



**CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA**

**AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO SISTEMA DE
POSICIONAMENTO GLOBAL-GPS**

Andressa Araújo de Almeida

Orientador: Prof. Msc. Francisco Teixeira Esteves

SÃO RAIMUNDO NONATO-PI 2017

ANDRESSA ARAÚJO DE ALMEIDA

**AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO SISTEMA DE
POSICIONAMENTO GLOBAL-GPS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
coordenação de Matemática do Instituto Federal do Piauí -
IFPI, Campus São Raimundo Nonato-PI, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Graduação em
Matemática.

SÃO RAIMUNDO NONATO

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A447a Almeida, Andressa Araújo de
As Aplicações da Geometria Analítica no Sistema de Posicionamento Global-GPS /
Andressa Araújo de Almeida - 2017.
55 f. : il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, Licenciatura em
Matemática, 2017.

Orientador : Prof Me. Francisco Teixeira Esteves.

1. Interseção entre superfícies esféricas. 2. Sistema de Posicionamento Global. 3.
Geometria Analítica. I.Título.

CDD 510

ANDRESSA ARAÚJO DE ALMEIDA

**AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO SISTEMA DE
POSICIONAMENTO GLOBAL-GPS**

Banca Examinadora de Defesa

Prof. Msc Francisco Teixeira Esteves
Instituto Federal do Piauí / São Raimundo Nonato – IFPI
Orientador

Prof. Carlos Alberto da Silva
Instituto Federal do Piauí/ São Raimundo Nonato – IFPI
Examinador Interno

Prof. Msc Amaya de Oliveira Santos
Instituto Federal do Piauí / São Raimundo Nonato – IFPI
Examinadora Externa

*Dedico esse trabalho a minha família
que sempre me apoiou durante todo
o meu percurso acadêmico.*

Agradecimentos

A Deus por ter me guiado até aqui e por sempre estar comigo em todos os momentos da minha vida.

A minha família, em especial minha mãe Marly e meus avós Pedro e Margarida por sempre acreditarem no meu potencial e por me incentivarem a continuar nos momentos de fraqueza.

Ao meu orientador Francisco Teixeira Esteves por sempre estar disposto a me ajudar e pela paciência que teve durante toda a construção do trabalho.

“Aos outros, dou o direito de ser como são. A mim, dou o direito de ser cada dia melhor”.

Chico Xavier

Resumo

Este estudo mostra as contribuições da Geometria Analítica para o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global-GPS. Por meio de definições matemáticas se observa as várias funcionalidades do sistema, assim como a transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas geográficas e alguns métodos de localização utilizados antes do surgimento do GPS. Algumas outras áreas da matemática também se mostram bastantes relevantes neste trabalho, bem como um pouco da física, neste caso, o cálculo da distância entre receptor e satélite e velocidade da luz. E para entender como ocorre o magnífico processo de localização na superfície da terra demonstrou-se a interseção entre superfícies esféricas, um dos pontos fundamentais no que se refere à localização terrestre.

Palavras Chaves: Interseção entre superfícies esféricas. Sistema de Posicionamento Global. Geometria Analítica.

ABSTRACT

This study shows the contributions of Analytical Geometry to the operation of the Global Positioning System-GPS. By means of mathematical definitions we can see the various functionalities of the system, as well as the transformation of Cartesian coordinates into geographical coordinates and some localization methods used before the appearance of GPS. Some other areas of mathematics also show quite relevant in this work, as well as a bit of physics, in this case, calculating the distance between receiver and satellite and speed of light. And to understand how the magnificent process of locating on the surface of the earth occurs, the intersection between spherical surfaces, one of the fundamental points in terrestrial location, has been demonstrated.

Key words: Intersection between spherical surfaces. Global Positioning System. Analytical Geometry.

Lista de figuras

Figura 1: Representação do Planeta Terra	12
Figura 2: Sistema Ortogonal de Coordenadas Cartesianas no Espaço.....	15
Figura 3: Formas da Terra.....	17
Figura 4: Elipsoide de Revolução	17
Figura 5: Distância entre dois pontos no espaço.....	18
Figura 6: Representação de uma Elipse	19
Figura 7: Superfície gerada pela rotação da curva plano C em torno do eixo Z.....	24
Figura 8: Superfície gerada pela rotação da curva plano C em torno do eixo Y.....	25
Figura 9: Superfície esférica com seus elementos	27
Figura 10: Superfícies esféricas secantes	29
Figura 11: Superfícies esféricas tangentes	29
Figura 12: Superfícies esféricas disjuntas	30
Figura 13: Coordenadas geográficas de pontos sobre a superfície terrestre.....	33
Figura 14: Coordenadas cartesianas de um ponto P no espaço	34
Figura 15: Bússola	37
Figura 16: Os três seguimentos que constituem o sistema GPS	41
Figura 17: Constelação dos satélites do sistema GPS	42
Figura 18: Estações de controle	43
Figura 19: Receptores topográficos	44
Figura 20: Receptores geodésicos.....	45
Figura 21: Receptores de navegação.....	45
Figura 22: Esfera imaginária com raio igual a d	48
Figura 23: Circunferência imaginária gerada pela interseção entre duas esferas imaginárias....	49
Figura 24: Projeção da interseção entre três esferas imaginárias.....	50
Figura 25: Projeção da interseção entre quatro esferas imaginárias	51

Sumário

1. INTRODUÇÃO	12
2. UM POUCO DA GEOMETRIA ANALÍTICA.....	15
2.1 DEFINIÇÕES	16
2.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO ESPAÇO.....	18
2.3 DEFINIÇÃO DE ELIPSE.....	19
2.4 EQUAÇÃO NA FORMA REDUZIDA DA ELIPSE	20
2.5 FORMA CANÔNICA DA ELIPSE TRANSLADADA.....	22
2.5.1 ELIPSE COM CENTRO NO PONTO $O = (x_0, y_0)$ E RETA FOCAL PARALELA AO EIXO OX.	22
2.5.2 ELIPSE COM CENTRO NO PONTO $O = (x_0, y_0)$ E RETA FOCAL PARALELA AO EIXO OY	23
2.6 SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO.....	23
2.7 SUPERFÍCIE ESFERÉRICA.....	26
2.7.1 ELEMENTOS DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA.....	27
2.7.2 INTERSEÇÃO E POSIÇÃO RELATIVA ENTRE SUPERFÍCIES ESFÉRICAS	28
3. COORDENADAS GEOGRÁFICAS E COORDENADAS GEOCÊNTRICAS	33
4. Um breve histórico antes do GPS.....	36
5. O Sistema de Posicionamento Global- GPS	39
5.1 Elementos do Sistema GPS	41
6. RELAÇÃO ENTRE GEOMETRIA ANALÍTICA E GPS.....	47
6.1 A necessidade do quarto satélite	49
7. CONCLUSÃO.....	53
REFERÊNCIA.....	54

1. INTRODUÇÃO

A escolha do tema está ligeiramente relacionada a necessidade de analisar definições que na maioria das vezes é considerado muito abstrato, dar alguma aplicabilidade aos conteúdos matemáticos ministrados em sala de aula, em especial a Geometria Analítica, utilizando para isso o Sistema de Posicionamento Global-GPS, sistema disponível a todos, visto que muitas pessoas possuem celulares de alta qualidade que contem o aplicativo GPS.

A Educação Matemática vem tentando relacionar a Matemática com as diversas áreas do conhecimento humano. De acordo com *D'Ambrosio*(1993), a artificialidade de um tratamento disciplinar nos sistemas escolares se torna incompatível com sua presença muito natural no dia-a-dia.

Atualmente é necessário que os conteúdos abordados estejam de acordo com a prática cotidiana, para a percepção da aplicabilidade da disciplina. Para isso buscam-se recursos que despertem o interesse e a curiosidade pelo mundo da Matemática. Com a história da matemática surgiram às primeiras noções de geometria. “Fazer afirmações sobre a origem da geometria é arriscado, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever”, (Boyer, 1996). Somente nos últimos seis milênios que o homem mostrou-se capaz de colocar seus registros e pensamentos em forma escrita.

Com o passar dos tempos surgiram novos conceitos de Geometria que contribuíram para uma evolução nos métodos de resolução. Daí se destacou o filósofo, matemático e físico René Descartes (1596-1650). Este por sua vez foi um grande estudioso, e passou por várias regiões da Europa como Holanda, Alemanha, Países baixos e França, com o objetivo de estudar e assim ampliar seus conhecimentos. O interesse de Descartes pela matemática era imenso, assim como sua capacidade de raciocínio. Após sair da França para residir na Holanda, “um amigo holandês, um classicista, chamou a atenção de René para o problema das três e quatro retas de Pappus”, (Merzbach e Boyer 1996).

Sob a errônea impressão de que os antigos não tinham conseguido resolver esse problema, Descartes aplicou a ele seus novos métodos e resolveu-o sem dificuldade. Isso fez com que ele percebesse o poder e a generalidade de seu ponto de vista, e, em consequência, escreveu a obra bem conhecida, *Lá Géométrie*, que levou a geometria analítica ao conhecimento de seus contemporâneos. (MERZBACH E BOYER,1996,P.238).

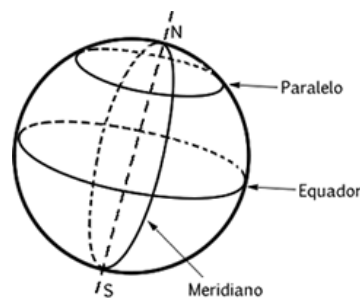
O “sistema cartesiano” teve origem nos conhecimentos produzidos por Descartes que em vários momentos foi considerado o Pai da Matemática e da filosofia moderna. Desde o princípio da Geometria o renomado pesquisador propõe a uso do processo analítico:

Se queremos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está efetuada e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre essas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos uma equação, uma vez que os termos de uma dessas duas expressões são iguais aos termos da outra. (ROQUE, 2012, p322).

Com isso através de estudos relacionando a álgebra e a geometria que foi criado o plano cartesiano, onde um dos principais objetivos do sistema de coordenadas era permitir o estudo de curvas por meio de retas. Dessa relação surgiu a Geometria Analítica. A geometria analítica permite determinar o lugar geométrico dos pontos que fazem parte da equação do sistema de coordenadas. No entanto, os conhecimentos de Descartes não se limitaram apenas ao sistema cartesiano, foi muito, além disso.

Pode-se observar a importância do sistema de coordenadas analisando matematicamente o planeta terra, notando o plano cartesiano no espaço que é formado por três eixos ox , oy e oz com origem “o” no centro da terra e três planos formados por xy , xz e yz perpendiculares entre si. As coordenadas cartesianas $P=(x,y,z)$ podem ser transformadas em coordenadas geográficas: latitude, longitude e altitude. Como mostra a figura 1.

Figura 1: Representação do planeta terra.



Fonte: <https://www.google.com.br>.

Por meio de pesquisa bibliográfica busca-se compreender a relação do sistema de posicionamento global com a matemática. Neste trabalho é essencial definir alguns temas da Geometria Analítica relacionados com o funcionamento do GPS.

Segundo (D'Ambrósio,2003), todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e de difusão, naturalmente não-dicotômicos entre si. Então, conhecer algumas aplicações Matemáticas é o mesmo que viver uma grande adrenalina numérica, pois o que é considerado abstrato durante todo o percurso de um curso é visto de um ângulo mais prazeroso.

É importante ressaltar que a Matemática sempre esteve presente durante todo o processo de desenvolvimento global.

As ideias matemáticas aparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.(GASPERI E PACHECO APUD D'AMBRÓSIO,1999,P.19).

