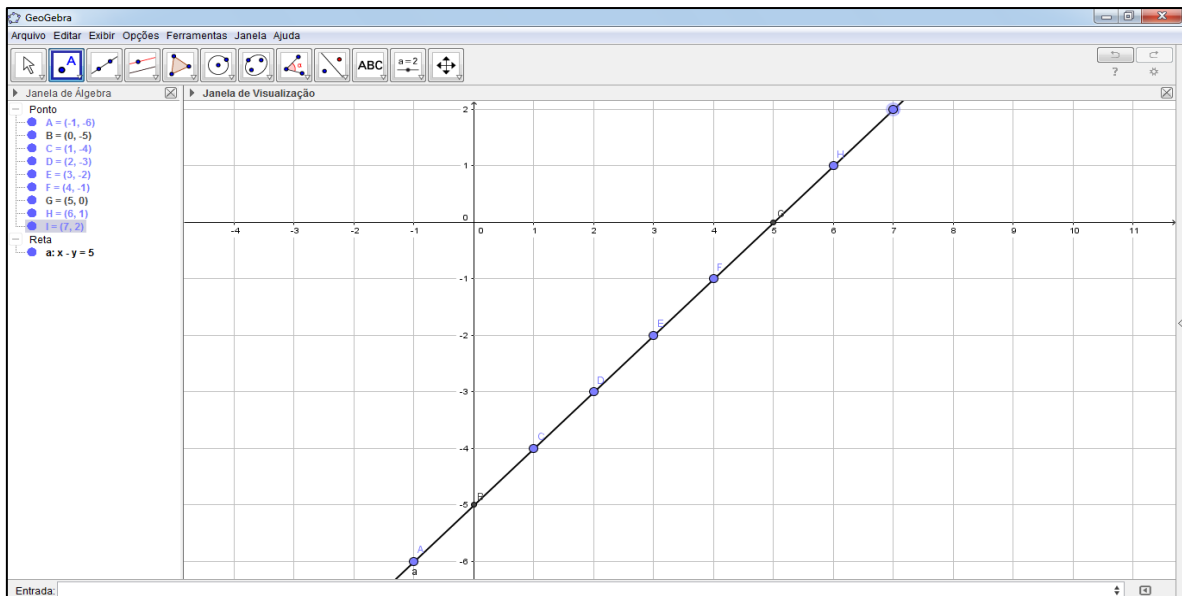


Figura 19- Representação dos pontos da reta a

Inserindo agora a equação $x - y = 2$ na caixa de entrada dos comandos, utilizando a mesma janela da reta anterior, obteremos uma reta b a seguinte representação gráfica que pode ser vista na figura 20.

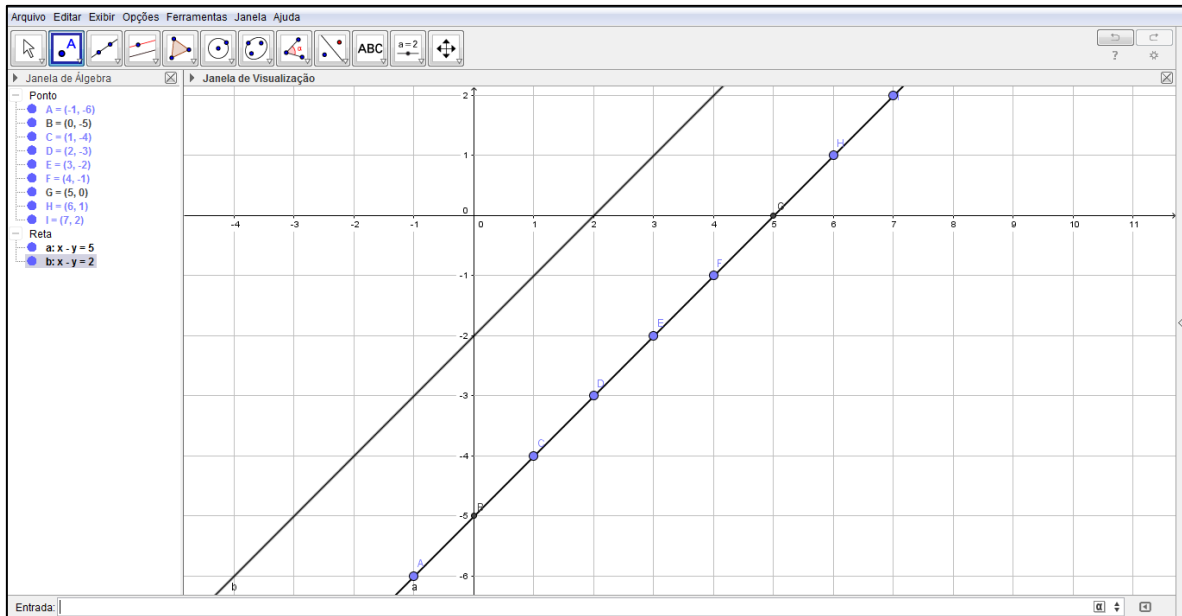


Figura 20- Representação das retas a e b

Para uma melhor visualização podemos alterar a cor da reta (b) clicando na equação com o botão direito do mouse, escolhe a opção propriedades em seguida Cor neste caso usaremos a cor vermelha, e recorrendo ao recurso Novo ponto na barra de ferramenta determinaremos os pontos que satisfaz a equação da reta b , como pode ser visto na figura 21.

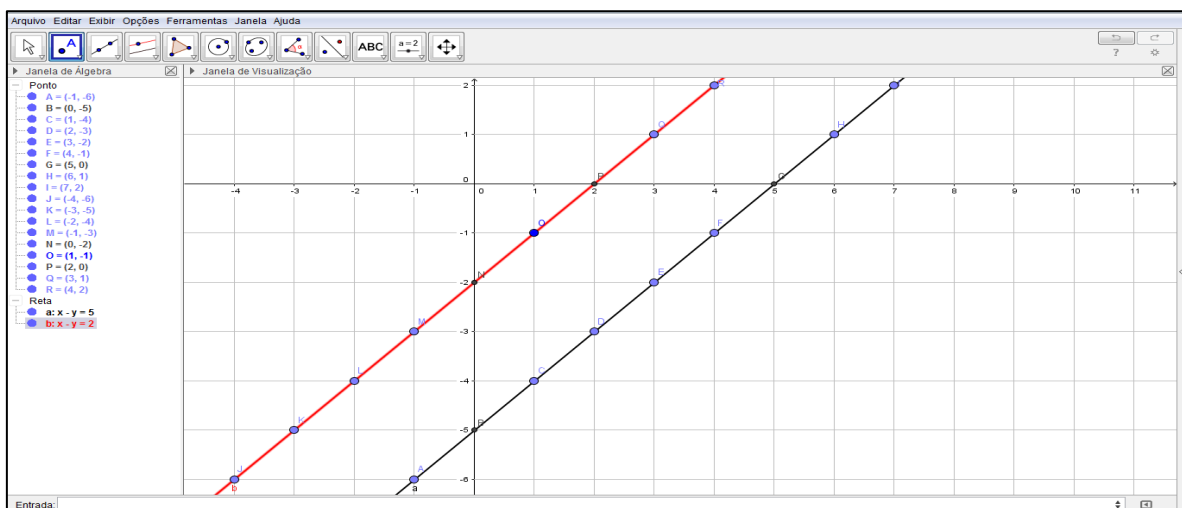


Figura 21- Representação das retas a e b paralelas

Ao observarmos a representação gráfica na janela de visualização na figura e os pontos determinados na janela de álgebra é fácil identificar que todos os pontos

da reta **a** são distinto em relação à reta **b**, logo essas retas não possui pontos de interseção nesse caso as retas são ditas paralelas.

