



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
PIAUÍ – *CAMPUS* PARNAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

MODELAGEM E SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR UNIDIMENSIONAL.

João Marcos Rodrigues Silva

Parnaíba
2023

João Marcos Rodrigues Silva

**MODELAGEM E SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR
UNIDIMENSIONAL.**

Trabalho de conclusão de curso submetido à coordenação do curso de Licenciatura em Física, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí - *Campus Parnaíba*, como requisito para obtenção do grau em Licenciatura em Física.

Orientador:

Prof. Me. Diego Prudêncio Soares

Parnaíba

2023

Resumo

A partir da proposição de uma situação de propagação de calor através de uma barra termicamente isolada, iremos efetuar uma modelagem matemática para a formulação de uma equação que determina o comportamento dessa difusão. Neste presente trabalho, estudaremos o problema da condução do calor numa barra com as extremidades a temperatura inicial à zero, onde utilizaremos noções de cálculo diferencial e integral, equações diferenciais e série de fourier para expor uma solução do problema.

Palavras-chave: Equação do Calor, Série de Fourier, Equações Diferenciais Parciais.

Abstract

From the proposition of a situation of heat propagation through a thermally insulated bar, we will carry out a mathematical modeling for the formulation of an equation that determines the behavior of this diffusion. In this present work, we will study the problem of heat conduction in a bar with the ends at zero initial temperature, where we will use notions of Differential and Integral Calculus, Differential Equations and Fourier series to expose a solution to the problem.

Key words: Heat Equation, Fourier Series, Partial Differential Equations.

Sumário

1	Resultados Preliminares	2
1.1	Definição de função contínua	2
1.2	Regra da cadeia	5
1.3	Funções periódicas, funções pares e ímpares	6
1.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano	10
1.5	Equações diferenciais lineares	11
2	Série de Fourier	15
2.1	Convergência uniforme	16
2.2	Coefficientes de Fourier	18
3	Modelagem da Equação do Calor	25
3.1	Equação da difusão	25
3.2	Equação do calor	31
4	Conclusão	33
4.1	Resolução da equação do calor	33
4.2	Condução do calor numa barra com extremidades mantidas a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$	36

Introdução

Um dos estudos mais curiosos da Física no que diz respeito à aplicação da matemática é a modelagem da propagação do calor, conteúdo da área da Termodinâmica. É interessante observar o comportamento da propagação de calor pois podemos analisar de forma volumétrica, tridimensional, como o fluxo através de um fluido líquido ou gás, ou podemos analisar de forma linear, através de uma barra fina. O objetivo deste trabalho consiste em encontrar uma solução geral para a difusão do calor numa situação onde uma barra é isolada termicamente em duas laterais paralelas e nas outras duas é possível ter transporte de calor, bem como temperaturas diferentes, no qual tem uma ênfase no coeficiente linear da série de Fourier. O presente trabalho visa resgatar alguns conceitos de cálculo diferencial, cálculo integral e equações diferenciais em busca de reunir todos os conhecimentos básicos necessários para facilitar a compreensão dos demais tópicos abordados até chegar na série de Fourier que proporcionará a resolução do problema. A estrutura do trabalho é apresentada inicialmente com os assuntos preliminares para facilitar a compreensão do leitor. Em seguida, os principais tópicos necessários para conclusão do objetivo da Série de Fourier. Dando sequência, a modelagem da equação do calor com a analogia da equação da difusão para entendimento como ocorre a sua propagação. E, por fim, a conclusão na qual mostra a solução da equação com o coeficiente que deve ser usado na função.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Inicialmente, vamos resgatar alguns conhecimentos das disciplinas de cálculo diferencial, integral e vetorial, e equações diferenciais para podermos contextualizar algumas temáticas de aplicação que serão abordadas nos capítulos 2, 3 e 4 posteriormente.

1.1 Definição de função contínua

Uma função contínua é toda aquela função cujo o gráfico em qualquer ponto p de seu domínio não apresenta “quebra” da linha, como pode ver na figura abaixo, tem-se uma função f e outra g .

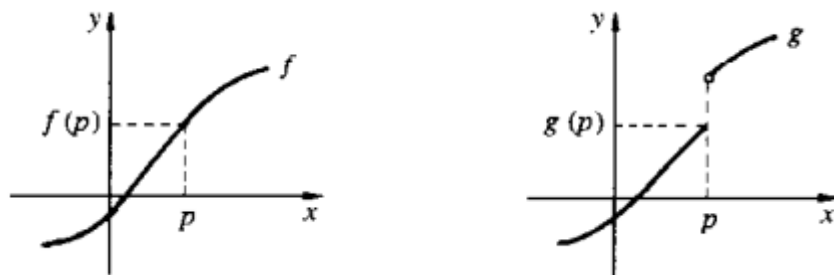


Figura 1.1: Representação gráfica de uma função contínua e outra descontínua.

Percebe-se que a função f não apresenta “quebra” no ponto p , o contrário, tem a função g . Para facilitar a compreensão, observe os gráficos abaixo. (GUIDORIZZI, 2001)

A função f demonstrada nos gráficos satisfazem no ponto p a propriedade:

1) para todo $\epsilon > 0$ determinado, existe um $\delta > 0$, onde δ depende de ϵ , no qual $f(x)$ permanece entre $f(p) - \epsilon$ e $f(p) + \epsilon$ quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, com x

