



**CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Germano Martins dos Reis Neto

**A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, E O LEGADO DE AL-
KHWARIZMI: A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU PELO
MÉTODO GEOMÉTRICO CORTE E COLE**

São Raimundo Nonato – PI
2017

GERMANO MARTINS DOS REIS NETO

A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, E O LEGADO DE AL-KHWARIZMI: A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU PELO MÉTODO GEOMÉTRICO CORTE E COLE

Trabalho de conclusão de curso apresentado para a obtenção do título de Licenciando em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato-PI.

Orientador: Prof^o. Msc. Gesivaldo dos Santos Silva

GERMANO MARTINS DOS REIS NETO

A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, E O LEGADO DE AL-KHWARIZMI: A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU PELO MÉTODO GEOMÉTRICO CORTE E COLE

Aprovada em: ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Amaya dos Santos Oliveira
Instituto Federal do Piauí – IFPI

Prof^º. Carlos Alberto da Silva
Instituto Federal do Piauí – IFPI

Prof^ª. Sergiane Neves Monteiro
Instituto Federal do Piauí – IFPI

É preciso citar os matemáticos indianos, em particular Bhaskara, para mostrar que ele não é o inventor da conhecida fórmula que ganhou seu nome [...] Parece que somente no Brasil a fórmula é associada ao nome de Bhaskara.

Tatiana Roque

Dedico este trabalho a minha mãe Maria Anita, ao meu pai Dacy Reis, a minha esposa Cláudia Dias, a minha vizinha Verônica, aos meus irmãos e toda minha família que sempre me apoiaram.

AGREDECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus pela vida, sabedoria, por tudo que tem me proporcionado e por mais essa conquista.

Agradecer minha querida esposa pela paciência, carinho e incentivo.

A minha mãe que sempre me incentivou a estudar desde criança, por acreditar em mim, quanto aos meus estudos e ao pai por me apoiar.

A vizinha que sempre tem me ajudado no decorrer da minha trajetória de estudos.

A minha irmã Darcilene, ao cunhado Mundim e aos sobrinhos Expedito e Ian Carlos pelo apoio aqui em São Raimundo Nonato.

Aos meus colegas de classe e amigos que acreditaram em mim e de certa forma contribuíram.

Todos os professores que contribuíram para o meu aprendizado durante todo o curso, em especial aqueles que me incentivaram a estudar e acreditando no meu potencial.

Ao orientador mestre Gesivaldo dos Santos por ter aceitado esse desafio comigo, pelo incentivo a minha pesquisa, pelo apoio e dedicação.

Por fim, todos aqueles que contribuíram de forma direta e indireta, o meu muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo verificar como os discentes entendem a história da matemática na resolução das equação do 2º grau e desenvolver métodos diferentes do apresentado a eles em sala de aula, usando artifícios mediados pela história. Como isso pode contribuir para a compreensão da resolução da mesma, sendo que alunos utilizam métodos de resolução de equações de forma mecanizada, sem o domínio da explicação de suas ações. Portanto, o professor deve mediar e explanar para que não ocorra uma aprendizagem trivial e sim detalhar o que estão aprendendo. Para isso, utilizamos a sequência didática como propósito de fazer com que haja uma redescoberta da formula resolutive da equação do segundo grau através do método geométrico denominado corte e cole. Para desenvolver a pesquisa foram realizadas atividade diagnostica, sequência didática e pós sequência em uma turma do 1º ano do ensino médio do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí- *Campus* São Raimundo Nonato, onde esses discentes resolveram questões que conduzissem a reflexão e autonomia de cada participante. Por fim, conclui-se que a matemática precisa ser ensinada de forma que possibilite o aluno a raciocinar, investigar e ter o entendimento do que está fazendo.

Palavras-chaves: Equação do 2º grau. História da Matemática. Método corte e cole.

ABSTRACT

The present work had as objective to verify how the students understand the history of the mathematics in the resolution of the equation of the second degree and developing methods different from the one presented to them in the classroom, using artifices mediated by this history. As this can contribute to the understanding of the resolution of the same, and students use methods of solving mechanized equations, without mastery of the explanation of their actions. Therefore, the teacher must mediate and explain so that a trivial learning does not occur, but to detail what they are learning. For this, we used the didactic sequence as a purpose to make a rediscovery of the resolution formula of the equation of the second degree through the geometric method denominated cut and paste. In order to develop the research, diagnostic activity, didactic sequence and post-sequence were carried out in a group of the first year of high school of the Federal Institute of Education, Sciences and Technology of Piauí-Campus São Raimundo Nonato, where these students solved questions that led to reflection and Autonomy of each participant. Finally, we conclude that mathematics must be taught in a way that enables the student to reason, to investigate and to have an understanding of what he is doing.

Keywords: Equation of the second degree. History of Mathematics. Cut and paste method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Região onde havia a biblioteca da sabedoria	17
Figura 2: Traçados de uma história.....	21
Figura 3: Lógica de uma obra prima: o gráfico	21
Figura 4:quadrado menor e retângulo	31
Figura 5: quadrado menor e retângulo pontilhado ao meio verticalmente	31
Figura 6: quadrado menor e dois retângulos do lado	32
Figura 7:Quadrado maior (dois quadrados e dois retângulos)	32

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Encontre a solução da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$: Aplique uma solução usando uma fórmula e outra sem o uso de fórmulas.....	47
Gráfico 2: Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96 unidades quadradas?	48
Gráfico 3: Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 24 e cuja área 140 unidades quadradas?	49
Gráfico 4: Encontre a solução da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$, pelo método corte cole.....	49

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 OS ÁRABES TAMBÉM FIZERAM MATEMÁTICA DE AUTO NÍVEL.....	17
2.1 Os Egípcios e os Métodos das Falsas Posições	18
2.2 A Matemática dos Símbolos: o que BERLINGHOFF e GOUVÊA Registrou em Sua Matemática Através dos Tempos	23
3 APRESENTANDO O METODO CORTE E COLE	30
3.1 Corte e Cole em Sequência Didática	33
3.1.1 Oficina Resolução de Equação do 2ºGrau.....	33
4 SOCIALIZANDO UMA NOVA IDEIA DE RESOLVER EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU	42
4.1 Análise dos Dados dos questionários diagnostico e pós sequência.....	46
4.1.1 Resultados discorrido dos questionários aplicado aos alunos	46
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
APÊNDICES	55

1 INTRODUÇÃO

Não sabemos quando se iniciou a História da Matemática [HM]. Eves (2004) aponta que os primeiros vestígios matemáticos surgiram aproximadamente há 4000 anos a. C. E de lá até nossos dias computamos registros matemáticos que nos proporcionaram criar um espaço de diálogo com outras ciências da natureza, podemos citar a física com as contribuições dos matemáticos franceses do século XVIII, Joseph Fourier, Lagrange, Legendre e Lacroix.

Neste universo de mais de 6.000 mil anos de registros matemáticos é possível entendermos o quanto esses elementos foram e são importantes para universalizar o ensino de matemática. A História da Matemática tem um papel importante nessa universalização, pois liga os elementos do passado com o presente projetando o futuro da matemática.

No Brasil as primeiras discussões sobre HM surgiram no início dos anos 1970. Um dos primeiros pesquisadores a interessar-se pelos registros históricos foi o professor paulistano Ubiratan D'Ambrósio. Este iniciou esse movimento por sentir a fragilidade da cadeira História da Matemática no currículo brasileiro. Este argumento é lido no trabalho de Fragoso (2011).

No início da década de 80 cria-se no Brasil um movimento chamado de educação matemática, esse tinha a finalidade de fortalecer o ensino da matemática através de estratégias de ensino. Dentro dessa área de concentração estava a HM, que tinha o objetivo de ajudar os estudantes de matemática entenderem os passos que esta ciências percorreu para estabilizar um plano.

De acordo com Mendes (2001), o primeiro trabalho que propõe essa discussão foi o de Ema Prado, *História da Matemática: Um estudo de seus significados na educação matemática* (1990). Nesse trabalho, destacam-se o caráter sociológico e motivacional da HM e traz, também, uma experiência da inserção da História da Matemática em uma turma de um curso de formação de professores em matemática.

Gutierre (2003), sobre esta temática, destaca o artigo de Sebastiani Ferreira, intitulado de *O uso da História da Matemática na Formalização de Conceitos*, publicado no Boletim de Educação Matemática da UNESP/Rio Claro, 1992, que apresenta argumentos defendendo o uso da HM na sala de aula. Segundo Gutierre, Sebastiani entende a História da Matemática como um fator primordial para que o professor possa fazer uma educação Matemática com significado e compreensão para o aluno. Esses argumentos foram ganhando força cada vez mais e atraindo pesquisadores e defensores dessa ideia.

Neste período surge no Brasil um grupo seletor de professores que criam uma sociedade em defesa do uso da HM em cursos de formação de alunos e professores. A partir dessa ideia é fortalecido o pensamento desse grupo o que passa a organizar movimentos bienais nacionais de História da Matemática.

Fragoso (2011) aponta que essa temática foi discutida no IV ENEM (IV Encontro Nacional de Educação Matemática), em Blumenau (SC), em janeiro de 1992, no I SNHM (I Seminário Nacional de História da Matemática) realizado em Recife (PE), em abril de 1995 e no V ENEM (V Encontro Nacional de Educação Matemática), realizado em Aracaju (SE), em julho de 1995. Esses foram, ao que parece, os primeiros passos que iriam convergir para que a disciplina História da Matemática viesse anos mais tarde a vigorar na grade curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática em nível nacional.

Com o aumento expressivo das discussões no entorno da HM como ferramenta pedagógica, observamos que a legislação incorpora em alguma medida, as propostas de inclusão da História da Matemática no currículo dos cursos de formação de professores de Matemática. Onde podemos lê nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do ensino fundamental que enfatiza a importância da HM.

O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (BRASIL, 1998, p.30).

Com o amadurecimento das discussões, ouve por parte dos órgãos deliberativos a publicação de documentos que proporciona os Institutos de Ensino Superior [IES] inserir em seus currículos a HM. Em, 5 de dezembro de 2001 foi publicado o Parecer CNE/ CES 1.302/2001, que trata das Diretrizes Curriculares Nacionais [DCN] para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Nesse documento, verificamos a inclusão da HM nos cursos de formação de professores de Matemática em nível superior, integrando a chamada parte comum, como consta no documento: “Conteúdo da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática” (BRASIL, 2001, p. 6).

Após a obrigatoriedade da História da Matemática no currículo educacional brasileiro, houve uma expansão em curso de pós graduação scritu sensu com linhas de pesquisa voltadas para formação de professores e uma das temáticas era HM. Mesmo com grandes avanços na área ainda percebemos que o uso da História da Matemática em cursos de nível médio e superior é quase inexistente, até pelo formato que a disciplina está organizada nos cursos de formação de professores.

Nossa proposta mostrar por meio de ferramentas da HM artifícios que leve o aluno a compreender a resolução da equação do segundo grau com elementos da geometria, que chamamos de corte e cole. Este trabalho fundamenta-se na História da Matemática porque em alguma medida incorporará artifícios usados pelos matemáticos antigos para resolver esse tipo de problema, além de ser uma ferramenta para que professores de curso de graduação em matemática ou ensino médio, possa trabalhar em suas devidas aulas.

A história da matemática pode auxiliar o discente a entender a evolução e a relação da humanidade com a construção do conhecimento matemático e como se deu o processo de codificação e de transmissão, pode-se observar que “o uso da história como um recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino-aprendizagem da Matemática que busque dar uma ressignificação ao conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos” (MENDES, 2009, p. 76).

É devidamente indiscutível que a álgebra não tem um lugar de destaque no ensino da matemática, no qual não é fácil para o aluno compreender e manipulá-las algebricamente e geometricamente as ideias da mesma e nem todas as suas manipulações algébricas.

As equações do segundo grau são vista no currículo educacional brasileiro no 9º ano do ensino fundamental e ampliada na 1ª série do ensino médio incorporado ao conceito de função quadrática ou polinomial do segundo grau. Este conceito matemático expressa um algoritmo com duas raízes, fazendo com que o aluno use um único método para encontrá-las, este é conhecido no Brasil como a fórmula de Bhaskara.