São vários os ramos da matemática que explicitam conteúdos que nem ao menos sabemos para que servem ou onde devem ser aplicados. Em meio a isso, este trabalho tem como objetivo observar as aplicações da Geometria Analítica no Sistema de Posicionamento Global-GPS, identificar os assuntos abordados, tendo em vista que essa é uma forma de fixar alguns conceitos de Geometria Analítica de maneira mais atrativa. Analisar suas contribuições para o funcionamento do GPS e por fim estimar-se como essa ferramenta poderá ser utilizada na forma de instrumento pedagógico em sala de aula. Embora, esta pesquisa esteja voltada para os conceitos de Geometria Analítica, em alguns momentos aparecerão outros ramos da matemática e inclusive da física.

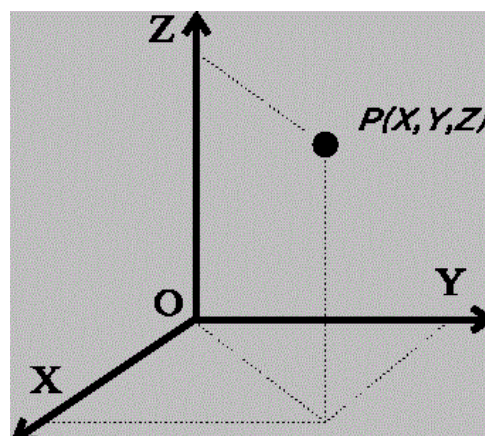
2. UM POUCO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Como se sabe René Descartes contribuiu para o desenvolvimento do processo analítico, uma vez que suas técnicas se tornaram muito importantes na geometrização da natureza, onde de acordo com (LOMBARDI, SAVIANI E NASCIMENTO, 2006, P.1):

A Geometrie foi o seu grande e original trabalho neste campo. Seu mérito consistiu basicamente em aplicar a álgebra ao estudo dos problemas geométricos. Toda figura traçada sobre um plano é composta de pontos e todo ponto possui uma posição que pode ser descrita por dois números (as coordenadas), de modo análogo ao da posição de um ponto sobre a superfície terrestre, dividida por meridianos e paralelos. Toda figura geométrica pode ser representada por uma equação algébrica e os problemas de geometria são, portanto, passíveis de resolução por meio da álgebra.

Já um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço consiste na escolha de um ponto O do espaço, denominado origem, e de três retas concorrentes em O e mutuamente perpendiculares, denominadas eixos OX , OY e OZ . A escolha de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas implica a determinação de três planos, chamados planos cartesianos, que se intersectam na origem. Cada um desses planos contém exatamente dois dos eixos OX , OY ou OZ e para determinar um ponto no sistema $OXYZ$, basta fazer projeções de um ponto P sobre os outros dois planos. Traça-se uma reta paralela ao eixo OZ que passa pelo ponto P e intersecta o plano XY , esse ponto de intersecção é denominado P . Como mostra a figura 2.

Figura 2: Sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço.



Fonte: <https://www.google.com.br>.

A partir de um estudo feito sobre a Geometria Analítica, chegaremos ao GPS que é um sistema de grande importância em toda a sociedade, tendo em vista que desde há muito tempo a humanidade sentiu a necessidade de se localizar nos diversos lugares do mundo. Esse sistema está programado para nos fornecer coordenadas bi ou tridimensionais de pontos no terreno, bem como a velocidade e direção com que nos deslocamos entre pontos.

2.1 DEFINIÇÕES

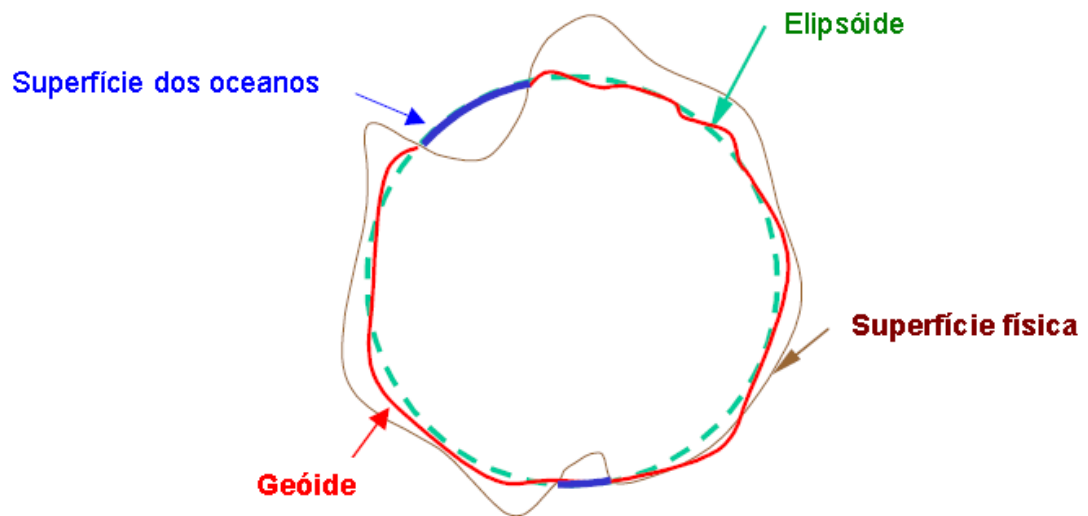
As seguintes definições são de grande relevância, tendo em vista que estes assuntos estão presentes em todo o processo de funcionamento do Sistema GPS.

Como se sabe a Terra é um corpo de forma esférica, achatada nos polos e ligeiramente dilatada no equador. Devido a sua irregularidade ela é representada por um elipsoide de revolução, figura regular, geometricamente modelada e que melhor ajusta-se a essa forma. Outra superfície a ser considerada é o geóide. Essa superfície coincide com a superfície dos oceanos estendendo-se irregularmente através dos continentes, com o mesmo potencial gravitacional. No geóide a direção gravitacional é perpendicular a sua superfície sendo conhecida como direção do fio de prumo.

O sistema GPS adota o elipsoide como modelo matemático para desenvolver os cálculos necessários ao posicionamento e determinação dessas coordenadas. O sistema GPS não adota como superfície de referência o geóide, devido à complexidade para modelá-lo e o referenciamento desse modelo. É importante frisar que todas as medidas são realizadas sobre o geóide. (ALBUQUERQUE E SANTOS, 2003, P.5).

O WGS 84 é o elipsoide de referência utilizado pelo Sistema GPS. No Brasil, o SAD 69 é a superfície de referência adotada pelo Sistema Geodésico. A figura 3 ilustra a superfície usada na representação da forma da Terra.

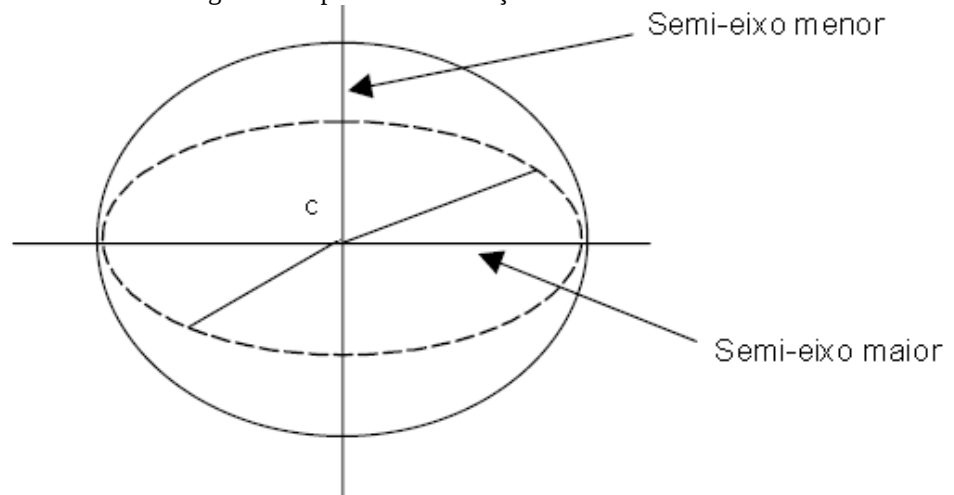
Figura 3: Forma da terra.



Fonte: GPS para iniciantes.

O elipsoide é o que mais se adapta ao modelo da terra, ele é definido a partir da rotação de uma elipse em torno do seu eixo menor, a qual é especificada pelo seu semieixo maior e achatamento.

Figura 4: Elipsoide de revolução.



Fonte: GPS para iniciantes.

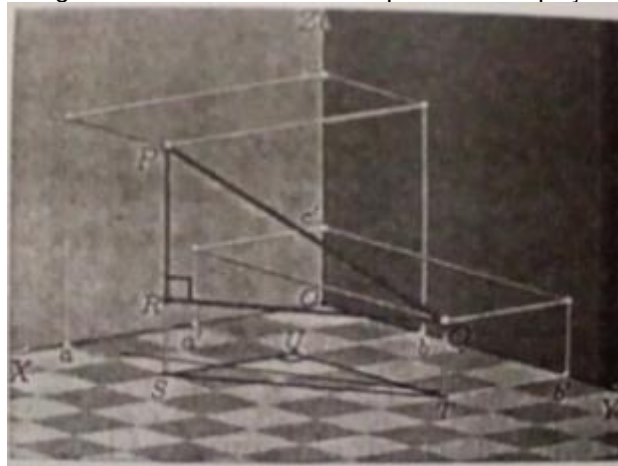
Para entender melhor o que foi dito anteriormente, é necessário compreender a definição de elipse e do elipsoide de revolução.

2.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO ESPAÇO

Sejam $P=(a,b,c)$ e $Q=(a',b',c')$, pontos do espaço $\mathcal{E}$. Começamos que se P e Q estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que P e Q não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da distância de P a Q , consideremos os pontos auxiliares como mostra a figura 5.

Figura 5: Distância entre dois pontos do espaço.



Fonte: Livro de Geometria Analítica, ano 2013.

$R=(a,b,c')$, $S=(a,b,0)$, $T=(a',b',0)$ e $U=(a',b,0)$.

Observa-se que,

$$d(S,U)=|a'-a| \text{ e } d(U,T)=|b'-b|,$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo SUT, temos:

$$d(S,T)^2 = d(S,U)^2 + d(U,T)^2 = |a'-a|^2 + |b'-b|^2 = (a'-a)^2 + (b'-b)^2.$$

Sendo os segmentos ST e RQ lados opostos de um triângulo, temos:

$$d(R,Q)^2 = d(S,T)^2 = (a'-a)^2 + (b'-b)^2.$$

Além disso, $d(P,R) = |c'-c|^2$, pois os pontos P e R estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo OZ . Finalmente, como o triângulo PRQ é retângulo,

$$D(P,Q)^2 = d(P,R)^2 + d(R,Q)^2 = (c'-c)^2 + (a'-a)^2 + (b'-b)^2, \text{ ou seja,}$$

$$D(P,Q) = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}.$$

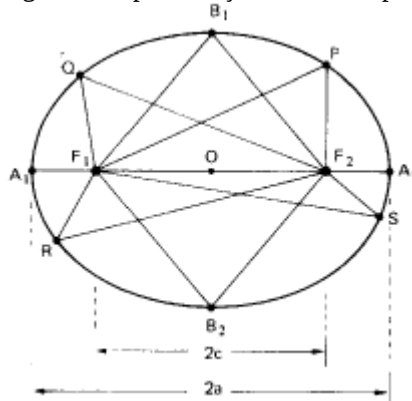
2.3 DEFINIÇÃO DE ELIPSE

Definição: Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{E} = \{P / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}. \quad (I)$$

A seguinte a figura 6 representa uma elipse.

