



**CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ALBINEI RIBEIRO DOS SANTOS

**O ARTIGO E53 DE EULER, UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA CURSOS DE
FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

SÃO RAIMUNDO NONATO - PI

2016

ALBINEI RIBEIRO DOS SANTOS

**O ARTIGO E53 DE EULER, UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA CURSOS DE
FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - Campus São Raimundo Nonato como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a):

Prof. Msc. Gesivaldo dos Santos Silva

SÃO RAIMUNDO NONATO - PI

2016

ALBINEI RIBEIRO DOS SANTOS

**O ARTIGO E53 DE EULER, UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA CURSOS DE
FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

Banca Examinadora de Defesa

**Prof. Msc. Gesivaldo dos Santos Silva
Instituto Federal do Maranhão – IFMA
Orientador**

**Prof. Me. Francisco Teixeira Esteves
Instituto Federal do Piauí- IFPI
Examinador Interno**

**Prof^a. Me. Amaya de Oliveira Santos
Instituto Federal do Piauí- IFPI
Examinadora Externa**

Pois, tendo aprendido algo, jamais neguei, fazendo o conhecimento ser como uma descoberta minha; mas louvo como sábio o que me instruiu, tornando públicas as coisas que aprendi com ele.

Platão

Dedico este trabalho a minha família, especialmente a minha esposa, Patrícia, e ao meu filho, Gabriel, por sempre acreditarem em mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que permitiu a realização deste trabalho, dando-me força e saúde para superar as dificuldades.

À minha saudosa família pelo amor, incentivo e compreensão em todos os momentos.

Quero a agradecer a todos os professores do IFPI, que tive oportunidade de conhecer e enriquecer meus conhecimentos nas disciplinas estudadas, em especial ao meu orientador o Professor Gesivaldo, pela a sua determinação e incentivo na realização dessa minha pesquisa e aos demais professores: Rejane Fontenelle, Amaya Oliveira, Janete Cezar, Rogério Azevedo, pelos valiosos ensinamentos.

Aos amigos de convivência, que sempre que solicitados, me ajudavam. Obrigado pela amizade, companhia, contribuição e apoio.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho compreende um estudo investigativo, sobre o texto original de Leonard Euler que trata da solução do problema das sete pontes de Königsberg. Esse trabalho ele está pautado no tópico especial de História da Matemática para cursos de formação de professores. O objetivo do trabalho, foi apresentar ao discente do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí/ Campus São Raimundo Nonato, uma fonte primária, um texto escrito no século XVIII por Euler, o trabalho consistiu na apresentação de uma atividade que tinha a finalidade de fazer o aluno percorrer os caminhos que Euler teve que passar para chegar a conclusão do problema. O trabalho explora discussões de outros matemáticos, na tentativa de encontrar a solução para o problema. A solução que Euler apresentou no artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Solução de problemas referente a geometria de posição), foi dividida em 21 seções e comentada uma a uma, esta tradução foi encontrada em português onde usamos e referenciamos o tradutor. Por fim aplicamos o trabalho na turma de 8º período do Curso de Licenciatura em Matemática do IFPI/SRN na disciplina de História da Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática. Königsberg. Leonardo Euler.

ABSTRACT

This study comprises an investigative study on the original text of Leonhard Euler which deals with the solution of the problem of the seven bridges of Königsberg. This work is guided in the special topic of the history of mathematics for teacher training courses. The objective was to present the student's Degree in Mathematics from the Federal Institute of Piauí / Campus São Raimundo Nonato, a primary source, a text written in the eighteenth century by Euler, the work was the presentation of an activity that had purpose of making students walk the paths that Euler had to pass to reach the conclusion of the problem. The work explores other mathematical discussions in an attempt to find a solution to the problem. The solution Euler presented in Article problematis Solutio ad geometriam situs pertinentis' (Troubleshooting concerning the geometry of position), was divided into 21 sections and commented one by one, this translation was found in Portuguese where we use and we reference the translator. Finally we apply the work in class 8 period Degree in Mathematics IFPI / SRN in the history of the discipline of mathematics.

Keywords: History of Mathematics. Königsberg. Leonhard Euler.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Teoria de participação	48
--	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Mapa da cidade Kalinigrad	15
Figura 2: As Sete pontes de Konigsberg	15
Figura 3: Mapa da Suíça.....	22
Figura 4: Leonard Euler.....	24
Figura 5: Mapa da Alemanha.	26
Figura 6: Mapa da Rússia	27
Figura 7: Carta trocada de Ehler e Euler	31
Figura 8: Carta de Ehler á Euler	31
Figura 9: Carta de Marioni á Euler.....	32
Figura 10: Diagrama dos Grafos	33
Figura 11: O problema de Konigsberg ordenados por grafos	45
Figura 12: Caminhos Ímpares de Konigsberg.....	46

LISTA DE SIGLAS

CNE – Conselho Nacional da Educação

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais

HM - História da Matemática

IES – Instituição de Ensino Superior

LM – Licenciatura em Matemática

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PPP – Projeto Político Pedagógico

RHMP– Revista História da Matemática para Professores

SRN – São Raimundo Nonato

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
1.1 Justificativa.....	16
1.2 Objetivos.....	20
1.2.1 Objetivo Geral:	20
1.2.2 Objetivos específicos:.....	20
1.3 Metodologia.....	20
2 UM PASSEIO NA VIDA DE LEONARD EULER (1707 – 1783).....	22
2.2 As Trilhas de Euler e o Reflexo na Ciências, uma Teoria Universal: Os Grafos.....	27
2.2.1. Rede de Telecomunicações	27
2.2.2 Aplicações à Química.....	28
2.2.3 Aplicações às Ciências Sociais	28
2.2.4 Aplicações a Arquitetura	28
2.2.5 Aplicações a Linguística	28
3 DISCUSSÕES ACERCA DO ARTIGO E53 DE EULER E SUA TRADUÇÃO.....	30
3.1 Solução de um Problema Pertinente à Geometria de Posição.....	34
4 PROPOSTA DE ATIVIDADE SOBRE TEORIA DOS GRAFOS.....	42
4.1 Caminhos Eulerianos.....	42
4.2 Análise da Aplicação do Trabalho.....	46
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
REFERÊNCIAS.....	51
ANEXOS.....	52

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho de pesquisa é um estudo sobre Euler e o surgimento da teoria dos grafos, via resolução do problema das sete pontes de Königsberg, resultado do seu artigo conhecido pelo número de Eneström E53¹, que privilegia os conceitos matemáticos abordados por Euler e a contextualização histórica dos seus estudos.

A escolha por esse tema se fez porque neste trabalho, pode-se explorar conhecimentos de teoria dos números e História da Matemática em cursos de formação de professores, área pouco explorada nos cursos de licenciatura em matemática. Este trabalho busca descobrir e estabelecer relações profundas e sutis entre essas duas grandes áreas, teoria dos números e História da matemática. Isto, por sua vez, facilita uma melhor apresentação do currículo de matemática, favorecendo a compreensão do aluno, e mostra razões para melhoria do conteúdo na construção de conceitos, generalizações e procedimentos algébricos.

Este trabalho faz um passeio sobre a vida de Leonard Euler, e o método utilizado para solucionar o problema das sete pontes de Königsberg. A cidade Königsberg que, na língua alemã significa “Monte do rei”, foi fundada em 1254, pela ordem dos cavaleiros Teutônicos em honra do rei Checo Přemysl Otakar II. Königsberg era a capital da Prússia Oriental, o estado alemão que unificou todos os outros estados germânicos no final do século XIX para formar a Alemanha, até então um conjunto de estados independentes cada um com o seu rei. Juntos formaram o Império Alemão.

Após a perca da Alemanha na 2ª guerra mundial em 1945, Alemanha tornou-se uma república. Até que Hitler chegou ao poder. Após a chegada de Hitler, a Alemanha foi dividida em duas, Alemanha Federal (a união dos setores de ocupação passaram a ser inglesa, francesa e americana) e a Alemanha Democrática (o setor de ocupação soviética). Além disso, perdeu importantes partes do seu território. A Prússia, elemento unificador da Alemanha, foi dividida entre a Polónia e a Rússia. Königsberg passou a ser uma cidade russa e mudou de nome para Kaliningrad.

¹ Essa numeração (E53) é uma tentativa de precisar a ordem de produção desses trabalhos. Em alguns casos, contudo, o ano de produção não é conhecido e, nesses casos, a designação do historiador sueco Gustav Eneström (1856 – 1923) é apenas um palpite. Ele que catalogou 866 trabalhos de Euler e sua numeração é uma tentativa de precisar a ordem de produção desses trabalhos. Então no decorrer dessa produção utilizaremos muito esse recurso para designar algumas das publicações de Euler.

Em 1946, Königsberg foi rebatizada pelos soviéticos, passando a se chamar Kaliningrad em homenagem a Mikhail Kalinin¹. Kaliningrad é uma cidade num exclave² da Rússia entre a Polónia e a Lituânia, situada aos 510 km a oeste da Rússia.



Figura 1: Mapa da cidade Kaliningrad
Fonte: <http://cognosco.blogs.sapo.pt/arquivo/639806.html>

Kaliningrad fica localizada às margens do Rio Pregel (Pregolya). Em sua parte central, o rio Pregel flui ao redor da ilha de Kneiphof, se dividindo em dois, chamados de rio Pregel Velho, ao norte, e rio Pregel Novo, ao sul, dividindo a cidade em quatro porções de terra. Para ligar essas porções de terra, foram instaladas sete pontes em 1264, como pode ser visto na figura 2. Estas pontes foram chamadas em Alemão de *Ponte Kraemer* (*Ponte de ligação*); *Ponte Schmiede* (*Ponte do ferreiro*); *Ponte Holz* (*Ponte do madeira*); *Ponte Honig* (*Ponte de mel*); *Ponte Greune* (*Ponte verde*); *Ponte Koettel* (*Ponte do comerciante*); *Ponte Hohe* (*Ponte alta*).

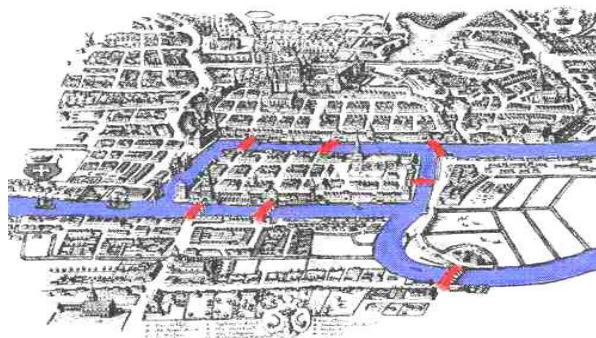


Figura 2: As Sete pontes de Königsberg
Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes>

¹ Mikhail Ivanovich Kalinin, Foi um dos fundadores da união das repúblicas, socialista soviética. Membro do partido comunista da união soviética, em 1937 foi eleito presidente Presidium do Soviete Supremo da URSS. Cargo que ocupou até março de 1946.

² Exclave é um território nacional separado geograficamente do seu país.

1.1 Justificativa

Os habitantes do local lançaram o desafio de se fazer um passeio pela cidade atravessando as sete pontes, cada uma, uma única vez. Este problema já havia se tornado célebre popularmente.

Leonhard Euler (1707-1783) começou a trabalhar na academia de Ciências de São Petersburgo, ele apresentou um estudo para os seus colegas em 26 de agosto de 1735 sobre a solução de um problema relacionado com a geometria de posição: este era o problema de Königsberg, ele também abordou o problema generalizado: Dado uma divisão qualquer de um rio em ramos e qualquer arranjo de pontes, existe um método geral para determinar essa rota?

O referido trabalho que proponho é uma pesquisa sobre o matemático suíço Leonhard Euler e o problema das sete pontes de Königsberg, no qual ele escreveu sua solução em seu celebre artigo E53 no *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* sob o título ‘*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*’ (Solução de problemas referente a geometria de posição); O referido trabalho E53, privilegia os conceitos matemáticos abordados por Euler e a contextualização histórica dos seus estudos.

O trabalho apresentado aqui é uma forma de compreender e analisar o trabalho feito por Euler, para solucionar tal problema referente às pontes de Königsberg, transformando essa análise em um produto educacional através de um roteiro, ou seja um recurso dos caminhos e teorias estudas por Euler. Ilustrando passo a passo a tão famosa demonstração dentro do seu contexto histórico, ou seja, trabalhando um problema do século XVIII, com recursos do século XXI e mostrando a grande contribuição que a solução desse problema trouxe para a época, despertando no discente uma forma crítica – reflexiva de pensar, o quanto a matemática do passado continua sendo importante hoje, e as contribuições dadas para a matemática de hoje, desmitificando a ideia de que a matemática de hoje é melhor que a do “passado”.

Justificando nossa proposta, buscamos elementos no campus da pesquisa matemática, como ferramenta para ilustrar nossa metodologia. Nessa abordagem buscamos transcrever o pensamento de alguns autores da matemática para fundamentar uma proposta que justifica nossa ideia.

No primeiro número da Revista de História da Matemática para Professores, publicada em março de 2013, pela Sociedade Brasileira de História da Matemática, o professor Ubiratan D’Ambrósio, internacionalmente reconhecido pelos seus trabalhos em História da Matemática e Etnomatemática, o único brasileiro a ser condecorado com a

medalha Félix Klein (A maior honra recebida por um educador matemático) fala sobre a importância da História da Matemática (HM) no desenvolvimento e entendimento da própria matemática e de seu ensino e aprendizagem. Em síntese, ele acredita que a HM serve para situar a Matemática como uma manifestação cultural, assim como são manifestações culturais a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos; Ela também pode mostrar que as manifestações culturais se dão, de modo diversificado, em todos os povos e em todos os tempos; A HM pode, ainda, mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de matemática desenvolvidas pela humanidade; para destacar que essa matemática teve sua origem nos primórdios das civilizações e se organizou nas culturas da antiguidade.