Portanto, o Sistema S é classificado como Sistema impossível, pois não há ponto de Coordenadas (x, y) que satisfaça simultaneamente ambas as equações.

3.2.2 Interpretação geométrica do sistema linear (3x3)

$$\text{Consideremos o sistema } S = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ de três equações com três}$$

incógnitas.

Geometricamente, cada um das equações do sistema define um plano no $\mathbb{R}^3$, ou seja, para o sistema (S) anterior as equações definem os planos π_1, π_2 e π_3 , respectivamente nessa ordem. O terno ordenado (x, y, z) é solução desse sistema quando o ponto $P(x, y, z)$ pertence à intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, ou seja, quando **P** está simultaneamente nos três planos [7].

Os sistemas lineares de três equações e três incógnitas são classificados de três formas SPD, SPI e SI, mas temos oito posições relativas entre esses planos [7]. Para isso, usaremos o Geogebra como recurso, para plotar o gráfico de cada uma das equações determinando essas oito situações diferentes.

Para efeito de notação denominaremos nos casos abaixo cada equação dos sistemas lineares de π_1, π_2 e π_3 , respectivamente nessa ordem.

1º caso: Os três planos coincidem,

$$\text{O Sistema Linear (S}_1\text{)} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \end{cases} \text{ é um exemplo desse caso,}$$

Plotando as equações no Geogebra, inserindo-as na caixa de entrada de comando, uma a uma, na mesma janela, podemos em seguida escolher uma cor para cada plano, para diferenciarmos a representação, obteremos a seguinte representação ver figura 22.

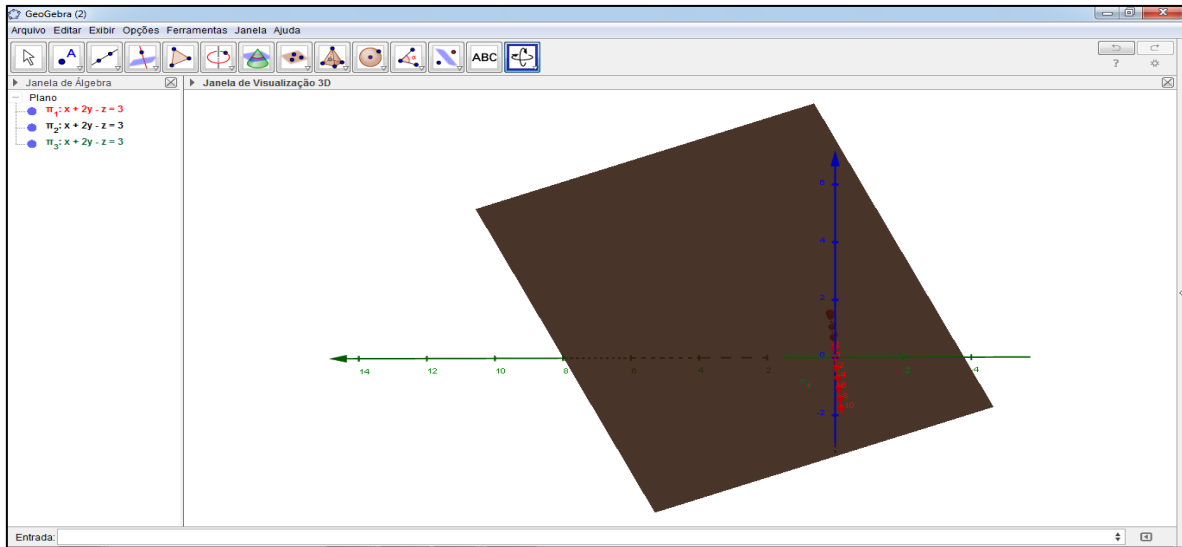


Figura 22- Representação dos 3 planos coincidentes

Como os três planos são coincidentes, na visualização gráfica o software representa um único plano, já a janela gráfica nos oferece uma informação importante, as três equações dos planos são reconhecidas como múltiplas logo temos as equações de $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = x + 2y - z = 3$, isso porque as equações são equivalentes, logo temos quanto a solução do Sistema S_1 que todos os pontos $P(x, y, z) \in \pi_1$ também pertencem π_2 e π_3 e são soluções do sistema, logo neste caso o sistema é **possível e indeterminado (SPI)**, podemos expressar as soluções do sistema como todos os ternos $(x, y, x + 2y - 3)$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ são arbitrários.

2º caso: Dois planos se coincidem e o terceiro é paralelo a eles, ou seja, temos que $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_3 \nparallel \pi_1$.

Consideremos o sistema:

$$S_2 \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 16 \end{cases}$$

Adiciona-se as equações de S no Geogebra, ambas na mesma janela de visualização obteremos a seguinte representação gráfica ver figura 23.