Figura 6: Representação de uma Elipse.



Fonte: Fundamentos de matemática elementar, vol. 7, Geometria Analítica.

Terminologia

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse.
- A reta ℓ que contém os focos é a reta focal.
- A interseção da elipse com a reta focal ℓ consiste exatamente de dois pontos, A_1 e A_2 , chamados vértices da elipse sobre a reta focal.

Note primeiro que $F_1F_2 \cap \mathcal{E} = \emptyset$. De fato, se $P \in F_1F_2$, então P não pertence à $\mathcal{E}$, pois $2c = d(F_1, F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2) < 2a$.

Seja $A_2 \in \mathcal{E} \cap \ell_2$ tal que $d(A_2, F_2) = x$, onde ℓ_2 é a semirreta de ℓ de origem F_2 que não contém F_1 . Como F_2 está entre F_1 e A_2 e $A_2 \in \mathcal{E}$, temos:

$$2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2a + x = 2x + 2a \rightarrow x = a - c.$$

Logo, o ponto $A_2 \in \ell_2$, que dista $a - c$ do foco F_2 , pertence à elipse $\mathcal{E}$. Analogamente, podemos mostrar que o ponto $A_1 \in \ell_1$, que dista $a - c$ do foco F_1 , pertence à elipse $\mathcal{E}$, onde ℓ_1 é a semirreta da reta focal de origem F_1 que não contém F_2 .

- O seguimento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o eixo focal da elipse.
- O centro C da elipse é o ponto médio focal A_1A_2 . Observe que o centro C é também o ponto médio do seguimento F_1F_2 delimitado pelos focos.
- A reta não focal é a reta ℓ perpendicular a ℓ que passa pelo ponto C .
- A elipse intersecta a reta não focal ℓ em exatamente dois pontos B_1 e B_2 , denominados vértices da elipse sobre a reta não focal.

De fato, como ℓ é a mediatriz do seguimento F_1F_2 , temos que $B \in \ell \cap \mathcal{E}$ se e somente se $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, $\ell \cap \mathcal{E} = \{B_1, B_2\}$, onde B_1 e B_2 são os pontos de ℓ que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

- O eixo não focal da elipse é o seguimento B_1B_2 de comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$.
- O mesmo $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse. Note que $0 \leq e < 1$.
- O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e c é a distância do centro aos focos.

2.4 EQUAÇÃO NA FORMA REDUZIDA DA ELIPSE

Tomando um sistema ortogonal, a igualdade (I) fica, para $P = (X, Y)$.

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

Elevando ao quadrado e simplificando resulta

$$a\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando resulta

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

Como $a^2 - c^2 \neq 0$ (na verdade $a^2 - c^2 > 0$ porque $a > c > 0$),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. (II)$$

Seja $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Então $0 < b < a$ e

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Logo (II) se escreve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, $\bar{O} = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{O}$ sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido destes eixos, respectivamente. Designamos por $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

Se $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são os vetores unitários na direção e sentido, respectivamente, dos eixos OX e OY (e portanto, dos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$), Observe que:

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

$$\vec{OP} = \bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2,$$

$$\vec{O\bar{O}} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2.$$

Como

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP},$$

$$\text{Obtemos que: } x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = (x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2}) + (\bar{x}\overrightarrow{e_1} + \bar{y}\overrightarrow{e_2}) = (\bar{x} + x_0)\overrightarrow{e_1} + (\bar{y} + y_0)\overrightarrow{e_2}.$$

Logo, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, são relacionados pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

2.5 FORMA CANÔNICA DA ELIPSE TRANSLADADA

Por uma translação dos eixos coordenados vamos obter a equação de uma elipse $\mathcal{E}$ cuja reta focal é horizontal ou vertical.

Seja $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando o sistema OXY para a nova origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$.

2.5.1 ELIPSE COM CENTRO NO PONTO $\bar{O} = (x_0, y_0)$ E RETA FOCAL PARALELA AO EIXO OX.

Como $\bar{O} = (x_0, y_0)$ é o centro, $\ell: y = y_0$ é a reta focal e $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ são os focos da elipse (pois $d(F_1, \bar{O}) = d(F_2, \bar{O}) = c$), um ponto $p = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence à elipse se e somente se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

ou seja,

$$\Leftrightarrow d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a$$

$$\Leftrightarrow d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) + d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, a forma canônica da equação da elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OX é:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ onde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Os elementos desta elipse são:

- Reta focal: $\ell: y=y_0$
- A reta não focal: $\ell': x=x_0$;
- Focos: $F_1 = (x_0-c, y_0)$ e $F_2=(x_0+c, y_0)$
- Vértices sobre a reta focal: $A_1=(x_0-a, y_0)$ e $A_2=(x_0+a, y_0)$;
- Vértices sobre a reta não focal: $B_1=(x_0, y_0-b)$ e $B_2(x_0, y_0+b)$.

2.5.2 ELIPSE COM CENTRO NO PONTO $\bar{O} = (x_0, y_0)$ E RETA FOCAL PARALELA AO EIXO OY

Procedendo como no caso anterior, verifica-se que a forma canônica da equação da elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1, \text{ onde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Os elementos desta elipse são:

- Reta focal: $\ell: x=x_0$
- Reta não focal: $\ell': y=y_0$
- Focos: $F_1 = (x_0, y_0-c)$ e $F_2=(x_0, y_0+c)$
- Vértices sobre a reta focal: $A_1=(x_0, y_0-a)$ e $A_2=(x_0, y_0+a)$;
- Vértices sobre a reta não focal: $B_1=(x_0-b, y_0)$ e $B_2(x_0+b, y_0)$.

2.6 SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

A superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos chama-se elipsoide de revolução.

Para deduzirmos uma equação desta superfície, vamos supor que a equação da elipse, no plano yz, seja:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x=0,$$

E que a rotação se dê em torno do eixo z.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da superfície. Então, P pertence a uma circunferência descrita por um ponto Q da elipse, ao girar em torno do eixo z. Se R é o centro de tal circunferência, em função das coordenadas de $P(x,y,z)$, as coordenadas de R e Q são $R(0,0,z)$ e $Q(0,y_1,z)$, onde

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (I)$$

Pois o ponto $Q(0,y_1,z)$ pertence a elipse. Como

$$\overline{PR^2} = \overline{QR^2},$$

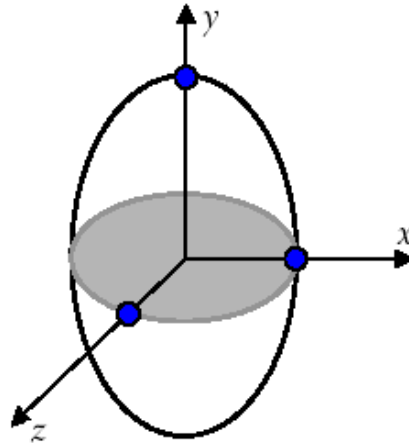
Segue-se que

$$y_1^2 = x^2 + y^2,$$

que introduzindo em (I), produz a equação procurada:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Figura 7: Superfície gerada pela rotação da curva plana C em torno do eixo z.



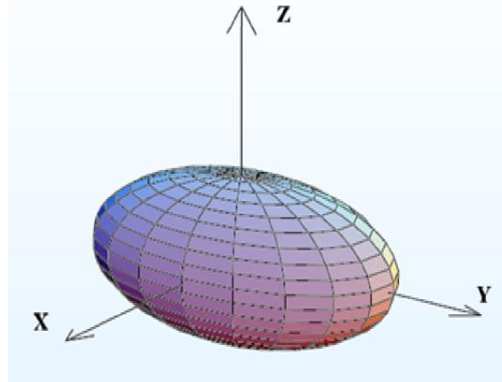
Fonte: Google.com.

Se a elipse tivesse sido girada em torno do eixo y, a equação do elipsoide seria:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Em geral, uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana C em torno de um eixo chama-se superfície de revolução.

Figura 8: Superfície gerada pela rotação da curva plana C em torno do eixo y.



Fonte: <https://www.google.com.br>.

É importante ressaltar que quando a origem do plano tridimensional coincide com o centro de massa da terra, e o eixo de rotação é paralelo ao eixo de rotação da terra, chama-se orientação geocêntrica e quando a origem do plano tridimensional não coincide com o centro de massa da terra, chama-se orientação topocêntrica.

2.7 SUPERFÍCIE ESFERÉRICA

A superfície esférica terá uma grande importância neste trabalho, tendo em vista que a localização em algum ponto da terra é feita através da interseção de superfícies esféricas imaginárias no plano, onde os centros dessas superfícies são os satélites.

Pode-se pensar em duas formas de definir uma superfície esférica. A primeira definição é através de um lugar geométrico e a segunda é através de vetores.

Definição 1: Dados um ponto $C \in E^3$ e um número real $r > 0$, a superfície esférica S de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos P de E^3 , que distam r do ponto C . Assim, temos que $P=(x,y,z)$ e $C=(x_0,y_0,z_0)$

$P \in S$ se e somente se $d(P,C)=r$, isto é, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ (I)

A equação (I) é chamada equação reduzida da superfície esférica S , assim desenvolvendo os quadrados tem-se:

$$X^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2+z^2-2z_0z+z_0^2=r^2,$$

$$X^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2=0$$

Fazendo, $-2x_0=a$, $-2y_0=b$, $-2z_0=c$ e $x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2=d$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ daí,

$X^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ é a equação geral de S .

Definição 2: Considere a origem de um dado sistema cartesiano $Oxyz$ e o número real $r > 0$.

Superfície esférica de centro na origem O e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)$ do espaço, extremidades dos vetores $\overrightarrow{OP}$ tal que $\|\overrightarrow{OP}\|=r$. Desta maneira $P \in S$, se e somente se, $d(P,O)=r$.

Equivalentemente, $\|P-O\|=r$. Ou ainda:

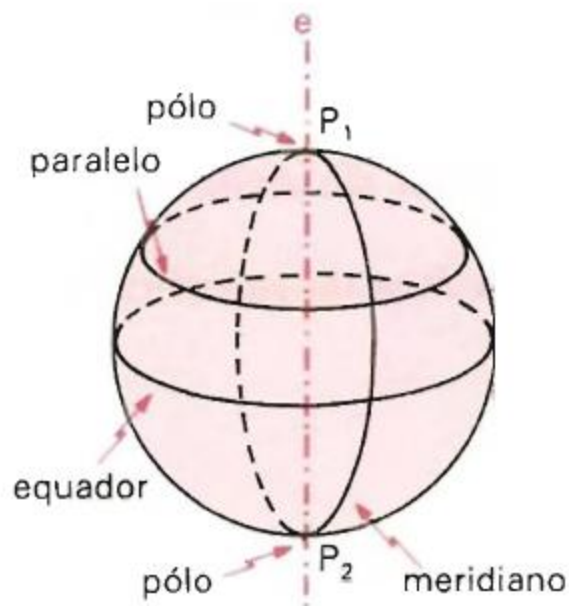
$P \in S$ se e somente se $x^2+y^2+z^2=r^2$ (2)

2.7.1 ELEMENTOS DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Considerando a superfície de uma esfera de eixo “e”, temos:

- Pólos: São as interseções da superfície com o eixo.
- Equador: É a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.
- Paralelo: É uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo. É Paralela ao equador.
- Meridiano: É uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.

Figura 9: Superfície esférica com seus elementos.



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 10, Geometria Espacial.