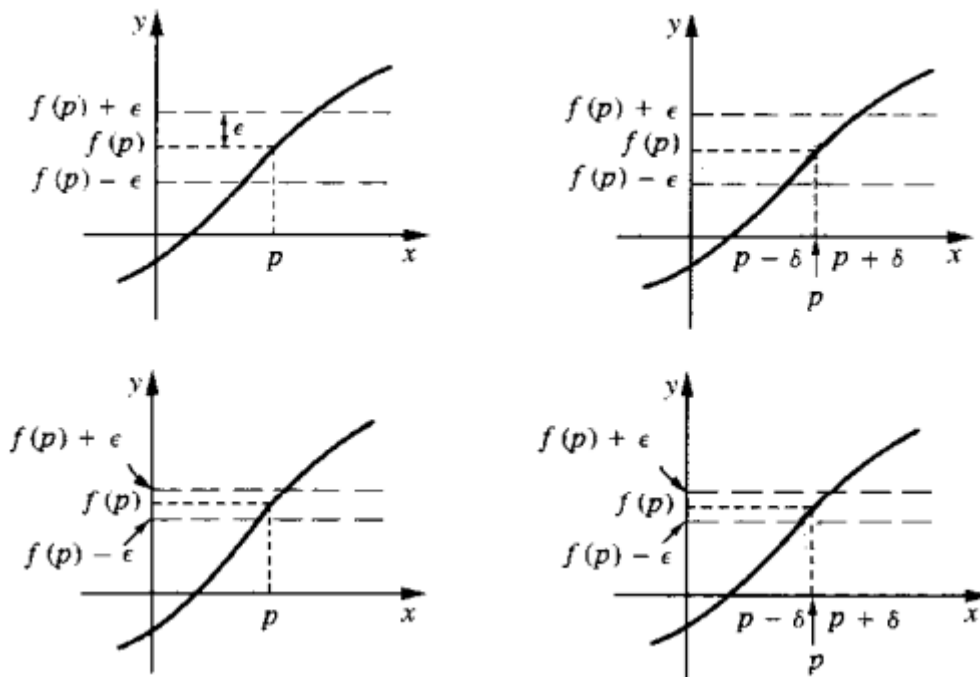


Figura 1.2: Exemplo de funções contínuas.

no domínio de f , ou seja,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$$

Em contrapartida a função g não satisfaz tais condições

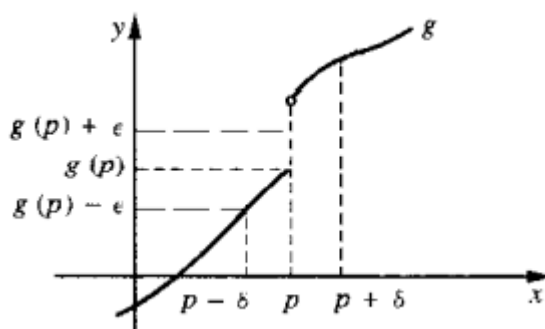


Figura 1.3: Exemplo de função descontínua.

para $\epsilon > 0$ não existe $\delta > 0$ que torne a afirmação da propriedade verdadeira.

$$\forall x \in D_f, p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow g(p) - \epsilon < g(x) < g(p) + \epsilon$$

Para qualquer $\delta > 0$ que for escolhido, quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, $g(x)$ não permanece entre $g(p) - \epsilon$ e $g(p) + \epsilon$.

A propriedade 1 diferencia as funções f e g em p . Assumiremos a propriedade 1 como definição para uma função contínua em p .

Definição 1. *Seja f uma função e p um ponto do domínio:*

$$f \text{ contínua em } p \iff \begin{cases} \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0, \text{ onde } \delta \text{ depende de } \epsilon, \\ \text{no qual para todo } x \in D_f, \text{ com} \\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon \end{cases}$$

Observa que

$$|x - p| < \delta \iff p - \delta < x < p + \delta$$

e

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \iff f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$$

Podemos reescrever a definição em módulo da seguinte forma:

$$f \text{ contínua em } p \iff \begin{cases} \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0, \text{ onde } \delta \text{ depende de } \epsilon, \\ \text{no qual para todo } x \in D_f. \\ |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon \end{cases}$$

Podemos dizer então que f é contínua em $A \subset D_f$ se f for contínua em todo $p \in A$, ou seja, f é contínua para todo ponto p em seu domínio.

Definição 2. *Uma função é $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua, se os pontos de descontinuidades sejam finitos ou infinitos enumeráveis para qualquer intervalo limitado.*

Definição 3. *Uma função é $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita seccionalmente derivável, se a derivada da função também for seccionalmente contínua.*

1.2 Regra da cadeia

Em cálculo I, vemos que se uma função composta $h(t) = f(g(t))$ é derivável, vale a Regra da Cadeia, onde $y = f(x)$ e $x = g(t)$ funções deriváveis com $\text{Im}g \subset D_f$.

$$h'(t) = f'(g(t)).g'(t), \forall t \in D_g \quad (1.1)$$

Para melhor compreensão, vamos ver como fica a regra da cadeia na notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = g'(t) \quad (1.2)$$

onde a função composta é $y = f(g(t))$, onde da equação 1.1 fica:

$$\frac{dy}{dt} = f'(g(t)).g'(t)$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = f'(x).g'(t)$$

onde $x = g(t)$. Portanto:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.3)$$

no qual $\frac{dy}{dx}$ deve ser calculado em $x = g(t)$.

Vejamos a ideia da regra da cadeia quando a função f possuir mais de uma variável. Suponha que uma função $f(x, y)$ onde x, y dependem de um parâmetro t , isto é:

$$f = f(x, y), \quad x = x(t) \quad \text{e} \quad y = y(t)$$

ao substituir $x(t)$ e $y(t)$ nas variáveis x e y na função f , a mesma dependerá apenas de t .

$$f(t) = f(x(t), y(t))$$

na anotação de Leibniz, da mesma maneira vista na equação 1.3, porém, para cada variável

x e y , teremos:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

onde, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são aplicadas nas funções $x(t)$ e $y(t)$.