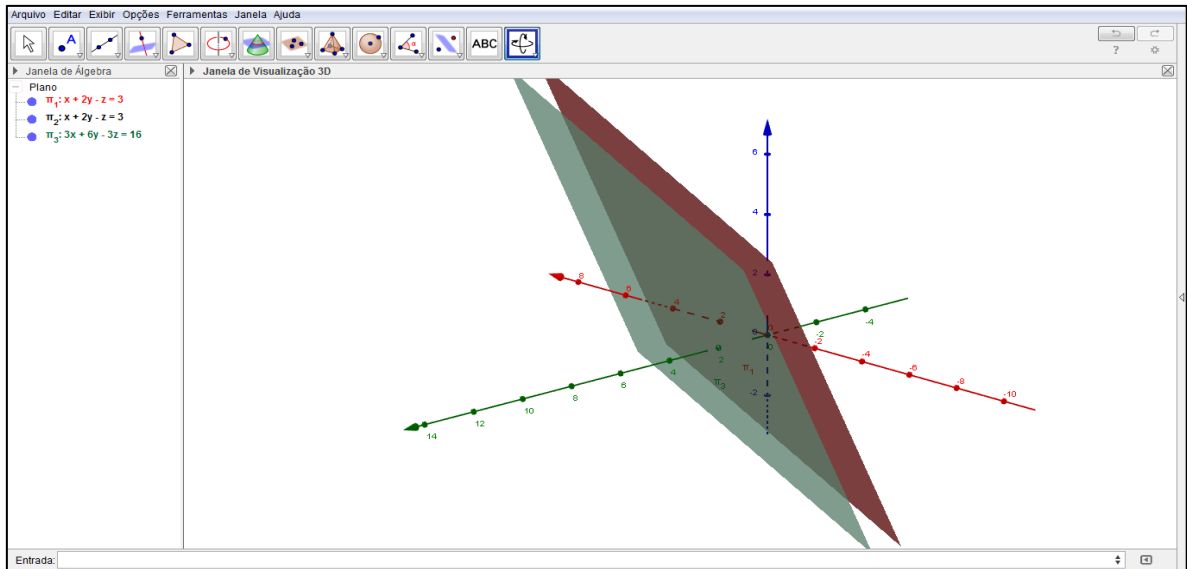


Figura 23- Representação dos 2 planos coincidentes e 1 paralelo

Neste caso, temos dois planos coincidentes e um paralelo, isso porque a equação do plano π_2 é equivalente a equação de π_1 a já a equação do plano π_3 difere de π_1 gerando o paralelismo, quanto a solução devido ao paralelismo $\pi_3 // \pi_1$ temos que nenhum dos ternos ordenado $(x, y, z) \in \pi_1$ satisfaz o plano π_3 e vice e versa, portanto a uma impossibilidade de obtermos uma ênupla de solução que satisfaça simultaneamente as equação de S, Logo S é não possui solução: **é impossível (SI)**.

3º caso: Dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta;

$$\text{Seja } S_3 \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + 3z = 9 \end{cases} \text{ um exemplo desse caso.}$$

Ao adicionarmos ao GeoGebra as equações do sistema S_3 uma a uma na mesma janela de visualização obtemos a representação gráfica que segue na figura 24.

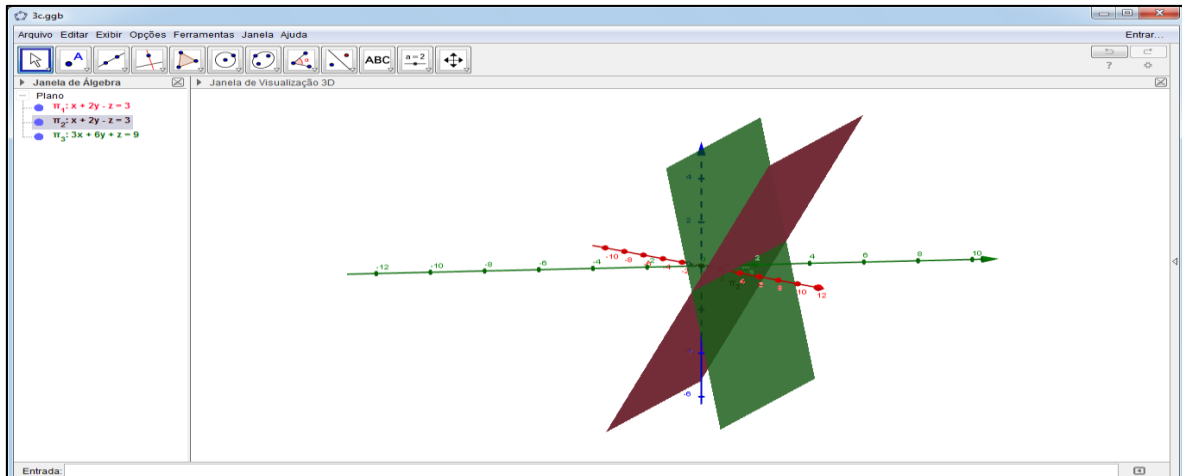


Figura 214-Representação da interseção entre os 3 planos

Temos então nesse caso dois planos coincidentes isto é, π_1 e π_2 , isto é, suas equações são equivalentes e o plano π_3 intersecta-os segundo uma reta, recorrendo ao Geogebra, na barra de ferramenta seleciona-se o recurso intersecção entre duas superfícies, selecionando com um clique o plano π_1 e em seguida π_3 o obteremos uma reta que nomearemos de reta r que representa a intersecção $\pi_1 \cap \pi_3$ para elucidarmos ver figura 25.

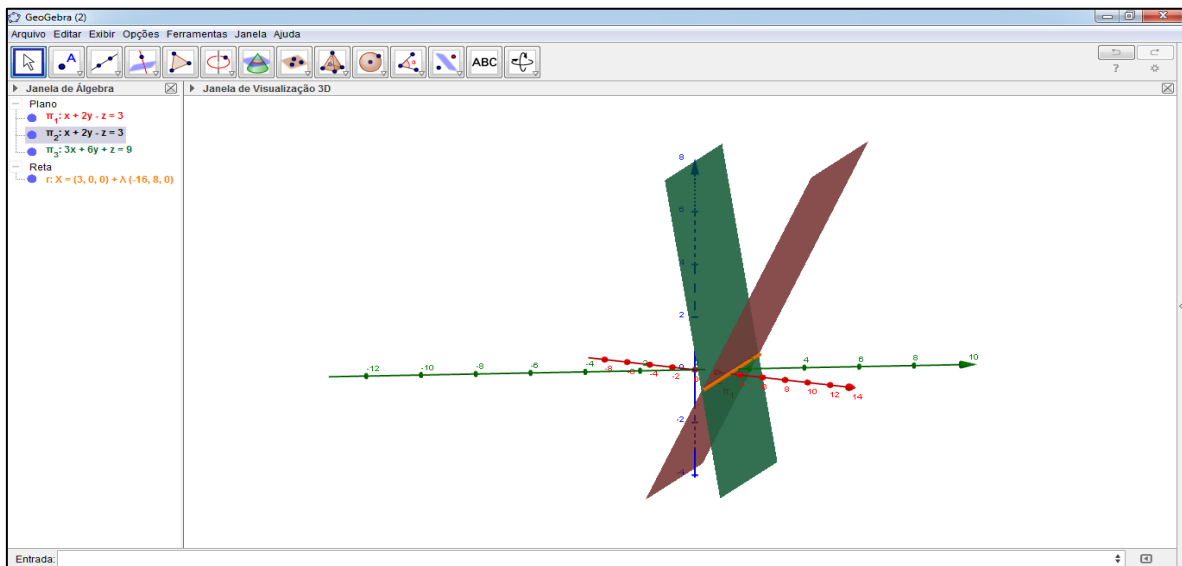


Figura 25- Representação da reta r intersecção entre os planos

Podemos concluir que a intersecção $\pi_1 \cap \pi_3$ é a reta r , formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2y - z = 3 - x \\ 6y + z = 9 - 3x \end{cases}$$

Resolvendo-o da segunda forma, somando as equações obtemos:

$$\begin{array}{r} 2y - z = 3 - x \\ (+) 6y + z = 9 - 3 \\ \hline 8y = 12 - 4x \end{array}$$

Que implica que $y = \frac{3-x}{2}$ substituindo o valor de y na primeira equação temos que

$$2y - z = 3 - x \Rightarrow 2\left(\frac{3-x}{2}\right) - z = 3 - x \Rightarrow z = 0.$$

Obtemos a solução $(x, \frac{3-x}{2}, 0)$ para todo valor x real, portanto S_3 é um sistema **possível e indeterminado (SPI)**, que tem como conjunto solução $\{(x, \frac{3-x}{2}, 0)\}$ para qualquer x real arbitrário.