Buscando trazer a compreensão de uma parte da álgebra, através da resolução da equação de segundo grau, abordaremos uma sequência didática com alunos do 1º ano do ensino médio. Essa sequência adotada é mediada pela História da Matemática e a abordagem utilizada contempla além da representação algébrica, a representação geométrica para a resolução das atividades propostas.

De forma geral a história da matemática e a equação do segundo grau proporciona para a educação um fator importante na sociedade. Com isso a educação matemática de hoje apresenta um complemento entre ambas. Dessa forma o presente trabalho de pesquisa é sobre a importância da história da matemática e o legado de Al-Khwarizmi com resolução de equações do segundo grau pelo método geométrico corte e cole, que contempla a álgebra de forma bem clara e explicada. A preferência por esse tema, é que pode-se explicar uma alternativa de resolver problemas que envolva equações do segundo grau.

Diante dos ensinamentos da matemática de hoje em sala de aula, um fator que permanece deixando a matemática sendo odiada pela maioria dos alunos é a falta de mostrar ao

discente o que ele está fazendo e qual o objetivo do problema proposto. No entanto os registros históricos são importantes para mostrar a evolução da matemática e proporcionar aos discentes perceberem como antigamente os processos de resolução de problemas eram bem explicados. Nobre (1996) publicou um trabalho em que descreve que a HM aponta os Porquês e os para quês do uso em sala de aula.

O uso de instrumentos que possibilite ao aluno compreender à passo e entender como iniciou o processo, garante a ele autonomia de aprender e consequentemente usar como aporte prático em outras áreas do conhecimento. Parte dessa ideia pode estar contida nos pontos onde objetivamos atuar, que são: Identificar o grau de conhecimentos históricos que o aluno têm sobre matemática, feita a análise buscaremos inserir métodos antigos de resolver problemas dessa natureza. Isto levará o aluno a visualizar o conceito de forma mais ampla por meio de ferramenta geométrica que auxilia e resolve equação do 2º grau. Essa análise será concluída com uma aplicação de sequência didática em uma turma do 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí- *Campus* São Raimundo Nonato – Piauí (IFPI-SRN).

Caminhos metodológicos são condutas que alcançamos objetivos, são meios que mencionamos para atingir os resultados esperados. Essa sequência didática visa criar uma alternativa que busque no aluno criar um trajeto de uma experiência explanadora tanto para resolver um problema de equação do 2º grau como para chegar a fórmula resolutiva, sendo que ao mesmo tempo também proporciona para o professor mudar sua tradição de ensino na sala de aula, valorizando uma maneira que permite abranger uma metodologia de ensino enriquecedora e que contempla a História da Matemática.

A atividade foi executada em forma de oficina, com discentes do 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal - *Campus* São Raimundo Nonato - Piauí, por entendermos que os mesmos são importantes para o esclarecimento do estudo que se realizará.

2 OS ÁRABES TAMBÉM FIZERAM MATEMÁTICA DE AUTO NÍVEL

Os árabes em geral gostavam de uma boa e clara apresentação partindo da premissa de que tudo era álgebra, conforme pensamento da época. O matemático árabe Abu Abdullah Mohammed ben Musa Al-Khwarizmi, pouco se sabe sobre sua vida pois os registros são escassos, porém podemos apoiar em obras lidas que acreditam que este matemático tenha vivido entre os anos de 780 a 850 escreveu mais de seis obras de astronomia e matemática. Pode-se dizer que a álgebra tem origem no estudo sistemático dos métodos para classificar e resolver equações.

Al-Khwarizmi foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar na Casa da Sabedoria, em Bagdá região do Iraque, durante o reinado do califa al-Mamum (813-833).



Figura 1: Região onde havia a biblioteca da sabedoria

Fonte: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/mundo/ult94u101404.shtml>

A fim de colocar em prática o projeto político de valorização dos saberes do oriente médio a Casa da Sabedoria foi construída pelo califa al-Mansur ou a Casa do Saber, esta biblioteca era localizada na capital Bagdá. A partir das incorporações culturais e da ampliação das fronteiras, centros intelectuais importantes prosperaram em toda a região, entre cidades iranianas até regiões onde hoje é a atual Turquia, oferecendo aos abássidas um amplo corpo de habilidades linguísticas, talento científico e conhecimento cultural.

Assim, a Casa da Sabedoria surgiu com a função de acomodar a vasta escala de trabalhos de tradução e cópias, além de guardar o volume crescente de textos persas, sânscritos e gregos.

Nesta biblioteca destacamos o afamado Al-Khwarizmi, que escreveu tratados sobre aritmética, álgebra, astronomia, geografia e sobre o calendário. É possível que tenha escrito um tratado sobre o astrolábio e outro sobre relógios de sol (Equipamentos estudados em trigonometria), mas estes dois últimos não chegaram aos nossos dias. Tanto o tratado sobre a aritmética como o sobre a álgebra constituíram o ponto de partida para trabalhos posteriores e

exerceram uma forte influência no desenvolvimento da matemática, principalmente da aritmética e da álgebra

Sem dúvida Al-Khwarizmi foi um grande matemático do século IX, sendo um importante personagem no desenvolvimento da álgebra em que escreveu dois livros importantes sobre a aritmética e a álgebra que tiveram sua importância para a história da matemática.

Diferente dos árabes e indianos destacamos o pensamento dos babilônios, que faziam suas anotações em tabletes de argila que representava problemas do cotidiano e tinham procedimentos de resoluções envolvendo o uso algébrico.

Os Egípcios com suas escritas em papiros, deixou algumas vertentes de estudos entre eles o Papiro de Ahmes que tem 85 problemas, onde usava o método de falsa posição (Método para resolver problemas com característica do 1º grau) e é considerado uma abertura para as equações. Na Arábia os registros matemáticos mostram que eles tinham uma representação de expressões numéricas bem explicadas, tendo um desenvolvimento significativo na nossa matemática com o sistema numérico que é utilizado no mundo todo.

Esses povos não tinha conhecimento sobre o que chamamos de álgebra hoje, como em diferentes civilizações esses processos de resoluções ficavam mais divergentes com o passar de cada época, sendo assim esses registros foram muito importantes para o desenvolvimento da álgebra e conseqüentemente para a resolução da equação do segundo grau.

2.1 Os Egípcios e os Métodos das Falsas Posições

Os egípcios começaram a realizar atividades que envolviam álgebra sem se importar com resultados teóricos. Segundo Boyer (1974) no problema 72 do papiro que citamos anteriormente que não se referem a objetos concretos, no qual se pedem o que equivale a soluções de equações lineares da forma $x+ax=b$ ou $x+ax+bx=c$ sendo a , b e c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de “ahá”. O problema 24 pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19, e assim surgiu os primeiros vestígios de álgebra em matemática.

A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como “método de falsa posição”, ou “regra de falso”. Um específico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. Nesse período esse método de resolução de problemas, apesar de mencionar valores para a incógnita e depois transformar numa razão ficou muito prático por esses povos.

A solução do problema 24 citado acima baseou-se que o valor tentado para incógnita é 7, de modo que $x + \frac{1}{7}x$ é 8, em vez de 19 como se queria. Como $8 \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{2}{8}\right) = 19$ deve-se multiplicar 7 por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ para obter a resposta: Ahmes achou $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Então conferiu sua resposta mostrando que se a $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ somamos um sétimo disto (que é $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.) de fato obteremos 19.

Berlinghoff e Gouvêa (2008). Nesta obra é descrita pontos de relevância sobre o método da falsa posição, o que descreveremos abaixo em tese é uma do que pode ser lido na obra supra e que achamos por bem engajarmos no nosso texto a fim de remetermos o leitor de que o texto foi transcrito de uma outra obra.

“O papiro de Rhind”, uma coleção de problemas provavelmente usados pra treinar jovens escribas no Egito antigo, continha diversos problemas desse tipo. Alguns são simples e diretos; outros, bastante complicados. Aqui está um simples:

Uma quantidade; sua metade e seu terço são adicionados a ela. Ela se torna 10.

Em nossa notação, isso é apenas a equação:

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$$

(Tenha em mente, entretanto, que esse tipo de simbolismo ainda estava muito longe no futuro, como explicado no Esboço anterior) O escriba é instruído a resolve-la do mesmo modo como resolveríamos: divida 10 por $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Muito frequentemente, entretanto, os problemas no papiro de Rhind são resolvidos por um método muito diferente.

Uma quantidade; seu quarto é somado a ela. Ela se torna 15.

Em vez de dividir 15 por $1 + \frac{1}{4}$, o escriba prossegue como a seguir. Ele supõe (ou *posits*) que a quantidade é 4 (por que 4? Porque é fácil calcular um quarto de 4). Se você tomar 4 e somar seu quarto a ele, obtém $4 + 1 = 5$. Então, queríamos 15, mas obtivemos 5; precisamos multiplicar o que obtivemos (isto é, 5) por 3 para obter o que queríamos (ou seja, 15). Assim, tomamos nossa tentativa e multiplicamos por 3. Nossa tentativa era 4, de modo que a resposta é $3 \times 4 = 12$.

Esse método é conhecido como *falsa posição*: propomos uma resposta que não esperamos realmente que seja a correta, mas que torna os cálculos fáceis. Então, usamos o

resultado incorreto da tentativa para descobrir o número pelo qual precisamos multiplicar nossa tentativa para obter a resposta correta.

Os símbolos tornam isso fácil de entender. A questão que estamos resolvendo é do tipo $Ax = B$. Se multiplicarmos x por um fator de modo que ele se torne kx , vemos que:

$$A(kx) = k(Ax) = kB$$

Assim, mudando-se a escala da entrada por algum fator, muda-se a escala da saída pelo mesmo fator. Isso é o que permite que o método da falsa posição funcione; usamos nossa tentativa para encontrar o fator correto.

Por toda antiguidade, o método da falsa posição foi usado para resolver equações lineares, incluindo algumas bastante complicadas. Essas variavam de problemas práticos até problemas mais excêntricos com um sabor recreativo.

Entretanto, esse método só pode ser aplicado a equações da forma $Ax = B$. Se, em vez disso, a equação fosse $Ax + C = B$, então não é mais verdade que multiplicar x por um fator faz com que B varie pelo mesmo fator, e essa versão simples do método não funciona. Poderíamos tentar subtrair C de ambos os lados, o que nem sempre é tão fácil quanto parece, porque a expressão do lado esquerdo poderia ser inicialmente muito complicada, e encontrar a constante correta para subtrair exigiria que a simplificássemos para a forma $Ax = C$.

Em vez disso, foi encontrada uma maneira de estender uma ideia básica para equações daquele tipo sem qualquer manipulação algébrica como essa. Ele é chamado de método de *falsa posição dupla*, e é um método tão efetivo para resolver equações lineares que continuou a ser usado muito depois da invenção das notações algébricas. De fato, como ele não exige nenhuma álgebra, foi ensinado nos livros – textos de aritmética até recentemente, no século XIX. Aqui está um exemplo, de *Daboll's Schoolmaster's Assistant*, publicado no início dos anos 1800.

Uma bolsa de 100 dólares deve ser dividida entre quatro homens, A, B, C e D, de modo que B possa ter quatro dólares a mais que A, C possa ter oito dólares a mais que B e D possa ter duas vezes a mais que a quantia de C. Qual é a parte do dinheiro de cada um?

Uma abordagem moderna seria tomar x como a quantia dada a A. Então, B recebe $x + 4$, C recebe $(x + 4) + 8 = x + 12$ e D recebe $2(x + 12)$. Já que o total é \$100, obtemos a equação:

$$x + (x + 4) + (x + 12) + 2(x + 12) = 100$$

Que, então, resolvemos da maneira usual.

Em vez disso, aqui está o que o *Daboll's* recomenda: faça uma primeira tentativa, digamos que A receba 6 dólares. Então, B recebe 10, C recebe 18 e D recebe 36 (observe que

não precisamos descobrir como a quantia de D se relaciona com a de A para fazer isso; vamos simplesmente passo a passo). Somando as quantias obtemos \$70; estamos fora por \$30.

Assim, tentamos novamente. Dessa vez, começamos um pouco mais alto, digamos que A obtenha 8 dólares. Então, B recebe 12, C recebe 20 e D recebe 40, para um total de \$ 80. Isso ainda está errado, está fora por \$ 20.