Note que essa mesma ideia pode ser usada em outras funções com quantas variáveis for necessária. Por exemplo, se tivermos:

$$f = f(x, y, z, w), \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad \text{e} \quad w = w(t)$$

então:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt} \quad (1.4)$$

onde, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial w}$ são aplicadas em $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e $w(t)$.

1.3 Funções periódicas, funções pares e ímpares

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T , se $f(x + T) = f(x)$ para todo x . A seguir, ver-se a definição através de exemplos:

Exemplo 1. $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ são periódicas e 2π é um período para elas, isto é, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Exemplo 2. $f(x) = x - [x]$, no qual $[x]$ representa um número inteiro menor ou igual a x , é uma função periódica de período 1.

Pode-se interpretar que se T é um período para a função f , logo, $2T$ também é:

$$f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$$

Geralmente, considera-se que kT é um período, onde k é um número inteiro positivo ou negativo, pois, é preferível que $k \neq 0$, porque zero é um período para qualquer função. Chama-se *período fundamental* o menor período positivo, como por exemplo, nas funções $\sin x$ e $\cos x$, que o menor período positivo é 2π . (FIGUEIREDE, 2007)

Exemplo 3. Pode-se determinar o período fundamental T da função $\sin \frac{n\pi x}{L}$ da seguinte forma: Obtendo $\sin \frac{n\pi(x+T)}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $\sin \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L} \right) = \sin \frac{n\pi x}{L}$, isto é:

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi T}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Em particular para $x = \frac{L}{2n}$, encontra-se:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi T}{L} + \cancel{\cos \frac{\pi}{2}}^0 \sin \frac{n\pi T}{L} = \sin \frac{\pi}{2}$$

o que significa que:

$$\cos \frac{n\pi T}{L} = 1 \quad (1.5)$$

aplicando a identidade $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, temos:

$$\sin^2 \frac{n\pi T}{L} + \cos^2 \frac{n\pi T}{L} = 1 \Rightarrow \sin^2 \frac{n\pi T}{L} + 1 = 1 \Rightarrow \sin^2 \frac{n\pi T}{L} = 0 \Rightarrow \sin \frac{n\pi T}{L} = 0 \quad (1.6)$$

Como procura-se o menor valor positivo para o período T que satisfaça as equações 1.5 e 1.6 simultaneamente, tem-se $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi$, donde o período fundamental de $\sin \frac{n\pi x}{L}$ é $T = \frac{2L}{n}$. De maneira análoga, mostra-se que $T = \frac{2L}{n}$ também é o período fundamental de $\cos \frac{n\pi x}{L}$.

Definição 4. Tem-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par quando $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isso diz que o gráfico dessa função é simétrico em relação ao eixo y . Em contrapartida, uma função é ímpar, se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que significa que este gráfico é simétrico em relação à origem.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4. Mostremos que as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$ são funções pares. Com efeito:

$$a) f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

portanto, $f(x) = x^2$ é uma função par.

$$b) g(x) = \cos x$$

$$g(-x) = \cos(-x) = \cos(-x + 2\pi) = \cos(2\pi - x)$$

Lembrando que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, temos:

$$g(-x) = \overset{1}{\cos 2\pi} \cos x + \overset{0}{\sin 2\pi} \sin x = \cos x = g(x), \quad \forall x \in D_g$$

donde concluímos que a função $g(x) = \cos x$ é uma função par.

Exemplo 5. De forma análoga a anterior, mostremos que as funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sin x$ são ímpares:

$$a) f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Portanto, $f(x) = x^3$ é uma função ímpar.

$$b) g(x) = \sin x$$

$$g(-x) = \sin(-x) = \sin(-x + 2\pi) = \sin(2\pi - x)$$

Lembrando que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$, temos:

$$g(-x) = \overset{0}{\sin 2\pi} \cos x - \overset{1}{\sin x \cos 2\pi} = -\sin x = -g(x), \quad \forall x \in D_g$$

segue que a função $g(x) = \sin x$ é uma função ímpar.

vejamos a seguir algumas propriedades de funções pares e ímpares.

Proposição 1. Dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, temos:

- 1) Se f e g são pares, então $f + g$ e $f \cdot g$ são pares.
- 2) Se f e g são ímpares, então $f + g$ é ímpar e $f \cdot g$ é pares.
- 3) Se f é par e g é ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.

Vamos demonstrar essas propriedades provando uma delas, a número 3. As demais podem ser feitas de forma análoga. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma

função ímpar. Assim:

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g(-x) = -g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{daí}$$

$$(fg)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$$

nos mostrando que fg é ímpar.

Proposição 2. 1) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par integrável em qualquer intervalo limitado. Logo*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

2) *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado. Logo*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

Vamos demonstrar 2.1, já que 2.2 pode ser demonstrada de forma análoga. Observe que:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx$$

fazendo a mudança de variável $y = -x$, temos que $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $x = -L \Rightarrow y = L$ e $dy = -dx \Rightarrow dx = -dy$, logo:

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = \int_0^L f(y) dy = \int_0^L f(x) dx$$

Na última igualdade acima, usamos o fato de y ser uma variável muda. Daí:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

1.4 Gradiente, Divergente e Laplaciano

A simbologia de gradiente, como definiremos mais adiante, é formalmente a de um vetor ∇ , acompanhado de uma grandeza escalar u .

$$\nabla u = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^\top \quad (1.7)$$

Esta simbologia é utilizada para que não confunda com $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ pois esta derivada é nula tendo em vista que $\hat{x}$ é constante. Chamamos de *operador del* o termo entre parênteses da equação 1.7 e ele não é um vetor convencional.