Esse conhecimento da história da matemática é algo muito importante no ensino, porque desenvolve no aluno a característica de refletir, matemática não só como é ensinada, mais como se originou, essa metodologia de ensino aliada ao aspecto histórico é uma alternativa de estímulo em sala de aula, pois faz o aluno desenvolver o espírito investigatório, através da sua curiosidade pelos fatos históricos.

As referências históricas ao introduzir no ensino, se podem ser extraordinariamente benéficas do ponto de vista do aluno, como motivação e interesse, não o são menos para o professor. Elas constituem um desafio aliciente aos seus conhecimentos e a sua criatividade e dão-lhe oportunidades de pesquisa de textos, que podem levar a descobertas interessantes e inesperadas. A preparação dos temas fá-lo-ão entrar na aventura humana e cultural em que quer introduzir os seus alunos, muitas vezes até acompanhado por eles, envolvido também na investigação. (ESTRADA, 1993, p. 20).

No entanto, o ensino aliado a história, tem o objetivo de discutir as relações existentes, entre a matemática e as culturas que originaram esses estudos, mostrando ao aluno que tipo de ferramentas eram utilizadas para resolver os problemas propostos a época.

A problematização a partir da história, “pode propiciar ao aluno e professor uma reflexão sobre a beleza existente no ato da criação matemática” (MIGUEL; BRITO, 1996, p. 58). Baseados nessas reflexões, “os professores de matemática poderiam buscar situações nas quais os alunos do Ensino Fundamental e Médio fossem estimulados a criar matemática”. A história da matemática:

[...] pode fazer com que o futuro professor perceba a existência de outros padrões de beleza em matemática, além do usual, tornando, desse modo, mais significativa a interação de seus alunos com a matemática (MIGUEL; BRITO, 1996, p. 58).

Ainda na entrevista citada acima, D’Ambrósio fala sobre as contribuições que os conhecimentos sobre a história da matemática podem trazer para o professor e alunos da escola básica e para sua formação como cidadão:

Para o professor saber e transmitir para seus alunos que a matemática foi desenvolvida, independentemente, em todas as regiões do mundo, e que todos os povos desenvolveram, ao longo de sua história, técnicas de observação, de reflexão, de comparação, de classificação, de mensuração, de quantificação e habilidades para explicar, entender e saber responder as suas necessidades de sobrevivência e de transcendência nos mais diversos ambientes naturais, sociais e culturais. O homem primitivo, por exemplo, criou ferramentas. Para construir uma lança, teve de aplicar conhecimentos matemáticos – forma, comprimento, peso e a força para lança-la e alcançar determinado alvo. Os gregos escreveram vários livros fazendo uma síntese dos conhecimentos por eles desenvolvidos. O mais conhecido é o livro “Elementos”, escrito em 300 a.C. Por Euclides. Por razões geopolíticas, como guerras e conquistas, esses livros básicos na idade média, e na renascença deu origem ao desenvolvimento da ciência e da tecnologia da Europa. Essa ciência e tecnologia permitiram aos países europeus, por exemplo, navegar por todo mundo, conquistar todos os outros povos e impor sua cultura e seus conhecimentos em todo o planeta. Dentre esses conhecimentos está a matemática, que teve sua origem na antiguidade Grega. A partir daí, séculos XVI e XVII, essa matemática foi incorporada aos sistemas escolares de todas as nações e tornou-se indispensável em todo mundo, em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico. Para a formação de um cidadão, inclusive professores e alunos, essa história deve ser conhecida e devem ser avaliadas as consequências socioculturais dessa incorporação (DÁMBROSIO, 2013, P.02)

Portanto, acreditamos que a proposta de criar um roteiro de estudos de um problema que foi solucionado no século XVIII, remete o aluno um passeio nas lacunas do passado, obtendo informações que desvende alguns mitos quanto a origem e formação do conhecimento matemático. Isso desperta no aluno um pensar reflexivo e crítico sobre matemática, além de conhecer as ferramentas que foram usadas e como foram criadas, e por quem foi criada.

Após essa reflexão, podem-se analisar as manifestações de propostas governamentais, onde se destaca nos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, uma discussão a cerca da caracterização do Quadro atual do Ensino de Matemática no Brasil, esse documento frisa a preocupação do conhecimento histórico no ensino nacional.

Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos da ciência, a história da matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos (BRASIL, 1998, p.23).

Para os PCN's, a história da matemática, quando for tratada como um assunto específico ou conteúdo, seria insuficiente para contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Entretanto a apresentação de tópicos da história da matemática em sala de aula, segundo essa abordagem, tem sido defendida por um número expressivo de matemáticos, historiadores da matemática e investigadores em educação matemática, de diferentes épocas, os quais recorrem á categoria psicologia da motivação para justificar a importância da inclusão.

Segundo Nobre (1996), o professor deve tentar trabalhar um conceito matemático a partir do desenvolvimento histórico desse conceito. Dessa forma, o professor investirá na fundamentação desse conceito, ou seja, estará ensinando o porquê desse conceito, e não somente o para quê, como frequentemente é observado nas salas de aula. Ao expor questões acerca de determinado conteúdo matemático, o professor poderá despertar no aluno as mesmas curiosidades despertadas naqueles que contribuíram para o desenvolvimento do conteúdo matemático, e desse modo, colaborar para o desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos.

Para entender ou admitir o desenvolvimento matemático, é necessário recorrer a sua estrutura através da busca da informação contida nas suas heranças passadas de construção, nesse caso citarei a história da matemática como alicerce principal de sua própria investigação.

De todas estas discussões apresentadas, sobre a importância da História da Matemática no ensino da matemática, propomos os nossos objetivos; onde destacamos o estudo do artigo de Euler, a solução apresentada e a produção de uma atividade didática para ser usada em cursos de formação de professores, ou com alunos da educação básica, dando ênfase aos tópicos de história da matemática e suas importâncias.

Para se chegar a este objetivo, procuramos estudar a solução apresentada por Euler, os discursos feitos no entorno do problema, a tradução do trabalho do original e a topologia envolvida no trabalho.

O Trabalho original de Euler apresenta 21 seções, cujo título foi o *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, este trabalho foi traduzido para o português por Frederico José Andries Lopes, em 2013, esta tradução foi apartir da versão inglesa, publicada no volume I da coleção The World of Mathematics.

Frederico J. A. Lopes, destaca que:

Esta é uma tradução fiel do artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, escrito em 1735, apresentado para publicação em 1736, e impresso em 1741 nos *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 8, pp. 128-140, de autoria do matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). O artigo se encontra publicado também nas *Opera Omnia*: Série 1, Volume 7, pp. 1 – 10.

O texto original encontra-se em latim. Esse texto pode ser acessado no site www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral:

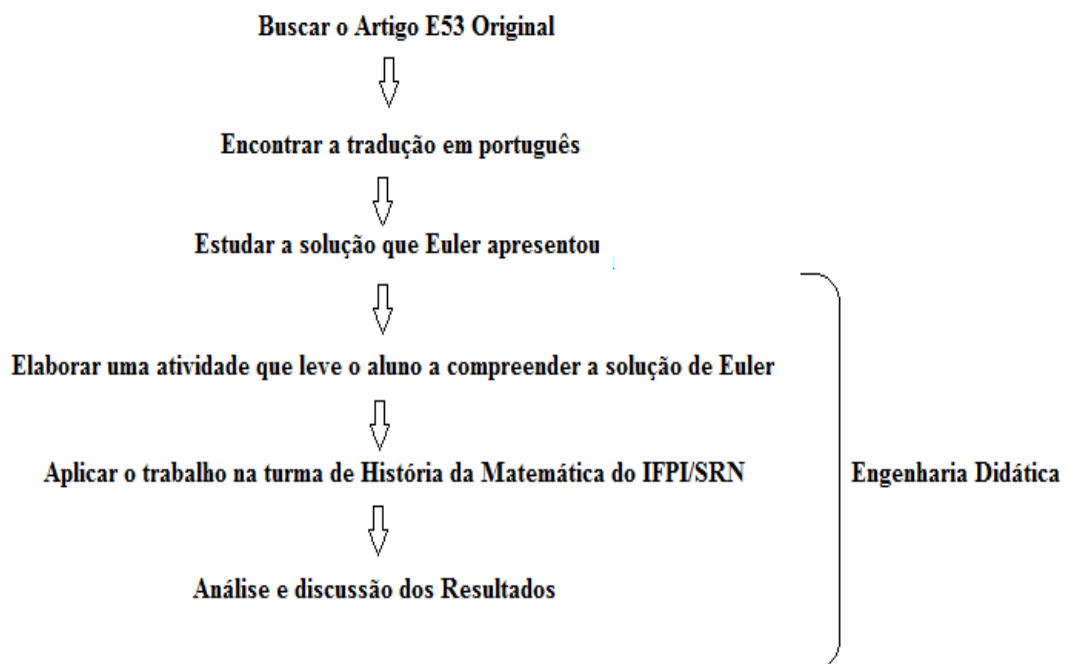
Elaborar um roteiro de estudo no formato de atividades sobre o artigo original de Euler E53 das sete pontes de Königsberg, para ser utilizado em cursos de formação de professores.

1.2.2 Objetivos específicos:

- Estudar a solução que Euler apresentou, sobre o problema das pontes.
- Elaborar um roteiro que permita ao discente, compreender os caminhos desenvolvidos na solução do problema de Königsberg.
- Adaptar o roteiro para ser utilizado em sala de aula.
- Aplicar o roteiro na turma de história da matemática do IFPI/SRN.

1.3 Metodologia

O percurso metodológico são os traços que o pesquisador cria para atingir seus objetivos, são trajetórias percorridas que apontam diretrizes para alcançar os resultados esperados. As fases do percurso metodológico do nosso trabalho estão indicadas abaixo.



A atividade será realizada em forma de oficina, onde o aluno terá que observar as instruções dadas pelo pesquisador e seguir os passos de resolução do problema. A análise será baseada na engenharia didática, que Segundo Carneiro (2005), o termo Engenharia Didática foi criado na área de Didática das Matemáticas, na França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e

essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia, momentos em que é preciso construir soluções.

A origem desta teoria está na preocupação com certa “ideologia da inovação” presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino.

Segundo Pais (2002), a engenharia didática foi destacada como uma forma de organizar a pesquisa em Didática da Matemática, a partir da criação de uma sequência de aulas, cuidadosamente planejadas, com a finalidade de obter informações para desvelar o fenômeno investigado. A aplicação de uma engenharia didática se inicia por uma fase de análises preliminares, valorizando experiências anteriores do pesquisador. Num segundo momento, realiza-se uma análise a priori do problema, onde cada variável é cuidadosamente estudada em relação ao objeto de estudo.

2 UM PASSEIO NA VIDA DE LEONARD EULER (1707 – 1783)

Discussão histórica apresentada no trabalho foi baseada nos trabalhos: *Euler e Os Números Pentagonais* de Cota (2011) e *Os Artigos de Euler sobre os Números Amigáveis* de Leôncio (2013). Leonhard Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707, na cidade de Basileia, na Suíça. Ele era o primeiro filho de Paul Euler (um ministro evangélico calvinista) e Margareth Brucker (filha de um pastor de mesma denominação evangélica). Em junho de 1708, pouco tempo depois de seu nascimento, a família de Euler se mudou para a cidade de Riehen-Bettinger, pois Paul Euler havia sido designado pastor nessa localidade. Riehen foi o lugar onde Euler passou grande parte de sua infância, e lá nasceram os irmãos Anna Marie (1708), Maria Madgalena (1711) e Johann Heinrich (1719).

Euler teve em seus pais seus primeiros professores. Sua mãe orientava-o sobre a tradição familiar e humanística e ao estudo dos clássicos gregos e romanos. Já a sua instrução em matemática foi conduzida por seu pai, que lhe apresentou primariamente o universo matemático, explicando sobre notações e fundamentação das operações básicas.



Figura 3: Mapa da Suíça
Fonte: COTA (2011, p.17)

Euler era uma criança talentosa e a matemática se tornou a sua paixão. As aulas que seu pai lhe dera foram uma forte influência em seu fascínio por esta ciência. Porém, Euler fora para o Ginásio de Basileia não para estudar matemática, mas, sim, para seguir carreira religiosa, a exemplo de seus ascendentes. Nessa instituição pouco aprendeu sobre Matemática, pois a escola era voltada para uma visão mais humanista. De fato, seus estudos principais eram Teologia e Hebraico. Entretanto, seu gosto pela Matemática era tão grande

que ele passou a estudar sozinho diversos assuntos matemáticos. Quando soube disto, seu pai fez de tudo para que ele se dedicasse aos estudos teológicos e abandonasse a matemática e assim, em 1720, Euler, então com 14 anos, se encontrava matriculado na Faculdade de Filosofia, da Universidade de Basileia. Durante seu curso universitário, Euler realizou alguns exames por iniciativa própria. Em um desses exames, Johann Bernoulli (1667-1748) descobriu seu potencial para a matemática e até ministrou algumas aulas particulares para ele. Em consequência, Euler se tornou amigo dos seus dois filhos, Nikolaus (1695-1726) e Daniel (1700-1782).

Em outubro de 1723, Euler havia finalizado todos os seus créditos para receber o título de mestre, faltando apenas a dissertação. Seu pai queria que ele se dedicasse mais aos estudos de grego, hebraico, teologia protestante e humanismo clássico, pois logo se tornaria um pastor e necessitaria obter estudos cada vez mais avançados para sua área de formação. Dessa maneira, em junho de 1724, já com 18 anos, acatado o desejo de seu pai, Euler escreveu uma dissertação que comparava e contrastava as ideias filosóficas de René Descartes (1596-1650) e Isaac Newton (1642-1727) e, com isto, recebeu o grau de mestre em Filosofia.