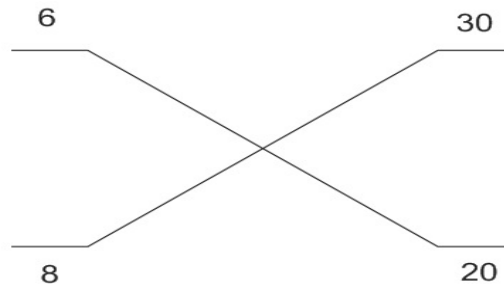


Figura 2: Traçados de uma história
Fonte: Berlinghoff e Gouvêa, 2008

Agora vem a mágica. Desenhe as suas tentativas e os dois erros como na figura 2. Multiplique cruzado: 6×20 é 120, e 8×30 é 240. Tome a diferença, $240 - 120 = 120$, e divida pela diferença dos erros, nesse caso, 10. A escolha correta para a quantia que A recebe é $120/10 = 12$.

Isso, explica *Daboll*, é o procedimento quando os dois erros são do mesmo tipo (ambos subestimam, no nosso caso). Se eles fossem de tipos diferentes, usaríamos a soma dos produtos e dividiríamos pela soma dos erros (essa é apenas uma maneira de evitar números negativos).

Os leitores modernos usualmente acham esse método intrigante: por que ele funciona? Provavelmente a melhor maneira de analisa-lo é usar algum raciocínio gráfico. Não importa qual o resultado da simplificação do lado esquerdo de

$$x + (x + 4) + (x + 12) + 2(x + 12) = 100$$

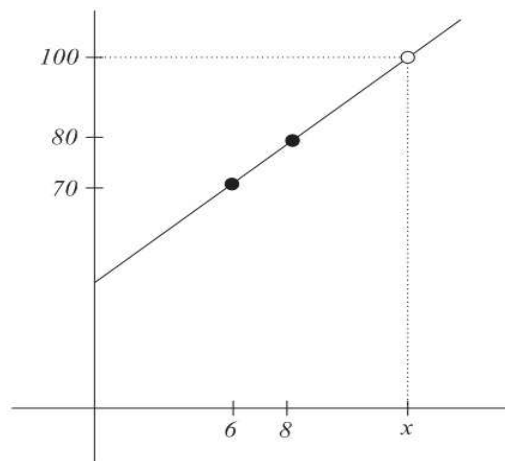


Figura 3: Lógica de uma obra prima: o gráfico
Fonte: Berlinghoff e Gouvêa, 2008

A equação será alguma coisa de forma $mx + b = 100$. Assim, podemos pensar nisso do seguinte modo: existe uma reta $y = mx + b$ e gostaríamos de determinar o valor de x para qual $y = 100$. Para determinar essa reta, precisamos de dois pontos, e as duas tentativas forneceram esses pontos para nós: tanto $(6, 70)$ quanto $(8, 80)$ estão na reta. Queremos encontrar x de modo que $(x, 100)$ esteja na mesma reta (ver figura 2). A inclinação da reta é uma constante; podemos calculá-la como “aumento sobre o tamanho do intervalo” usando o primeiro e o terceiro pontos.

Podemos também calculá-la usando o segundo e o terceiro pontos, e as respostas devem ser a mesmas. Portanto, observamos que:

$$\frac{100 - 70}{x - 6} = \frac{100 - 80}{x - 8}$$

Ou

$$\frac{30}{x - 6} = \frac{20}{x - 8}$$

Observe que os numeradores são exatamente os erros que tínhamos antes. Agora, multiplique cruzado para obter:

$$30(x - 8) = 20(x - 6)$$

O que se simplifica para:

$$(30 - 20)x = (30 \times 8) - (20 \times 6)$$

Ou seja:

$$x = \frac{(30 \times 8) - (20 \times 6)}{30 - 20} = \frac{120}{10} = 12$$

Isso exatamente o mesmo cálculo que no método da falsa posição dupla.

É claro, nossa maneira de entender equações como retas é bastante recente (ela remonta apenas ao século XVII), e o método da falsa posição dupla é muito antigo. Mas a inclinação real da reta nunca precisou ser calculada. De fato, não precisamos pensar em nenhuma dessas razões como inclinação em nenhum sentido gráfico. Tudo o que é a essência do que a “linearidade” significa. E isso os antigos de fato entendiam.

A distinção entre problemas “lineares” e “não lineares” ainda é útil atualmente. Nós a aplicamos não apenas a equações mas também a muitos outros tipos de problemas. Nos problemas lineares, existe uma relação simples – uma razão constante – entre variações na entrada e variações na saída, exatamente como vimos. Nos problemas não lineares, não existe tal relação simples e, algumas vezes, variações muito pequenas na entrada podem produzir grandes variações na saída. Ainda não temos um entendimento completo dos problemas não

lineares. Realmente, com frequência usamos problemas lineares para encontrar soluções aproximadas de problemas não lineares. E os métodos que usamos para resolver aqueles problemas lineares são baseados na mesma percepção fundamental que serve como base para o método da “falsa posição”.

Desta forma descreveram o paradoxo de resolução de um dos mais belos pensamentos matemáticos que a humanidade já contemplou.

2.2 A Matemática dos Símbolos: o que BERLINGHOFF e GOUVÊA Registrou em Sua Matemática Através dos Tempos

Quando você pensa em Álgebra, o que vem à mente primeiro? Você pensa em equações ou fórmulas com x 's, y 's e outras letras, amarradas por números e símbolos aritméticos? Muitas pessoas pensam. Na realidade, muitos consideram a álgebra simplesmente como uma coleção de regras para manipular símbolos que têm relação com números, conforme descreveram os historiadores Berlinghoff e Gouvêa (2008). Estes episódios e outros que descrevêramos é uma busca de juntar episódios técnico desses estudos em nosso trabalho de conclusão de curso, para que o leitor se aproxime das ideias pesquisadas e publicadas por autores que citamos fielmente, dando o devido valor aos seus trabalhos.

Descrever a álgebra não é tarefa fácil principalmente quando se trata de termos e símbolos, justificaria que é como descrever um carro por sua pintura ou pelo estilo da carroceria. O que você vê não é tudo que você obtém. De fato, como um carro, a maior parte do que faz a álgebra funcionar está “sob o capô” de sua aparência simbólica. Entretanto, da mesma maneira como o estilo da carroceria de um automóvel pode afetar seu desempenho e seu valor, também a representação simbólica da álgebra afeta seu poder e utilidade.

Um problema algébrico, independentemente de como é escrito, é uma questão sobre operação numéricas e relações nas quais uma quantidade desconhecida deve ser deduzida de quantidades conhecidas. Aqui está um exemplo simples:

Duas vezes o quadrado de uma coisa é igual a cinco a mais do que três vezes a coisa. O que é a coisa?

Apesar da ausência de símbolos, essa é claramente uma questão algébrica. Além disso, a palavra “Coisa” foi um termo algébrico respeitável por um tempo muito longo. No século IX, Al-Khawarizi (autor do livro cujo título, *Al-jabr w'al muqabala*, é a fonte da palavra “álgebra”) usou a palavra shai para representar uma quantidade desconhecida. Quando seu livro foi

traduzido para o latim, essa palavra se tornou *res*, que significa “coisa”. Por exemplo, a elaboração de John de seville, do século XVII, da aritmética de Al-Khawarizi contém esta questão, que começa “*Quaeritur ergo, quae res...*”.

É perguntado, portanto, que coisa junto com 10 de suas raízes ou, o que é o mesmo, dez vezes a raiz obtida dela, produz 39?

Na notação moderna, isso seria escrito como $x + 10\sqrt{x} = 39$ ou como $x^2 + 10x = 39$. (Um “X” aparecia na versão latina dessa questão, mas ele era a realidade o numeral romano para 10. Para evitar tais confusões e enfatizar variações mais significativas na notação, usaremos numerais familiares em todos os exemplos de álgebra.)

Alguns textos em latim usavam *causa* para o *shai* de Al-Khawarizi e, quando esses livros foram traduzidos para o italiano, *causa* se tornou *cosa*. Conforme outros matemáticos estudaram esses textos em latim e italiano, a palavra para a incógnita se tornou *Coss* em alemão. O inglês continuou nessa linha e chamou o estudo de questões envolvendo números desconhecidos de “Cossic Art” (ou “Cossike Art”, na ortografia daquela época)- literalmente , a “arte das coisas”.

Como a maioria de nossos símbolos algébricos familiares, o x e outras letras que usamos atualmente para representar números desconhecidos são relativamente novos na “arte”. Muitos símbolos algébricos antigos eram simples abreviações de palavras usadas frequentemente: $p, \tilde{p}$ ou $\bar{p}$ para “mais” (plus em inglês), $m, \tilde{m}$ ou $\bar{m}$ para “menos” (*minus*, em inglês) e assim por diante. Eles economizavam tempo de escrita e espaço de impressão, mas faziam pouco para promover um entendimento mais profundo das ideias que expressavam. Sem um simbolismo consistente e iluminador, a álgebra era de fato uma arte, em geral uma atividade idiossincrática que dependia fortemente da habilidade de seus praticantes individuais. Da mesma forma como a padronização das partes foi um passo crítico na produção em massa dos automóveis de Henry Ford, a padronização da notação foi um passo crítico no uso e progresso da álgebra.

Uma boa notação matemática é muito mais do que uma abreviação eficiente. Idealmente, ela deveria ser uma linguagem universal que esclarecesse ideias, revelasse padrões e sugerisse generalizações. Se inventarmos uma notação realmente boa, algumas vezes ela parece pensar por nós: alcançamos resultados apenas manipulando a notação. Como Howard Eves disse certa vez: “Um manipulador formal em matemática com frequência passa pelo sentimento desconfortável de que seu lápis o supera em inteligência”.

Nossa notação algébrica corrente está próxima do ideal, mas seu desenvolvimento foi longo, lento e, algumas vezes, confuso. Para um sabor desse desenvolvimento, vamos observar as várias formas nas quais uma equação algébrica típica provavelmente teria sido em diversos momentos e lugares durante o progresso da álgebra na Europa(para salientar o desenvolvimento da notação, utilizaremos o português no lugar do latim ou outras linguagens quando palavras, em vez de símbolos, forem usadas).

Aqui está uma equação contendo alguns ingredientes comuns do início das pesquisas algébricas:

$$x^3 - 5x^2 + 7x = \sqrt{x+6}$$

Em 1202, Leonardo da Pisa teria escrito essa equação (talvez reorganizada para maior clareza) inteiramente em palavras, algo como:

O cubo de sete coisas menos cinco quadrados é igual à raiz de seis a mais do que a coisa

Essa maneira de escrever matemática é usualmente chamada de *retórica*, em contraste com o estilo simbólico usado atualmente. Nos séculos XIII e XIV, os matemáticos europeus eram quase inteiramente retóricos, com abreviações aqui e ali. Por exemplo, Leonardo começou a usar *R* para “Raiz quadrada” em alguns de seus últimos escritos.

No final do século XV, alguns matemáticos começaram a usar expressões simbólicas em seu trabalho. Luca Pacioli, cuja *Summa* de aritmética de 1494 serviu como uma importante fonte da introdução da Europa na arte da álgebra, teria escrito:

$$cu.\tilde{m}.5.ce.\tilde{p}.7.co. \rightarrow R_{\gamma}co.\tilde{p}.6$$

Nessa notação, *co* é uma abreviação para “cosa”, a quantidade desconhecida. As abreviações *ce* e *cu* são para “censo” e “cubo”, palavra que os matemáticos italianos usavam para o quadrado e cubo da incógnita, respectivamente. Observe que nos referimos a uma *única* incógnita aqui. Um defeito fundamental dessa notação era sua incapacidade de representar mais de uma incógnita na expressão (como contraste, os hindus usavam os nomes das cores para representar múltiplas incógnitas já no século VII). Algumas outras características interessantes da notação de Pacioli são pontos que separam cada item do próximo, um traço longo para a igualdade e o símbolo R_{γ} para denotar a raiz quadrada. O agrupamento de termos depois do sinal de raiz era designada por γ , uma abreviação de “universale”. A notação usada no *Ars Magna* de Girolamo Cardano meio século mais tarde na Itália era quase idêntica.