2.7.2 INTERSEÇÃO E POSIÇÃO RELATIVA ENTRE SUPERFÍCIES ESFÉRICAS

Sejam S_1 e S_2 superfícies esféricas distintas de raios R_1 e R_2 e centros C_1 e C_2 , respectivamente, expressas por suas equações na forma geral. O estudo da interseção $S_1 \cap S_2$ implica na solução do sistema de equações:

$$S_1 \cap S_2 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d = 0 \end{cases} \text{ (I) e (II)}$$

Substituindo-se uma das equações (II)-(I), têm-se os sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d = 0 \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d = 0 \\ (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z = 0 \end{cases}$$

Para que S_1 seja distinta de S_2 tem-se que se $C_1 = C_2$, então $R_1 \neq R_2$. Nesse caso, surgem as relações $a_2 = a_1, b_2 = b_1$ e $c_2 = c_1$. Isto torna o sistema incompatível, uma vez que a segunda equação não admitiria solução. Com isso pode-se concluir que duas superfícies concêntricas distintas têm interseção vazia.

Para que o sistema se torne compatível, assume-se que os centros das superfícies sejam diferentes, ou seja, $C_1 \neq C_2$, logo a segunda equação $(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0$ representa a equação geral do plano π ortogonal ao segmento C_1C_2 . Tal plano é denominado *plano radical* do par de superfícies esféricas não concêntricas S_1 e S_2 . De fato, o vetor normal $\vec{n}_\pi$ é tal que:

$\vec{n}_\pi = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$. Sabendo que na equação da superfície esférica S de centro $C_i = (x_i, y_i, z_i)$, temos, $a_i = -2x_i$; $b_i = -2y_i$ e $c_i = -2z_i$, assim:

$$\vec{n}_\pi = (-2x_1 + 2x_2, -2y_1 + 2y_2, -2z_1 + 2z_2) =$$

$$-2(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2), \quad (I)$$

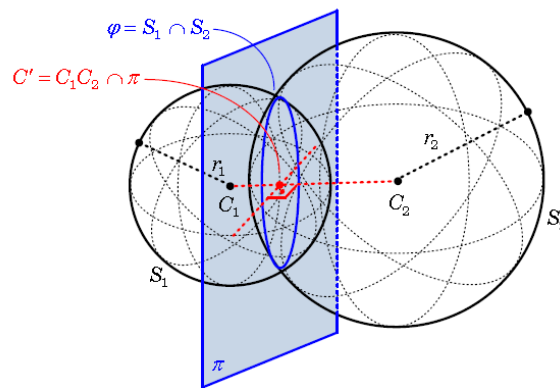
Como $\overrightarrow{C_1C_2} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, substituindo em (I), concluímos que:

$$\vec{n}_\pi = -2\overrightarrow{C_1C_2} \neq \vec{0}$$

Esta constatação garante que $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \pi = S_2 \cap \pi$. Ou seja, o estudo da interseção entre as superfícies esféricas S_1 e S_2 recai no caso de análise da interseção de plano e superfície esférica. Assim, existem três possibilidades:

- $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência φ contida no plano radical π , cujo centro C' é o ponto em que a reta C_1C_2 intercepta π , então S_1 e S_2 são secantes.

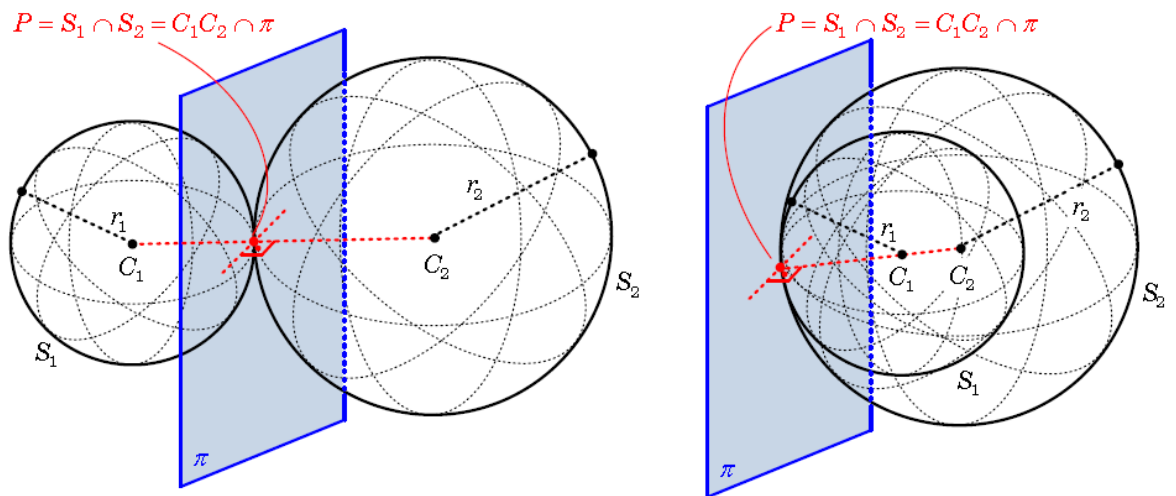
Figura 10: Superfícies esféricas secantes.



Fonte: <https://www.passeidireto.com/arquivo/5094820/superficies-esfericas---geometria-analitica>.

- $S_1 \cap S_2$ contém um único ponto P , que é o ponto em que a reta C_1C_2 intercepta π . Neste caso dizemos que S_1 e S_2 são tangentes em P e que este é o ponto de tangência. Os pontos de π com exceção de P , são exteriores a S_1 e S_2 como mostra a figura.

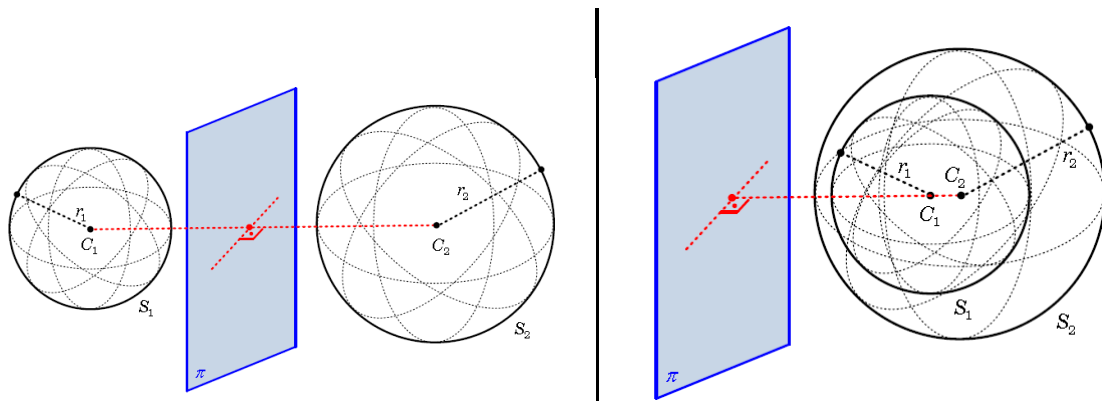
Figura 11: Superfícies esféricas tangentes.



Fonte: <https://www.passeidireto.com/arquivo/5094820/superficies-esfericas---geometria-analitica>.

- As superfícies esféricas S_1 e S_2 são disjuntas, ou seja, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Neste caso, o plano radical π é exterior a ambas as superfícies esféricas.

Figura 12: Superfícies esféricas disjuntas.



Fonte: <https://www.passeidireto.com/arquivo/5094820/superficies-esfericas---geometria-analitica>.

Então, obtém-se a interseção de superfícies esféricas através da resolução do sistema formado pela equação geral dessas superfícies, e sabendo que o propósito é observar a relação da Geometria Analítica com o GPS, é importante ressaltar que para projetar a localização de uma pessoa, objeto ou qualquer outra coisa com uma

maior precisão, tal processo se dará através da interseção entre quatro esferas imaginárias sendo considerados como seus centros os satélites e a interseção entre elas será a localização solicitada pelo usuário do GPS. Para isso o sistema resolvido tem que haver apenas uma solução, ou seja, o sistema formado pelas equações gerais das quatro esferas tem que ter como resultado um conjunto não vazio. O modo de resolução desse sistema é análogo ao sistema resolvido acima.

Conforme (ALVES, 2009), o seguinte teorema é de grande importância para determinar a interseção de quatro superfícies esféricas.

Teorema 1. *Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 quatro superfícies esféricas distintas tais que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$. Se os centros dessas esferas não são coplanares, então o conjunto de interseção $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ contém um único ponto.*

Prova.

Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , respectivamente. Mostraremos que se $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ e C_1, C_2, C_3, C_4 são não coplanares então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$.

As equações das superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4 são:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & \text{(II)} \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 & \text{(III)} \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Será mostrado que o sistema acima tem uma única solução, ou seja, $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$.

Sendo $x^2 + y^2 + z^2 + a_jx + b_jy + c_jz + d_j = 0$ as equações gerais de S_j , onde $j = 1, 2, 3, 4$, ao subtrairmos essas equações duas a duas de modo que (I) - (II), (I) - (III) e

(I)-(IV) obtemos equações lineares em x , y e z uma vez que os termos x^2 , y^2 e z^2 são eliminados.

Uma tal equação linear determina o plano que contém a correspondente interseção. Por exemplo, subtraindo as equações de S_1 e S_2 obtem-se uma equação do plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Considerando-se os planos que contém $S_1 \cap S_2$, $S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$ temos que se $P = (x, y, z)$ está em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ então (x, y, z) é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

A prova do teorema estará terminada se mostrarmos que o sistema (*) tem uma única solução, pois a existência de dois pontos distintos em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ acarretariam duas soluções distintas do sistema linear (*).

Sendo $C_j = (u_j, v_j, w_j)$ o centro de S_j , $j = 1, 2, 3, 4$, comparando as equações (2) e (3) acima temos $a_j = -2u_j$, $b_j = -2v_j$, $c_j = -2w_j$ de modo que:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix}$$

Como C_1, C_2, C_3, C_4 são não coplanares segue que o determinante à direita é não nulo e, portanto, (*) é um sistema linear com determinante não nulo tendo assim uma única solução.

Evidentemente o simples fato do sistema linear (*) ter uma única solução, significando que os centros são não coplanares, não acarreta necessariamente que a interseção das quatro superfícies esféricas consiste de um único ponto P . Em outras palavras, a hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ é essencial para a validade do teorema. A eventual solução de (*) nos dará o procurado ponto P desde que pertença simultaneamente às quatro superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4 .

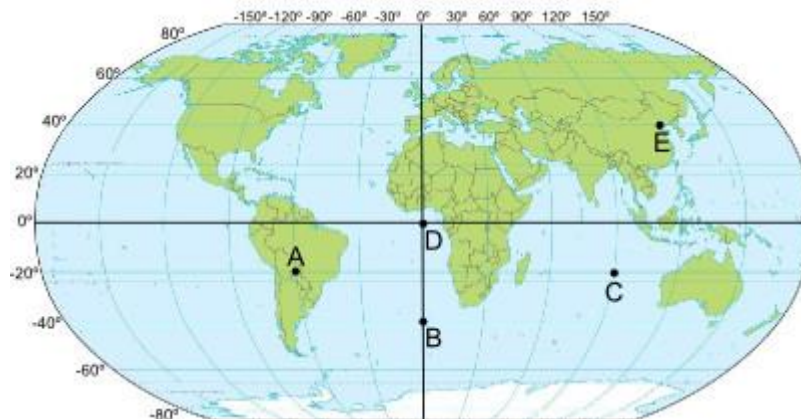
3. COORDENADAS GEOGRÁFICAS E COORDENADAS GEOCÊNTRICAS

As coordenadas geográficas são um sistema de linhas imaginárias traçadas sobre o globo terrestre ou um mapa. Com a combinação dessas linhas, criam-se endereços específicos para cada ponto do mundo, permitindo a sua identificação precisa. Tais coordenadas são denominadas latitude e longitude.