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

Sem uma função a ser trabalhada este operador não significa nada, apenas acompanhado de uma função é que ∇ indica que ela deve diferenciar.

Podemos dizer que ∇ imita o comportamento de um vetor ordinário, porém, não multiplica, mas sim, atua sobre a função. Vejamos as diferenças entre um vetor comum e esse operador:

1. Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

a) Produto com um escalar α : $\alpha \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

b) Produto escalar dos vetores: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

2. Atuações do operador ∇ :

a) Em uma função escalar $u(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \nabla u &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \hat{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

b) Em um produto escalar com uma função vetorial $\vec{v} = (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) =$

(v_x, v_y, v_z) :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \\ \nabla \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.9}$$

Definição 5. Definimos as equações 1.8 e 1.9 como sendo, respectivamente, o gradiente da função escalar u e o divergente da função vetorial $\vec{v}$.

Definição 6. O Laplaciano de uma função escalar $u(x, y, z)$ é a soma das derivadas parciais, não mistas, de segunda ordem, ou seja

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

A notação $\nabla^2 u$ vem do fato de que o laplaciano de uma função escalar u é o divergente do seu gradiente, pois:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \nabla \cdot \nabla u = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

O gradiente de uma função tem uma propriedade muito importante. Como Griffiths (DATA) descreve “o gradiente ∇u aponta na direção do aumento máximo de u .[...] A magnitude $|\nabla u|$ fornece a inclinação (taxa de aumento) ao longo dessa direção maximizadora”. Em outras palavras o vetor gradiente nos dá não só uma direção para onde uma função cresce, mas também a direção em que ela cresce mais rapidamente.

1.5 Equações diferenciais lineares

A equação abaixo representa uma equação diferencial linear ordinária de ordem superior.

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = b(x)\tag{1.10}$$

onde, $a_n(x)$ não necessariamente é nulo. Se $b(x)$ for igual a zero, dizemos que a equação 1.10 é homogênea.

Para $n=1$, a equação acima se resume em:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

Dividindo a equação acima por $a_1(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y &= \frac{b(x)}{a_1(x)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{b(x)}{a_1(x)} - \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y \\ \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \end{aligned}$$

Note que $f(x, y)$ pode ser organizadas em uma razão de duas funções $-M(x, y)$ e $N(x, y)$, sendo $M(x, y)$ e $N(x, y)$ duas outras funções e a equação acima é apresentada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \\ N(x, y)dy &= -M(x, y)dx \\ M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver uma equação de primeira ordem, existe vários métodos: exatas, homogêneas, linear. Mas aqui, iremos apresentar a resolução da equação diferencial dita separável, que consiste na suposição de que as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ possam ser escrita como:

$$M(x, y) = F(x)G(y)$$

e

$$N(x, y) = f(x)g(y)$$

então temos:

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0$$

ou ainda, dividindo por $f(x)G(y)$, temos:

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0$$

Agora, integrando os termos e lembrando que a integral de 0 é igual a uma constante, temos:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx + \int \frac{G(y)}{g(y)}dy = c \quad (1.11)$$

Resolvendo a equação 1.11, teremos a solução da equação diferencial separável.

Vejamos também que na equação 1.10 para $n = 2$ e $b(x) = 0$, teremos:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Se $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ forem constantes, poderemos escrever a_2 , a_1 e a_0 respectivamente. A equação acima, assim será, uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com os coeficientes constantes:

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = 0 \quad (1.12)$$

Cuja solução geral depende das soluções da equação característica.

$$a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0 \quad (1.13)$$

Existe três casos a considerar.

Caso 1: Se as raízes da equação 1.13 forem reais e distintas, isto é, $m_1 \neq m_2$. A solução geral da equação 1.12 será uma combinação linear das funções $y_1(x) = e^{m_1x}$ e $y_2(x) = e^{m_2x}$, ou seja:

$$y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

Caso 2: Se as raízes da equação 1.13 forem reais e repeditas, isto é, $m_1 = m_2 = m$. A solução geral da equação 1.12 será uma combinação linear das funções $y_1(x) = e^{mx}$ e

$y_2(x) = xe^{mx}$, ou seja:

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

Caso 3: Se as raízes da equação 1.13 forem complexas e conjugadas, isto é, $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$. A solução geral da equação 1.12 será uma combinação linear das funções $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ e $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$, ou seja:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

Capítulo 2

Série de Fourier

Agora que vimos toda a parte de cálculo, vamos compreender melhor sobre a representação de séries trigonométricas infinitas, a série de Fourier, no qual recebe esse nome em homenagem a Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) que desenvolveu a teoria da condução do calor em seu trabalho *Théorie analytique de la Chaleur* (Teoria analítica do Calor, 1822).

Existem situações em que é necessário saber quando uma determinada função $f(x)$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

com os coeficientes c_n adequados. Usaremos fortemente a situação acima. Há situações também, como no capítulo 1 do livro de Figueiredo (1977), exercício 1, o autor coloca uma função semelhante para saber se a função pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Para responder a essas questões vamos introduzir algumas noções de série de Fourier, onde vamos investigar em que condições uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podem ser expressas da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

A explicação do porquê utilizar $\frac{1}{2}a_0$ ao invés de somente a_0 ficará explícita mais adiante.

2.1 Convergência uniforme

Uma série numérica do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge quando a sucessão de somas parciais converge, onde o termo geral é:

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_n \quad (\text{reduzida de ordem } n)$$

lembrando que essas duas séries convergem:

$$I - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{com } \alpha > 1 \quad (2.1)$$

$$II - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \quad \text{com } |\lambda| < 1 \quad (2.2)$$

A equação 2.2 é chamada de série geométrica e sua soma equivale a $\frac{\lambda}{(1-\lambda)}$. Contudo, a equação 2.1 com $\alpha \leq 1$ não converge, ou seja, ela é divergente e para $\alpha = 1$ é conhecida como série harmônica. Uma série de funções do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, são funções reais $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ pertencente ao subconjunto I de $\mathbb{R}$ que converge pontualmente caso se, para todo $x_0 \in I$ fixo a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir. É o mesmo que dizer que, dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe um inteiro N , onde depende de ε e de x_0 , como:

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \varepsilon$$

para qualquer $n < m$, assim como $n \geq N$.