Na Alemanha do início do século XVI, alguns dos símbolos que usamos agora começaram a aparecer. Os sinais de + e – foram adotados da aritmética comercial e o símbolo

$\sqrt{\quad}$ para raiz quadrada evoluiu, alguns dizem, de um ponto com uma “cauda”, e outros dizem que de um r manuscrito. A igualdade foi denotada abreviando a palavra em latim ou em alemão para ela, e o agrupamento de termos (como a soma depois do sinal de $\sqrt{\quad}$) era denotada por pontos. Assim, em *Coss* de Christoff Rudolf, de 1525 (que tem um título formal impossivelmente longo), ou em *Arithmetica Integra* de Michael Stifel, de 1544, nossa equação poderia ter aparecido como

The image shows a handwritten equation in a historical script. It reads: "ce - 5z + 7z aequ. sqrt. z + 6". The symbols used are 'ce' for the square root, 'z' for the variable, and 'sqrt.' for the square root operation. The equation is set equal to zero, indicated by 'aequ.' (aequale).

Como na notação italiana anterior já descrita, potências diferentes da incógnitas tinham símbolos distintos e não relacionados. Sua primeira potência era chamada de raiz (*radix*) e representada por . O Símbolo para seu quadrado era , um z minúsculo, que era a primeira letra de seu nome em alemão, *zensus*. A terceira potência, cubus, era representada por . Potências mais altas da incógnita eram escritas combinando os símbolos de quadrado e cubo de forma multiplicativa, quando possível; a quarta potência era , a sexta potência,  e assim por diante. As potências mais altas eram tratadas com a introdução de novos símbolos.

Maneiras mais fáceis de denotar potências de incógnitas já tinham começado a emergir em outros países. Um dos exemplos mais criativos apareceu em um manuscrito de 1484 de Nicholas Chuquet, um físico francês. Como muitos de sua época, Chuquet restringiu sua atenção a potências de uma incógnita. Entretanto, denotou potências sucessivas da incógnita colocando sobrescritos numéricos nos coeficientes. Por exemplo, para denotar $5x^2$ ele escrevia 5^4 . Ele fez algo parecido para raízes, escrevendo $\sqrt[3]{5}$ como $R^3, 5$. Chuquet também esteve bem a frente de seu tempo no fato de tratar o zero como um número (particularmente como um expoente) e no fato de sublinhar para indicar um agrupamento. Se nossa equação utilizada como exemplo tivesse aparecido em seu manuscrito, seria parecida com:

$$1^3.\tilde{m}.5^2.\tilde{p}.7^1. Montent R^2, 1^1.\bar{p}.6^0$$

Infelizmente para o desenvolvimento da notação algébrica, o trabalho de Chuquet não foi publicado na época em que foi escrito, de modo que suas idéias inovadoras eram conhecidas apenas por poucos matemáticos no início do século XVI. Esse sistema denotar as potências da incógnitas reapareceu em 1572 no trabalho de Rafael Bombeli, que colocou os expoentes em pequenas taças acima dos coeficientes. O trabalho de Bombeli era mais amplamente conhecido do que o de Chuquet, mas sua notação não foi imediatamente adotada por seus contemporâneos.

Na década de 1580, ela foi retomada por Simon Stevin da Bélgica, um engenheiro e inventor militar, que usou círculos em torno dos expoentes. Os escritos matemáticos de Stevin enfatizaram a conveniência da aritmética decimal. Algumas de suas publicações foram traduzidas para o inglês no início do século XVII, levando, assim, tanto suas ideias quanto sua notação para além do canal da Inglaterra.

Um grande atalho na flexibilização e generalização da notação foi feita por François Viète na última década do século XVI. Viète era um advogado, matemático e conselheiro do rei Henrique IV da França, com obrigações que incluíam decifrar mensagens escritas em códigos secretos. Seus escritos matemáticos se concentravam nos métodos de resolver equações algébricas e, para esclarecer e generalizar seu trabalho, ele introduziu um dispositivo notacional revolucionário. Nas próprias palavras de Viète:

Para que este trabalho possa apresentar alguma arte, vamos distinguir as quantidades dadas das incógnitas indeterminadas por um símbolo constante, permanente e muito claro, por exemplo, designando as quantidades desconhecidas por meio de uma letra A ou alguma outra vogal... e as quantidades dadas por meio de B, G, D ou outras consoantes.

Usar letras tanto para as constantes quanto para as incógnitas permitia a Viète escrever formas gerais de equações em vez de se basear em exemplos específicos nos quais os números particulares escolhidos poderiam afetar impropriamente o processo de solução. Alguns escritores anteriores tinham feito experiências com o uso de letras, mas Viète foi o primeiro a usá-las como uma parte integrante da álgebra. É bem possível que o aparecimento desse dispositivo notacional poderoso tenha sido adiado porque os numerais indo-arábicos não eram usados comumente até bem depois do início do século XVI. Antes disso, os numerais romanos (e os numerais gregos antes deles) eram utilizados para escrever números, e esses sistemas usavam letras do alfabeto para quantidades específicas.

Assim que as equações passaram a ter mais de uma incógnita, ficou claro que a valha notação exponencial era insuficiente. Não funcionaria escrever $5^3 + 7^2$ se você queria dizer $5A^3 + 7E^2$. No século XVII, diversos dispositivos de notação que competiam entre si apareceram quase simultaneamente. Na década de 1620, Thomas Harriot, na Inglaterra teria escrito isso como $5aaa + 7ee$. Em 1634, Pierre Hérigone escreveu incógnitas com coeficientes antes e expoentes depois, como em $5a^3 + 7e^2$. Em 1636, James Hume (um escocês que vivia em Paris) publicou uma edição da álgebra de Viète com expoentes elevados e em pequenos numerais romanos, como $5a^{iii} + 7e^{ii}$. Em 1637, uma notação semelhante apareceu na *La Géométrie*, de René Descartes, mas com os expoentes escritos como pequenos numerais indo-arábicos, como em $5a^3 + 7e^2$. Dessas notações, as de Harriot e de Hérigone eram mais fáceis de

imprimir, mas a clareza conceitual ganhou da conveniência tipográfica, e o método de Descartes se tornou finalmente a notação padrão usada hoje em dia.

O trabalho influente de Descartes é também a fonte de alguns outros dispositivos de notação que se tornaram padrão. Ele usou letras minúsculas do final do alfabeto para incógnitas e letras minúsculas do início do alfabeto para constantes. Também usou uma barra sobrescrita partindo do sinal $\sqrt{}$ para indicar seu alcance. Entretanto, ele introduziu o símbolo $\propto$ para igualdade. Logo, a versão de Descartes para nosso exemplo de equação seria bem parecida com a nossa – mas não totalmente igual:

$$x^3 - 5xx + 7x \propto \sqrt{x+6}$$

O Sinal = para igualdade, proposto em 1557 por Robert Recorde e usado amplamente na Inglaterra, ainda não era popular no continente europeu. No século XVII, ele era apenas uma de diversas maneiras diferentes de simbolizar a igualdade, incluindo $\sim$ e o sinal ∞ de Descartes. Além disso, $=$ era usado para denotar outras ideias naquela época, como paralelismo, diferença e “mais ou menos”. Sua aceitação universal final como o símbolo para iguais é provavelmente decorrente, em grande parte, de sua adoção por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Seus sistemas de cálculo dominaram a matemática do final do século XVII e começo do século XVIII, de modo que suas escolhas de notação o tornaram amplamente conhecidas. Durante o século XVIII, a notação superior de Leibniz para o cálculo gradualmente suplantou a de Newton. Se Leibniz tivesse escolhido o símbolo de Descartes em vez do de Recorde, poderíamos usar $\propto$ igualdade atualmente.

Este esboço tentou capturar o sabor do caminho longo, errático e algumas vezes perverso no qual o simbolismo algébrico se desenvolveu. Em retrospecto, “boas” escolhas de notação se mostraram estimulantes poderosos para o progresso da matemática. Entretanto, aquelas escolhas eram feitas com pouca consciência de sua importância na época. A evolução da notação exponencial é um bom exemplo disso. Potências de uma quantidade desconhecida foram presas durante séculos pela intuição geométrica limitada de quadrados e cubos, e a notação reforçou esse confinamento. Descartes finalmente as liberou tratando quadrados, cubos e o resto como quantidades independentes da dimensão geométrica, dando uma nova legitimidade a x^4, x^5, x^6 , e assim por diante. A partir daí, a própria notação sugeriu extensões naturais – para expoentes inteiros negativos (recíprocos), para expoentes racionais (raízes de potências), para expoentes irracionais (limites de raízes de potências) e mesmo para expoentes complexos. No século XX essa notação exponencial foi religada com a ideia geométrica de

dimensão para ajudar a pavimentar um novo campo na pesquisa matemática: a Geometria Fractal.

Após esta bela exposição encontrada no livro de Berlinghoff e Gouvêa (2008), descobrimos o quanto a ciências e o pensamento matemático tropeçou para se erguer com ciência estudada e ensinada.

3 APRESENTANDO O METODO CORTE E COLE

A palavra “álgebra” veio do título de um livro escrito em árabe em torno do ano 825. O autor, Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi nasceu provavelmente no que é agora o Uzbequistão. Ele viveu, entretanto, em Bagdá, onde o califa tinha estabelecido uma espécie de academia de ciências chamada “A casa da Sabedoria” conforme registramos nos nossos escritos inicialmente. Al – Khwarizmi era um generalista; escreveu livros sobre geografia, astronomia e matemática. Mas seu livro sobre álgebra é um dos seus mais famosos. O livro de Al-Khwarizmi começa com uma discussão de equações quadráticas que é apresentada por diversos pesquisadores da área. De fato, ele considera um problema específico veja:

Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems. Quer dizer, quanto deve ser o quadrado, o qual, quando aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove?

Se chamarmos a incógnita de x , poderemos chamar o “quadrado” de x^2 . Agora, uma “raiz desse quadrado” é x , de modo que dez raízes do quadrado é $10x$. Usando essa notação, o problema se traduz na resolução de $x^2 + 10x = 39$. Mas o simbolismo algébrico ainda não tinha sido inventado, de modo que tudo que Al- Khwarizmi poderia fazer era dizer isso em palavras.

A solução é a seguinte: você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove.

Aqui estão os cálculos com os nossos símbolos:

$$x = \sqrt{5^2 + 39} - 5 = \sqrt{25 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3$$

Não é difícil ver que isso é basicamente a fórmula quadrática como a conhecemos atualmente. Para resolver $x^2 + bx = c$, Al – Khwarizmi usou a regra:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

A maior diferença entre isso e a fórmula moderna é que consideraríamos ambas as raízes quadradas positivas e negativas. Mas, tomando a raiz quadrada negativa, obteríamos um valor negativo para x . Os matemáticos daquela época não acreditavam em números negativos; a raiz positiva era a única para as quais eles atentavam. Também colocamos a parte “ $-b$ ” no início. Contudo, isso significaria novamente um número negativo, de modo que ele prefere coloca-lo no fim, como uma subtração. Finalmente, ele escreve a equação com o c no lado direito, enquanto nós a escreveríamos como $x^2 + bx - c = 0$.

Se pusermos o “ $-b$ ” na frente, adicionarmos $\pm$ à raiz, lembrarmos de considerar o sinal do c e fizermos um pouco de álgebra, a fórmula dele se torna a nossa:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

(O coeficiente a está faltando nessa fórmula porque Al-Khwarizmi estava considerando um único quadrado, isto é, $a=1$)

Mas ele não parou aí. Ele sentiu que deveria explicar por que seu método funcionava. Em vez de fazê-lo algebricamente, como faríamos atualmente, ele o fez com um argumento geométrico. Era algo assim:

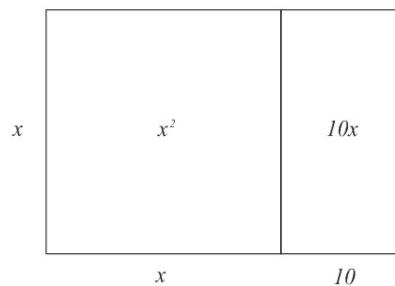


Figura 4:quadrado menor e retângulo

Fonte : Berlinghoff e Gouvêa, 2008

Primeiro temos “ um quadrado e dez raízes”.para visualizar isso, desenho um quadrado cujo lado não sabemos ainda. Se chamarmos o lado de x , a área do quadrado é x^2 . Para obter $10x$, desenhamos um retângulo com um lado igual a x e outro lado igual a 10, como na Figura 4.