Nesse meio tempo, Euler estudava matemática por gosto e teologia por vontade paterna. A proximidade com a família Bernoulli perdurava e isso fez com que Johann Bernoulli observasse cada vez mais o exímio talento de Euler para a matemática e interveio junto ao pai do Euler para que deixasse o seu filho seguir as suas próprias inclinações, pois teria uma grande carreira a ser seguida na Matemática.

A intervenção de Bernoulli teve sucesso e Euler deu prosseguimento aos seus estudos, obtendo seu título de doutor, em 1726, pela Universidade de Basileia. Dentre as obras mais estudadas por ele nesse tempo encontram-se textos de Pierre Varignon (1654-1722), René Descartes, Isaac Newton, Galileu Galilei (1564-1642), Frans van Schooten (1615-1660), Jacob Bernoulli (1654-1705), Jacob Herman (1678-1733), Brook Taylor (1685-1731) e Peter Wallis (1661-1703). (COTA, 2011, p. 18).

Também deu início em 1726 às suas produções, tendo como primeira publicação um trabalho sobre as curvas isócronas em um meio resistente. Em 1727, Euler participou do Grande Prêmio, da Academia de Paris, sendo que o problema em questão era encontrar a melhor maneira de dispor os mastros de um navio. Nesse ano, ele tirou o segundo lugar, perdendo somente para Pierre Bouguer (1698-1758). Este, posteriormente, ficou conhecido como “pai da arquitetura naval”. Durante sua vida, Euler ganhou doze vezes o Grande Prêmio.

No início do século XVIII, a Academia de São Petersburgo, na Rússia, buscava novos colaboradores e nesse período, o jovem Euler procurava um emprego. De forma

prematura, em julho de 1726, seu amigo Nikolaus, filho de Johann Bernoulli, morreu em decorrência de uma apendicite. Daniel, irmão de Johann, assumiu a cadeira que ele ocupava na Academia de Ciências de São Petersburgo e recomendou a sua vaga, na mesma Academia, de Fisiologia à Euler, de quem era amigo.

Como o objetivo de Euler era a cadeira de Física na Universidade de Basileia, recusou a vaga, pois, se a aceitasse, não teria tempo para estudar os tópicos do seu novo trabalho. Candidatou-se para a cadeira de Física, escrevendo um artigo sobre acústica, de grande qualidade, porém por causa da pouca idade, não foi escolhido.



Figura 4: Leonard Euler
Fonte: (LEÔNCIO, 2013, p.19)

Como não conseguiu a vaga pretendida na Universidade de Basileia, Euler aceitou a proposta de Daniel para ministrar as disciplinas de fisiologia e anatomia no departamento de Medicina da Universidade de São Petersburgo. Ele pôs-se a estudar tais disciplinas e começou a fazer a análise da função auditiva, culminando em uma série de pesquisas relativas ao som, numa visão físico-matemática. Além disso, Euler também trabalhou, paralelamente, como tenente médico na Marinha russa.

Em 1733, Daniel Bernoulli deixou a Academia de São Petersburgo para regressar a Basileia. Euler assumiu a vaga de Daniel, tornando-se, aos 26 anos, o principal matemático da academia, melhorando de vida financeiramente e podendo se dedicar às pesquisas na área de matemática. Com melhores condições, Euler se casou em 7 de novembro de 1734 com

Katharina Gsell (1707-1773), filha do pintor George Gsell, professor do ginásio associado à Academia. Eles tiveram 13 (treze) filhos, mas apenas 5 (cinco) sobreviveram.

Nesse mesmo tempo na academia havia a edição periódica de uma revista científica chamada *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, na qual Euler publicou inúmeros artigos. Dentre esses trabalhos, ele ficou famoso com o artigo “Problema de Basileia” (1735), o qual consistia em somar a série infinita dos inversos dos quadrados. Já no período de 1736-1737, publicou o seu livro *Mechanica*, o qual apresentou extensivamente a dinâmica newtoniana na forma de análise matemática pela primeira vez. Euler demonstrou um novo método analítico para lidar com o problema, o que permitiu somar todas as séries infinitas do mesmo tipo em que o expoente é um número par, dispondo assim o fim ao formato geométrico da mecânica e introduzindo a análise matemática, ou melhor, as equações diferenciais.

Por volta de 1740, Euler, por ganhar por três anos consecutivos o prêmio anual da Academia de Paris, começou a ganhar fama em toda a Europa. Essa competição científica era a mais notável do século XVIII. Euler produziu trabalhos fundamentais nas mais diversas áreas das ciências exatas, tais como: teoria dos números, séries, cálculo de variações, mecânica, teoria dos grafos, entre outros. Vale destacar também que ele realizou importantes contribuições para a matemática moderna referente à notação, especialmente para a análise matemática.

Toda essa atuação de Euler chamou a atenção da Academia de Berlim, mais especificamente, de Frederico, o Grande (1712-1786), da Prússia. Ele convidou Euler para assumir um cargo na Academia de Ciências de Berlim. Inicialmente, Euler recusou o convite. Depois de um tempo, porém, ele viu que a vida na Rússia para os estrangeiros não estava fácil, devido às turbulências políticas existentes e depois de reconsiderar o convite, deixou São Petersburgo em 19 de junho de 1741, chegando a Berlim em 25 de julho do mesmo ano.



Figura 5: Mapa da Alemanha.
Fonte: Portal São Francisco, 2016.

Com sua chegada em Berlim, Euler manteve-se produtivo. Em 25 (vinte e cinco) anos nessa cidade, escreveu 380 (trezentos e oitenta) artigos, 3 (três) livros de análise matemática e uma publicação científica popular intitulada *Cartas de Euler sobre diferentes assuntos da Filosofia Natural para uma princesa alemã*.

Embora o cargo dentro da Academia de Berlim consumisse bastante o seu tempo, Euler conseguia conciliar com os estudos referentes à análise infinita e a mecânica. Também desenvolveu a parte mais importante de sua pesquisa em astronomia, óptica e balística, bem como estudos sobre eletricidade e magnetismo.

Outro marco de Euler durante sua residência em Berlim foi a publicação do livro intitulado: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes* (1744). Nesse livro, ele apresentou o cálculo de variações clássicas em seu estágio inicial, onde determinou a busca pelo máximo e o mínimo do comprimento das curvas no plano, caso existissem, para quaisquer valores da integral.

Em 1766, Euler retornou a São Petersburgo, quando descobriu que estava perdendo a visão do olho esquerdo, em virtude de uma catarata. Embora pudesse pensar que esse fato o privaria de seus afazeres, isso não ocorreu. Euler começou a se preparar para a sua cegueira, treinando formas de escrever seus trabalhos através de ditados feitos aos seus filhos Johann Albrecht (1734-1800) e Christoph (1743-?), ao seu assistente, Nicolas Fuss e contou também com o auxílio dado por membros da academia, como W. L. Krat (? -?) e A. J. Lexell (1740-1784). Segundo Fuss (1783), Euler chegou a fazer uma cirurgia de catarata, que foi

bem sucedida, chegando a restaurar a visão do matemático. Infelizmente, não houve um cuidado maior durante o pós-operatório, acarretando na perda total da visão.

Cota (2011) destaca que: Os últimos anos de Euler foram calmos e pacíficos. Apesar das doenças advindas por causa da idade avançada, ele dedicou o resto de sua vida aos seus estudos científicos e à sua família, que o acompanhou até os últimos dias de vida. No dia 18 de setembro de 1783, aos 73 anos, Euler veio a falecer em São Petersburgo, depois de sofrer um acidente vascular cerebral. Ele foi enterrado junto da sua esposa no Cemitério Luterano de Smolensk, em Vasilievsky Island.



Figura 6: Mapa da Rússia

Fonte: http://www.ambergh.com/img/maps/map_russia2.gif

2.2 As Trilhas de Euler e o Reflexo nas Ciências, uma Teoria Universal: Os Grafos.

Os trabalhos de Euler tem sua relevância por ter sido o originador de uma das teorias matemáticas mais usadas no campo científico, que foi a teoria dos grafos, abaixo descreveremos sua relevância em outras áreas do conhecimento. As aplicações que mostraremos a seguir, é baseado no trabalho apresentado em História da Matemática pra Professores, das professoras Maria Terezinha Gaspar e Sueli Mauro.

2.2.1. Rede de Telecomunicações

Uma rede de telecomunicações é um meio de seletivamente conectar um ponto a outro. Sua estrutura pode ser, portanto, representada por um grafo nos quais os pontos suscetíveis a uma conexão direta são representadas por vértices adjacentes. Todas as estações terminais podem ser conectadas, mas quase todas as conexões são realizadas indiretamente via pontos intermediários; o grafo é portanto, grande e complexo mas, é um grafo conectado.

Esta representação se aplica tanto a uma rede nacional quanto a um pequeno quadro de interruptores.

O grafo de uma rede pode ser utilizado como um veículo para estudar propriedades estruturais, seu caminho apropriado é algoritmos de controle, e suas probabilidades de congestionamento.

2.2.2 Aplicações à Química

No desenvolvimento da teoria dos grafos e da química moderna, a cerca de dois séculos, muitos pontos comuns são evidentes. Problemas químicos podem ser estudados utilizando a teoria dos grafos.

A mais antiga aplicação da teoria dos grafos em química diz respeito a representação por grafos de elementos químicos considerados isolados de seu comportamento. O fato de que a fórmula constitucional da química é de fato um tipo especial de grafo, foi primeiro apontada pelos matemáticos Sylvester e Cayley. Ambos, perceberam que um grafo químico dá uma representação da estrutura topológica de um elemento, com vértices representando átomos individuais e as arestas representando as ligações que um átomo pode realizar com outros átomos(valencia).

2.2.3 Aplicações às Ciências Sociais

Uma aplicação típica da teoria dos grafos às ciências sociais é o uso do grafo para modelar relações entre variáveis. As variáveis podem ser pessoas, nações, comparação de objetos, conceitos e assim por diante, e estas são consideradas como vértices. Uma certa relação entre variáveis é descrita ligando os diferentes vértices (variáveis) por segmentos para formar um grafo.

2.2.4 Aplicações à Arquitetura

O sistema de rodovias de uma cidade pode ser representado por uma rede em que a análise de fluxo e de capacidade podem ser aplicadas.

O desenho do sistema de circulação em um prédio é um problema semelhante. Em uma construção complexa, o sistema de circulação consiste de uma série de corredores e paredes que podem ser representadas por lados de um mapa plano. Um desenho objetivo pode ser para minimizar o custo de circulação na construção. Como por exemplo, em hospitais.

2.2.5 Aplicações à Linguística

Em meados de 1950 o uso da matemática na pesquisa da estrutura da língua materna tornou-se estabelecida. Desde então, as relações entre matemática e linguística tem

se tornado diversificada em termos de ambas as áreas. Várias aplicações da teoria dos grafos á linguística tem sido colocadas.

Em vários níveis de linguagem, linguística diz respeito a um certo conjunto de unidades e a certas sequências ou “ligações” compostas destas unidades; por exemplo, nós podemos tomar a forma da palavra como nossa unidade de linguagem e sentenças como ligações compostas destas unidades. É verdade que nem toda ligação entre palavras formam uma sentença, e fato de que nem todas as ligações entre palavras são linguisticamente aceitáveis dá a oportunidade para a construção de várias interpretações linguísticas para os grafos.

3 DISCUSSÕES ACERCA DO ARTIGO E53 DE EULER E SUA TRADUÇÃO

No artigo *Uma nota histórica: Artigo de Euler sobre as setes pontes de Königsberg* dos autores: Horst Sachs, Michael Stiebitz, Robin J. Wilson traz algumas discussões pertinentes ao nosso trabalho, esse artigo foi publicado no Inglês, usamos um tradutor eletrônico para fazer a tradução.

Os autores apontam que, neste trabalho, Euler formula as condições necessárias e suficientes em que dado qualquer arranjo de ilhas e pontes, é possível encontrar uma trilha que conectado cada uma das pontes as ilhas, consigamos passar exatamente uma única vez. Euler discuti a solução, mas não prova a suficiência de suas condições: uma prova válida de suficiência não foi publicada até 1873. Entre essas discussões de validade do trabalho, é que estar nossa ideia com esse capítulo, apresentar as discussões geradas no entorno do problema das pontes.

Nos trabalhos que lemos, é observada a preocupação dos autores em descobrir como Euler tornou-se ciente do problema de Königsberg e por que isso o intrigava. Embora tenhamos sido capazes de descobrir a história completa, temos encontrado algumas cartas de correspondência de Euler que lançar alguma luz sobre o seu envolvimento com ele.

Um tema persistente correndo através da correspondência é a preocupação de Euler com a geometria da posição. Em 1679 Leibniz havia declarado.

Não estou satisfeito com álgebra, em que produz as provas mais curtas provas, nem as mais belas construções da geometria. Em vista disso. Considero que precisamos de mais um tipo de análise, geométrica ou linear, que lida diretamente com a posição, como ofertas de álgebra com magnitude. (SACHS, STIEBITZ, WILSON, 1988, p.1)

Embora Leibniz estivesse provavelmente antecipando análise vetorial, quando ele escreveu isso, Ele foi amplamente interpretado como se referindo a temas que hoje consideramos "topológico". Em particular, Euler e outros consideraram o problema de Königsberg como um problema de geometria posição.