A latitude de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul). A longitude de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste).(Alves, 2004,p.10).

Os paralelos cortam a terra no sentido horizontal, no sentido Leste-Oeste, e os meridianos cortam a terra no sentido vertical, isso pode ser visto na figura 13.

Figura 13: Coordenadas Geográficas de pontos sobre a superfície terrestre.



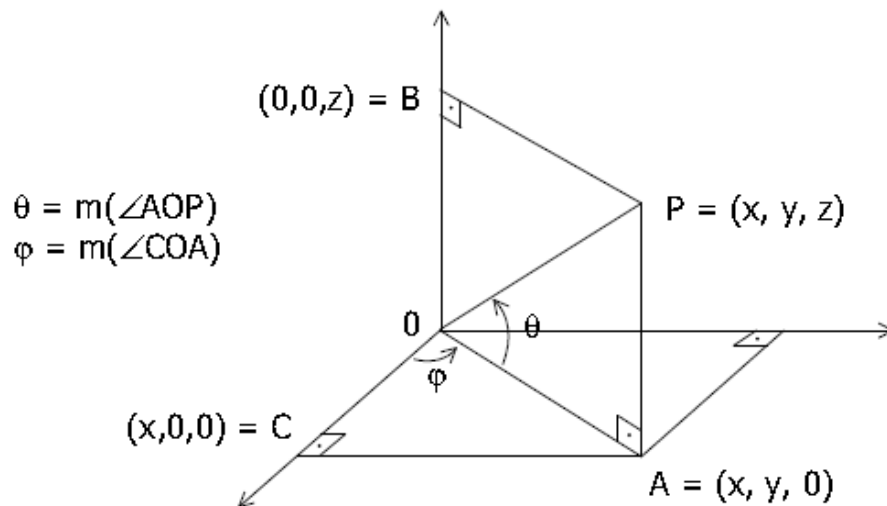
Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=globo+terrestre&source>.

De acordo com a análise feita no mapa acima, tem-se que a latitude e a longitude estão divididas em quatro quadrantes. O ponto “A” por exemplo, está localizado a 20° S e 60° W e assim todos os outros pontos no mapa tem uma localização, ou seja, uma latitude e uma longitude.

Analisando matematicamente, tem-se que as coordenadas cartesianas de um ponto $P=(x,y,z)$ podem ser transformadas em coordenadas geográficas: Latitude, longitude e altitude.

Tomando um ponto $P = (x,y,z)$ no espaço sendo um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, em que a origem O é o centro da terra, o eixo Oz positivo aponta para o polo norte, o plano Oxy é o plano que contém o equador com o eixo Ox positivo cortando o meridiano na longitude $90^\circ E$. Como mostra a figura 14.

Figura 14: Coordenadas cartesianas de um ponto P no espaço.



Fonte: A Geometria do Globo Terrestre.

De acordo (ALVES, 2004), com os ângulos θ e φ representam-se à latitude e à longitude respectivamente. A diferença entre $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra é chamada a **elevação**(ou **altitude**) de $P = (x,y,z)$.

No triângulo retângulo $\triangle OPB$ da figura acima temos $\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ e, como $\cos(90 - \theta) = \sin\theta$, segue que $\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Com essas expressões observa-se que quando $z > 0$ atribui-se a θ um único valor entre 0 e 90 e um único valor entre -90 e 0 quando $z < 0$. No primeiro caso dizemos que a latitude de P é $\theta^\circ N$ enquanto que no segundo a latitude de P é $(-\theta)^\circ S$.

Temos também que por meio do triângulo $\triangle OAC$

$$\sin\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \cos\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dessas expressões têm-se um único φ entre 0 e 180 quando $y > 0$ e dizemosque, a longitude de P é $\varphi^\circ E$. Quando $y < 0$, φ assume um único valor entre -180 e 0 e, neste caso, a longitude de P é $(-\varphi)^\circ W$.

Para calcular a altitude basta fazer a diferença entre $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da terra.

Alves (2008) mostra um exemplo de como determinar as coordenadas geográficas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas por $P=(3\sqrt{3}.10^6, -3.10^6, 6\sqrt{3}.10^6)$. Considerando como unidade de medida o metro.

Temos $x^2 + y^2 + z^2 = 27.10^{12} + 9.10^{12} + 108.10^{12} = 144.10^{12}$ e $x^2 + y^2 = 27.10^{12} + 9.10^{12} = 36.10^{12}$. Logo, $\text{sen}\theta = \frac{6\sqrt{3}.10^5}{12.10^5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e, portanto $\theta = 60$.

Como $\text{sen}\varphi = -\frac{3.10^5}{6.10^5} = -\frac{1}{2}$ e $\text{cos}\varphi = \frac{3\sqrt{3}.10^5}{6.10^5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ obtemos $\varphi = -30$.

Assim as coordenadas geográficas de P são $\theta = 60^\circ$ N e $\varphi = 30^\circ$ W. Supondo o raio da Terra igual $6,4.10^6$ metros temos que a elevação de P mede $12.10^6 - 6,4.10^6 = 5,6.10^6$ metros.

Assim, podemos também transformar coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas, apenas invertendo o processo acima. Nesse caso é necessário conhecer a latitude θ , a longitude φ e a elevação de um ponto P, podemos determinar suas coordenadas cartesianas x, y e z. As relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas são:

$$\begin{aligned}x &= r \cos\theta \cos\varphi \\y &= r \cos\theta \text{sen}\varphi \\z &= r \text{sen}\theta\end{aligned}$$

4. Um breve histórico antes do GPS

De acordo com (FRIEDMAN ,2008) desde os primórdios o homem buscou por sua localização sobre algum ponto da terra, como costumavam se aventurar por terras e mares desconhecidos, muitas vezes buscavam se localizar observando árvores, pedras, dentre outros meios. Com o passar dos tempos o homem percebeu que esses meios de localização não eram muito seguros, e isso devido aos desgastes naturais que ocorrem na natureza. Então, durante séculos e milênios as únicas fontes de informações confiáveis sobre direções foram os movimentos do sol e das estrelas, no entanto, essas formas de se determinar posição, por força das circunstâncias, eram muito vagas e imprecisas.

Navegadores fluviais poderiam contar com pontos de referência em ambas às margens do rio – desde que visíveis. As próprias curvas do rio, sua largura, remansos e corredeiras também poderiam ajudar a determinar posições e, inclusive, determinar até onde o rio seria navegável com um certo tipo de embarcação.(FRIEDMAN, 2008,P7).

Contudo, com o passar dos tempos foram surgindo várias ideias e instrumentos capazes de conduzir os deslocamentos dos povos. Dentre os instrumentos inventados na época destacou-se a bússola, provavelmente inventada pelos Chineses, foi um dos mais significativos marcos na história das navegações e da tecnologia.

Este instrumento simplesmente revolucionou todas as formas de navegação, porque possuía a “impressionante, misteriosa e quase inacreditável característica de apontar sempre para uma mesma direção”. E, se uma direção de referência constante podia ser obtida, outras direções poderiam ser apontadas com base nesta referência.(FRIEDMAN, 2008,P7).

“A invenção e posterior descoberta da bússola impulsionou a navegação, porém, a mesma fornecia a direção, mas não era capaz de determinar a posição geográfica de nenhum ponto”,(Neto, 2013).

Figura 15: Bússola.



Fonte: O Uso do GPS como fato motivacional no processo de aprendizagem.

(FRIEDMAN, 2008) ressalta que outro marco na história das navegações e da tecnologia foi o desenvolvimento da Astronomia de Posição. O objetivo da Astronomia de Posição era determinar com base nas posições aparentes do sol, da lua ou das estrelas a posição em qualquer ponto da terra.

O “marco” da astronomia de posição pode ser dividido em alguns outros “marcos secundários” – cada um deles bastante significativo. Uma vez aceito que a Terra possuía forma aproximadamente esférica, aqueles mais familiarizados com geometria sabiam que seriam necessários dois ângulos e duas referências fixas sobre esta esfera para definir posições sobre a mesma – os nomes atualmente usados para estes ângulos são latitude e longitude para as referências Equador e Meridiano de Greenwich. Outro marco secundário poderia ser associado ao avanço dos instrumentos para medição de ângulos com precisão, o que possibilitou medir a latitude de forma igualmente precisa. (FRIEDMAN, 2008, P7).

Mesmo tendo resolvido o problema de localização e coordenada a Astronomia de Posição foi pouco usada devido a seu alto custo.

Em 1912, surgiu a localização por rádio navegação, não era muito preciso, mas foi um avanço para a navegação. O RADAR (Radio Detection And Ranging) tinha a capacidade de medir lapsos de tempo entre emissão e recepção de ondas de rádio.

O radar é constituído de uma antena transmissora receptora de sinais de alta frequência, a transmissão ocorre através de pulsos eletromagnéticos de alta potência, curto período e feixe curto. Esse feixe ao ser propagado se alarga, ganhando a forma de um cone até atingir o alvo que está sendo monitorado. Após atingir o alvo, o sinal é então refletido e a antena passa a ser receptora de sinais. Com a velocidade de propagação do pulso e o tempo gasto para o eco chegar, é possível calcular com exata precisão a localização do objeto. (SANTOS, Brasil escola).

O radar tem aplicação em muitas áreas, um exemplo é que os radares são utilizados para localizar objetos no espaço, objetos que estejam na órbita da terra e até mesmo satélites.

Finalmente, após a utilização de vários métodos para buscar uma localização exata surgiu o Global Positioning System-GPS(Sistema de Posicionamento Global), que tem a função de identificar a localização de um receptor na superfície da terra, através de sinais emitidos por satélites, sistema esse que além de determinar a latitude e a longitude determina também a altitude e com isso a hora exata.

5. O Sistema de Posicionamento Global- GPS

De acordo com (CARVALHO E ARAÚJO ,2009), o GPS foi criado no ano de 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos. A motivação do projeto se deu dentre outras coisas com o intuito de que as aeronaves e os navios militares pudessem determinar em qualquer circunstância de tempo a sua posição exata.

Em 1973, um grupo de trabalho da Força Aérea dos Estados Unidos e cientistas civis do Pentágono iniciaram os estudos para o desenvolvimento de um sistema de auxílio à navegação que fosse de abrangência global, de forma a prover todas as forças armadas dos Estados Unidos de um mesmo padrão, capaz de integrar insuperável facilidade de uso com elevadas vantagens operacionais e estratégicas. Lançaram-se então os fundamentos do Defense Navigation Satellite System, que veio a se tornar o NAVSTAR GPS– o mais abrangente, preciso, versátil e fácil sistema de navegação jamais pensado ou sonhado em meios militares e civis. Uma revolução tão acachapante que praticamente liquidou a questão da diversidade de sistemas e das restrições de cada um deles. (MACIEL, RIOS, GODINHO APUD FRIEDMANN, 2003, P.204).