A equação nos diz que a área da figura toda é 39. Para resolver a equação, isto é, determinar x , primeiros cortamos o número de raízes na metade. Geometricamente, significa dividir o retângulo em duas metades, cada uma com área $5x$, como na figura 2.

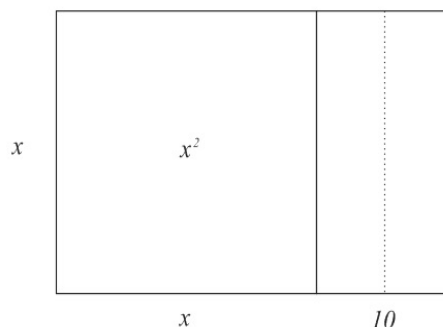


Figura 5: quadrado menor e retângulo pontilhado ao meio verticalmente

Fonte: Berlinghoff e Gouvêa, 2008

Agora movemos uma das metades do retângulo para a base do quadrado, formando a Figura 3. A área total ainda é 39. Mas observe que, adicionando o pequeno quadrado faltante

no canto direito inferior, obteremos um quadrado grande. Como os dois retângulos têm lado 5, a área do pequeno quadrado deve ser 25, como mostrado na figura 4.

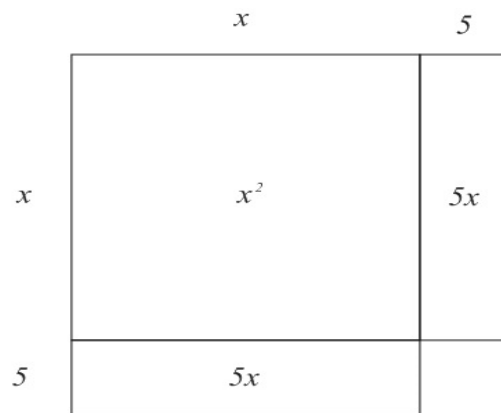


Figura 6: quadrado menor e dois retângulos do lado

Fonte: Berlinghoff e Gouvêa, 2008

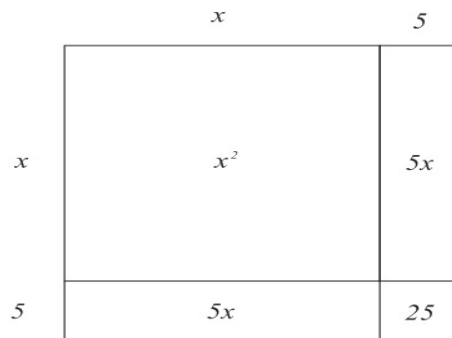


Figura 7: Quadrado maior (dois quadrados e dois retângulos)

Fonte: Berlinghoff e Gouvêa, 2008

Quando *completamos o quadrado* adicionando o pequeno que falta, nossa figura se torna um quadrado cuja área é $39+25=64$. Mas isso significa que seu lado é igual à raiz quadrada de 64, que é 8. E, como o lado do quadrado grande é $x+5$, podemos concluir que $x+5=8$. Assim, subtraímos 5 e obteremos $x=3$.

Cada passo na regra de Al – Khwarizmi corresponde a um passo na versão geométrica. E a versão geométrica mostra-nos exatamente o que está acontecendo e por que isso funciona! Como observado anteriormente, essa versão da fórmula quadrática geral como $ax^2 + bx + c = 0$, permitindo um coeficiente dominante diferente. Al- Khwarizmi teria tratado isso simplesmente dividindo pôr a e aplicando a regra dela.

Depois da regra de Al-Khwarizmi, muitos outros matemáticos escreveram sobre as equações quadráticas. Seus métodos e suas justificativas geométricas se tornaram mais e mais sofisticados. Mas a ideia básica nunca mudou. De fato, até mesmo o exemplo permaneceu o mesmo. Do século IX ao século XVI, os livros de álgebra quase sempre começavam suas

discussões sobre equações quadráticas considerando “um quadrado e dez raízes são iguais a 39”.

No início do século XVII, os matemáticos descobriram a ideia de usar letras para representar números. Lentamente, desenvolveu-se uma convenção: letras do final do alfabeto denotariam os números *desconhecidos*, e letras do começo do alfabeto designariam números *conhecidos*. Finalmente, Thomas Harriot e René Descartes observaram que é mais fácil escrever todas as equações como alguma coisa = 0. A principal vantagem é que agora $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 + c = bx$ podem ser vistos como casos especiais da equação geral $ax^2 + bx + c = 0$. E a solução geral podia ser escrita como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Isso é o que ainda fazemos hoje em dia. A seguir mostraremos uma sequência didática com o método corte e cole, desta a novidade é que aplicaremos em uma turma do 1º ano do ensino médio do IFPI-SRN.

3.1 Corte e Cole em Sequência Didática

A sequência didática é uma expansão em tese do trabalho de Macêdo (2011). E complementa o desenvolvimento que apresentamos na introdução deste capítulo. Em nosso estudo, para cada problema denominamos quatro partes com um título de acordo com o objetivo de cada uma. A questão A tem por objetivo apresentar o método corte e cole para resolução do problema citado. Na questão B visa o entendimento do método corte e cole. Problema 1 visamos destacar a ideia central do método corte e cole. Ou seja, a de completar quadrados a partir da figura apresentada pelo problema. O Problema 2 tem como objetivo encontrar uma fórmula que forneça uma resposta para o problema visto no Problema 1. O Problema 3 busca encontrar uma fórmula que resolva a equação $ax^2 + bx = c$. A partir deste problema, a representação geométrica deve ser abandonada, caso o processo de resolução esteja compreendido. Deverá ser feito o uso apenas da representação algébrica proporcionando uma evolução do pensamento matemático à medida que as atividades forem sendo resolvidas. Finalmente, o Problema 4 tem como objetivo encontrar a fórmula que resolve a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$. A resolução dos problemas citados será descrita a seguir.

3.1.1 Oficina Resolução de Equação do 2º Grau

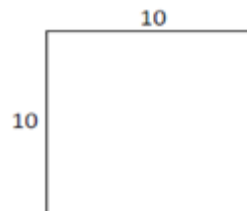
O objetivo da oficina é chegar à resolução da equação de segundo grau por meio de uma abordagem geométrica.

Primeira parte: FAMILIARIZANDO-SE COM O MÉTODO “CORTE E COLE”.

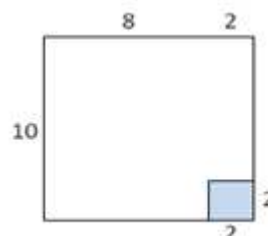
Questão A. Qual deve ser a dimensão de um retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96 unidades quadradas?

Procedimentos de solução:

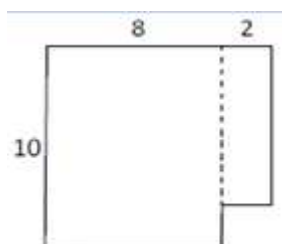
a) Considere o número inteiro quadrado perfeito e maior que a área indicada no problema. Ou seja, com a área indicada é 96, o inteiro maior que 96 que é também quadrado perfeito é 100. Além disso, o semiperímetro tem de ser 20. Consideramos então o quadrado de lado 10.



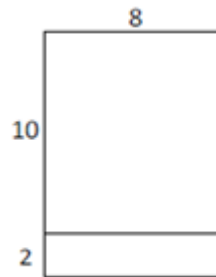
b) Como a área indicada no problema é 96, teremos de retirar do quadrado que desenhamos, um quadradinho de área 4, ou seja, o lado deste quadradinho terá de ser 2, como na figura abaixo.



c) O enunciado do problema pede um retângulo. Então teremos de transformar a figura obtida num retângulo. Cortamos então pela linha tracejada como indica a figura abaixo.



d) Toma-se então as duas partes e ajusta-se de modo que se obtenha um único retângulo como na figura abaixo.



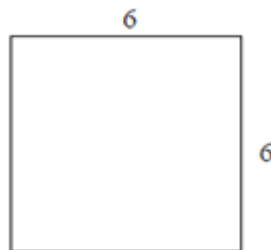
e) O retângulo obtido tem lados de comprimento 12 e 8 e, portanto, área 96. Além disso, o semiperímetro é 20, como solicitado no enunciado do problema.

Segunda parte: AUMENTANDO O GRAU DE COMPLEXIDADE.

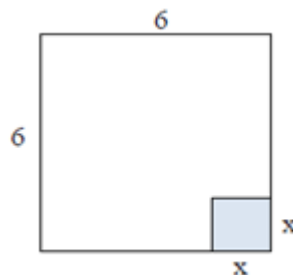
Questão B. Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 12 e cuja área é 30 unidades quadradas?

Procedimentos de solução:

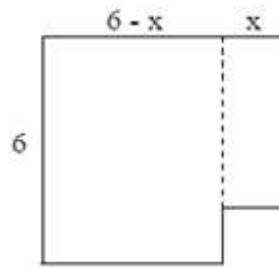
a) Considere um quadrado cuja medida do lado é igual a 6 e cuja área é 36. (Porquê?).



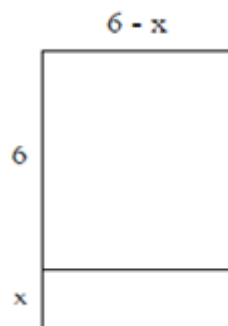
b) Para que a área da figura procurada seja 30, tenho de retirar um quadrado de área 6 e cujo lado é x como na figura abaixo.



c) Do quadrado maior retiro o quadrado de lado x e obtemos a figura como indicada abaixo.



d) Corta-se a figura pela linha pontilhada e desloca-se a parte menor ajustando-a abaixo de modo a formar um retângulo. O retângulo obtido tem os lados medindo $6 - x$ unidades e $6 + x$ unidades como indicado na figura abaixo.



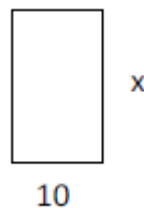
e) Observe que $x = \sqrt{6}$. Além disso, observe também que o retângulo obtido atende às exigências do enunciado.

Terceira parte: PROBLEMA FORMULADO EM LINGUAGEM GEOMÉTRICA.

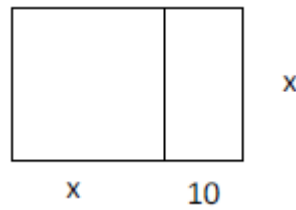
Problema 1: O comprimento de um retângulo é 10 unidades e sua largura é desconhecida. Nós ajustamos um quadrado a um dos lados do retângulo. Juntas, as duas figuras têm uma área de 39 unidades quadradas. Qual é a largura do retângulo?

Procedimentos de solução:

a) Inicialmente temos de construir a figura conforme o enunciado do problema. Começamos pelo retângulo de comprimento 10 e largura desconhecida como na figura abaixo.



b) A seguir teremos que ajustar um quadrado ao lado desconhecido do retângulo como na figura abaixo.

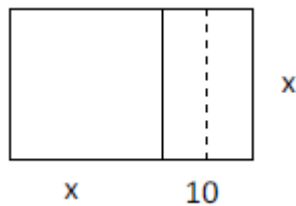


c) Verifique você mesmo que a área da figura desenhada pode ser expressa como $x^2 + 10x$

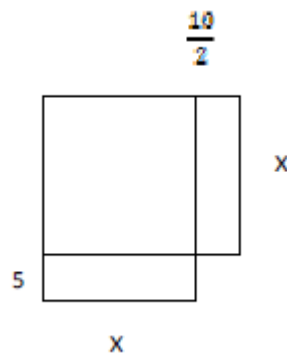
d) Mas o problema diz que a área total da figura 39, o que nos permite escrever a igualdade $x^2 + 10x = 39$

Todo este procedimento é apenas para desenhar a figura do enunciado do problema. Falta ainda resolver o problema, ou seja, encontrar o valor de x . Para isto seguiremos os seguintes passos:

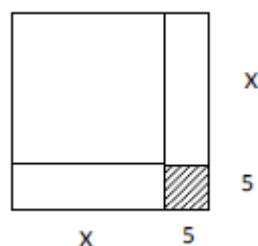
d.1. Cortar verticalmente o retângulo inicial em duas partes de mesma área.



d.2. Mover uma das partes para a base do quadrado.



e) A nova forma geométrica é quase um quadrado. Para formar um quadrado maior, um pequeno quadrado (cujo lado é 5) deve ser adicionado à forma geométrica apresentada na figura anterior.



f) A área do quadrado maior é igual a $x^2 + 10 \cdot x = 25$.