Algumas cartas publicadas por Hopkins e Wilson (2004), discuti sobre o assunto, onde apontam que Carl Leonhard Gottlieb Ehler, foi o prefeito de Danzig, na Prússia (agora Gdansk em Polónia), uns 80 km a Oeste de Königsberg. Correspondeu-se com Euler de 1735 á 1742, agindo como intermediário para Heinrich Kuhn, um professor de matemática local. Seus comunicados iniciais não foram recuperados, mas indica uma carta de 9 de março de 1736. Eles tinham discutindo o problema e sua relação com o cálculo de posição:

Você tornaria a mim e ao nosso amigo Kuhn um valioso serviço, colocando - nos muito em dívida, a maioria aprendeu senhor, se você nos enviar a solução, o que você sabe bem, para o problema das sete pontes Königsberg, juntamente com uma prova. Ele iria provar para ser um excelente exemplo do cálculo de posição [Calculi

Situs],digno de seu grande gênio. Eu adicionei um esboço das pontes disse. (HOPKINS e WILSON, 2004, p.3).

Esta carta ressalta que Ehler e Euler já tinha trocado idéias sobre o problema de Königsberg, mas foram incapazes de localizar todas as referências anteriores.

37²⁵
*Rem et mihi et Kuhnio nostro praeparare gratias
 amam, omni officiorum genere deprecandam, Vir E
 ditissime, si Solutionem Problematis Tibi satis no
 de conjunctione 7 pontium Regiomontarorum
 cum Demonstratione transmittere velles. Egregi
 horum foret Calculi Situs specimen, ingenio tuo
 quisissimum. Adjeci Schema situs dictorum pontium*

Figura 7: Carta trocada de Ehler e Euler

Fonte: Na Historical Note: Euler's Königsberg Letters, 1988, p.2.

Euler respondeu á Ehler em 3 de abril de 1736, de linear mais claramente sua própria atitude para o problema e sua solução:

... Assim você vê mais nobre senhor, como este tipo de solução tem pouca relação com matemática e eu não entendo por que você espera de um matemático para produzi-lo, ao invés de qualquer outra pessoa, para a solução é baseada na razão sozinho, e sua descoberta faz não depender de qualquer princípio matemática. Devido a isso, não sei por que perguntas que tenha tão pouca relação com a matemática são resolvidas mais rapidamente por matemáticos do que por outros. Entretanto, o mais nobre senhor, você atribui esta pergunta á geometria de posição, mas eu sou ignorante sobre o que esta nova disciplina envolve e sobre quais tipos de problema de Leibniz e Wolff esperava ver expressa desta forma. (HOPKINS e WILSON, 2004, p.4).

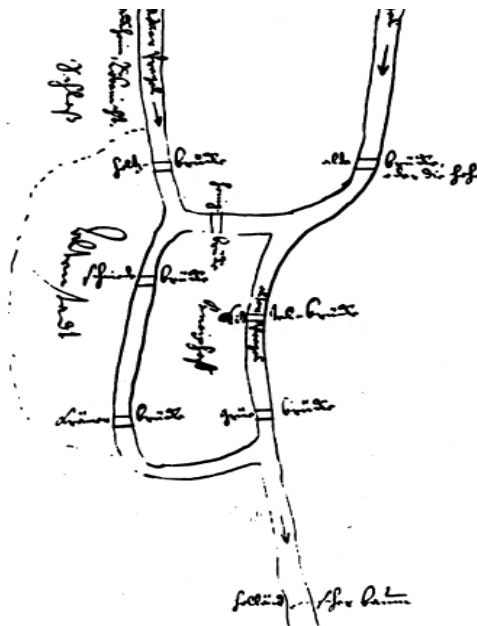


Figura 8: Carta de Ehler á Euler

Fonte: The Truth about Königsberg, 2004, p. 3

Na mesma época, em 13 de março de 1736, Euler escreveu a Giovanni Marinoni, um italiano matemático e engenheiro que viveu em Viena e foi Court Astronomer no Tribunal de Kaiser Leopold. Ele apresentou o problema da seguinte forma

Um problema foi colocado para mim sobre uma ilha na cidade de Königsberg, rodeado por um rio atravessado por sete pontes, perguntaram-me se alguém podia atravessar ou separar pontes em uma caminhada conectada de forma a que cada ponte é atravessada apenas uma vez. Fui informado que, até então, ninguém tinha demonstrado a possibilidade de fazer isto, ou mostra que é impossível. Esta pergunta é tão banal, mas pareceu-me digno de atenção no que a geometria, álgebra, nem mesmo a arte de contagem foi suficiente para resolvê-lo. Em vista disso, ocorreu-me a perguntar – me se pertenceu á geometria de posição [geometriam Situs], que Leibniz tinha uma vez que tanto almejava. E assim, depois de alguma de liberação, obtive uma regra simples, mas completamente estabelecida, com quem ajuda um pode decidir imediatamente para todos os exemplos deste tipo, com qualquer número de pontes em qualquer acordo, se tal uma ida e volta é possível, ou não (HOPKINS e WILSON , 2004, p .4).



Figura 9: Carta de Marioni á Euler
Fonte: The Truth about Königsberg, 2004, p. 4

Apesar das observações acima, Euler considerou o problema suficientemente importante para escrever um artigo sobre isso. Este foi a sua célebre construção de 1736,

mencionado na introdução. Neste trabalho, ele expressamente atribuiu ao problema de Königsberg ao da geometria de posição, tal como se segue:

1. Em adição a esse ramo da geometria que se preocupa com distâncias, e que sempre tem recebido a maior atenção, há um outro ramo, até então quase desconhecido. Que Leibniz menciona pela primeira vez, chamando-o geometria de posição. Este ramo refere-se apenas a determinação da posição e suas propriedades; Que não envolve distâncias, nem cálculos feitos com eles. Isso ainda não foi satisfatoriamente determinado que tipo de problema é relevantes para essa geometria de posição, ou que método deve ser utilizados para resolvê-la. Portanto, quando um problema foi recentemente mencionado como sendo de ordem geométrica, mas foi construído de tal forma que não exigiu a medição das distâncias, não fiz nenhum cálculo que pudesse ajudar na resolução. Eu não tinha dúvida de que isto estivesse relacionado com a geometria de posição, especialmente com soluções envolvendo uma única posição, e nenhum cálculo foi de utilidade. Por isso, decidi dar aqui o método que eu descobri para resolver este tipo de problemas, como por exemplo, da geometria da posição. 2. O problema, que me disseram é amplamente conhecido, é a seguinte: em Königsberg. (SACHS, STIEBITZ, WILSON, 1988, p.3)

Nas cartas descritas acima, notamos que antes de Euler assumir a academia de ciências da Rússia, outros matemáticos já haviam iniciado estudos sobre uma possibilidade de solucionar o então problema das sete pontes Königsberg.

Brian Hopkins e Robin J. Wilson em seu artigo “verdades sobre Königsberg” aponta que Euler não fez a solução: Se você olhar em alguns livros sobre matemática recreativa, ouvirá sobre a teoria dos grafos. Quem deveria saber melhor? Você vai aprender que Leonhard Euler investigou o problema das pontes de Königsberg desenhando um grafo da cidade, como na figura. Com vértices que representa cada uma das áreas de terra das quatro bordas representando cada uma das sete pontes. O problema consiste em depois de encontrar uma trilha neste grafo, precisa-se criar um caminho que percorra todas as bordas uma só vez.

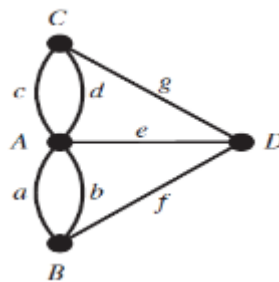


Figura 10: Diagrama dos Grafos
Fonte: The Truth about Königsberg, 2004, p.2

“Mas Euler não desenha o grafo da figura 3, grafo deste tipo não foi feito em seu primeiro contato até a metade do século XIX. Então o que Euler fez ?” (HOPKINS, WILSON, 2004, p.2).

3.1 Solução de um Problema Pertinente à Geometria de Posição

Esta é uma tradução fiel do artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, escrito em 1735, apresentado para publicação em 1736, e impresso em 1741 nos *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 8, pp. 128-140, de autoria do Matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). O artigo se encontra publicado também nas *Opera Omnia*: Série 1, Volume 7, pp. 1 – 10, foi traduzido para o português por: Frederico José Andries Lopes, 2013. Esta tradução foi feita em 21 seções que será descrita abaixo.

§. 1. Além daquela parte da Geometria que se ocupa de quantidades e que tem sido cultivada em todos os tempos com sumo zelo, existe outra ainda hoje bastante desconhecida, da qual Leibniz foi o primeiro a fazer menção, a qual chamou de Geometria de posição. Foi por ele estabelecido que essa parte se ocupe apenas com a determinação da posição e com a descoberta das propriedades da posição; nela não devem ser consideradas quantidades nem ser utilizado o cálculo de quantidades. No entanto, não estão suficientemente definidas quais espécies de problemas se relacionam a esta Geometria de posição, e qual método é necessário empregar em sua resolução. Por isso, quando ultimamente é feita menção a algum problema que parece ser de geometria, mas quando examinado com atenção não requer determinação de quantidades nem admite solução com auxílio do cálculo de quantidades, não tive dúvidas de referi-lo à geometria de posição, principalmente quando em sua resolução é considerada apenas a posição e nenhum cálculo direto é empregado. Decidi, portanto, expor aqui um método que criei para resolver problemas desse gênero, como um tipo de Geometria de posição.

§. 2. Esse problema, dito a mim ser bastante conhecido, era o seguinte: existe uma ilha em Königsberg, na Prússia, dita der Kneiphof, e que o rio que a cerca é dividido em dois ramos, como se pode ver na figura. Sobre os ramos deste rio foram construídas sete pontes, a, b, c, d, e, f e g, e acerca dessas pontes era proposta a questão, se alguém poderia estabelecer um curso tal que passe por cada uma das pontes uma vez e não mais que uma vez. Disseram-me que uns negam, outros duvidam, e que ninguém afirma que isso possa ser feito. A partir disso, formulei em seguida o problema com a máxima generalidade: qualquer que seja a figura do rio e sua distribuição em ramos, e qualquer que seja o número de pontes, descobrir se é possível passar ou não sobre cada ponte uma só vez.

§. 3. O que de fato diz respeito ao problema das sete pontes de Königsberg é que ele pode ser resolvido com a total enumeração de todos os cursos que podem ser estabelecidos. Com isso, saberíamos se algum curso viria a satisfazer o problema ou não. Mas esse modo de resolução

seria demasiadamente difícil e trabalhoso por causa do grande número de combinações, e em outras questões com muito mais pontes certamente não poderia ser empregado. Além disso, se essa operação fosse assim levada a cabo, seriam encontradas muitas coisas que não estavam no problema, o que sem dúvida seria a origem de grande dificuldade. Por isso, tendo deixado esse método de lado, procurei outro que não faria mais do que mostrar se tal caminho pode ser feito ou não, pois suspeitei que tal método fosse muito mais simples.

§. 4. Todo o meu método repousa na adequada designação de cada trânsito pelas pontes, para o que utilizo as letras maiúsculas A, B, C, D, atribuídas a cada região separada pelo rio. Assim, se alguém migra da região A para a B pela ponte a ou b, denoto esse trânsito pelas letras AB, das quais a primeira mostra a região de onde veio o viajor, e a segunda dá a região aonde chega depois de atravessada uma ponte. Se, logo a seguir, o viajor sai da região B para a região D pela ponte f, este trânsito será representado pelas letras BD. Denoto, porém, dois trânsitos AB e BD, feitos sucessivamente, pelas três letras ABD somente, porque a letra do meio, B, designa tanto a região na qual o primeiro trânsito chega quanto a região da qual o segundo trânsito sai.

§. 5. De modo semelhante, se o viajor avança da região D para a região C pela ponte g, denotarei esses três trânsitos feitos sucessivamente pelas quatro letras ABDC. Dessas quatro letras, ABDC, será entendido que o viajor, primeiro na região A, migrou para a região B e daí partiu para a região D, e depois, por fim, partiu dessa para a região C. Como essas regiões estão mutuamente separadas entre si pelo rio, é necessário que o viajor passe por três pontes. Assim, os trânsitos feitos sucessivamente por quatro pontes serão denotados por cinco letras; e se o viajor passa por um número qualquer de pontes, sua migração será denotada por um número de letras maior em uma unidade do que o número de pontes. Por essa razão, para designar o trânsito por sete pontes são requeridas oito letras.

§. 6. Com essa maneira de designação, não atento por quais pontes o trânsito é feito. Se esse trânsito pode ser feito de uma região em outra por várias pontes, a designação será a mesma, indicando apenas a região de chegada. Entende-se disso que se o curso pode ser feito pelas sete pontes da figura de tal maneira que passe por cada uma somente uma vez, e por nenhuma duas vezes, esse curso pode ser representado por oito letras, e essas letras devem ser dispostas de tal maneira que a sucessão imediata das letras A e B ocorra duas vezes, porque há duas pontes a e b ligando essas duas regiões A e B; também a sucessão das letras A e C deve ocorrer duas vezes nessa série de oito letras; e ainda, a sucessão das letras A e D deve ocorrer uma vez; e do mesmo modo, é necessário que ocorra uma vez a sucessão das letras B e D, e também a das letras C e D.

§. 7. A questão, portanto, reduz-se a que se formem com as quatro letras A, B, C, e D, uma série de oito letras na qual todas aquelas sucessões ocorram tantas vezes quantas forem exigidas. Mas antes de envidar esforços em tal disposição, convém mostrar se tal maneira de dispuser essas letras é possível ou não. Pois se puder ser demonstrado que tal disposição não pode de todo ocorrer, será inútil todo trabalho despendido para tal. Por essa razão, investiguei uma regra, com a ajuda da qual possa ser facilmente discernido, tanto para essa questão quanto para todas outras semelhantes, se tal disposição de letras possa existir.