Veja alguns exemplos abaixo:

1) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n(x) = \frac{x}{n^2}$ converge uniformemente, se for definida em $[0, 1]$ para:

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2}$$

e com $\varepsilon > 0$, pode-se dizer que um inteiro N depende apenas de ε , assim como $\sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} < \varepsilon$ para $m > n \geq N$.

2) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_1(x) = x$, $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$, $n > 1$ é definida para $0 \leq x \leq 1$ convirja em cada $x \in [0, 1]$, onde a reduzida de ordem n , $U_n(x) = x^n$, convirja para 0, se $0 \leq x \leq 1$, e para 1, se $x = 1$. Esta série não converge uniformemente, pois de acordo com $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e N inteiro, considera-se que $x = 2\varepsilon^{\frac{1}{N-1}}$ em:

$$\sum_{j=N}^m u_j(x) = x^m - x^{N-1}$$

então, $|x^m - x^{N-1}| = |(2\varepsilon)^{\frac{m}{N-1}} - 2\varepsilon|$. Se m for um valor alto o suficiente $(2\varepsilon)^{\frac{m}{N-1}} < \varepsilon$, obtem-se:

$$\sum_{j=N}^m u_j(x) > \varepsilon$$

para $x = 2\varepsilon^{\frac{1}{N-1}}$

Com intuito de verificar que a série do exemplo 1 converja uniformemente, utiliza-se o artifício de majorar a série de funções por uma série numérica que convirja, se faz isso através do chamado *teste M de Weierstrass*. Uma série do tipo $\sum u_n(x)$ converge absolutamente, se a série $\sum |u_n(x)|$ convergir.

Teste M de Weierstrass. Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções do tipo $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um subconjunto I de $\mathbb{R}$. Supõe-se que existam constantes $M_n \geq 0$, como:

$$|u_n(x)| \leq M_n$$

para todo $x \in I$, onde a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Assim, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente e de forma absoluta em I .

Foi usado este critério para reduzir o problema de provar a convergência de uma série de funções para verificar a convergência de uma série numérica. Veja a seguir, algumas proposições para a convergência uniforme:

Proposição 3. *Supondo que as funções u_n sejam contínuas e a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente logo a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ também é contínua. Vamos observar alguns exemplos:*

1) A soma da série $(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2})x = \frac{\pi^2 x}{6}$, no qual é uma função contínua em $[0, 1]$, é $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$

2) A soma da série é uma função do tipo $u(x)$, onde é definida sendo 0 para $0 \leq x < 1$ e 1 para $x=1$, assim a função é descontínua. Neste caso, a função $u_n(x)$ são contínuas, mas a convergência não acontece uniformemente.

Proposição 4. Supondo que as funções $u_n(x)$ contidas em um intervalo I sejam contínuas e deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ das derivadas uniformemente convirja. Supondo ainda que para um determinado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convirja. Assim:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Proposição 5. Vamos supor que uma função u_n seja integrável em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente, então:

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx$$

2.2 Coeficientes de Fourier

Nessa seção, o objetivo será encontrar equações para os valores de a_0 , a_n e b_n em uma função $f(x)$ que é expressa como:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.3)$$

espera-se que os coeficientes a_n e b_n estejam relacionados à função f . Para descobrir qual relação eles têm, supõe-se que a série da equação 2.3 convirja uniformemente. Veja que a função f deve ser contínua, como consequência da proposição ??, deve ter período $2L$ e ser periódica, visto que o período fundamental de $\cos \frac{n\pi x}{L}$ é $2L$, onde também é o período das demais funções seno e cosseno que aparecem na série. Pode-se integrar de $-L$ a L os dois lados da equação 2.3 usando a proposição 4 para obter:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2}a_0 dx + \int_{-L}^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \quad (2.4)$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0(x)_{-L}^L + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)_{-L}^L + b_n \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right)_{-L}^L \right]$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \frac{1}{2} a_0 [L - (-L)] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{L}{n\pi} \sin(n\pi) - \frac{L}{n\pi} \sin(-n\pi) \right) + b_n \left(-\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{L}{n\pi} \cos(-n\pi) \right) \right] \end{aligned}$$

mas $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$, logo:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = a_0 L - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{L}{n\pi} \cos n\pi - \frac{L}{n\pi} \cos n\pi \right)$$

Dessa forma, podemos encontrar valor do coeficiente a_0 por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Partindo da equação 2.3, multiplique ambos os lados pelo termo abaixo e integrando de $-L$ a L :

$$\cos \frac{m\pi x}{L} \quad \text{com } m \in \mathbb{N}^*$$

teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} a_0 \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \int_{-L}^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como feito anteriormente $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ é nulo. Os dois últimos serão resolvidos abaixo e separadamente. Para $m \neq n$, visto que $(m + n)$ e $(n - m)$ são números inteiros e lembrando que:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) + \cos (a + b)]$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{L}{\pi(n-m)} \sin \frac{\pi x}{L} (n-m) \right]_{-L}^L + \left[\frac{L}{\pi(n+m)} \sin \frac{\pi x}{L} (n+m) \right]_{-L}^L \right\} \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(n-m)} \overset{0}{\sin \pi(n-m)} - \frac{L}{\pi(n+m)} \overset{0}{\sin \pi(n+m)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(n-m)} \overset{0}{\sin \pi(n-m)} - \frac{L}{\pi(n+m)} \overset{0}{\sin \pi(n+m)} \right] \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usando o fato de que $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$, temos também que:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L} \right) + \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{-L}{\pi(n-m)} \cos \frac{\pi x}{L} (n-m) \right]_{-L}^L + \left[\frac{-L}{\pi(n+m)} \cos \frac{\pi x}{L} (n+m) \right]_{-L}^L \right\} \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{L}{\pi(n-m)} \cos \pi(n-m) + \frac{L}{\pi(n-m)} \cos -\pi(n-m) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{L}{\pi(n+m)} \cos \pi(n+m) + \frac{L}{\pi(n+m)} \cos -\pi(n+m) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad (2.7)$$