Agora chegamos à situação discutida na aula passada. Só que a resolução apresentada então foi em linguagem algébrica. Aqui estamos usando abordagem geométrica.

Observe que:

A área do quadrado adicionado é igual a 25. Como a área do quadrado inicial acrescida da área do retângulo inicial somam 39 unidades quadradas, então a área do quadrado maior é $39 + 25 = 64$. Logo, o lado desse quadrado é igual a 8, pois, $\sqrt{64} = 8$.

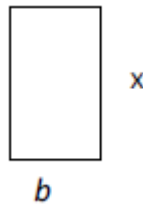
A medida do lado do quadrado maior é igual a $x + 5 = 8$. Logo, $x = 3$.

Quarta parte: PROBLEMA FORMULADO EM LINGUAGEM GEOMÉTRICA NA FORMA GENERALIZADA. Procurando a fórmula resolutiva da equação $x^2 + bx = c$.

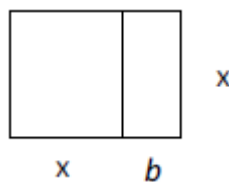
Problema 2: O comprimento de um retângulo é b unidades e sua largura é desconhecida. Nós colocamos um quadrado em um dos lados do retângulo. Juntas, as duas figuras têm uma área de c unidades quadradas. Qual é a largura do retângulo?

Procedimentos de solução:

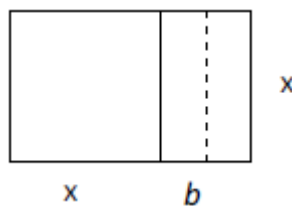
Construir um retângulo de comprimento b e altura desconhecida. A área é igual a $b \cdot x$



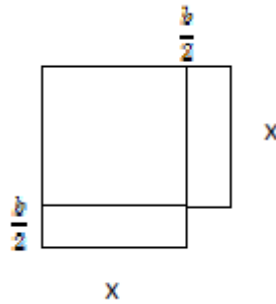
b) Unir um quadrado ao lado desconhecido do retângulo. A soma destas áreas pode ser indicada pela letra c . Ou seja $x^2 + b \cdot x = c$



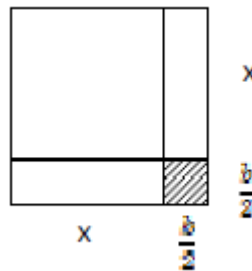
c) Cortar verticalmente o retângulo inicial em duas partes de mesma área.



d) Mover uma das partes para a base do quadrado.



e) A nova forma geométrica é quase um quadrado. Para formar um quadrado maior, um pequeno quadrado (cujo lado é $\frac{b}{2}$) deve ser adicionado à forma geométrica apresentada na figura anterior. A área do quadrado maior é igual a $x^2 + b \cdot x + (\frac{b}{2})^2$. Sendo $x^2 + b \cdot x = c$, teremos $c + (\frac{b}{2})^2$ correspondendo à área do quadrado maior.



Observações:

a) A área do quadrado adicionado é igual a $(\frac{b}{2})^2$. Como a área do quadrado inicial acrescida da área do retângulo inicial é igual a “c” unidades quadradas, então a área do quadrado maior é igual a $c + (\frac{b}{2})^2$. Logo, o lado desse quadrado é igual a $\sqrt{c + (\frac{b}{2})^2}$.

b) É possível observar que a medida do lado do quadrado maior é igual a $x + \frac{b}{2}$.

Portanto, $x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + (\frac{b}{2})^2}$. Logo, $x = \sqrt{c + (\frac{b}{2})^2} - \frac{b}{2}$.

Problema 3: Procurando a fórmula resolutiva da equação $ax^2 + bx = c$.

Resolva a equação $ax^2 + bx = c$.

Procedimentos de solução:

a) Obter como coeficiente da variável x^2 , o número um. Para isso, dividiremos a equação por “a”.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$$

Comparar

$$x^2 = \frac{c}{a} - \frac{bx}{a}$$

Comparar os valores dos coeficientes com os da fórmula da atividade 2.

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

c) Observar que deverá substituir “ b ” por “ $\frac{b}{a}$ ” e “ c ” por “ $\frac{c}{a}$ ”. Logo a nova fórmula será a que está ao lado.

$$x = \sqrt{\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)$$

Problema 4: Encontrando a fórmula resolvente da equação geral do 2º grau.

Resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Procedimentos de solução:

a) Comparar as equações (I) $ax^2 + bx + c = 0$ e (II) $ax^2 + bx = c$. Observamos que de (II) temos $ax^2 + bx - c = 0$. Então é necessário substituir o valor de “ c ” por “ $-c$ ” na fórmula x.

$$= \sqrt{\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right) .$$

Logo teremos,

$$\sqrt{\frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)$$

b) Desenvolver a fórmula descrita no 1º passo.

$$\sqrt{\frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} - \left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} - \left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para obter as soluções numéricas precisamos considerar também a raiz quadrada negativa de $b^2 - 4ac$. Então, a fórmula será:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observe que de todos os métodos utilizados o foco principal é fazer o aluno compreender a fórmula resolvente do 2º grau por um método geométrico de tal forma que este entenda que existe diversos caminhos para compreensão de um problema desta natureza.

4 SOCIALIZANDO UMA NOVA IDEIA DE RESOLVER EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

O presente trabalho ganha fôlego com o seu modelo de contextualizar a ferramenta matemática de forma coesa, conhecer os parâmetros históricos da matemática é entender os processos adotados de aceitação e os formatos usados para admitir um conceito lógico e ideal como parâmetro do estudo dessa ciência.

A vista deste construto formal de ideias, nos convencemos de que um modelo de um problema histórico pudesse ser apresentado ao logo de um problema a ser questionado por etapas, desta forma elaboramos exemplos de um modelo que pudesse ser indagado por partes pelo estudante, assumindo assim o formato de um problema matemático, partindo do pressuposto de um exercício contextualizado.

Adotado esse modelo como forma de trabalho acadêmico, buscamos solidificar o formato que este seria usado para alcançar os objetivos do projeto (como seria aplicado e avaliado na turma), então pensamos em uma entrevista semiestruturada, onde apresentamos da seguinte forma. Na entrevista semiestruturada, o investigador tem uma lista de questões ou tópicos para serem preenchidos ou respondidos, como se fosse um guia. A entrevista tem relativa flexibilidade. As questões não precisam seguir a ordem prevista no guia e poderão ser formuladas novas questões no decorrer da entrevista (MATTOS, 2005). Mas, em geral, a entrevista seguirá o que se encontra planejado. As principais vantagens das entrevistas semiestruturadas são as seguintes: possibilidade de acesso a informação além do que se listou; esclarecer aspectos da entrevista; gera pontos de vista, orientações e hipóteses para o aprofundamento da investigação e define novas estratégias e outros instrumentos. (TOMAR, 2007).

Desta forma aplicamos nosso trabalho em janeiro (período letivo normal conforme calendário institucional do IFPI) de 2017 no Instituto Federal do Piauí – *Campus* São Raimundo Nonato em uma turma do 1º ano do ensino médio, pois acreditamos ser ideal pelo conjunto de ideias que estes já vinham acumulando sobre o plano central da pesquisa, equações do segundo grau. Abaixo a descrição de como avaliamos a aplicação.

PRIMEIRO DIA DE AULA:

Neste dia foi solicitado um questionário, com o objetivo de verificar como os alunos resolvem equações do 2º grau e qual o entendimento deles sobre história da matemática. Este questionário teve a finalidade de avaliar diagnosticamente cada aluno, com perguntas abertas

levando aos discentes que parem, pensem e reflitam o entendimento deles sobre seus métodos de resolverem equações do 2º grau e consequentemente que eles utilize esse método. Na última questão a intenção da colocação foi levar para o aluno desde de já uma previa da sequência didática, propiciando ao discente a pensar de maneira diferente para sua solução com relação as anteriores.

SEGUNDO DIA DE AULA:

O pesquisador iniciou a aula falando da importância da História da Matemática que deve ser utilizada em sala de aula, como surgiu as primeiras contagens dos povos antigos, qual era o meio que eles representavam o números. A partir daí os alunos foram questionados verbalmente o que eles entendiam por história da matemática? Das análises que fizemos, a mais comum foi: *que não tinham muito conhecimento sobre a história*. Em seguida realizamos outro questionamento quais os povos antigos que eles conheciam que começaram a falar sobre a matemática? *Apenas um respondeu que era os gregos*. Depois perguntamos como eles resolviam equações do 2º grau? Todos responderam: *Que utilizavam a formula de Bhaskara*. Em seguida já enfatizamos se eles sabiam da história de Bhaskara? Quem foi ele? Eles responderam: *Quase todos disseram que não conhecia com exceção de um que respondeu que a formula não era dele*.

Em seguida frisamos que a história da matemática é real e que ela nos favorece a entender como surgiu a matemática, e que os homens primitivos utilizavam pedrinhas para representar cada carneiro, depois surgiu os babilônios, egípcios e os gregos que faziam suas contagens através de representações de traços verticais e símbolos, assim concluindo que esses povos contribuíram muito para a nossa matemática de hoje.

Em seguida resolvemos a 4º (quarta) questão do questionário diagnostico mostrando como Al-Khwarizmi utilizava o método conhecido como completar quadrado que dizia o seguinte: Para facilitar o processo de completar quadrados é necessário transformar a expressão em um trinômio quadrado perfeito, faz-se um quadrado com x representando o lado, em seguida pega o valor de b e divide por dois fazendo-se dois retângulos, depois pega esses retângulos e cola do lado do quadrado e na sequência completa o novo quadrado maior, sendo que em seguida soma essa área em ambos os lados da equação, fatora-se o trinômio e concluímos extraíndo a raiz e encontrando o valor de x, logo depois foi apresentada a questão A da sequência didática com o seguinte: Qual deve ser a dimensão de um retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96 unidades quadradas?

Inicialmente pedimos um aluno(a) para ler a pergunta, depois pedi a opinião deles como era que resolvia essa questão, depois começamos a desenhar no quadro um quadrado e perguntando aos discentes qual deveria ser a medida do lado do quadrado que daria a área de 96, pedimos para eles pensarem em um número inteiro que elevado o quadrado daria uma área maior e mais próxima de 96 unidades quadradas. O método adotado pelo pesquisador para resolução desta questão buscava construir um quadrado de área superior a apresentada pelo problema e retirar outro quadrado de maneira que sua área, quando retirada do quadrado construído, resulte na área proposta pelo problema. Ao dividir e remanejar as figuras resultantes completei o quadrado e encontrei a dimensão do retângulo. Em seguida, foram formados duplas com o proposto de resolver uma questão semelhante à apresentada anteriormente, fazendo uso da mesma técnica.

Na continuidade da sequência didática, apresentou-se a questão B Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 12 e cuja área é 30 unidades quadradas?

Inicialmente as duplas já construíram um quadrado de lado 6, depois tentaram retirar um quadrado de 6, mas perceberam que não tinha nem um número elevado ao quadrado que desse 6, tentaram retirar 2×3 , porém o semiperímetro não dava certo, uma menina de uma dupla sugeriu aproximar a raiz quadrada de seis, no entanto quando ia calcular a área obtida dava apenas 29,4. Outros disseram que não dava certo o resultado. Deixei eles tentarem a resolver por dez minutos, mas a maioria questionava do resultado. Logo o pesquisador enfatizou para eles deixarem o x dentro da raiz, mas continuaram afirmando que não dava, após tanto questionamentos demonstrei a área do novo retângulo multiplicando por distributiva comprimento vezes larguras e obtendo a área de 30 unidades quadradas e eles ficaram indignados que deu certo.

Em seguida o pesquisador resolveu o problema 1, com o seguinte: O comprimento de um retângulo é 10 unidades e sua largura é desconhecida. Nós ajustamos um quadrado a um dos lados do retângulo. Juntas, as duas figuras têm uma área de 39 unidades quadradas. Qual é a largura do retângulo?