§. 8. Considero, para encontrar tal regra, uma única região A, para a qual conduza um número qualquer de pontes a, b, c, d, etc. Dessas pontes, observo primeiro uma única, a, que conduz à região A. Agora, se o viajante passa por essa ponte, então deve ter estado na região A antes do trânsito, ou chega a A depois do trânsito. Assim, na maneira de designar o trânsito acima estabelecido, é necessário que a letra A ocorra uma vez. Se três pontes, digamos, a, b, c, levam à região A, e o viajante passa por todas as três, então, na designação de sua migração, a letra A ocorrerá duas vezes, seja com início do curso em A ou não. De modo semelhante, se cinco pontes conduzem a A, na designação do trânsito por todas elas a letra A deve ocorrer três vezes. E se o número de pontes for um número ímpar qualquer, e se a esse número for acrescentada uma unidade, sua metade dará quantas vezes a letra A deve ocorrer.

§. 9. Assim, no caso da travessia das pontes de Königsberg, porque cinco pontes, a, b, c, d, e, levam à ilha A, é necessário que na designação do trânsito por essas pontes a letra A ocorra três vezes. E que a letra B deve ocorrer duas vezes, porque três pontes conduzem à região B. De modo semelhante, a letra D deve ocorrer duas vezes, e também duas vezes a letra C. Portanto, na série de oito letras, com as quais o trânsito por sete pontes deverá ser designado, a letra A deverá estar presentes três vezes, e as letras B, C e D duas vezes cada uma. Mas isso não pode ser feito de forma alguma em uma série de oito letras. Disso fica claro, que tal trânsito não pode ser feito pelas sete pontes de Königsberg.

§. 10. De modo semelhante sobre todos os outros casos. Se o número de pontes que conduzem a uma região qualquer for ímpar, é possível julgar se o trânsito pode ser feito uma só vez através de cada uma. Pois se ocorre que a soma de todas as vezes que cada letra deve ocorrer for igual ao número de todas as pontes aumentado em uma unidade, então tal trânsito pode ser feito. Se, do contrário, como acontece em nosso exemplo, à soma de todas às vezes for maior que o número de pontes aumentado em uma unidade, então tal trânsito não pode, de forma alguma, ser feito. A regra que dei para encontrar o número de vezes de A, a partir do número de pontes que levam a A, vale igualmente para todas as pontes que partem ou de uma só

região B, como se vê na figura, ou a partir de várias. Considerando apenas a região A, pergunto quantas vezes à letra A deve ocorrer.

§. 11. Mas, porém, se o número de pontes que levam à região A for par, então é preciso observar, acerca do trânsito feito através de cada uma, se no início o viajor começará seu curso a partir da região A ou não. Pois se duas pontes levam à região A, e o viajor começa seu curso a partir de A, então a letra A deve ocorrer duas vezes, pois deve aparecer uma vez na designação da saída de A por uma ponte, e uma vez também na designação do retorno pela outra ponte. Mas se o viajor começa o curso a partir de outra região, então a letra A ocorrerá apenas uma vez, pois, uma vez posta na sequência, ela determinará tanto a chegada quanto a saída de A, como estabeleci na designação de tal curso.

§. 12. Conduzam-se agora quatro pontes para a região A, e que o viajor comece seu curso a partir da região A. Assim, na designação de todo o curso, a letra A deverá aparecer três vezes, se ele passar por cada ponte uma só vez. Mas se ele começar a andar a partir de outra região, então a letra A ocorrerá apenas duas vezes. Se seis pontes conduzem à região A, e se o início do curso é tomado a partir de A, então a letra A ocorrerá quatro vezes; mas se o viajor não partir de A, então a letra A deverá ocorrer apenas três vezes. Assim, como regra geral, se o número de pontes for par, a metade desse número dará o número de vezes que a letra A deve ocorrer, se o início do curso não começar em A. E a metade aumentada em uma unidade dará o número de vezes que a letra A deve ocorrer, com início do curso tomado a partir da região A.

§. 13. Porque em tal curso o início se dá apenas a partir de uma só região, defino a partir do número de pontes que levam a uma região, o número de vezes que uma letra que denota uma região deve ocorrer como a metade da soma do número de pontes aumentado em uma unidade, se o número de pontes for ímpar; e metade do número de pontes se este for par. Daí que se o número de todas às vezes se iguala ao número de pontes aumentado em uma unidade, então é possível o trânsito desejado, tomando-se o início a partir da região à qual leva um número ímpar de pontes. Mas se, por outro lado, o número de todas às vezes for menor em uma unidade do que o número de pontes aumentado em uma unidade, então o trânsito é possível com início na região a qual conduz um número par de pontes, porque desse modo o número de vezes será aumentado em uma unidade.

§. 14. Portanto, dada qualquer figura de água e pontes, estabeleço o procedimento seguinte para investigar se alguém pode passar sobre cada ponte uma só vez. Primeiro, designo cada um das regiões separadas por água entre si com as letras A, B, C, etc. Segundo, somo o número de todas as pontes, aumento-o em uma unidade e o sobreescrevo sobre a coluna

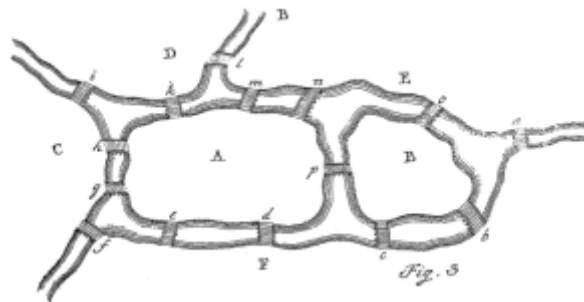
seguinte. Terceiro, do lado de cada letra A, B, C, etc., escreve o número de pontes que levam à região correspondente. Quarto marca com um asterisco as letras que têm números pares adscritos. Quinto escreve ao lado a metade de cada um desses números pares, e a metade de cada número ímpar aumentado em uma unidade. Sexto soma todos esses números escritos por último. Se essa soma for uma unidade menor ou igual ao número prefixado acima, então concludo que o trânsito desejado pode ser feito. Mas deve-se ter em mente que se a soma encontrada for uma unidade menor do que esse número, então o início da caminhada deve se dar a partir da região marcada com um asterisco, e a partir de uma região não marcada se a soma for igual a tal número. Assim, portanto, para o caso das pontes de Königsberg, o procedimento é o seguinte:

O número de pontes é 7; aumentado em uma unidade, é 8:

<i>Pontes</i>		
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Portanto, porque a soma dá mais do que 8, o trânsito não pode absolutamente ser feito.

§. 15. Sejam duas ilhas A e B circundadas por água, com a qual comunicam quatro rios, como mostra a figura.



Além disso, sejam quinze pontes a, b, c, d, etc., sobre a água que circunda as ilhas e sobre os rios. Pergunta-se se alguém pode instituir um curso que passe por todas as pontes, mas por nenhuma mais do que uma só vez. Primeiro, portanto, designo todas as regiões mutuamente separadas entre si pela água pelas letras A, B, C, D, E, F, de sorte que sejam seis regiões. Daí aumenta o número de pontes, 15, em uma unidade, escrevo a soma, 16, e passo à operação seguinte.

		16
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

Terceiro, escrevo as letras A, B, C, etc., uma por uma, e ponho ao lado de cada o número de pontes que levam àquela região: oito pontes levam a A, quatro a B, etc. Quarto nota com um asterisco as letras com números pares. Quinto, em uma terceira coluna, escrevo a metade dos números pares, e aumento os ímpares em uma unidade, colocando lá sua metade. Sexto adiciona cada número da terceira coluna e obtenho a soma 16. Segue-se que o trânsito pode ser feito, mas somente se o curso começar a partir ou da região D ou da E, pois essas não foram notadas com um asterisco. O curso, então, pode assim ser feito *EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoEID*, onde entre cada letra maiúscula coloquei a ponte pela qual passa o trânsito.

§. 16. Desta maneira, portanto, será fácil julgar, em um caso bastante complicado, se o trânsito pode ser feito ou não uma vez só por todas as pontes. No entanto, ainda apresentarei um modo muito mais fácil de o saber, um que se deriva facilmente do modo apresentado, depois que eu tiver trazido à discussão as observações seguintes. Primeiro, observo que, somados todos os números de pontes adscritos às letras A, B, C, o resultado é duas vezes maior que todo o número de pontes. A razão disto é que nesse cômputo, no qual são numeradas todas as pontes que conduzem em uma data região, cada ponte é numerada duas vezes, pois cada ponte se refere a uma e a outra região que une.

§. 17. Segue-se, portanto, dessa observação que a soma de todas as pontes, que conduzem a cada uma das regiões, é um número par, porque sua metade é igual ao número de pontes. Portanto, não é possível que entre o número de pontes que levam em qualquer região haja um único número ímpar, nem também que três sejam ímpares, nem cinco, etc. Por isso, se alguns números de pontes adscritos às letras A, B, C, etc. são ímpares, é necessário que seu número seja par, assim como no exemplo de Königsberg eram quatro os números ímpares de pontes adscritos às letras das regiões A, B, C, D, como é possível ver no §. 14. Também no exemplo precedente, do §. 15 apenas dois são os números ímpares, adscritos às letras D e E.

§. 18. Como a soma de todos os números adjuntos às letras A, B, C, etc. é igual ao dobro do número de pontes, fica claro que aquela soma, aumentada em dois e dividida por dois, dá o número prefixo à operação. Se, portanto, todos os números adscritos às letras A, B, C, D, etc. forem pares, e se a metade de cada um for tomada para obter os números da terceira coluna, a soma destes números será uma unidade menor do que o número sobrescrito. Por isso, nesses casos o trânsito por todas as pontes sempre poderá ser feito. Pois em qualquer região que o curso se inicie, ela terá pontes em numero par que levam a si, como se requer. Assim poderá ser feito no exemplo de Königsberg, que alguém por todas as pontes passe duas vezes, como se cada ponte fosse dividida em duas, e o número de pontes que leva a qualquer região será par.

§. 19. Além disso, quando somente dois dos números opostos às letras são ímpares, e os outros pares o caminho exigido é possível contanto que ele comece em uma região, acessada por um numero ímpar de pontes. Nós tomamos a metade da cada número par, e igualmente metade de cada número ímpar após acrescentar um, como nosso procedimento requer; as somas destas metades será então uma a mais que o número de pontes, e, portanto igual ao número escrito no topo. Analogamente, onde quatro, seis ou oito, etc., a mais que o número no topo, como o caso deve ser, e, portanto, a jornada desejada é impossível.

§. 20. Portanto, para qualquer configuração que deva surgir o modo mais fácil de determinar se uma travessia de todas as pontes é possível é aplicar a seguinte regra: Se existe mais do que duas regiões que são acessadas por um número ímpar de pontes, nenhum caminho satisfazendo a condição desejada pode ser encontrado. Se, no entanto, existem apenas duas regiões com um número ímpar de pontes que dão acesso, o trajeto desejado pode ser completado contanto que ele se origine em uma das regiões. Se, finalmente, não existe nenhuma região com um número ímpar de pontes que dão acesso, o trajeto desejado pode ser efetuado, não importando onde ele começa. Esta regra resolve completamente o problema proposto.

§. 21. Após nós termos determinado que um caminho de fato existe, nós ficamos com o problema de como achá-lo. Para este fim a seguinte regra servirá: em todo lugar que seja possível eliminar mentalmente quaisquer duas pontes que conectam as mesmas duas regiões; isto normalmente reduz o número de pontes consideravelmente. Então – e isto não deve ser difícil – passamos a traçar o caminho, uma vez que tenhamos encontrado, não será substancialmente afetado pela restauração das pontes que foram eliminadas da consideração – como um pouco de pensamento pode mostrar; portanto não acho que necessite dizer mais sobre como achar os caminhos.