Vejamos agora quando $m = n$.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left(\cos 0 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left[(x)_{-L}^L + \left(\frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L} \right)_{-L}^L \right] \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left[L - (-L) + \frac{L}{2n\pi} \left(\sin 2n\pi - \sin(-2n\pi) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L \quad (2.8)$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) + \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{L} \right)_{-L}^L = -\frac{L}{4n\pi} (\cos 2n\pi - \cos(-2n\pi)) \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad (2.9)$$

A integral do produto dos cossenos iguais, leva a uma igualdade diferente de zero. Então, o que sobra da equação 2.5 é:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = a_n L$$

Portanto:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.10)$$

Por um processo análogo, multiplicando a equação 2.3 pelo termo abaixo e integrando de $-L$ a L :

$$\sin \frac{m\pi x}{L}$$

teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

De forma análoga feita na equação 2.5, segue que $\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} = 0$ pela equação 2.11, visto nas equações 2.7 e 2.9 a integral $\int \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}$ também é nula, quaisquer que sejam m e n . Se $m \neq n$ e lembrando que:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \quad (2.12)$$

temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L} \right) - \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{L}{\pi(n-m)} \sin \frac{\pi x}{L} (n-m) \right]_{-L}^L - \left[\frac{L}{\pi(n+m)} \sin \frac{\pi x}{L} (n+m) \right]_{-L}^L \right\} \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(n-m)} \sin \pi(n-m) \overset{0}{\rightarrow} - \frac{L}{\pi(n-m)} \sin -\pi(n-m) \overset{0}{\rightarrow} \right] \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(n+m)} \sin \pi(n+m) \overset{0}{\rightarrow} - \frac{L}{\pi(n+m)} \sin -\pi(n+m) \overset{0}{\rightarrow} \right] \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

finalmente, para o caso de $m = n$, temos:

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = b_n \int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.14)$$

mas, lembrando que:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad (2.15)$$

temos:

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] dx \quad (2.16)$$

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} [x]_{-L}^L - \frac{1}{2} \left[\frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L} \right]_{-L}^L \quad (2.17)$$

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = L \quad (2.18)$$

Substituindo a equação 2.18 em 2.14, temos:

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = b_n L \quad (2.19)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.20)$$

Em suma, o que acabamos de fazer foi mostrar que se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se for periódica de período $2L$, absolutamente integrável, em cada intervalo limitado e puder ser expandido na forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.21)$$

então, os valores a_n para $n \geq 0$ e b_n para $n \geq 1$ podem ser calculados como nas equações 2.10 e 2.20. Esses coeficientes são chamados de coeficientes de Fourier e nesse caso dizemos que a função f pode ser expandida em série de Fourier.

Obs 1. No texto a gente citou que uma função f é absolutamente integrável, no intervalo de 0 a L , isso quer dizer que:

$$\int_0^L |f(x)| dx < \infty$$

Teorema 1. *Teorema de Fourier: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , dada em 2.21, converge em*

cada ponto x para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$:

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.22)$$

Aplicando as proposições 3 e 4 no cálculo dos coeficientes de Fourier dado pelas equações 2.10 e 2.20, obteremos os seguintes valores:

i) Se f for uma função par, periódica de período $2L$ e absolutamente integrável, temos pela Proposição 1 que $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ é par e que $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ é ímpar. Assim, pela proposição 2 vem que:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

portanto se $f(x)$ puder ser expandida como série de Fourier, teremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \\ f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \end{aligned}$$

Conhecida como série de Fourier em cossenos.

ii) Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$ e absolutamente integrável, temos pela Proposição 1 que $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ é ímpar e que $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ é par. Assim, novamente pela proposição 2 obteremos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Logo a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos, pois:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \end{aligned}$$

Capítulo 3

Modelagem da Equação do Calor

3.1 Equação da difusão

Partindo da definição da biologia para difusão, esta é o processo de transporte de matéria de uma região menos concentrada para outra mais concentrada (TATEISHI, 2010). O exemplo mais comumente utilizado para exemplificar a difusão é a adição de uma gota de corante em uma porção de água, a princípio a coloração do corante se retém apenas a região onde a gota está, mas com o passar do tempo, cada vez mais parcelas da água fica colorida até que toda a água fique homogênea. (MACHADO, 2004) A difusão de alguma substância através de outra é um fenômeno físico muito importante, onde as substâncias envolvidas tendem a alcançar um estado de equilíbrio. Assim, é interessante obter uma equação que descreva os processos difusivos.

As grandezas envolvidas nessa experimentação é a concentração, ou a densidade, da substância que fala em relação a proporção entre a quantidade do que está sendo dissolvido, o corante, e a do que dissolve, a água. Tal concentração varia de acordo com o tempo e posição, podemos assim representar a densidade da seguinte forma:

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) = \rho(x, y, z, t)$$

onde, ρ é a densidade, $\vec{r} = (x, y, z)$ é a parte espacial e t o tempo.