O pesquisador pediu a participação deles na resolução do problema, inicialmente temos de construir um retângulo com as devidas medidas que o problema conforme o enunciado do problema. Começamos pelo retângulo de comprimento 10 e largura desconhecida. A seguir teremos que ajustar um quadrado ao lado desconhecido do retângulo, unir um quadrado ao lado desconhecido do retângulo. A soma destas áreas pode ser indicada pela letra c . Ou seja, ($x^2 + b \cdot x = c$), verificando se a área pode ser expressa como $x^2 + 10x$, o problema diz que a área

total da figura 39, o que nos permite escrever a igualdade $x^2 + 10x = 39$, daí agora é encontrar o valor de x , onde corta-se verticalmente o retângulo inicial em duas partes de mesma área. A nova forma geométrica é quase um quadrado. Para formar um quadrado maior, um pequeno quadrado (cujo lado é 5) deve ser adicionado à forma geométrica apresentada na figura anterior. Logo a área do quadrado maior é igual a $x^2 + 10 \cdot x = 25$, onde se observa que a área do quadrado adicionado é igual a 25. Como a área do quadrado inicial acrescida da área do retângulo inicial somam 39 unidades quadradas, então a área do quadrado maior é $39 + 25 = 64$. Logo, o lado desse quadrado é igual a 8, pois, $\sqrt{64} = 8$. Conclui-se que a medida do lado do quadrado maior é igual a $x + 5 = 8$. Logo, $x = 3$.

Para generalizar o problema 1 o pesquisador propôs que as duplas tentassem resolver o problema 2, utilizando ideias similares durante a resolução do problema 1.

O enunciado do problema 2 elenca o seguinte: O comprimento de um retângulo é b unidades e sua largura é desconhecida. Nós colocamos um quadrado em um dos lados do retângulo. Juntas, as duas figuras têm uma área de c unidades quadradas. Qual é a largura do retângulo?

Percebe-se que o que diferencia do problema 2 do problema 1 é apenas o uso de valores desconhecidos. As duplas logo percebeu que a pergunta era mesma e só mudava os valores. Os discentes procuram resolver olhando para a resolução da questão anterior, ao utilizarem apenas letras, eles tiveram algumas dúvidas quanto questão da solução representava. Após terem feito igual a outra questão só mudando os valores, questionaram o porquê das letras e da formula que eles encontraram, o pesquisador interveio e pediu para eles somarem as áreas de cada quadrado

e isolar o valor de x , obtendo a seguinte formula $x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$. Depois afirmaram que dessa maneira o entendimento fica difícil, alegando que com o uso de valores numéricos foi mais fácil o entendimento do método corte e cole. Para comprovar se eles haviam chegado a um resultado coerente, o pesquisador pediu que eles substituísse no lugar das letras os valores do problema 1, depois deles terem substituído ficaram impressionados com o resultado, assim podendo comprovar o mesmo valor de x na questão 1.

Em seguida o pesquisador retomou a resolução do problema 2 que eles encontraram e propôs o problema 3: Resolva a equação $ax^2 + bx = c$

O pesquisador logo pediu para os alunos para obter como coeficiente da variável x^2 , o número um, sendo que dividissem a equação por “ a ” e comparar os valores dos coeficientes

com os da fórmula da atividade 2. Observando que deverá substituir “ b ” por “ $\frac{b}{a}$ ” e “ c ” por “

$$\frac{c}{a}”.$$
 Logo tendo a nova fórmula $x = \sqrt{\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)$

Na sequência o pesquisador apresentou o problema 4: Resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Em seguida pediu aos discentes para identificar quais as diferenças entre a equação apresentada no problema 3 e no problema 4. Identificaram que o valor “ c ” de uma está no segundo membro e o outro está no primeiro membro. Então, pedi que eles comparassem as equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $ax^2 + bx = c$ e substituir o valor de “ c ” por “ $-c$ ” na fórmula x . Após a substituição, os discentes, perguntaram o que fazer depois, em seguida desenvolvemos as expressões tirando o MMC e obtendo a fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Para finalizar a expressão foi necessário abordar o questionamento sobre raízes negativas. No entanto alguns alunos acharam muito trabalhoso encontrar a fórmula resolutiva, mas afirmando é fundamental esse processo.

TERCEIRO DIA DE AULA:

Neste último dia apliquei um questionário, com o objetivo de verificar se os alunos compreenderam o método corte e cole de resolver equações do segundo grau e que levou a fórmula resolutiva, como eles agora consideram se a história da matemática é importante na sala de aula. Este questionário pós sequência com perguntas abertas e que leva os alunos pôr em prática o aprendizado deles da aula do dia anterior e consequentemente encontrar a solução dos problemas pelo método corte e cole, em questões que tem o mesmo fundamento de resolver, aplicado na sequência didática.

4.1 Análise dos Dados dos questionários diagnóstico e pós sequência

Depois da aplicação deste trabalho na turma citada acima, investigou-se os dados coletados para descrever a pesquisa. A fim de transgredir aos objetivos apresentados, separaram-se os resultados na primeira parte com o relato feito pelos alunos e na segunda parte com a comparação das duas últimas questões com as duas primeiras em gráficos referentes aos questionários diagnóstico e pós sequência aplicado aos discentes respectivamente.

4.1.1 Resultados decorrido dos questionários aplicado aos alunos

No primeiro momento ao serem questionados sobre o que eles entendem por equação do 2º grau, a maioria responderam que é uma equação que tem o x elevado ao quadrado e que precisa achar o valor de x, alguns disseram que é uma operação que envolve incógnitas, outros não quiseram responder. Na sequência ao perguntar como eles resolvem equação do 2º grau e qual o método que eles utiliza, todos descreveram que utilizavam a fórmula de Bhaskara, em seguida ao serem questionados do conhecimento prévio deles sobre os aspectos da história da matemática e estão relacionados com equação do 2º grau, quase todos disseram que não conhecem, outros não responderam e apenas três disseram que formula de Bhaskara não era dele.

Após a sequência didática ao questionar qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 24 e cuja área 140 unidades quadradas, a maioria dos alunos responderam corretamente o problema, alguns fizeram por metade, outros não responderam, em seguida a outra questão pede para encontrar a solução da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$, pelo método corte e cole, a minoria conseguiu chegar ao resultado esperado, a maioria deixou pela metade, outros não responderam, na outra questão foi solicitado qual deve ser a ser a dimensão do retângulo cujo o semiperímetro é 14 e cuja área é 40 unidades quadradas, essa mesma maioria que conseguiu responder a primeira questão depois da sequência conseguiram ter êxito no resultado, outros não responderam.

Observe a questões a seguir e suas representações gráficas:

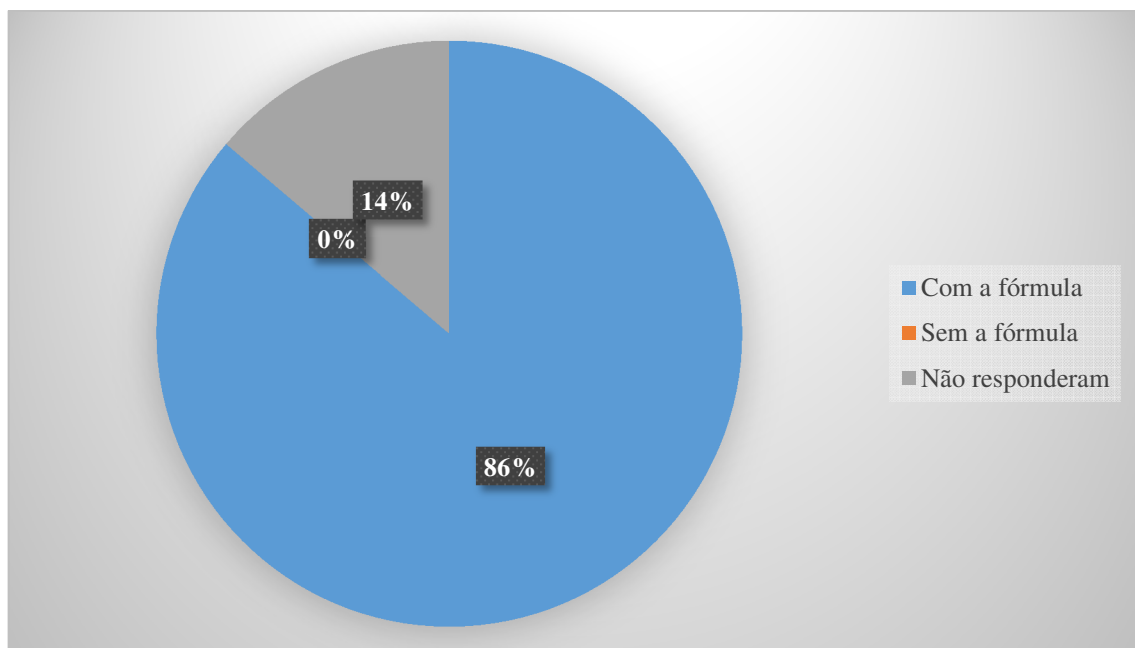


Gráfico 1: Encontre a solução da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$: Aplique uma solução usando uma fórmula e outra sem o uso de fórmulas.

Fonte: Dados da Pesquisa

No gráfico 1 percebe-se que ao serem questionados sobre resolver uma equação com o uso de fórmulas e sem, 86% dos alunos conseguiram encontrar o resultado através da fórmula resolutiva (conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara), 0% sem o uso de fórmula e 14% não responderam.

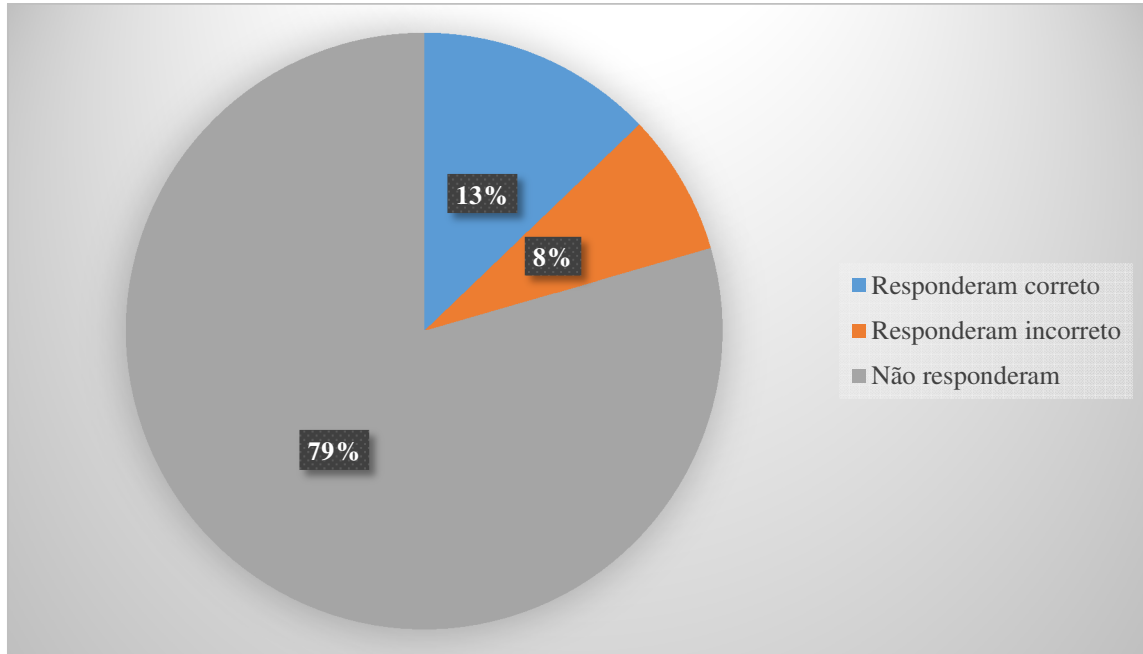


Gráfico 2: Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96 unidades quadradas?

Fonte: Dados da Pesquisa

O gráfico 2 mostra que 79% dos alunos não responderam o desafio proposto, 13% responderam corretamente, mas sem justificativa, foi apenas por tentativa de multiplicação de números e 8% responderam, mas de forma incorreta.

Após a sequência do método corte e cole abordaremos os resultados e comparamos com os dois gráficos citados anteriormente, apesar que houve uma diminuição de alunos nesse questionário.