A tradução em 21ª seção deste artigo é a parte mais significativa deste trabalho, pois é característica de uma discussão que apresentamos baseada em um problema original e histórico, o que caracteriza como uma discussão em torno de uma fonte primária.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE SOBRE TEORIA DOS GRAFOS

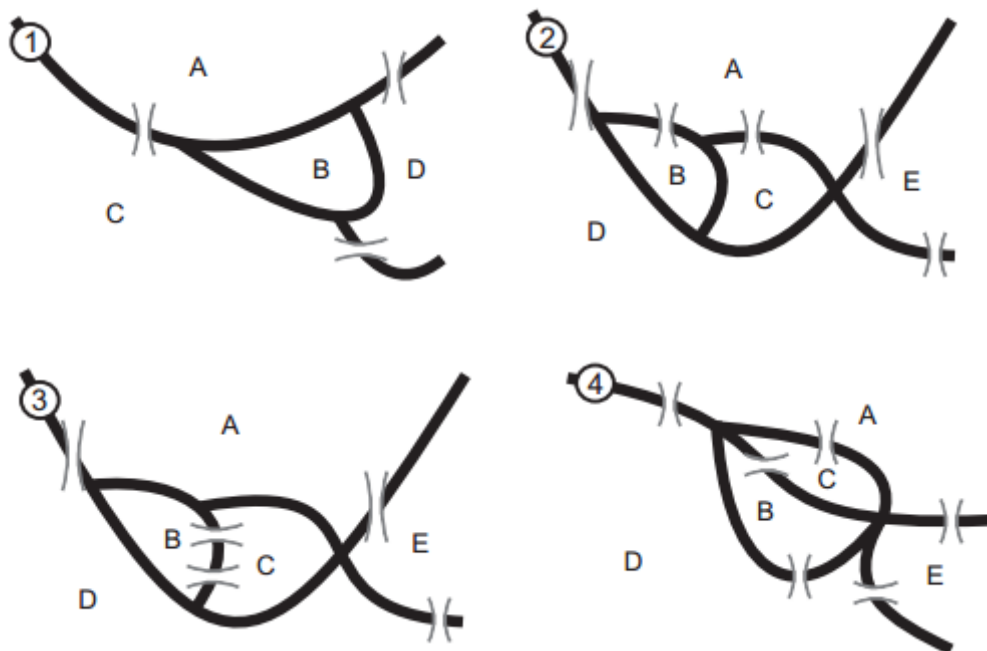
4.1 Caminhos Eulerianos

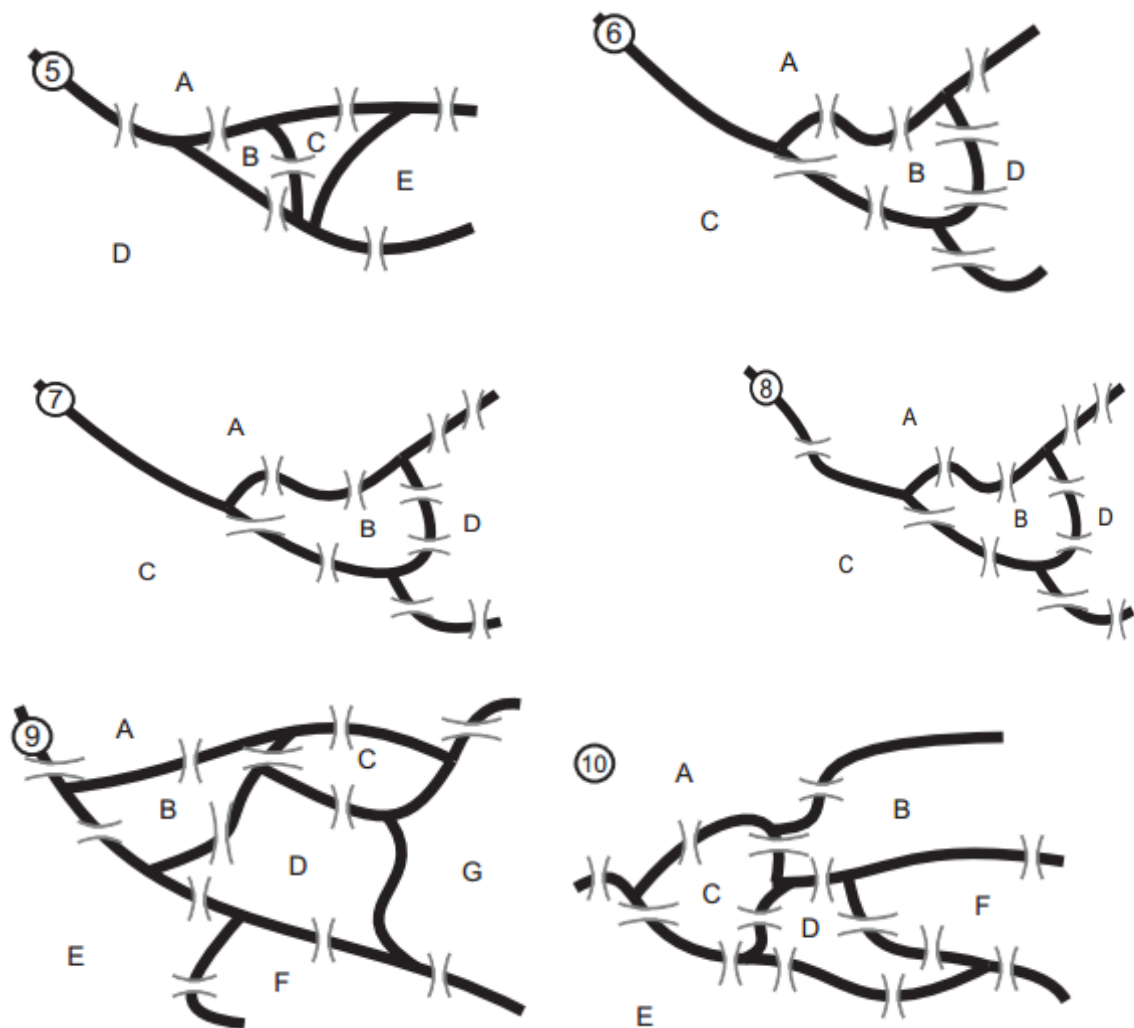
Dado um grafo, uma figura constituída de um número finito de arcos (ou curvas), chamadas “arcos” ou “arestas” do grafo, cujas extremidades são chamadas de “vértices” do grafo. Um mesmo vértice pode pertencer a vários arcos, e dois arcos só podem ter em comum um ou dois vértices de suas extremidades. As duas extremidades de um arco podem coincidir dando lugar a um único vértice.

Um caminho é chamado de caminho euleriano, ou E – caminho se ele percorre todos os lados do grafo uma única vez. Se o caminho euleriano começa e termina em um mesmo vértice então ele é chamado de um circuito euleriano.

As situações abaixo numeradas será discutida em um formato de oficina a ser trabalhada em uma turma de História da Matemática do IFPI/SRN, ela será responsável para conduzir o aluno a solução do problema das sete pontes de Königsberg, para isto é importante destacar que o pesquisador fez uma introdução na turma, a fim de exemplificar a aplicabilidade da atividade, mostrando o que deveria ser feito e os cuidados que os alunos tiveram com a tarefa.

O aluno para responder essa atividade terá que observar as instruções dadas pelo pesquisador e seguir os passos de resolução do problema.





Essas dez situações, será abordada através das tarefas abaixo.

Tarefa 1. Encontre um grafo que o represente.

A primeira tarefa, é esperado que o aluno represente ainda que de modo informal o conceito elementar de grafo, onde ele possa descrever os pontos fixos nas regiões planares e descrever um caminho ligando os dois.

Tarefa 2. Verifique se é possível encontrar um caminho que passa por todas as pontes uma única vez.

Nesta tarefa, o aluno irá arriscar-se e investigará nas imagens postas introdutoriamente, se é possível encontrar um caminho que passe por todas as pontes, será uma introdução lógica do que estamos querendo que ele perceba como o problema das sete pontes.

Tarefa 3. Use a notação de Euler para descrever todos os caminhos possíveis.

Fixado os grafos, esperamos que o aluno aponte em cada caso, todas as possibilidades de unir as regiões fixas, passando uma única vez por cada ponte, levando em consideração as paridades ou disparidades das pontes alocadas.

Tarefa 4. Encontre, se existir todos os caminhos eulerianos que começam e terminam na mesma região.

Aqui é esperado que os alunos estudassem cada caso isolado, levando em consideração toda descrição apontada na tarefa 3. Neste item especialmente deve se olhar para a quantidade de pontes conectadas por cada região para descrever com exatidão a existência ou não das possibilidades eulerianas.

Tarefa 5. Construa a seguinte tabela:

Regiões	N1	N2
A		
B		

Onde N1 é quantidade de grafos que partem da região correspondente na coluna 1.

$$N2 = \frac{N1}{2}, \text{ quando o N1 for par.}$$

$$N2 = \frac{N1+1}{2}, \text{ quando o N1 for ímpar.}$$

Esta atividade será a conexão de tudo que foi estudado anteriormente nas quatro atividades, pois ela possibilitará o aluno a alcançar os caminhos possíveis Eulerianos.

Tarefa 6. Some os números da coluna 3 e compare com o número total de pontes.

Nesta atividade espera-se que o aluno crie uma tabela para cada caso desenhado anteriormente, utilize as fórmulas para preencher as tabelas e em seguidas compare com o número de pontes.

Tarefa 7. Após as discussões apresentadas, calcule e comente ao final todos os caminhos possíveis do caso das pontes de Königsberg. Levando em consideração a imagem abaixo.



Figura 11: O problema de Königsberg ordenados por grafos

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=pontes+de+königsberg&biw=1366&bih=623&source>

Tarefa 8. Qual a conclusão que você teve?

Nesta tarefa, espera-se que o aluno use seus conhecimentos prévios das discussões anteriores apresentada nas atividades apresentadas e tenha convicção da solução do problema que estamos propondo, analisando os caminhos e concluindo que não há solução para o problema das pontes de Königsberg, pelo fato de todas as possibilidades que ligam as regiões firmes serem ímpares, como pode ser visto na imagem abaixo.

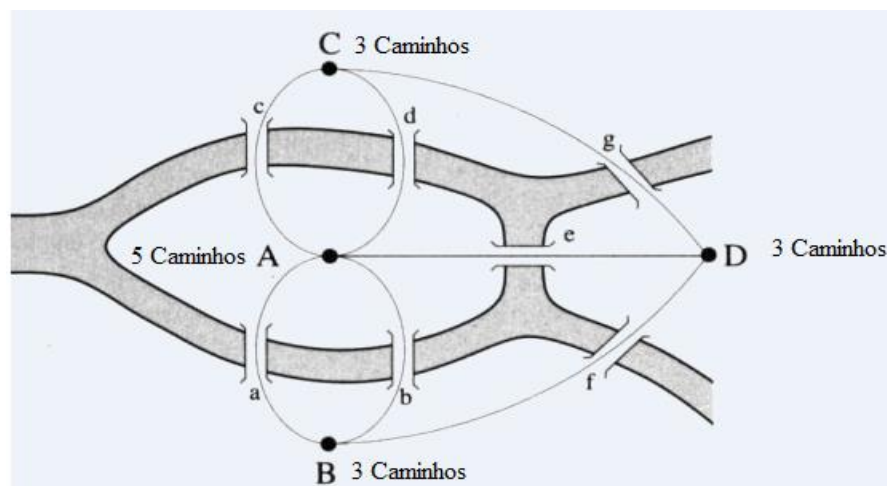


Figura 12: Caminhos Ímpares de Königsberg

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=pontes+de+königsberg&biw=1366>

Espera-se que ao final desta atividade pedagógica, o aluno tenha convicção de que não há solução para esse problema via de regra, pois tomado as regiões fixas A, B, C, D e E e traçando os grafos, percebe-se que não existe solução pois todos os pontos tomados são ímpares, porém se retirar uma ponte do lugar, tornando os meios pares mesmo que o início e o fim do circuito forem ímpares, ainda sim haverá uma solução. Outra ligação que fazemos é em relação às fórmulas para obtenção do N2, ao somar os elementos de uma coluna, o número

for equivalente ao número de pontes mais um, significa que há solução. Porém se o resultado der o número de pontes mais dois, não haverá uma solução e todos os grafos descreverão um caminho ímpar.

4.2 Análises da Aplicação do Trabalho

A atividade sobre Euler e o surgimento da teoria dos grafos, via resolução do problema das sete pontes de Königsberg, foi aplicada na turma de História da Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, campus São Raimundo Nonato, a referida turma é composta por 9 (nove) alunos, sendo que somente 8 alunos participaram da atividade.

Todas as atividades propostas despertaram muitas curiosidades na turma, aspectos como concentração, ansiedade pela resposta foram notado por mim enquanto pesquisador, outro relato comum foi apresentado pelos alunos, quando imposto a um problema histórico, pois muitos nunca haviam visto um problema daquela forma em uma abordagem pedagógica. Neste trabalho os alunos precisaram demonstrar um raciocínio lógico bem definido, o que ajudou a desenvolver suas habilidades na formulação de uma resposta. Sendo assim, a atividade proposta foi muito positiva, pois uniu dois recursos importantes para o ensino da Matemática, a história e a resolução de problemas.

No universo de 8 (oito) alunos que aceitaram participar da atividade, nenhum aluno conseguiu responder toda a atividade, ou seja, as 7 (sete) tarefas propostas pelo pesquisador, 3 (três) responderam 4(quatro) tarefas, 2(dois) responderam 3(três) tarefas, 2 (dois) responderam 2 (duas) tarefas, 1(uma) respondeu apenas uma tarefa.

Esses dados mostraremos no gráfico a seguir, onde traçamos um roteiro com abordagem de porcentagem para fazermos a discussão a seguir; Por exemplo os 3 alunos que fizeram quatro tarefas representam 37,5% do total de alunos, esses foram os que mais tempo permaneceram com a atividade veiculando uma forma de chegar a solução, percebemos que estes tiveram maior concentração e que mais argumentaram sobre as tarefas, foram os que tiveram mais dúvidas, porém foram os que mais acertaram de todo corpo discente da turma. O que mostra-nos a importância do professor estar trabalhando e modelando problemas relacionados com a história da Matemática.

Dois responderam três tarefas, isso equivale a 25 % dos alunos, a característica desse grupo, foi a imparcialidade, dificuldade de interpretação de um problema via sequência didática, este grupo de alunos mostraram se interessados, porém sem informações a acrescentar, uma vez que a atividade foge do escopo que é vista nos livros didático.

O que o aluno entendeu da sequência didática de grafos, essa foi uma das perguntas que inquietei comigo, pois dois alunos fizeram duas questões e um aluno fez uma questão. O que levou estes alunos a desistirem da atividade e não concluí-la, estes foram uma das inquietações que me deixou supresso. Atividades em que os alunos partem de um ponto e não chegam a uma resposta convicta imediata, é pouco aceitável pelos futuros professores em formação, e quando trata de uma abordagem histórica é que não é comum. Estes aspectos devem ser vistos como uma forma de entender alguns porquês da matemática.