4º caso: **Os planos π_1, π_2 e π_3 são paralelos dois a dois;**

Um exemplo desse caso é o sistema $S_4 : \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 3x + 6y - 3z = 5 \end{cases}$

Ao plotarmos as equações do sistema S_4 no Geogebra obtemos a representação gráfica que na segue na figura 26.

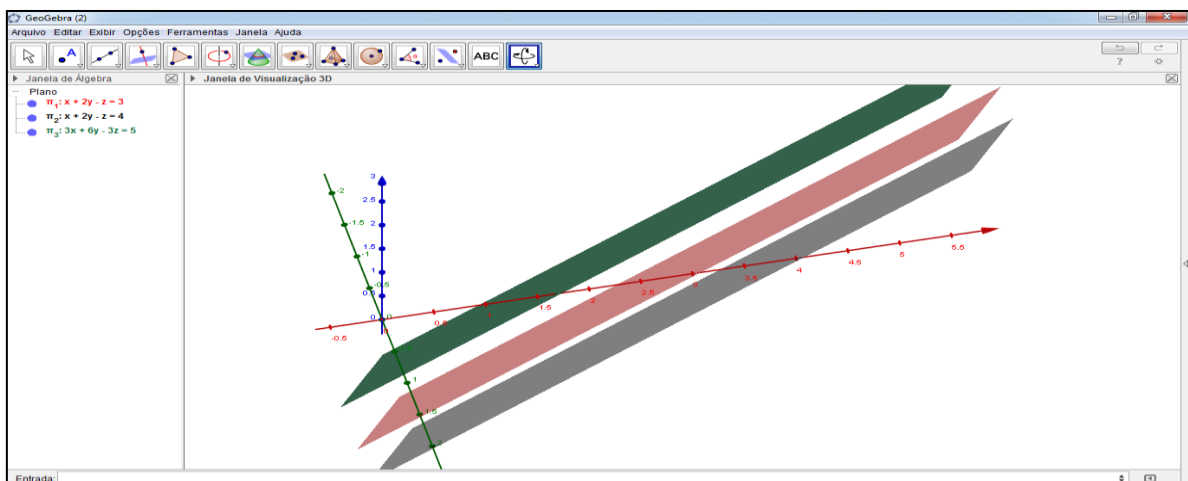


Figura 226-Representação dos 3 Planos Paralelos

Temos, portanto a representação dos três planos paralelos, isso corre porque as linhas da matriz aumentada do sistema são duas a duas não colineares, e as linhas da matriz dos coeficientes são múltiplas. Neste caso, o sistema não admite solução, logo é um **sistema impossível (S.I)**.

5º Caso: Os planos π_1 e π_2 são paralelos e π_3 os intersecta segundo retas paralelas r e s ;

Para este caso consideremos o sistema S_5
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 10 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

Utilizando o Geogebra, ao plotarmos as equações do sistema S_5 na mesma janela de visualização obtemos a representação gráfica que segue abaixo na figura 27.

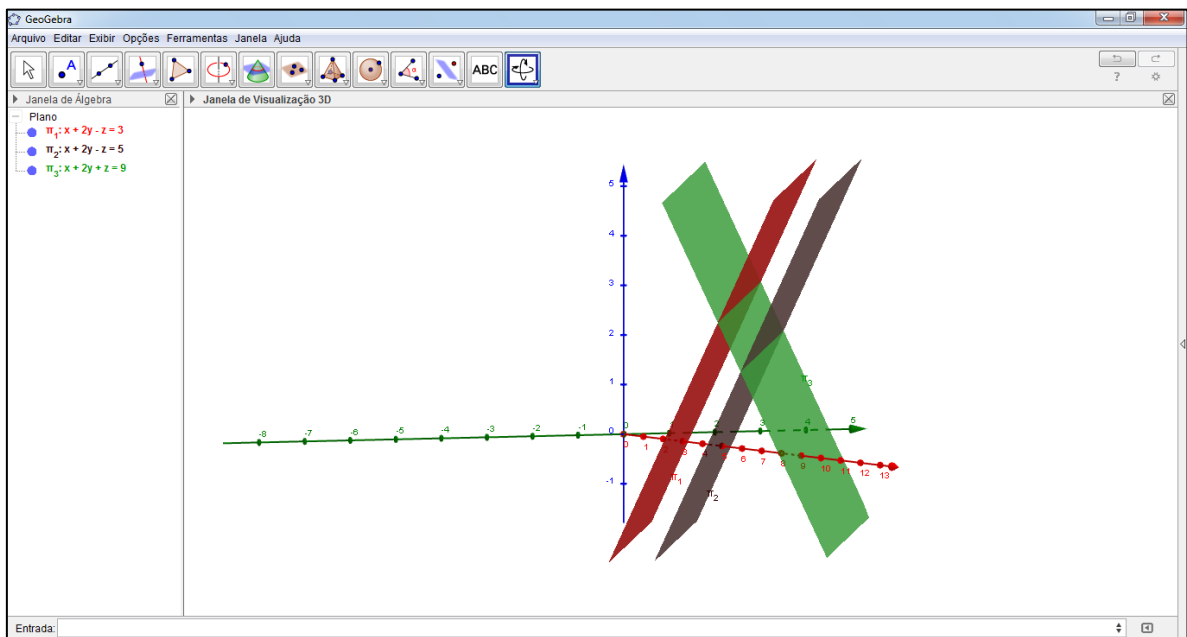


Figura 237- Representação de 2 planos paralelos intersectados por outro plano

Temos, portanto que os planos π_1 e π_2 são paralelos e π_3 intersecta ambos, utilizando o Geogebra, na barra de ferramentas escolhe-se a opção *interseção entre duas superfícies*, seleccionando os planos π_1 e π_3 obteremos como interseção uma reta r e seleccionando π_2 e π_3 obteremos uma reta s , como podemos observar na figura 28.