Inicialmente seu uso era restrito aos militares. Porém, na década de 1980 passou a ser liberado para o meio civil, ainda, com algumas restrições. Existem dois tipos de serviços no GPS, que são eles o SPS (Standard Positioning Service) e PPS (Precise Positioning Service). O SPS é um serviço de posicionamento e tempo padrão disponível para todos os usuários do planeta. O PPS tem capacidades de localização mais precisa e está disponível somente para o uso militar e usuários autorizados. A princípio o Departamento de Defesa americano implantou uma limitação no nível de exatidão aos usuários civis, pois como o sistema é global poderia oferecer riscos a aspectos de segurança. Desta forma a limitação do nível de exatidão se deu através do AS (Anti-Spoofing)e SA (Selective Availability). O AS (Anti-fraude) visa à proteção contra imitações por usuários não autorizados e o SA (Disponibilidade Seletiva) tem como objetivo proibir o nível de exatidão proporcionado pelo GPS.

No entanto a disponibilidade seletiva foi cancelada no ano de 2000:

Quando o governo norte-americano autorizou o uso civil do sistema GPS, o Departamento de Defesa implantou um erro artificial no sistema chamado “Disponibilidade Seletiva”, para resguardar a segurança interna do país. A Disponibilidade Seletiva foi cancelada por um decreto do Presidente Clinton, em maio de 2000, pois o contínuo desenvolvimento tecnológico permitiu ao Departamento de Defesa obstruir a precisão do Sistema onde e quando os interesses americanos exigissem. Com o decreto, o erro médio de 100 metros na localização do receptor ficou dez vezes menor.(CARVALHO E ARAÚJO, 2009, P.3).

Atualmente existem em funcionamento por satélite dois sistemas, que são eles: O GPS, americano e o Glonass, russo; há ainda em implantação mais dois sistemas o Galileu, europeu e o Compass, chinês.

Conforme (MONICO, 2000), na concepção original, quatro tipos de satélites fizeram parte do projeto NAVSTAR-GPS. Eles são denominados satélites do Bloco I, II, IIA e IIR. Os satélites do Bloco I foram protótipos, e todos os satélites do bloco II planejados foram lançados. Os Blocos II e IIA ("A" refere-se à *Advanced*- avançado) são compostos por 28 satélites, os quais se referem, respectivamente, a primeira e segunda geração de satélites GPS. Trata-se dos satélites operacionais, planejados para dar suporte à configuração mínima de 24 satélites. Desses satélites, 9 são do Bloco II e 19 pertencem ao Bloco IIA. Em relação aos satélites do Bloco II, os do Bloco IIA têm capacidade de comunicação recíproca. Além disso, enquanto os satélites do Bloco II podem armazenar apenas até 14 dias de dados de navegação, os do Bloco IIA têm capacidade de até 180 dias de armazenamento. Quando o sistema foi declarado operacional, em 27 de abril de 1995, todos os satélites em operação pertenciam a esses dois blocos.

A terceira geração de satélites foi denominada de IIR (IIR refere-se ao abastecimento) o peso de cada um é superior a 2000 Kg, a terceira geração teve como propósito substituir a maneira que se tornou necessário os satélites dos blocos I e IIA. A quarta geração composta por 33 satélites que deverão incorporar a modernização do sistema GPS, substituirá os satélites da terceira geração, esses por sua vez são denominados IIF (IIF denomina-se continuação).

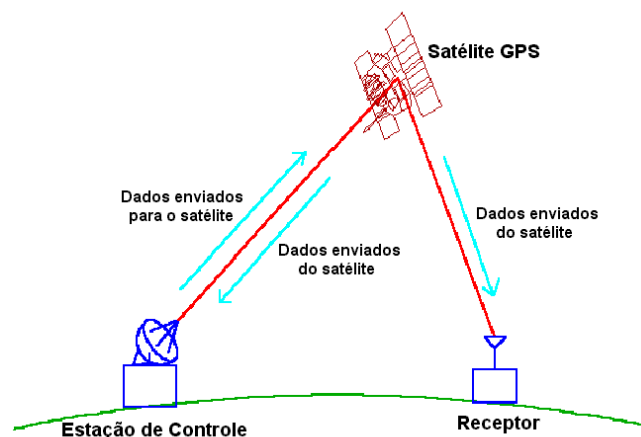
O sistema de Posicionamento Global está disponível vinte e quatro horas por dia em decorrência de velocidades, distâncias e direções entre pontos e áreas. Ele está programado para fornecer coordenadas bidimensionais ou tridimensionais, sendo que as coordenadas bidimensionais utilizam apenas a latitude e a longitude para uma determinada localização, nesse caso, informações fornecidas em duas dimensões não são tão precisas quanto às informações em coordenadas tridimensionais, essas por sua vez utilizam a latitude, a longitude e a altitude, proporcionando com isso uma localização exata. O GPS funciona em qualquer circunstância de tempo, pois é um Sistema de radionavegação formado por 24 satélites colocados em órbita, estes satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada um deles tem 28° de visualização sobre a terra, os planos orbitais são inclinados 55° em relação ao equador. Os receptores recebem as

informações dos satélites e usam a trilateração para calcular a posição do usuário em 2D, ou seja, para essa localização é necessário a visualização de no mínimo três satélites, e isso é possível pelo fato de que os satélites GPS dão duas voltas em torno da terra a cada dia. Para fazer uma transmissão de informações mais eficiente aos usuários que utilizam tal sistema para se localizarem em algum ponto sobre a terra. Utilizando quatro ou mais satélites, obtém-se a localização do usuário em 3D, uma localização mais precisa. Com isso, depois de informado o local em que o usuário se encontra o sistema GPS ainda fornece outras informações relevantes, como por exemplo, a velocidade, a distância de viagem, dentre outras coisas mais. Os satélites são mantidos funcionando graças à energia solar, e ainda tem baterias de reserva em casos de eclipse solar.

5.1 Elementos do Sistema GPS

Quando nos referimos ao GPS, muitas vezes vem à ideia de ser apenas o aparelho receptor dos sinais. Porém, vai, além disso, pois na realidade esse sistema é constituído por três seguimentos, que são eles: Seguimento Espacial, Seguimento de Controle e Seguimento de Usuário.

Figura 16: Os três seguimentos que constituem o sistema GPS.



Fonte: GPS Para Iniciantes.

O seguimento espacial, de acordo com (MACIEL, RIOS E GODINHO, 2002) este seguimento é constituído por 24 satélites que orbitam a terra duas vezes

por dia. Eles estão distribuídos em seis órbitas pré-determinadas e cada um pesa em média 1.600Kg.

Figura 17: Constelação dos satélites do sistema GPS.



Fonte: As Aventuras do Geodetive 6: GPS.

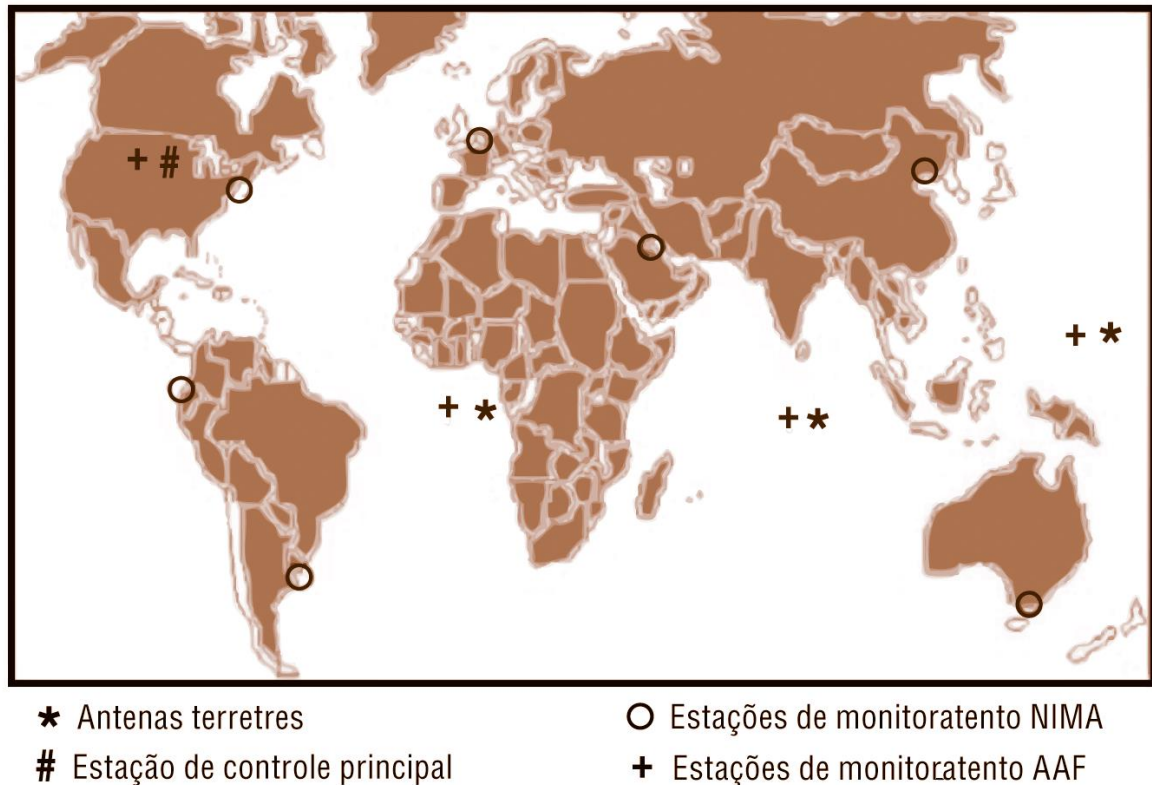
A altitude da órbita é tal que os satélites repetem a mesma trilha e configuração em qualquer ponto aproximadamente cada 24 horas (4 minutos mais cedo cada dia). Como já foi visto existem seis planos orbitais (com nominalmente quatro satélites em cada um), igualmente espaçados (60 graus de distância) e inclinados em cerca de cinquenta e cinco graus em relação ao plano equatorial.

O seguimento de controle é formado por um sistema de estações de rastreamento localizadas em várias partes do mundo, sendo uma rede mestre de controles de monitores GPS localizada no Colorado e as outras estações restantes estão localizadas em várias partes do mundo. Elas têm o objetivo de monitorar, corrigir e garantir o funcionamento do sistema.

A função básica destas estações é monitorar os sinais provenientes de todos os satélites, computando dados orbitais precisos e correções de tempo para cada satélite em separado, de forma a garantir a coerência e sincronismo dos sinais emitidos pela totalidade do segmento espacial. (Friedmann, 2003, p.207).

As estações de controle são de propriedade da Força Aérea Americana, suas localizações são mostradas na figura 18.

Figura 18: Estações de Controle.



Fonte: Noções básicas de Sistema de posicionamento global-GPS.

Observa-se na figura 18 que as estações de controle estão localizadas em Kwajalein, nas Ilhas Marshall; na Ilha de Ascension, no Oceano Atlântico; no Havaí; em Diego Garcia, no Oceano Índico; e no Colorado, Estados Unidos (a principal delas).

O seguimento de usuário é composto pelos receptores dos sinais do GPS e por todos aqueles que utilizam esse serviço para se localizarem em um determinado ponto da terra. Os receptores variam de tamanho, modelo e fabricante. Segundo (CARVALHO E ARAÚJO ,2009), os receptores GPS coletam os dados enviados pelos satélites, transformando-os em coordenadas, distâncias, tempo, deslocamento e velocidade, através de processamento em tempo real ou a posteriori (pós-processamento).

Além de receber e decodificar os sinais dos satélites, os receptores são verdadeiros computadores que permitem várias opções: referências; sistemas de medidas; sistemas de coordenadas; armazenamento de dados; troca de dados com outro receptor ou com um computador etc. Alguns desses modelos possuem arquivos com mapas gravados em sua memória, o que facilita bastante a navegação e a localização de pontos.(CARVALHO E ARAÚJO, 2009, P9).