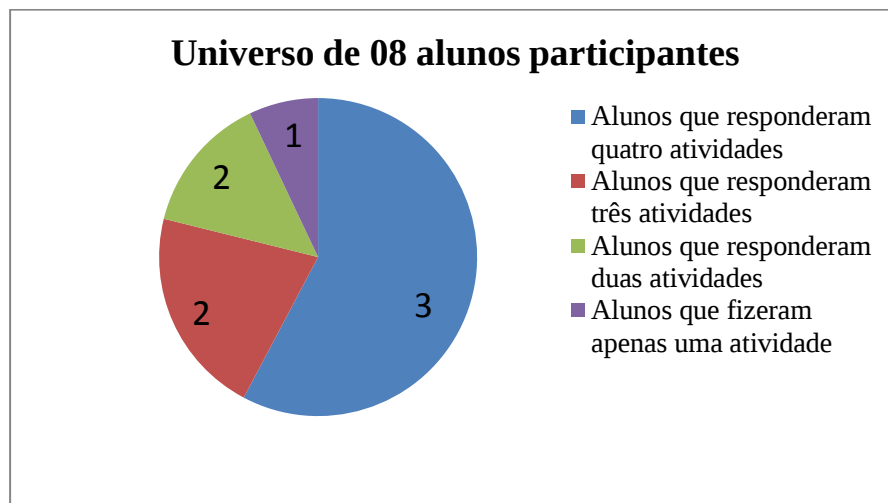


Gráfico 1: Teoria de participação
Fonte: Autor

Ao relatar como foi pensada a atividade, o que se esperava de cada tarefa, fizemos uma análise de relatos e dados coletados em sala na aplicação. Somos sabedores que o número de participantes foi pequeno, pois o número de estudantes da turma é muito pequeno. Porém desse minúsculo número de alunos, podemos alarmar nossa discussão apontando que nenhum aluno conseguiu descrever de forma clara o que era um grafo e como funcionava na prática a teoria de Euler, reflexo que seu deu quando analisamos as atividades e vimos que ninguém operacionalizou a atividade toda, e o número de erros foi mais superiores ao número de acertos, o que nos faz refletir sobre a natureza do problema.

Estes problemas são de natureza matemática ou não? A resposta é óbvia, sim! No entanto não foi isto que percebemos na apresentação da atividade, vimos uma sala de alunos com uma temática que para eles não eram matemáticas, não conseguiam fundamentar a temática exigida e muito menos fazer um paralelo com outros tópicos da matemática estudados anteriormente, o que dificultou a interpretação do problema e a sua resolução.

Na turma que trabalhamos a aplicação, vimos que nenhum aluno conseguiu fazer a tarefa 7, o famoso problema das pontes de Königsberg, e não chegaram a um caminho que propunha o problema nem a conclusão que não existia solução. É um fato atípico dos trabalhos acadêmicos, relatar um trabalho em que os alunos não tiveram êxito, porém relatamos aquilo que percebemos e constatamos da atividade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho abordamos um estudo sobre Euler e o surgimento da teoria dos grafos, via resolução do problema das sete pontes de Königsberg, resultado do seu artigo conhecido pelo número de Eneström E53, que privilegia os conceitos matemáticos abordados por Euler e a contextualização histórica dos seus estudos. Com esse estudo, discernimos algumas possibilidades de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de habilidades matemáticas, tais como: A formalização, a criatividade, a abstração e a comunicação das ideias matemáticas.

No presente trabalho, exploramos conhecimentos relacionados a teoria dos números e História da Matemática em cursos de formação de professores, área pouco explorada nos cursos de licenciatura em matemática, apresentamos assim algumas orientações pedagógicas através de tarefas que se apoiem na história da matemática como recurso incluso no currículo básico de matemática, supondo a participação geral do aluno e, construindo assim, um procedimento pedagógico em sala de aula que poderá favorecer o ensino e aprendizagem.

Dessa maneira, destacamos que nosso trabalho pode oferecer subsídios que ampliem as possibilidades matemáticas, históricas e pedagógicas da utilização dos conhecimentos das teorias dos grafo, verificando que trabalhar com a história da Matemática em sala de aula pode ampliar a visão de que a matemática não é algo fragmentado, visto que através dela o estudante descobre as ideias originais dos conteúdos, verificando que a Matemática é uma ciência que não nasceu hoje e principalmente, que ela possui uma razão maior para existir e que foi a necessidade humana que a fez surgir.

Vimos que o suporte que Euler criou para solucionar o trabalho das pontes de Königsberg foi importante para ele concluir que dar forma que as pontes estão arranjadas não é possível ter uma solução concreta, ou seja, não é possível uma pessoa sair de um ponto passar uma única vez por cada ponte e voltar ao seu estado inicial. Porém foram através da solução desse problema que foi criada uma grande teoria, os grafos.

Essa solução apresentada por Euler deu origem a outras investigações matemáticas; Em 1752, Euler demonstrou uma relação entre o número de arestas, vértices e faces de um grafo planar conexo. Essa relação é conhecida como Fórmula de Euler e é uma das mais conhecidas da matemática, e foi através do princípio da teoria dos grafos que surgiu essa relação.

Pela demonstração de Euler, vimos que se mudarmos uma ponte de lugar, tornando os caminhos do meio par, o problema tem uma solução no formato que ele foi proposto, o que nos fez concluir que se todos os caminhos forem pares, todos os problemas pra esses casos serão resolvidos facilmente pela teoria dos grafos, ou se os pontos de partidas forem ímpares e os pontos do meio par, também haverá solução.

Desse modo, esperamos com este trabalho, estar contribuindo efetivamente para entusiasmar os alunos no estudo da Matemática através de problemas da História, ajudando-os na busca de uma compreensão melhor do mundo em que vivem, desenvolvendo o espírito criativo, o raciocínio lógico e o modo de pensar matemático.

REFERÊNCIAS

AMBergh Education»Learn Russian». Disponível em:

<http://www.ambergh.com/img/maps/map_russia2.gif > Acesso em: 06/04/2016.

ARAÚJO, Adérito. **As pontes de Königsberg**, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/> > Acesso em: 15/02/16.

COTA, Andréia Caroline Silva (2011). **Euler e os números pentagonais**. 105 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **História da Matemática e Educação**. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.) Cadernos CEDES 40. Campinas: Papirus, 1996.

ESTRADA, M. F. **A história da matemática no ensino de matemática, Educação e Matemática**, Lisboa, n.27.p.17-20,3. trim 1993.

GASPAR, Maria Terezinha Jesus; MAURO, Sueli. **Contando a história da Matemática e ensinando Matemática**. Vitória: SBHMat, 2005.

HOPKINS, Brian and WILSON, Robin J., “**The Truth about Königsberg**”, The College Mathematics Journal, vol. 35, no. 3, pp. 198 – 207, May 2004.

LEÔNCIO, Sara Mara Silva (2013). **Os artigos de Euler sobre os números Amigáveis**. 134p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Mapa da cidade Kalinigrad. Disponível em:

<<http://cognosco.blogs.sapo.pt/arquivo/639806.html> > Acesso em: 21/01/2016.

MIGUEL, Antônio; BRITO, Arlete de Jesus. A história da Matemática na formação do professor de Matemática. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (org). **Cadernos. CEDES 40**. Campinas: Papirus, 1996.

NOBRE, S. Alguns “porquês” na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. In: Cadernos CEDES 40. **História e Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 1996, pp.29-35.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática uma Análise da Influência Francesa**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

R. J. Wilson, An Eulerian trail through Königsberg. *J. Graph Theory* 10 Clarendon Press, Oxford (1976) [paperback version, Oxford, 1986]. *Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8 (1736) 128- 140. (1963).und ohne Unterbrechnung zu umfahren. *Math. Ann.* 6 (1873) 30-32.(1986) 265-275.

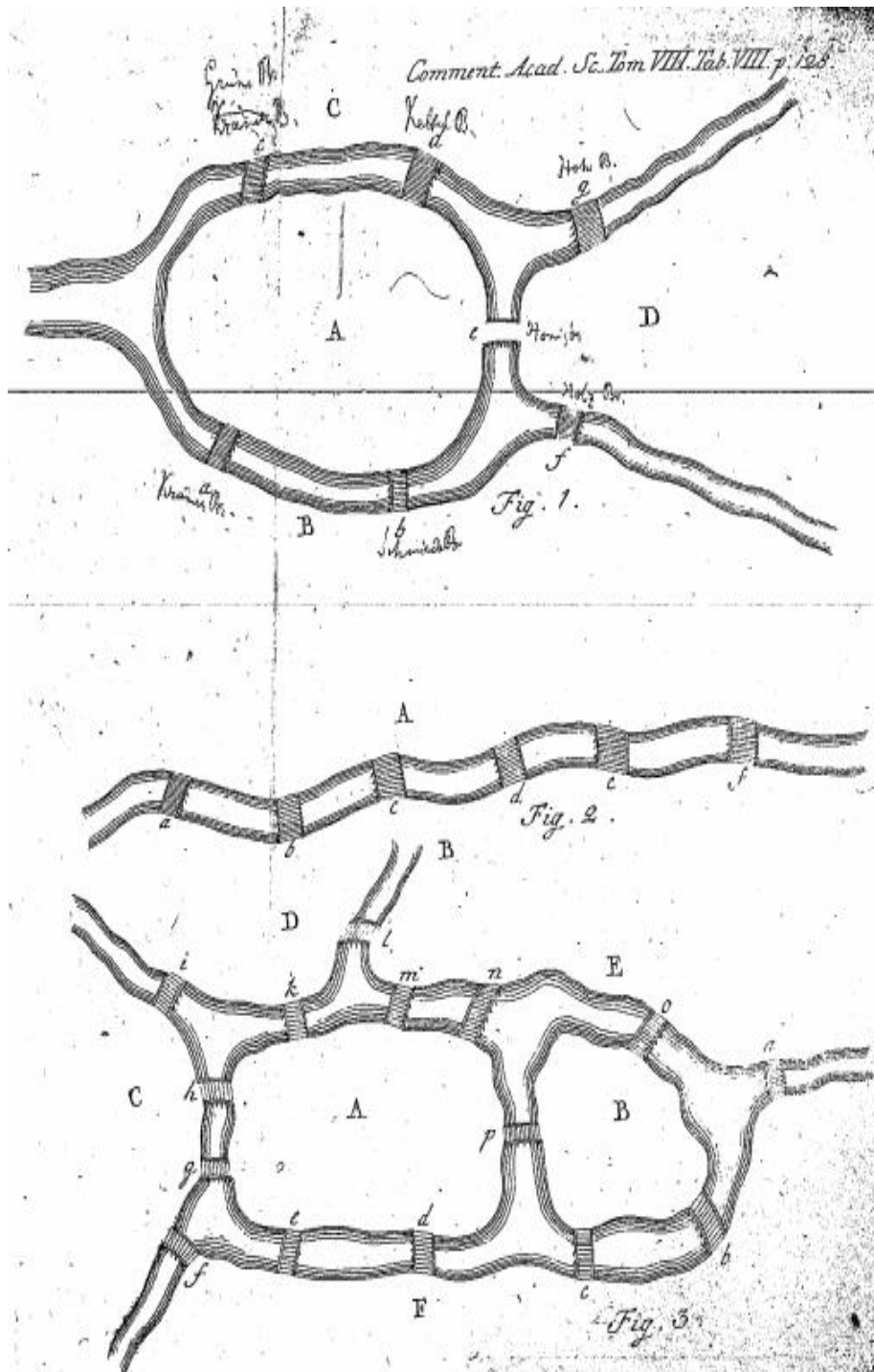
RHPM.Natal:Mar, 2013-.n.0,mar.2013.42 p. Edição SBMat.

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. I.

Tabula VIII.

PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates versatur, et omni tempore summo studio est exulta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam situs vocauit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando, situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum, neque calculo quantitatum vtendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs Geometriam pertineant, et quali methodo in iis resoluendis vti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque solutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitavi: praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit vsus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata



AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS. 129

data soluenda inueni, tanquam specimen Geometriae
sit hic exponere constitui.

§. 2. Problema autem hoc, quod mihi satis no- Figura 1.
tum esse perhibebatur, erat sequens: Regiomonti in Bo-
russia esse insulam A **der Kneiphof** dictam, fluviumque
eam cingentem in duos diuidi ramos, quemadmodum
ex figura videre licet: ramos vero huius fluminis septem
instructos esse pontibus, *a, b, c, d, e, f, et g.* Circa
hos pontes iam ista proponebatur quaestio, num quis
cursum ita instituere queat, vt per singulos pontes semel
et non plus quam semel transeat. Hocque fieri posse, mihi
dictum est, alios negare alios dubitare; neminem vero
affirmare. Ego ex hoc mihi sequens maxime generale
formaui problema; quaecunque sit fluminis figura et distri-
butio in ramos, atque quicumque fuerit numerus pon-
tium, inuenire, vtrum per singulos pontes semel tan-
tum transiri queat, an vero secus?

§. 3. Quod quidem ad problema Regiomontanum
de septem pontibus attinet, id resolui posset facienda
perfecta enumeratione omnium cursum, qui institui
possunt; ex his enim innotesceret, num quis cursus sa-
tisficeret, an vero nullus. Hic vero soluendi modus
propter tantum combinationum numerum et nimis esset
difficilis atque operosus, et in aliis quaestionibus de mul-
to pluribus pontibus ne quidem adhiberi posset. Hoc
porro modo si operatio ad finem perducatur multa in-
ueniuntur, quae non erant in quaestione; in quo pro-
cul dubio tantae difficultatis causa consistit. Quamobrem
missa hac methodo, in aliam inquisui, quae plus non
Tom. VIII. lar-

largiatur, quam ostendat, vtrum talis cursus institui queat, an secus; talem enim methodum multo simplicio-rem fore sum suspicatus.