Como descrito por Machado (2004), primeiramente considere um volume V fechado, seja fixo ou não, onde nele é inserido uma substância de densidade ρ , o fenômeno acontece de forma a permanecer constante a quantidade total de substâncias porém com a possi-

bilidade de variação do volume V e de $\rho(\vec{r}, t)$. Considerando uma quantidade pequena de substância, podemos representá-la como ΔQ descrito desta forma:

$$\Delta Q = \rho \Delta V \quad (3.1)$$

onde, ΔQ é a pequena quantidade da substância e ΔV é uma pequena parcela do volume ocupado pela substância. Assim, ambas as grandezas tendem a zero. O volume não é fixo, pois, toma forma de acordo com a difusão da substância como na figura a baixo. O formato em paralelepípedo é para facilitar os cálculos.

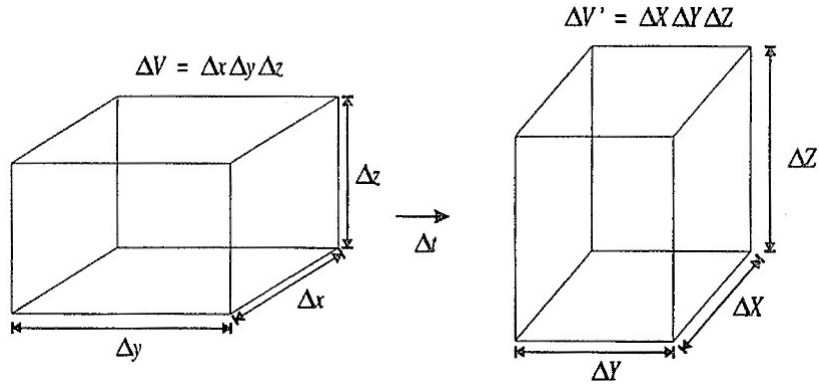


Figura 3.1: Variação do ΔV ao longo do tempo.

A conservação da quantidade de sustância pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \Delta Q = 0 \quad (3.2)$$

substituindo (3.1) em (3.2), temos:

$$\frac{d}{dt} (\rho \Delta V) = 0$$

que resulta em:

$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\Delta V}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

A derivada temporal total de ρ pode ser calculada como na equação 1.4.

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(x, y, z, t)$$

então:

$$\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} \frac{dt}{dt} \quad \uparrow$$

assim, fica:

$$\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.4)$$

que provém de um produto escalar: (GRIFFITHS, 2010)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial\rho}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial\rho}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \right)$$

onde, $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são vetores unitários paralelos aos eixos x , y e z respectivamente. Ainda, se denotarmos o vetor velocidade por a $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, temos:

$$\left(\frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \right) = \frac{d}{dt}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

e a equação (3.4), fica:

$$\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla\rho \cdot \vec{v} \quad (3.5)$$

onde, $\vec{v}$ é a velocidade com que a massa da substância se difunde pela água.

A derivada temporal de ΔV :

$$\frac{d}{dt}\Delta V = \frac{d}{dt}(\Delta x \Delta y \Delta z) = \Delta y \Delta z \frac{d}{dt}\Delta x + \Delta x \frac{d}{dt}(\Delta y \Delta z)$$

isto é:

$$\frac{d}{dt}\Delta V = \Delta y \Delta z \frac{d}{dt}\Delta x + \Delta x \Delta z \frac{d}{dt}\Delta y + \Delta x \Delta y \frac{d}{dt}\Delta z \quad (3.6)$$

onde, $\frac{d}{dt}\Delta x$ é a taxa de variação do comprimento em relação ao tempo. Na qual, pode ser representada pela variação da componente x da velocidade do ponto inicial ao final, visto

que $\frac{d}{dt}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}}$ e $\frac{d(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathbf{x}}$, portanto:

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} - \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathbf{x}} = \Delta\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$$

usando a definição de derivada parcial, temos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_x(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) - v_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_{\mathbf{x}|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} - v_{\mathbf{x}|\mathbf{x}}}{\Delta x}$$

Logo para $\Delta\mathbf{x}$ suficientemente pequeno, podemos considerar:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v_{\mathbf{x}|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} - v_{\mathbf{x}|\mathbf{x}}}{\Delta x} \Rightarrow \Delta v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Rightarrow \frac{d}{dt} \Delta x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \quad (3.7)$$

Analogamente, para as demais direções, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \Delta y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \Delta z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta z \quad (3.8)$$

Substituindo as equações 3.7 e 3.8 em 3.6 em todas as derivadas, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta V &= \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_y}{\partial y} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \Delta V &= \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

ainda:

$$\frac{d}{dt} \Delta V = \Delta V \quad \nabla \cdot \vec{v} \quad (3.9)$$

Note que estamos considerando o divergente de $\vec{v}$ apenas em suas coordenadas espaciais.

Substituindo as equações 3.5 e 3.9 em 3.3, temos:

$$\Delta V \left[\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} \right] + \rho \Delta V \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.10)$$

sabendo que:

$$\nabla \cdot [\rho \vec{v}] = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

temos: (MACHADO, 2004)

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \vec{v}] = 0 \quad (3.11)$$

A corrente de difusão $\vec{j}$ é a quantidade de substância que passa através de uma certa área por unidade de tempo. Podendo ser expresso por:

$$\vec{j} = \rho(\vec{r}, t) \vec{v} \quad (3.12)$$

Substituindo a equação 3.12 em 3.11, temos:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.13)$$

onde, se o termo $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ significa que a densidade aumentou e $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ que diminuiu. Isso é válido para situações em que não há fonte e sorvedouro para modificar a pequena parcela de corante no volume de água, isto é, a quantidade da substância é fixa. O divergente mede o fluxo de uma área delimitada que pode ser aberta ou fechada, e este é diretamente proporcional ao fluxo que se for positivo, o fluxo será para fora da região, se negativo, para dentro.