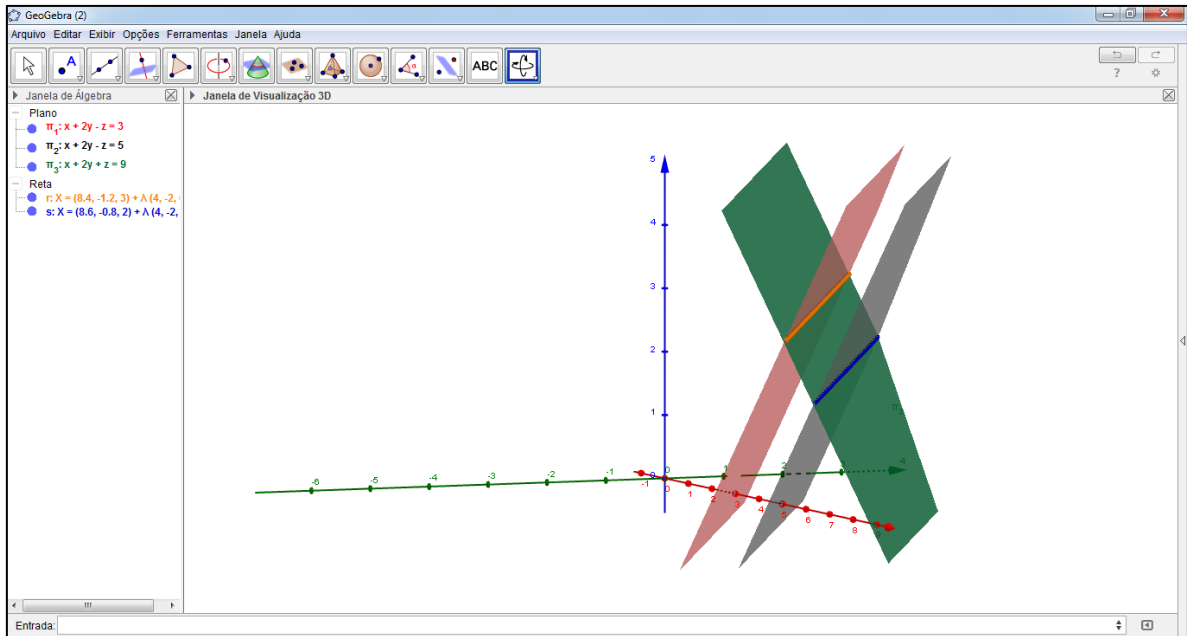


Figura 248- Representação das retas r e s de interseção dos planos

Observe que, como os planos π_1 e π_2 são paralelos temos as retas r e s também paralelas, ou seja, não há pontos em comum entre r e s , observe ainda que $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ logo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$, conclui-se que o sistema S_5 não admite solução, logo S_5 é um **sistema impossível (S.I)**. Algebricamente temos que $l_2 = \alpha \cdot l_1$ mas L_2 não é múltiplo de L_1 , e ainda l_3 não é múltiplo de l_1 , o que caracteriza respectivamente o paralelismo entre π_1 e π_2 e garante que π_3 e π_1 não são paralelos.

6º caso: Os planos π_1, π_2 e π_3 são distintos que têm uma reta r em comum;

$$\text{O sistema } S_6 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 4z = 6 \end{cases} \text{ é um exemplo desse caso.}$$

Ao inserirmos as equações do sistema S_6 no Geogebra, na mesma janela de visualização obteremos a representação gráfica que segue na figura 29 abaixo, observe que temos três planos concorrentes.

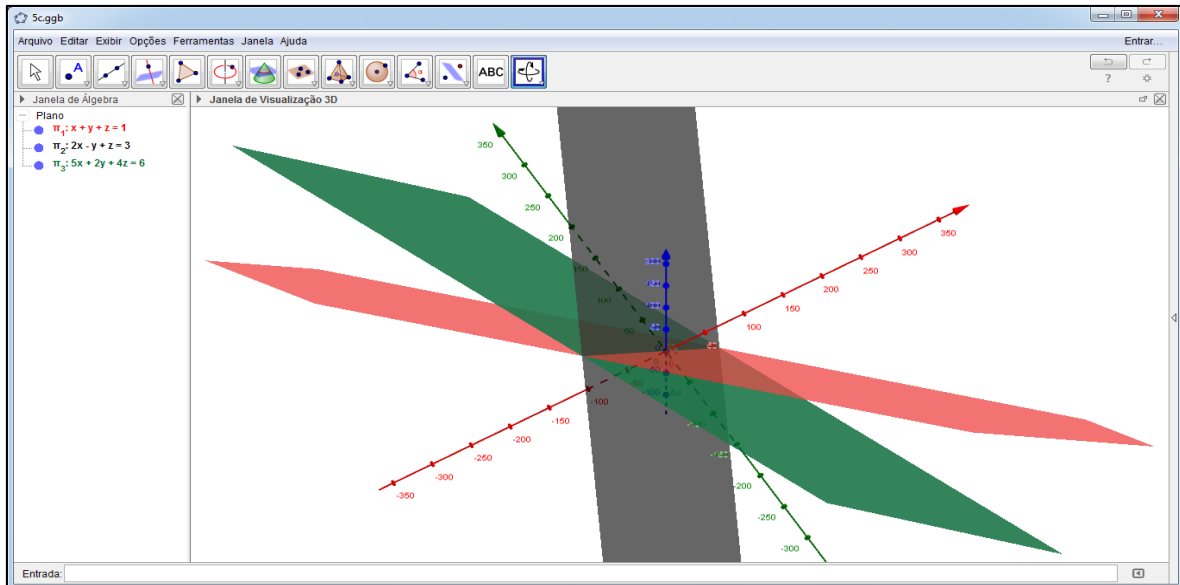


Figura 29- Representação dos 3 planos coincidentes

Neste caso não há paralelismo nem coincidência entre dois quaisquer dos planos, utilizando o recurso *interseção entre duas superfícies* temos que as retas de interseção dos planos dois a dois são coincidentes, tem-se que $r = \pi_1 \cap \pi_2 \subset \pi_3$ como podemos observar na figura 30.