Hoje em dia qualquer pessoa pode utilizar o receptor GPS, tendo em vista que está disponível a todos com custos variados. Os dados que chegam aos receptores são obtidos de acordo com as medidas de distância entre o usuário e os quatro satélites, tudo se resume em medir o tempo que o sinal emitido por cada satélite demora a atingir a antena receptora, o sinal se propaga no espaço vazio na velocidade da luz, ou seja, cerca de 300.000 km/h, assim multiplicando essa velocidade pelo tempo medido obtém-se a distância.

As estações de monitoramento controlam os satélites, corrigem suas posições e reprogramam o sistema com o padrão necessário para um bom desempenho dos satélites. O tempo e a frequência das informações são baseados nos relógios atômicos contidos nos satélites, tais relógios são extremamente caros e precisos, já os relógios contidos nos receptores GPS são relógios quartzo similares a relógios de pulso, esses relógios são totalmente imprecisos, mas este problema é resolvido de maneira bastante inteligente, o relógio do receptor é constantemente atualizado com a hora atômica transmitida pelos satélites do Sistema GPS. Cada satélite comunica ao receptor constantemente um almanaque com a sua posição no espaço para podermos determinar nossa própria posição.

Os receptores GPS recebem diversos dados que podem ser geográficos ou topográficos. Os receptores classificam-se em geodésicos, topográficos e de navegação. De acordo com (MONICO,2000), o posicionamento topográfico permite pós-processamento e posicionamento relativo, sendo que a precisão é de 1 cm.

Figura 19: Receptores topográficos.



Fonte: google.com.br.

O posicionamento geodésico permite pós-processamento e posicionamento relativo, possui uma alta precisão que vai de alguns centímetros.

Figura 20: Receptores geodésicos.



Fonte: google.com.

Já o posicionamento por navegação, é receptor de mão, possui uma rápida determinação de coordenadas, tem uma precisão aproximadamente de 10 a 30 metros.

Figura 21: Receptores de navegação.



Fonte: Google.com.br

As funcionalidades dos geodésicos e topográficos se assemelham, são muito precisos, porém, não informam a hora exata. Já o sistema de navegação são menos precisos, mas informam a hora exata, também são os mais utilizados devido a seu baixo custo e os diversos modelos disponíveis no mercado, como por exemplo, celulares, relógios, computadores entre outros.

Existe uma grande quantidade de receptores no mercado, que são utilizados nas mais diversas áreas. (CONFORME OLIVEIRA, 2011) O GPS é usado na aviação civil e militar; nos esportes tais como rally, balonismo; na navegação

marítima e comercial; em definição de rotas; na topografia, definição de limites, áreas entre outros; na geodinâmica, movimento da crosta terrestre e em muitas outras áreas do conhecimento.

Hoje em dia os usuários comuns utilizam bastante o GPS em automóveis, isso pelo fato de ser disponibilizados mapas das rotas e percursos das cidades, facilitando o deslocamento do usuário.

Conforme (CARVALHO E ARAÚJO, 2009 APUD SEEGER, 1993), os principais componentes de um receptor GPS, são:

- Antena com pré-amplificador;
- Seção de radiofrequência para identificação e processamento do sinal;
- Microprocessador para controle do receptor, amostragem e processamento dos dados;
- Oscilador;
- Interface para o usuário, painel de exibição e comandos;
- Provisão de energia;
- Memória para armazenar os dados.

(ALBUQUERQUE E SANTOS, 2003), apontam as principais características do receptor, que são:

- Armazenar coordenadas extraídas de um documento cartográfico, de um relatório ou obtidas pela leitura direta de sua posição.
- Os pontos podem ser combinados formando rotas que, quando ativadas, permitem que o receptor analise os dados e informe, por exemplo, tempo, horário provável de chegada e distância até o próximo ponto; horário de nascer e do pôr do Sol; rumo que deve-se manter para chegar ao ponto de interesse e muito mais.
- As coordenadas dos pontos podem ser obtidas com o receptor GPS no modo contínuo, definindo os caminhos percorridos pelo usuário. Neste modo o receptor também informará horário de nascer e do pôr do Sol; rumo e distância ao ponto de interesse, velocidade, e rumo do deslocamento.

6. RELAÇÃO ENTRE GEOMETRIA ANALÍTICA E GPS

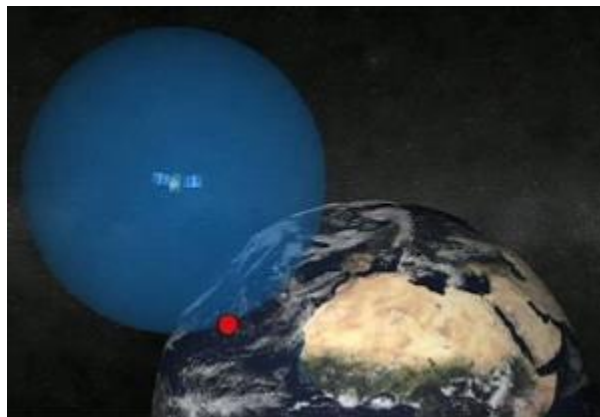
Nos capítulos anteriores foram vistos conceitos de Geometria Analítica e alguns conhecimentos básicos sobre o GPS. Neste capítulo será relacionado às definições matemáticas já estudadas anteriormente com o Sistema de Posicionamento Global.

Viu-se que para a localização em algum ponto da terra é necessário no mínimo quatro satélites para uma posição mais precisa. De acordo com (FACCIO, 2012), às coordenadas geográficas são determinadas pelo método de triangularização, ou seja, nesse caso, utiliza-se apenas a distância de três satélites. Já o quarto satélite é necessário porque, fornece a hora absoluta, tornando o GPS uma das maiores tecnologias já conhecida. Vejamos agora matematicamente o porquê de quatro satélites.

A partir da distância $d = v \cdot t$, onde v é a velocidade da luz e t é o tempo, obtém-se uma esfera de raio r com centro no satélite. Porém, encontrando somente a distância não será o suficiente para se determinar a localização exata do receptor.

Observa-se que ao conhecermos apenas a distância de um satélite até o receptor, é possível dizer que a localização do receptor é um ponto qualquer sobre a esfera imaginária com raio igual a nossa distância.

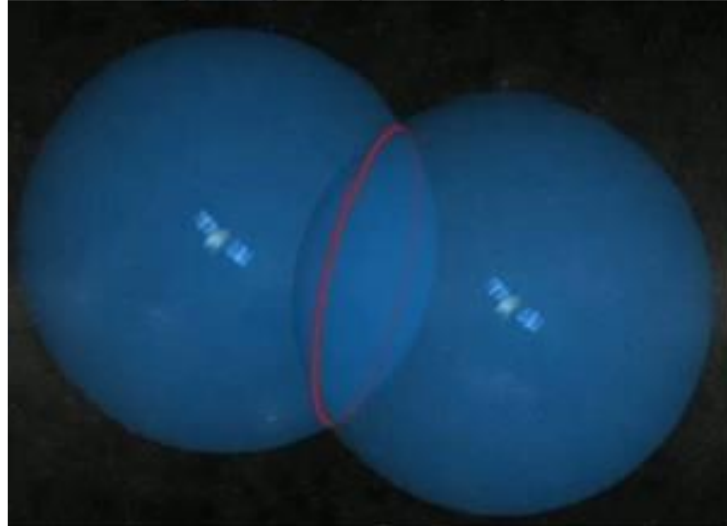
Figura 22: Esfera imaginária com raio igual a d .



Fonte: As Aventuras do Geodetete 6: GPS.

Agora ao invés de conhecer apenas a distância a que estamos de um satélite, passarmos a conhecer a distância com relação a dois satélites, nesse caso sabe-se que a posição do receptor seria um ponto qualquer sobre a circunferência imaginária resultante da interseção das duas esferas.

Figura 23: Circunferência imaginária gerada pela interseção entre duas esferas imaginárias.



Fonte: As Aventuras do Geodetive 6: GPS.

Observa-se, que em nenhum dos casos anteriores teríamos uma localização exata.

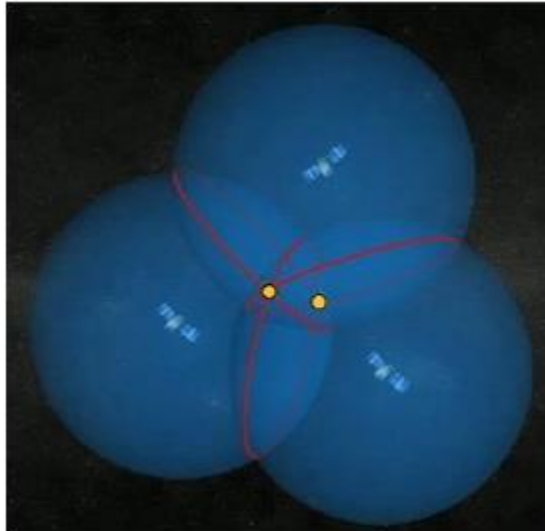
Vejamos agora, o que acontece se tivéssemos a distância entre três satélites. Já foi visto que com três satélites obtêm-se as coordenadas geográficas (latitude, longitude).

Acrescentando mais um satélite aos dois já citados acima, podemos encontrar a localização.

Podem ocorrer duas possibilidades: a primeira é quando a terceira esfera tangencia a intersecção das duas primeiras esferas e só haverá um ponto de intersecção, que será a localização do receptor; a segunda possibilidade é quando a terceira esfera intercepta a intersecção das duas primeiras esferas em dois pontos, aí precisaremos do quarto satélite.(NETO, 2013, P30).

No caso da localização se reduzir a dois pontos, um dos pontos pode ser descartado, pois esse ponto está no espaço e como sabemos que nos encontramos na superfície da terra não é difícil deduzir que o outro ponto será o ponto de localização.

Figura 24: Projeção da interseção de três esferas imaginárias.



Fonte: As Aventuras do Geodetive 6: GPS.

6.1 A necessidade do quarto satélite

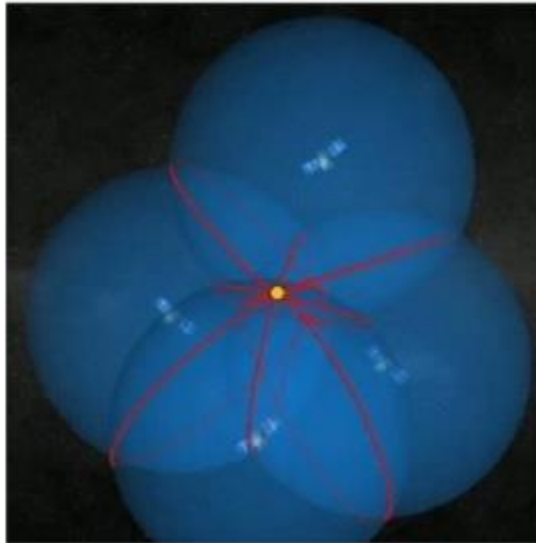
O quarto satélite permite escolher um dos dois pontos gerados pela interseção das três esferas imaginárias, ou seja, acrescentando mais uma esfera as três anteriores. Nesse caso, além da latitude e da longitude, (duas dimensões) o quarto satélite permite saber ainda a altitude, com isso conseguimos descobrir a localização exata do receptor. Os quatro satélites permitem verificar se os relógios estão em perfeito sincronismo. Se as medidas das distâncias forem satisfeitas, então a interseção entre as quatro esferas será apenas um ponto, no entanto se essas medidas não forem satisfeitas, a interseção entre as esferas imaginárias não será um ponto. Com isso, verifica-se que quando se tem três esferas e as medidas das distâncias não estiverem corretas, elas se cruzarão mesmo assim. Já, se tivermos quatro esferas e as medidas estiverem incorretas, as esferas imaginárias não se cruzarão. Para que esses erros não ocorram o receptor faz o cálculo de reajuste proporcionando assim a interseção entre as quatro esferas em um único ponto.