§. 4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo singulos pontium transitus designandi, in quo vtor litteris maiusculis A, B, C, D, singulis regionibus adscriptis, quae flumine sunt separatae. Ita si quis ex regione A in regionem B transmigrat per pontem *a* siue *b*, hunc transitum denoto litteris AB, quarum prior praebet regionem ex qua exierat viator, posterior vero dat regionem in quam pontem transgressus peruenit. Si deinceps viator ex regione B abeat in regionem D per pontem *f*, hic transitus repraesentabitur litteris BD; duos autem hos transitus successiue institutos AB et BD denoto tantum tribus litteris ABD, quia media B designat tam regionem, in quam primo transitu peruenit, quam regionem ex qua altero transitu exit.

§. 5. Simili modo si viator ex regione D progrediatur in regionem C per pontem *g*, hos tres transitus successiue factos quatuor litteris ABDC denotabo. Ex his enim quatuor litteris ABDG intelligetur viatorem primo in regione A existentem transiisse in regionem B, hinc esse progressum in regionem D, ex hacque ultra esse profectum in C: cum vero hae regiones fluuiis sint a se inuicem separatae, necesse est vt viator tres pontes transierit. Sic transitus per quatuor pontes successiue instituti quinque litteris denotabuntur; et si viator trans quotcunque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui vnitatem est maior

AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS. 131

ier quam numerus pontium, denotabitur. Quare transitus per septem pontes ad designandum octo requirit litteras.

§. 6. In hoc designando modo non respicio, per quos pontes transitus sit factus, sed si idem transitus ex ~~vna regione in aliam per plures pontes fieri potest,~~ perinde est per quemnam transeat, modo in designatam regionem perveniat. Ex quo intelligitur, si cursus per septem figurae pontes ita institui posset, ut per singulos semel ideoque per nullum bis transeatur; hunc cursum octo litteris repraesentari posse, casque litteras ita esse debere dispositas, ut immediata litterarum A et B successio bis occurrat, quia sunt duo pontes *a* et *b* has regiones A et B iungentes, simili modo successio litterarum A et C quoque debet bis occurrere in illa octo litterarum serie; deinde successio litterarum A et D semel occurret; similiterque successio litterarum B et D, itemque C et D semel occurrat necesse est.

§. 7. Quaestio ergo huc reducitur, ut ex quatuor litteris A, B, C et D series octo litterarum formetur, in qua omnes illae successiones toties occurrant quoties est praeceptum. Antequam autem ad talem dispositionem opera adhibeatur, ostendi convenit, utrum tali modo haec litterae disponi queant an non. Si enim demonstrari poterit talem dispositionem omnino fieri non posse, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam inuestigavi, cuius ope tam pro hac quaestione, quam pro

omnibus similibus, facile discerni queat, num talis litterarum dispositio locum habere queat.

URA 2.

§. 8. Considero ad huiusmodi regulam inueniendam vnicam regionem A, in quam quotcunque pontes a, b, c, d etc. conducant. Horum pontium contemplor primo vnicum a , qui ad regionem A ducat; si nunc viator per hunc pontem transeat vel ante transitum esse debuit in regione A vel post transitum in A perueniet; quare in supra stabilito transitus designandi modo oportet vt littera A semel occurrat. Si tres pontes puta a, b, c in regionem A conducant, et viator per omnes tres transeat, tum in designatione eius migrationis littera A bis occurret, siue ex A initio cursum instituerit siue minus. Simili modo si quinque pontes in A conducant, in designatione transitus per eos omnes littera A ter occurrere debet. Atque si numerus pontium fuerit quicunque numerus impar, tum si is vnitatem augeatur, eius dimidium dabit, quot vicibus littera A occurrere debeat.

URA 1.

§. 9. In casu igitur pontium transeundorum Regionemontano, quia in insulam A quinque pontes deducunt a, b, c, d, e , necesse est, vt in designatione transitus per hos pontes littera A ter occurrat. Deinde littera B, quia in regionem B tres pontes conducunt, bis debet occurrere, similique modo littera D bis debet occurrere, atque etiam littera C bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera A ter adesse deberet, litterarum vero B, C,

AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS. 133

B, C, et D vnaquaeque bis; id quod in serie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perspicuum est, per septem pontes Regiomontanos talem transitum institui non posse.

§. 10. Simili modo de omni alio casu pontium si quidem numerus pontium, qui in quamque regionem conducit fuerit impar, iudicari potest, an per singulos pontes transitus semel fieri queat. Si enim euenit, ut summa omnium vicium, quibus singulae litterae occurrere debent, aequalis sit numero omnium pontium unitate aucto, tum talis transitus fieri potest; sin autem ut in nostro exemplo accidit, summa omnium vicium maior fuerit numero pontium unitate aucto, tum talis transitus nequaquam institui potest. Regula autem quam dedi pro numero vicium A ex numero pontium in regionem A deducentium inueniendo aequae valet; siue omnes pontes ex vna regione B, ut in figura repraesentatur, ducant, siue ex diuersis; tantum enim regionem A considero, et inquirō quot vicibus littera A occurrere debeat.

Figura 2.

§. 11. Si autem numerus pontium, qui in regionem A conducunt, fuerit par, tum circa transitum per singulos notandum est, vtrum initio viator cursum suum ex regione A instituerit an non. Si enim duo pontes in A conducant, et viator ex A cursum inceperit, tum littera A bis occurrere debet, semel enim adesse debet ad designandum exitum ex A per alterum pontem, et semel quoque ad designandum reditum

in A per alterum pontem. Sin autem viator ex alia regione cursum inceperit, tum semel tantum littera A occurret, semel enim posita tam aduentum in A quam exitum inde denotabit, vt huiusmodi cursus designare statui.

§. 12. Conducant iam quatuor pontes in regionem A, et viator ex A cursum incipiat, tum in designatione totius cursus littera A ter adesse debebit, si quidem per singulos semel transierit. At si ex alia regione ambulare inceperit, tum bis tantum littera A occurret. Si sex pontes ad regionem A conducant, tum littera A, si ex A initium eundi est sumtum, quater occurret, at si non ex A initio exierit viator, tum ter tantum occurrere debebit. Quare generaliter si numerus pontium fuerit par, tum eius dimidium dat numerum vicium, quibus littera A occurrere debet, si initium non est in regione A sumtum; dimidium vero vnitae auctum dabit numerum vicium, quoties littera A occurrere debet, initio cursus in ipsa regione A sumto.

§. 13. Quia autem in tali cursu nonnisi ex vna regione initium fieri potest, ideo ex numero pontium, qui in quamvis regionem deducunt, ita numerum vicium, quoties littera quamque regionem denotans occurrere debet, definitio, vt sumam numeri pontium vnitae aucti dimidium, si numerus pontium fuerit impar; ipsius vero numeri pontium medietatem, si fuerit par. Deinde si numerus omnium vicium adaequet numerum pontium vnitae auctum, tum transitus desideratus succedit, at initium ex regione, in quam impar pontium
nume-

AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS. 135

numerus ducit, capi debet. Sin autem numerus omnium vicium fuerit vnitatem minor, quam pontium numerus vnitatem auctus, tum transitus succedet incipiendo ex regione, in quam par pontium numerus ducit, quia hoc modo vicium numerus vnitatem est augendus.

§. 14. Proposita ergo quaecunque aquae pontiumque figura, ad inuestigandum, num quis per singulos semel transire queat, sequenti modo operationem instituo. Primo singulas regiones aquae a se inuicem diremtas litteris A, B, C etc. designo. Secundo sumo omnium pontium numerum, eumque vnitatem augeo, atque sequenti operationi praefigo. Tertio singulis litteris A, B, C etc. sibi subscriptis, cuilibet adscribo numerum pontium ad eam regionem deducentium. Quarto eas litteras, quae pares adscriptos habent numeros signo asterisco. Quinto singulorum horum numerorum parium dimidia adiicio, imparium vero vnitatem auctorum dimidia ipsis adscribo. Sexto hos numeros ultimo scriptos in vnam summam coniicio, quae summa, si vel vnitatem minor fuerit vel aequalis numero supra praefixo, qui est numerus pontium vnitatem auctus, tum concludo transitum desideratum perfici posse. Hoc vero est tenendum, si summa inuenta fuerit vnitatem minor, quam numerus supra positus, tum initium ambulationis ex regione asterisco notata fieri debere, contra vero ex regione non signata si summa fuerit aequalis numero praescripto. Ita ergo pro casu Regiomontano operationem instituo, ut sequitur:

Nume-

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

Pontes		
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Quia ergo plus prodiit quam 8, huiusmodi transitus nequaquam fieri potest.

Figura 3. §. 15. Sint duae insulae A et B aqua circumdatae, quacum aqua communicent quatuor fluuii, quemadmodum figura repraesentat. Traiecto porro sint super aquam insulas circumdantem et fluuios quindecim pontes *a, b, c, d*, etc. et quaeritur, num quis cursum ita instituire queat, vt per omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam semel. Designo ergo primum omnes regiones, quae aqua a se inuicem sunt separatae litteris A, B, C, D, E, F cuiusmodi ergo sunt sex regiones. Dein numerum pontium 15 unitate augeo, et summam 16 sequenti operationi praefigo.

16	
A*—8	4
B*—4	2
C*—4	2
D—3	2
E—5	3
F*—6	3
16	

Tertio

AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS. 137

Tertio litteras A, B, C etc. sibi inuicem subscribo, et ad quamque numerum pontium, qui in eam regionem ducunt pono, ita ad A octo ducunt pontes, ad B quatuor etc. Quarto litteras, quae pares adiunctos habent numeros asterisco noto. Quinto in tertiam columnam scribo parium numerorum, dimidia, impares vero unitate augeo, et semisses appono. Sexto tertiae columnae numeros inuicem addo, et oblineo summam 16, quae cum aequalis sit numero supra posito 16, sequitur transitum desiderato modo fieri posse, si modo cursus vel ex regione D vel E incipiatur, quippe quae non sunt asterisco notatae. Cursus autem ita fieri poterit *E a F b B c F d A e F f C g A b C i D k A m E n A p B o E l D* vbi inter litteras maiusculas pontes simul collocaui, per quos fit transitus.

§. 16. Hac igitur ratione facile erit in casu quam maxime composito iudicare, vtrum transitus per omnes pontes semel tantum fieri queat, an non. Hoc tamen adhuc multo faciliorem tradam modum idem dignoscendi, qui ex hoc ipso modo non difficulter eruetur, postquam sequentes observationes in medium protulero. Primo autem obseruo omnes numeros pontium singulis litteris A, B, C adscriptos simul sumtos duplo maiores esse toto pontium numero. Huius rei ratio est, quod in hoc computo, quo pontes omnes in datam regionem ducentes numerantur, quilibet pons bis numeretur; refertur enim quisque pons ad vtramque regionem, quas iungit.

§. 17. Sequitur ergo ex hac observatione summam omnium pontium, qui in singulas regiones conducunt, esse numerum parem, quia eius dimidium pontium numero aequatur. Fieri ergo non potest, ut inter numeros pontium in quamlibet regionem ducentium vnus sit impar; neque etiam ut tres sint impares, neque quinque, etc. Quare si qui pontium numeri litteris A, B, C, etc. adscripti sunt impares, necesse est ut eorum numerus sit par, ita in exemplo Regiomontano quatuor erant pontium numeri impares litteris regionum A, B, C, D adscripti, vti ex §. 14. videre licet; atque in exemplo praecedente §. 15., duo tantum sunt numeri impares, litteris D et E adscripti.

§. 18. Cum summa omnium numerorum litteris A, B, C etc. adiunctorum aequet duplum pontium numerum, manifestum est illam summam binario auctam, et per 2 diuisam dare numerum operationi praefixum. Si igitur omnes numeri litteris A, B, C, D etc. adscripti fuerint pares, et eorum singulorum medietates capiantur ad numeros tertiae columnae obtinendos, erit horum numerorum summa unitate minor, quam numerus praefixus. Quamobrem his casibus semper transitus per omnes pontes fieri potest. In quacunque enina regione cursus incipiat, ea habebit pontes numero pares ad se conducentes, vti requiritur. Sic in exemplo Regiomontano fieri potest, ut quis per omnes pontes bis transgrediatur, quilibet enim pons, quasi in duos erit diuisus, numerusque pontium in quamvis regionem ducentium erit par.

AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS. 139

§. 19. Praeterea si duo tantum numeri litteris A, B, C etc. adscripti fuerint impares, reliqui vero omnes pares, tum semper desideratus transitus succedet, si modo cursus ex regione ad quam pontium impar numerus tendit incipiatur. Si enim pares numeri bifecentur atque etiam impares vnitatem aucti, vti praeceptum est, summa harum medietatum vnitatem erit maior quam numerus pontium, ideoque aequalis ipsi numero praefixo. Ex hocque porro perspicitur, si quatuor vel sex vel octo etc. fuerint numeri impares in secunda columna, tum summam numerorum tertiae columnae maiorem fore numero praefixo, eumque excedere vel vnitatem, vel binario vel ternario etc. et idcirco transitus fieri nequit.

§. 20. Casu ergo quocunque proposito statim facillime poterit cognosci, vtrum transitus per omnes pontes semel institui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus est impar, tum certo affirmari potest, talem transitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus est impar, tunc transitus fieri poterit, si modo cursus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum transitus desiderato modo institui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati proposito plenissime satisfacit.

140 SOLVTIO PROBLEMATIS AD GEOM. &c.

§. 21. Quando autem inuentum fuerit talem transitum institui posse, quaestio superest quomodo cursus sit dirigendus. Pro hoc sequenti vtor regula; tollantur cogitatione quoties fieri potest, bini pontes, qui ex vna regione in aliam ducunt, quo pacto pontium numerus vehementer plerumque diminuetur, tum quaeratur, quod facile fiet, cursus desideratus per pontes reliquos, quo inuento pontes cogitatione sublati hunc ipsum cursum non multum turbabunt, id quod paululum attendenti statim patebit; neque opus esse indico plura ad cursus reipsa formandos praecipere.