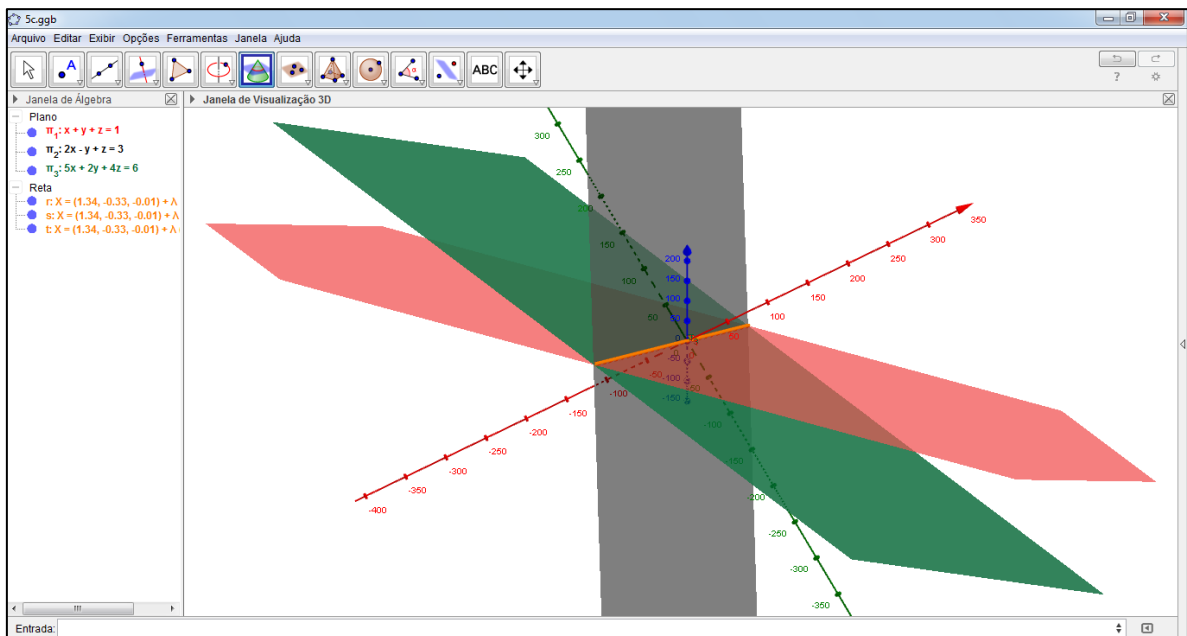


Figura 30 - Representação da reta r interseção dos 3 planos

Nesta condição o sistema é possível e indeterminado, pois o conjunto solução de S_6 são todos os pontos $P(x, y, z)$ da reta de interseção $r = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, os

pontos $P(x, y, z)$ soluções do sistema S_6 são os da forma $\{(x, \frac{1}{2}x - 1, 2 - \frac{3}{2}x)\}$ para qualquer x arbitrário.

7º Caso: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $s = \pi_1 \cap \pi_3$ e $t = \pi_2 \cap \pi_3$, paralelas umas às outras;

$$\text{O sistema } S_7 \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ 8x + y + 6z = 6 \end{cases} \text{ é um exemplo deste caso.}$$

Introduzindo as equações do sistema S_7 no Geogebra obtemos a representação gráfica do sistema vide figura 31

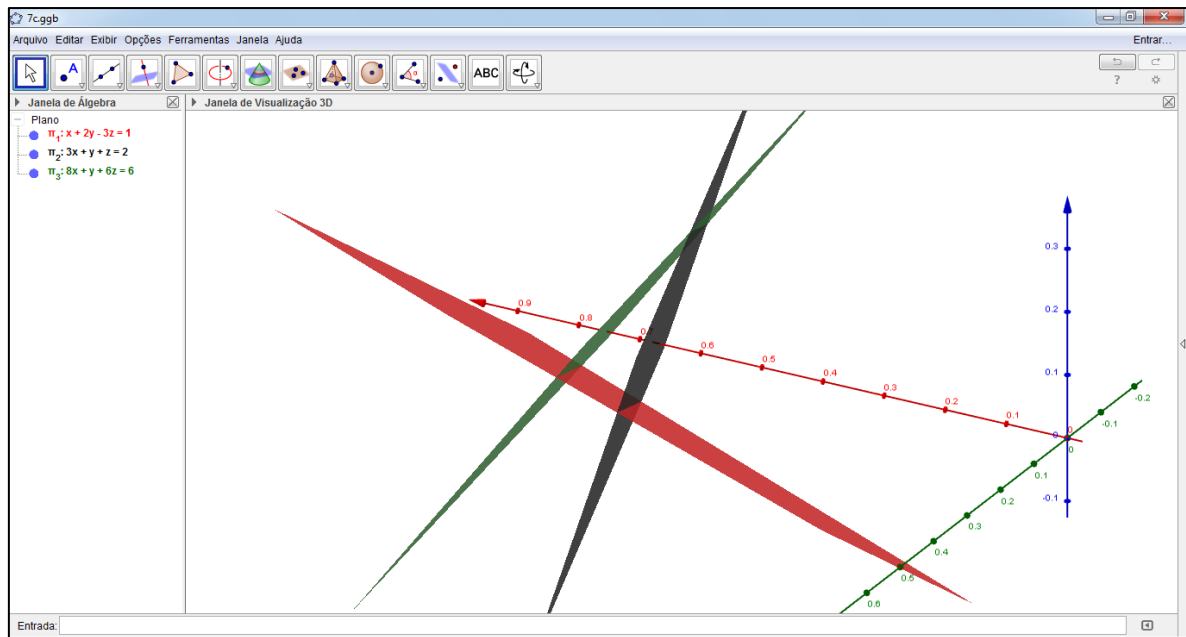


Figura 31- Representação da interseção dos 3 planos

Temos então a representação dos três planos, neste caso não há paralelismo nem coincidência entre os planos e eles se intersectam dois a dois segundo retas.

Utilizando do recurso do Geogebra *interseção entre duas superfícies* selecionando-o na barra de ferramentas, podemos então obteremos as retas de interseções dos planos, primeiro $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ em seguida $\pi_1 \cap \pi_3 = s$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = t$ como podemos visualizar na figura 32 abaixo.

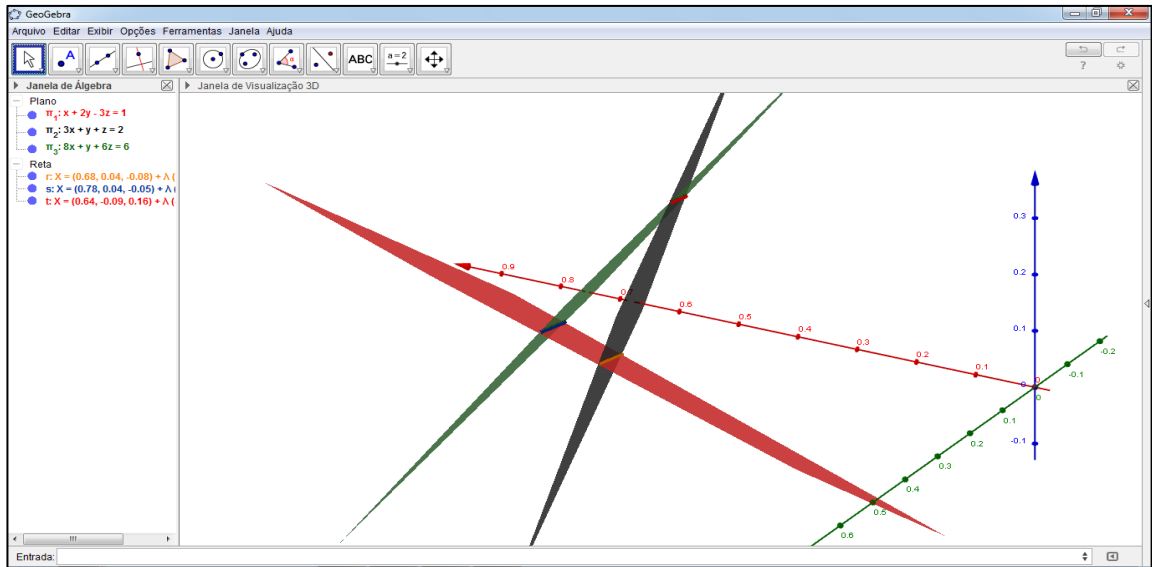


Figura 32- Representação das retas r, s e t interseção dos 3 planos

Observe-se que as retas são paralelas umas às outras, logo temos que a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ conclui-se que o sistema S_7 é **impossível (S.I.)**.