O receptor pode calcular facilmente o ajuste necessário que faz com que as quatro esferas se cruzem em um mesmo ponto. Baseado nisso, o receptor

reinicia o seu relógio para que ele coincida com o relógio atômico do satélite – fazendo isso sempre que está ligado –, o que significa que ele é quase tão preciso quanto os relógios atômicos dos satélites. (Carvalho e Araújo, 2009, p13)

A figura 25 mostra a interseção entre as quatro esferas imaginárias.

Figura 25: Projeção da interseção de quatro esferas imaginárias.



Fonte: As Aventuras do Geodetive 6: GPS.

No momento em que os sinais são emitidos para o receptor, com relação a um sistema ortogonal de coordenadas, podem ser dadas as posições dos quatro satélites.

Podemos obter as equações gerais das superfícies esféricas imaginárias a partir das coordenadas no sistema ortogonal que são dadas a partir da posição dos quatro satélites no momento em que os sinais são emitidos para o receptor, então, se formará um sistema a partir dessas equações e encontraremos as coordenadas cartesianas da localização do receptor. (NETO, 2013, p32).

As equações gerais das superfícies esféricas já foram mostradas anteriormente no capítulo 2.

Abaixo será mostrado um exemplo prático do funcionamento do GPS. Este exemplo foi extraído de (NETO, 2013 APUD NORD ET AL 1997). Um usuário do GPS é detectado por quatro satélites. O quadro abaixo indica as efemérides (em metros)

de cada satélite tomadas em relação ao sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

As efemérides são as informações transmitidas pelos satélites, cada satélite possui sua efeméride que funciona como sua identificação, ou seja, ela fornece sua posição, data e hora.

Quadro 1: Efemérides dos satélites em relação ao sistema de coordenadas cartesianas X Y Z.

	X	Y	Z
Satélite 1	-10×10^6	20×10^6	2×10^6
Satélite 2	-14×10^6	7×10^6	13×10^6
Satélite 3	-18×10^6	4×10^6	4×10^6
Satélite 4	-12×10^6	15×10^6	1×10^6

Entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite. Os lapsos de tempo são registrados em segundos pelo receptor GPS.

Quadro 2: Lapsos de tempo (em segundos)

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,068	0,070	0,072	0,067

Multiplicando cada lapso de tempo pela velocidade da luz ($2,997 \cdot 10^8$ k/s), Por meio da fórmula $d = v \cdot t$ será obtido à distância entre o receptor e cada satélite.

Satélite 1: $d = v \cdot t$ $d = 2,997 \cdot 10^8 \cdot 0,068 = 0,203796 \cdot 10^8$

Satélite 2: $d = v \cdot t$ $d = 2,997 \cdot 10^8 \cdot 0,070 = 0,20979 \cdot 10^8$

Satélite 3: $d = v \cdot t$ $d = 2,997 \cdot 10^8 \cdot 0,072 = 0,215784 \cdot 10^8$

Satélite 4: $d = v \cdot t$ $d = 2,997 \cdot 10^8 \cdot 0,067 = 0,200799 \cdot 10^8$

Por meio dessas informações as equações reduzidas das superfícies esféricas imaginárias podem ser escritas. Tais esferas imaginárias têm seus centros em cada satélites e raio igual às distâncias calculadas. Como podemos ver a seguir:

$$S1 : (x+ 10.10^6)^2 + (y- 20.10^6)^2 + (z- 2.10^6)^2 = 415.10^{12}$$

$$S2 : (x+ 14.10^6)^2 + (y- 7.10^6)^2 + (z- 13.10^6)^2 = 440.10^{12}$$

$$S3 : (x+ 18.10^6)^2 + (y- 4.10^6)^2 + (z- 4.10^6)^2 = 466.10^{12}$$

$$S4 : (x+ 12.10^6)^2 + (y- 15.10^6)^2 + (z- 1.10^6)^2 = 403.10^{12}$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos as respectivas equações gerais e o sistema linear é dado por:

$$S1 : x^2 + y^2 + z^2 + 20.10^6x - 40.10^6y - 4.10^6z + 89.10^{12} = 0$$

$$S2 : x^2 + y^2 + z^2 + 28.10^6x - 14.10^6y - 26.10^6z - 26.10^{12} = 0$$

$$S3 : x^2 + y^2 + z^2 + 36.10^6x - 8.10^6y - 8.10^6z - 110.10^{12} = 0$$

$$S4 : x^2 + y^2 + z^2 + 24.10^6x - 30.10^6y - 2.10^6z - 33.10^{12} = 0$$

Subtraindo S1 de S2, S3 e S4, obtemos:

$$S2 - S1 : 8.10^6x + 26.10^6y - 22.10^6z = 115.10^{12}$$

$$S3 - S1 : 16.10^6x + 32.10^6y - 4.10^6z = 199.10^{12}$$

$$S4 - S1 : 4.10^6x + 10.10^6y + 2.10^6z = 122.10^{12}$$

Cuja única solução é $x = -27, 71.10^6$; $y = 21, 31.10^6$ e $z = 9, 87.10^6$.

O ponto P com essas coordenadas cartesianas pertence, simultaneamente, às quatro superfícies esféricas e suas coordenadas geográficas, considerando o raio da Terra medindo $6, 4.10^6$.

Temos: $P = (-27, 71.10^6; 21, 31. 10^6; 9, 87.10^6)$, $\text{sen } \theta = 0, 27175$, $\text{cos } \phi = -0, 79262$ e $\text{sen } \phi = 0, 60955$. Logo: $\phi = 37^\circ$ E (Leste) e $\theta = 16^\circ$ N (Norte), O ângulo se refere à latitude e a longitude e a altitude é $29, 92.10^6$.

7. CONCLUSÃO

Este estudo mostrou algumas definições de Geometria Analítica que estão diretamente relacionadas com o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global-GPS. Observou-se a estrutura de funcionamento do Sistema, suas aplicações e funcionalidades, a importância nas mais diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, esportes, laser entre e outros. Os conhecimentos matemáticos aplicados a esse sistema servem para mostrar que a matemática está presente em praticamente tudo que conhecemos, inclusive na rota de navegação do GPS, quando é definido o caminho que o usuário deve percorrer para chegar a seu destino final. Existe todo um processo matemático em que as definições mostram a parte teórica que é onde tudo começa, ou seja, a partir de vários cálculos se chega ao funcionamento de uma das tecnologias mais avançadas existentes no planeta.

Além de todo o processo de funcionamento estudado e tendo em vista que o objetivo deste estudo foi de observar as aplicações matemáticas, este trabalho também pode ser usado como ferramenta pedagógica em sala de aula. Iniciando na educação básica, com conceitos simples de Geometria Analítica o aluno pode ser envolvido em atividades utilizando como fonte de apoio o GPS. E também pode ser utilizado pelos alunos do curso de licenciatura em matemática ou áreas afins

Esta pesquisa foi bastante relevante, pois, por meio de definições matemáticas, pode-se observar o funcionamento de uma ferramenta extremamente precisa que é o Sistema de Posicionamento Global. Cada definição tem seu grau de importância e isso faz com que a curiosidade pela matemática só aumente, pois como se observou durante todo o trabalho as aplicações da Geometria Analítica estão presentes no processo de desenvolvimento científico.

REFERÊNCIA

- ALVES, S. A geometria do globo terrestre, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/>>. Acesso em 10 jan. 2017.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*, 2. Ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.
- CAMARGO, I. BOULOS, P. Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- COORDENADAS TOPOGRÁFICAS X COORDENADAS UTM. Associação Profissional dos engenheiros agrimensores do Estado de São Paulo. Disponível em: <<http://www.apaesp.org.br/index.php/artigos-mobile/292-coordenadas-topograficas-x-coordenadas-utm?start=2>>. Acesso em 07 jan. 2017.
- CURSO DE GPS E CARTOGRAFIA BÁSICA. Instituto CEUB de Pesquisa e Desenvolvimento. 115 p. Disponível em: <http://www.fernandoquadro.com.br/files/cartografia_e_gps.pdf>. Acesso em 29 dez. 2016.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação Matemática da teoria a prática. Ed. 17. Campinas: Papirus, 1995.
- DELGADO, J. FRENSEL, K. CRISSAFF, L. Geometria Analítica, Coleção Profmat. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- DOLCE, O. POMPEU, N.J. Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial posição e métrica. 5. ed. São Paulo: Atual Editora.
- DOLCE, O. POMPEU, N.J. Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 1997.
- ESTUDO DIRIGIDO EM SIG: CARTOGRAFIA. Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/cristiane/Estudodirigido/Cartografia.htm>>. Acesso em: 06 jan. 2017.
- FACCIO, M.L. Do astrolábio ao GPS: Buscando o posicionamento global. 2012. Disponível em: <http://diariolilia.blogspot.com.br/2012/05/navegar-e-preciso_12.html>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- GPS: O SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL. Disponível em: <<http://www.arvm.org/gps/historico.html>>. Acesso em 20 jan. 2017.
- HUERTA, Eduardo; MANGIATERRA, Aldo; NOGUERA, Gustavo. GPS: Posicionamento Satelital. 1. ed. Rosario: UNR, 2005.
- IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica. São Paulo: Atual Editora, 1997-1978.

LEHMANN, H. Geometria Analítica. Editora: Globo. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga2V1aula1.pdf>>. Acesso em: 01 set. 2015.

MONICO, G.F.J. Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS descrição, fundamentos e aplicações. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=n3q4ypMODpEC&pg=PA34&lpg=PA34&dq=esta%C3%A7%C3%B5es+de+monitoramento+AAF&source=bl&ots=6WTfH2OyBM&sig=zmpshcli9flk91ehhwUSFZJW0s8&hl=pt-BR&sa=X#v=onepage&q=esta%C3%A7%C3%B5es%20de%20monitoramento%20AAF&f=false>> Acesso em: 21 jan. 2017.

NETO, G. C. P. O GPS como fator motivacional no processo de ensino aprendizagem. 2013. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos do Goytacazes, Rio de Janeiro, 2013.

OLIVEIRA, C.J. Conceitos básicos sobre posicionamento por satélites artificiais. 17p. Disponível em: <http://www.dsr.inpe.br/vcsr/files/Apresentacao_GPS.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2017.

PEREIRA, U. H. E. A Matemática do GPS. 2014. 30 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)-Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, Piauí, 2014.

REIS, L.G. SILVA, V.V. Geometria Analítica. 2. ed. Rio de Janeiro: Capa Verde, 1996.

SANTOS, Marco Aurélio da Silva. "Radar"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/radar.htm>>. Acesso em 23 de janeiro de 2017.

SANTOS, P. B. Paulo Freire e Ubiratan D' Ambrosio: Contribuições para o professor formador de matemática no Brasil. 2007. 444 f.. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2007.

SCANNAVINO, F. F. A Matemática e o GPS. 2015. 33 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, São Paulo, 2015.

SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SENSORIAMENTO, 11., 2007, Belo Horizonte. Mini Curso. Belo Horizonte: INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS, 2007. Disponível em: <<http://mtc-m12.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/jeferson/2003/06.02.09.16/doc/publicacao.pdf>>. Acesso em: 06 ago. 2016.

ROQUE, T. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, Jorge Zahar, 2012.