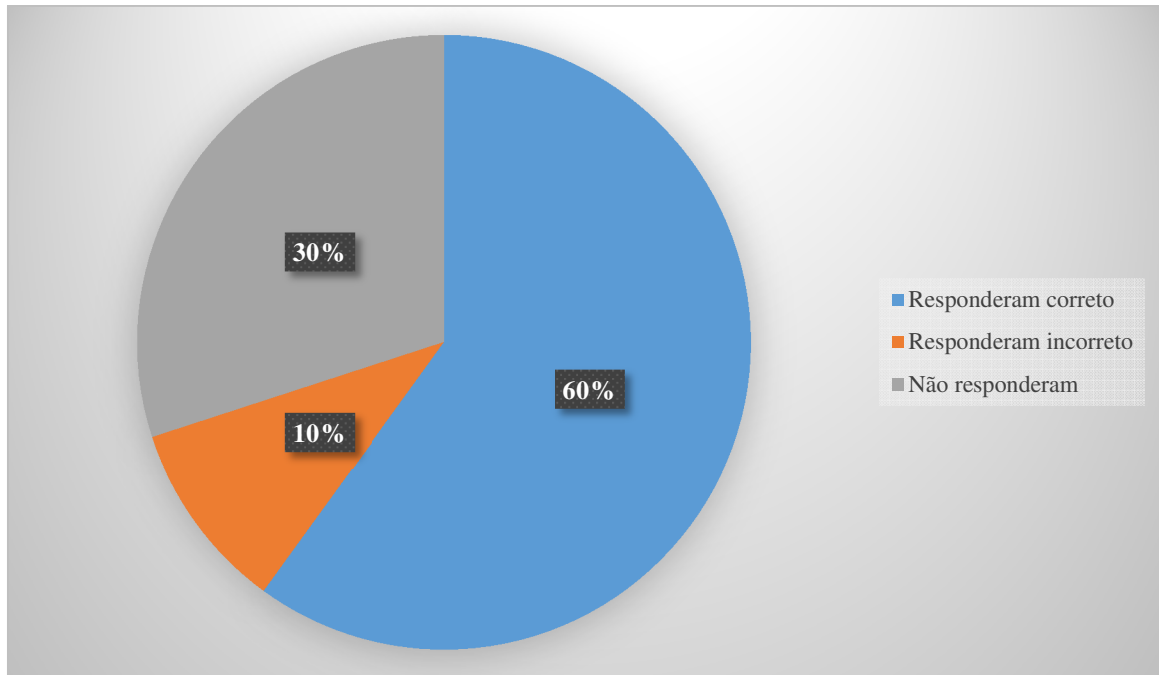


Gráfico 3: Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 24 e cuja área 140 unidades quadradas?

Fonte: Dados da Pesquisa

No gráfico 3 percebe-se que após o método corte e cole, 60% dos discentes conseguiram responder corretamente, 30% não responderam e 10% responderam incorreto, no entanto podemos observar que o desafio proposto no gráfico 2 apenas 13% responderam correto e depois do método geométrico corte e cole, 60% dos alunos resolveram com êxito através desse método.

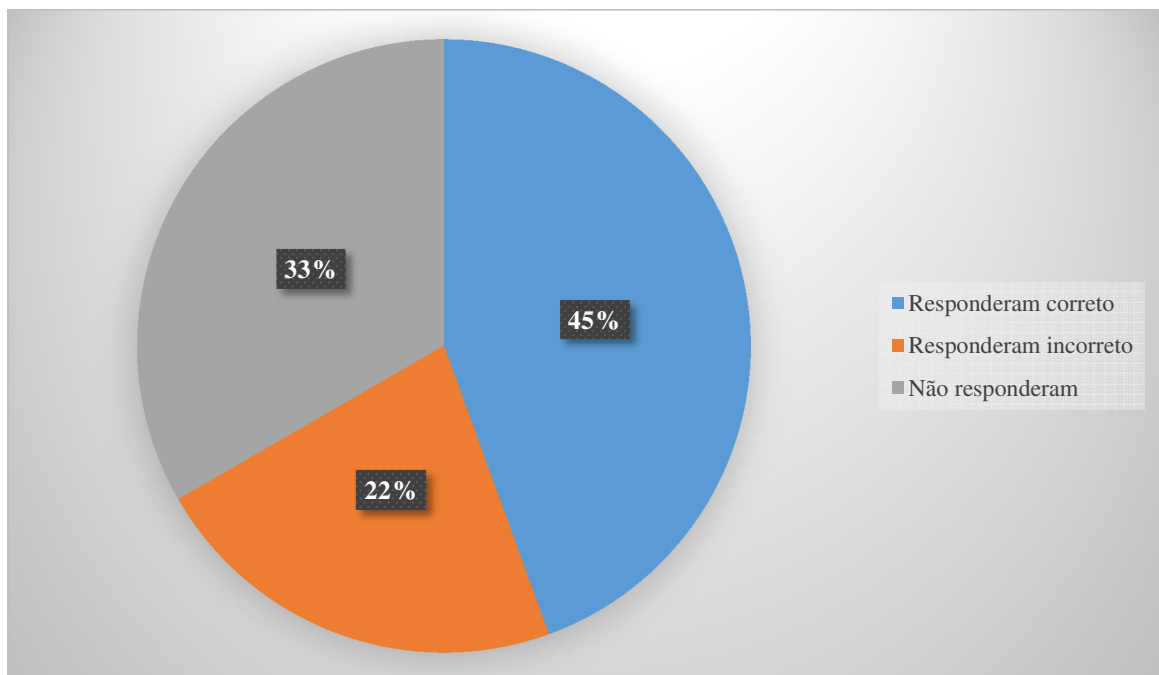


Gráfico 4: Encontre a solução da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$, pelo método corte cole.

Fonte: Dados da Pesquisa

O gráfico 4 mostra que 45% dos discentes responderam correto, 33% responderam incorreto e 22% não responderam, podemos observar que os alunos tiveram um avanço significativo apesar que eles tiveram dificuldades em absorver a diferença de um problema contextualizado para um não contextualizado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o propósito de alcançarmos os objetivos, efetuou-se um levantamento bibliográfico, no qual investigou-se artigos, livros, monografias e internet, que explorasse a história da matemática, a equação do 2º grau e o método corte cole.

Para o progresso desse trabalho executou-se um questionário semi estruturado em diagnostico, a sequência didática e o questionário pós sequência com alunos do 1º ano do ensino médio do IFPI-SRN, afim de alcançar resultados positivos dos discentes.

A aprendizagem torna-se extremamente significativa quando encontramos uma situação de resolução de problemas, que faça o aluno ser o foco central dessa interação, tornando-o capaz de construir o conhecimento a partir da solução de problemas, desse modo entendendo a finalidade e utilidade da situação questionada e quais os objetivos de aprendizagem.

Trazer o discorrimento desse trabalho sobre história da matemática e a sequência didática por meio do método geométrico corte e cole, enfatizando que é muito importante sabermos como surgiu a matemática, desde dos homens primitivos até os dias atuais. Com este estudo podemos perceber que a história é essencial para podermos progredir, onde que a equação do 2º grau teve várias maneiras de resoluções em cada época, sendo que se percebe que cada geração tinha o aprimoramento das resoluções de forma mais explicada e contextualizada.

O propósito foi apresentar possibilidades de aprendizagem significativas de como os discentes do 1º ano do ensino médio pudessem chegar a um resultado explicativo e o porquê do que está fazendo na resolução de um problema proposto através da sequência didática por meio do método geométrico corte e cole. Foi possível constatar que a maioria dos participantes aprovaram o método, justificando que este “é muito explicativo e fica mais fácil de interpretar o que a questão pede”, mas também acharam muito demorado para chegar a à fórmula resolutiva da equação do 2º grau.

Percebe-se que os discentes estão acostumados em resolver equação do segundo só por meio da fórmula resolutiva (conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara), deixando de lado o entendimento claro do que e o porquê estão fazendo, essa é uma realidade que ocorre comumente nas salas de aula, dessa forma deixando de lado o “entender matemática”. O método geométrico corte e cole pode ser apreciado como ferramenta no processo de ensino aprendizagem, trazendo um enriquecimento para esclarecer a álgebra por meio geométrico, assim fortalecendo o aprendizado de maneira mais fixadora.

Por fim, diante do que foi apresentado durante este trabalho, espera-se que outros matemáticos procurem aplicar esta metodologia de ensino, transformando a matemática mais significativa para o discente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALESTRI, Rodrigo Dias. **A Participação da História da Matemática na Formação de Professores de Matemática na Óptica de Professores/Pesquisadores**. 17p. Pós-Graduação (Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Paraná.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 16. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BOYER, Carl Bejamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo; Edgard Blucher, Ed. Da Uiversidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Parecer CNE/CES 1302/2001. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Diário Oficial, Brasília, DF. 05/03/2002, Seção1, pt.15.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro. Ciência Moderna Ltda, 2007.

CILESTINO, Kamila Gonçalves (2013). **História da equação do segundo grau em livros didáticos**. 13p. Artigo (XI Encontro Nacional de Educação Matemática) - Universidade Estadual do Centro-Oeste Curitiba, Paraná.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. Campinas, SP; Papirus, 1996.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Trad. 9 ed. São Paulo, Unicamp. 2004.

FRAGOSO, W. C. **História da Matemática: uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011. 211 p.

GONÇALVES, Juliana Aparecida (2013). **Dificuldade dos alunos que iniciam no estudo da álgebra**. 44p. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Pará de Minas, Minas Gerais.

GUTIERRE, L.S. **História na Matemática em Sala de Aula**, 2003? Disponível em: <<http://www.afirse.com/archives/cd3/tematica4/081.pdf>> Acesso em 23/01/2016.

LIBÂNEO, José Carlos. **A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender**. Disponível em: <<http://educador.brasilecola.uol.com.br/trabalho-docente/resolucao-problemas-aprendizagem.htm>> Acesso em: 22/01/2017.

MENDES, I, A. **O uso da história no ensino da matemática: Reflexões teóricas e experiências**, 1º ed. Belém: UEPA, 2001.

NOBRE, S. **Alguns “porquês” na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática.** In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, 1996, pp.29-35.

PEDROSO, Hermes Antônio. **Uma breve história da equação do 2º grau.** REMat ISSN 2177-5095 n°-2-2010. Universidade Estadual Paulista UNESP - Campus de São José do Rio Preto, São Paulo.

Portal Conceito de, Conceito – Conceito de Álgebra. Disponível em:
<<http://conceito.de/algebra>> Acesso em: 19/02/17.

QUARANTA F. ET AL (2013). **Geometria e aritmética combinam com equações do 2º grau?**. 12p. Artigo (Laboratório de Matemática de João Câmara) - Instituto Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro; Zahar, 2012.

SILVA, Eliana Siviero da (2014). **História da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** uma proposta para o ensino de sistemas de numeração. 12p. Artigo (Projeto de mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná.

VALE, Alberton Fagno Albino do (2013). **As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau.** 76p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Questionário Diagnóstico

O presente questionário busca conhecer o entendimento dos alunos do 1º Ano do Ensino Médio. Essas informações não serão divulgadas e análise dos dados será feita de forma global solicito que as respostas sejam mais precisas possíveis. Por favor, responda atentamente cada uma das questões. Não é necessário se identificar, Obrigado!

Data ____/____/____

Nome _____

❖ Sexo. () masculino () feminino

1). O que você entende por equação do 2º grau?

2). Como você resolve equações do 2º grau? Qual o método que você utiliza?

3). Qual seu conhecimento prévio sobre os aspectos da História da Matemática que você conhece e estão relacionados com a equação do 2º grau?

4) Encontre a solução da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$: Aplique uma solução usando uma fórmula e outra sem o uso de fórmulas.

5) **Desafio:** Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96 unidades quadradas?

APÊNDICE B - Questionário Pós- Sequência

Por favor, responda atentamente cada uma das questões. Não é necessário se identificar, Obrigado!

Data ____/____/____

Nome _____

☐ 1). Sexo () masculino () feminino

1) Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo semiperímetro é 24 e cuja área 140 unidades quadradas?

2) Encontre a solução da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$, pelo método corte cole.

3) Qual deve ser a dimensão do retângulo cujo o semiperímetro é 14 e cuja área é 40 unidades quadradas?

4) O que você entendeu sobre o uso do método corte cole? Você gostou desse método? Justifique?

5) Você acha importante a história da matemática na sala de aula? Justifique?