8º caso: **Os três planos π_1, π_2 e π_3 tem um único ponto em comum;**

Um exemplo desse caso é o sistema S_8
$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + y + 5z = 8 \end{cases}$$

Inserindo as equações de S_8 no Geogebra teremos a seguinte representação gráfica que segue na figura 33.

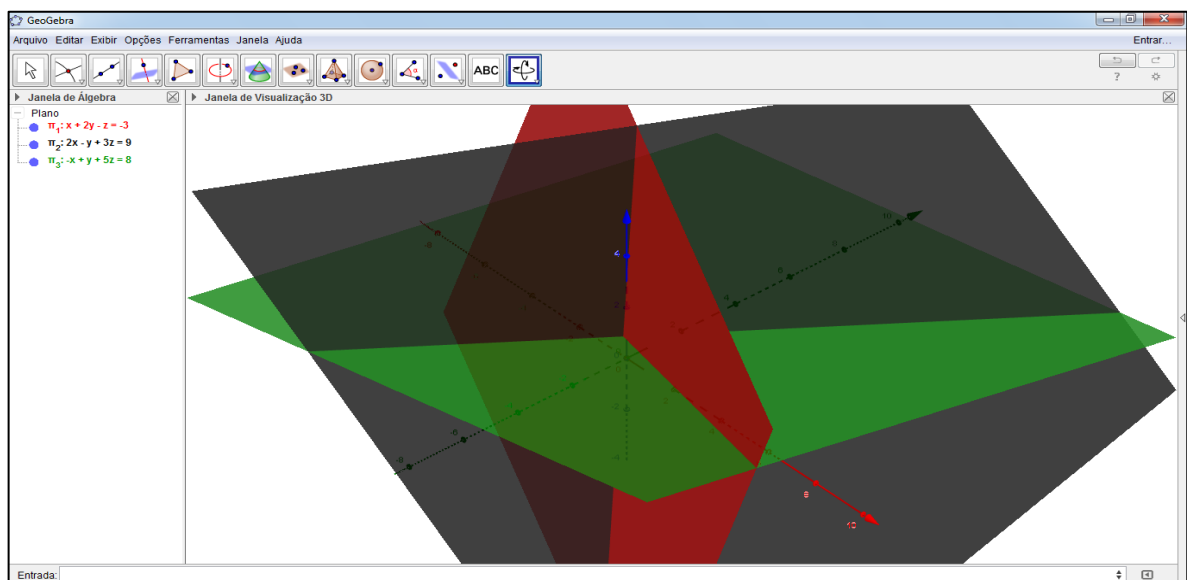


Figura 33- Representação da interseção dos 3 planos

Temos neste caso em primeiro lugar não paralelismo nem coincidência entre esses planos, utilizando do recurso do Geogebra *interseção entre duas superfícies* selecionando-o na barra de ferramentas, podemos então obtemos as retas de interseções dos planos, primeiro $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ em seguida $\pi_1 \cap \pi_3 = s$, as retas r e s estão situadas sobre o plano π_1 (vermelho) e são concorrentes isto é possui o único ponto em comum.

Determinando o ponto P interseção de r e s no Geogebra, no *ícone ponto* na barra de ferramentas escolhe a opção *interseção de dois objetos*, com o mouse selecionam-se as duas retas assim terminamos o ponto P interseção de r e s , na janela de álgebra o Geogebra nos dá as coordenadas de $P = (1, -1, 2)$, ver figura 34 este ponto P é pertencente ao interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, e nenhum outro ponto pode pertencer a esta interseção pois pertenceria a $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = s$ mas r e s têm apenas o ponto P em comum, portanto $P = (1, -1, 2)$ é a solução do sistema S_8 , isto é o **sistema S_8 possível e determinado (S.P.D.)** o conjunto solução é $\{(1, -1, 2)\}$.

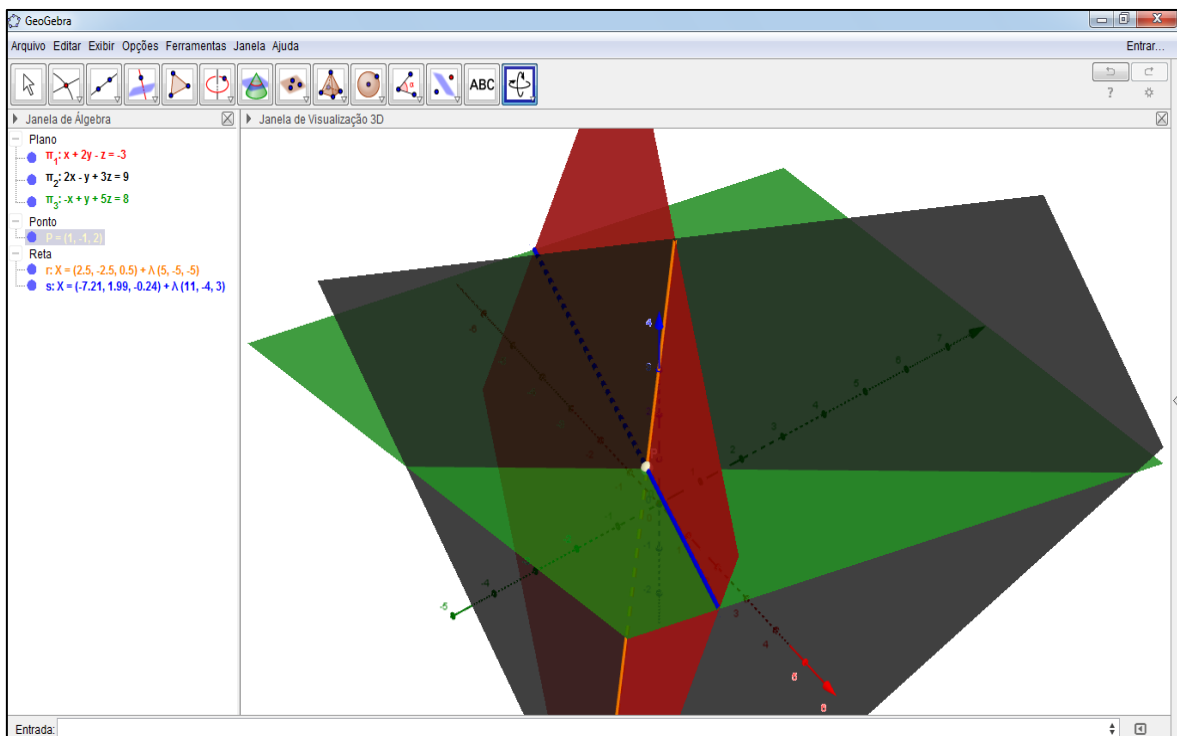


Figura 34- Representação do ponto a interseção das retas r e s

3.2.3 Sistemas equivalentes: Algébricos X Geométrico

A resolvermos um sistema linear por um método algébrico seja por substituição ou escalonamento, consiste em vê-lo em um sistema equivalente, isto é, que possuem o mesmo conjunto solução do sistema original. Vamos exemplificar esse enunciado considerando o **Problema 1** da seção 1.1.3:

$$\text{Considere o sistema linear } S_1 \begin{cases} x + y = 32 \\ 12x + 10y = 344 \end{cases}$$

$$\text{Quando escalonamos } S_1 \text{ obtemos o sistema } S'_1 \begin{cases} x + y = 32 \\ -2y = -40 \end{cases}$$

Em que o sistema S'_1 é equivalente ao sistema S_1 . Pois, toda solução do sistema modificado é também solução do sistema original, em ambos, a solução é $\{(12, 20)\}$.

Geometricamente temos que S_1 e S'_1 formam cada um no plano cartesiano duas retas concorrentes no ponto $\{(12, 20)\}$, Representando-os no Geogebra, isto equivale à transformação apresentada nas figuras 35 e 36.

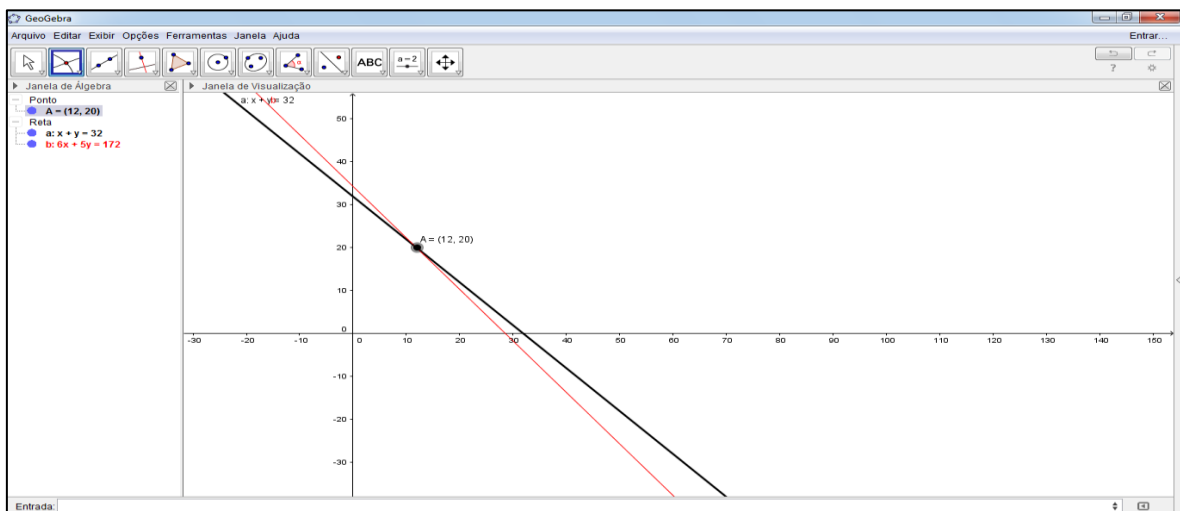


Figura 35- Representação do sistema original



Figura 36-Representação do sistema modificado

Observe que a passagem do sistema original para o equivalente geometricamente significa substituir uma das retas por outra, mas mantendo o conjunto solução do sistema. Perceba que o ponto de interseção é mantido nas duas figuras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os Sistemas de Equações Lineares começa a ser abordado no ensino fundamental e no ensino médio tem-se um aprofundamento, o mesmo faz parte dos conteúdos estruturantes de Álgebra. E encontrar alternativas que dê em significado a esses sistemas, por meio da interpretação das soluções algébricas e as representações geométricas foi o que fomentou a produção deste trabalho.

Procurou-se mostrar o conteúdo de forma algébrica, passando pelas operações elementares que são utilizadas para resolvê-lo, tendo como referência situações problemas. Mas, essencialmente, buscou-se abordar a parte geométrica das soluções encontradas, e o significado dos conjuntos que solucionam e classificam os sistemas lineares. A finalidade era abordar os diferentes tipos de sistemas de equações lineares por meio das representações dos gráficos de suas equações, relacionando com os conceitos e definições sobre o assunto.

A utilização dos recursos tecnológicos é uma alternativa para que se possa contribuir de uma forma positiva no ensino-aprendizagem da matemática. Assim, fez-se uso do software Geogebra que é um programa de geometria dinâmica que torna possível a construção e visualização de gráficos, e realizar-se manipulações dos objetos construídos. Constata-se então que o auxílio do software Geogebra é relevante como uma alternativa para auxiliar o ensino de sistema linear.

Anseia-se que esse trabalho sirva como material de apoio aos profissionais de ensino de matemática para que eles consigam mudar as suas estratégias de ensino sobre esse conteúdo que proporcione aos discentes mais confiança em seu aprendizado, além de tornar suas aulas mais dinâmicas.

REFERÊNCIAS

- [1] BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2 ed. Tradução Gomide, Elza F. São Paulo: Edigard Bluecher, 1996.
- [2] BRASIL, Ministério da Educação e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais +: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2002. 141p.
- [3] BRASIL, Ministério da Educação e Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio; Parte I (Bases Legais)**. 2000.
- [4] HOHENWARTER, Markus. Manual do Geogebra: Tradução para Português: NETO, Hermínio Borges; LIMA, Luciana de; FREITAS, Alana Paula Araújo; OLIVEIRA, Alana Souza de. Última modificação: 19 de Abril de 2007. 42 p. Apostila. Disponível em < https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>: Acesso em 14 de fevereiro de 2016.
- [5] IEZZI, Gelson, HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**, vol. 4; 7.ed. São Paulo: Atual, 2004.
- [6] LAMIN, Maria Regina Nunes. **Resoluções de problemas modelados com sistemas de equações lineares**. Trabalho de conclusão de curso (licenciado em Matemática). Florianópolis, SC, 2000.
- [7] LIMA, Elon lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 3; 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [8] LIMA, Elon lages. **Matemática e Ensino**. 3. ed. Rio de janeiro: SBM, 2007 .
- [9] PEIXOTO, Gilmara Teixeira Barcelos et al. **Tecnologias digitais na educação: pesquisas e práticas pedagógicas**. Rio de janeiro: Essentia, 2015.