Para melhor compreensão da relação entre a densidade e o divergente nesta hipótese, vamos considerar o volume v infinitesimal que é parte do volume V total do recipiente, pois a partir dele é possível aplicar para porções cada vez maiores. Através desta região v , acontece o seguinte: inicialmente naquele ponto, a densidade é zero e com o passar do tempo ela vai aumentando, ou seja, a gota de corante vai se espalhando fazendo sua densidade $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ e como o divergente entra na região $\nabla \cdot \vec{j} < 0$. Para uma situação oposta, nós temos exatamente o inverso acontecendo, se naquela região o corante estivesse saindo, as grandezas se comportariam da seguinte forma: $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ e $\nabla \cdot \vec{j} > 0$.

Veja que isso está de acordo com a equação encontrada em 3.13, visto que:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}$$

Como já vimos anteriormente, a difusão tende a acontecer de uma região que tem maior concentração para uma que tem menos concentração. O gradiente descreve a direção e o

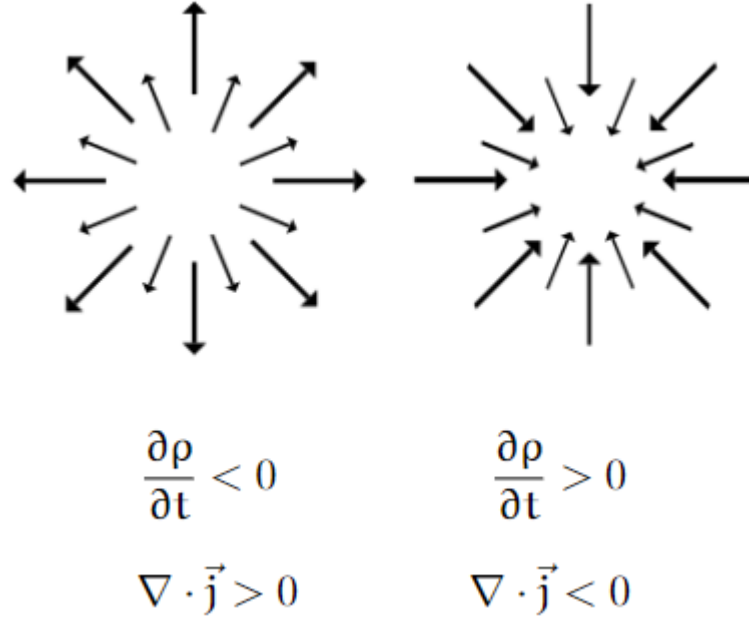


Figura 3.2: Representação de direções de situação convergente e divergente respectivamente.

sentido na qual a função tem seu maior crescimento. Desta forma, podemos relacionar a corrente de difusão $\vec{j}$ com o gradiente de ρ , por:

$$\vec{j} = -D \nabla \rho \quad (3.14)$$

neste caso, D é o coeficiente de difusão. Machado (2004) define que “Esta lei, chamada de Lei de Fick, é uma equação fenomenológica válida para uma grande classe de fenômenos de difusão.”

Substituindo as equações 3.13 em 3.14, temos a equação da difusão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (-D \cdot \nabla \rho) = 0 \quad (3.15)$$

Se o sistema for homogêneo, D será constante e $\nabla \cdot (\nabla \rho) = \nabla^2 \rho$, vem que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D \nabla^2 \rho = 0$$

Para uma análise mais fundamental e simplificada, vamos trabalhar a equação acima com apenas uma dimensão espacial, pois o objetivo do trabalho será estudar a propagação do

calor em uma barra fina. Neste caso, $\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$, donde:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \quad (3.16)$$

3.2 Equação do calor

Analogamente a equação da difusão, temos a equação do calor, pois descreve a situação onde o calor se difunde através de um ou mais sistemas. Esse fluxo ocorre de forma desordenado no sentido para onde ocorre a variação da entropia. Podemos considerar a propagação do calor como "o deslocamento de um fluido" o que faria este fenômeno obdecer a equação da continuidade 3.13, onde, ao invés da função densidade ρ relativa a massa deslocada, teríamos uma função que representa a quantidade de calor por unidade de volume que seria "deslocada", a saber, $q(\vec{r}, t) = \frac{Q}{V}$. Daí, a equação da continuidade ficaria: (GONDAR, 2005)

$$\frac{\partial q(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

que também pode ser escrita por:

$$\frac{\partial q(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \quad (3.17)$$

Com relação a corrente de difusão do calor, podemos escrever matematicamente tal processo através da Lei de Fourier que é análoga a Lei de Fick, mostrada na equação 3.14. Nesse caso, temos que o calor flui de um meio com maior temperatura (mais concentrado) para um meio de menor temperatura (menos concentrado). Pela propriedade do gradiente, sendo $u(\vec{r}, t)$, a função que dá a temperatura na posição $\vec{r}$ e no instante t , temos que:

$$\vec{j} = -k \nabla u(\vec{r}, t) \quad (3.18)$$

esta lei descreve o fenômeno, onde k é a condutividade térmica do material por onde flui o calor, $\vec{j}$ é a corrente de propagação do calor e u é a temperatura do sistema. Assim,

substituindo 3.18 em 3.17, temos:

$$\frac{\partial q(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k\nabla u(\vec{r}, t)) = k\nabla^2 u(\vec{r}, t) \quad (3.19)$$

Por outro lado, a lei do calor específica estabelecer a variação temporal da quantidade de calor por unidade de volume que depende do calor específico c do material, da densidade de massa ρ e da variação temporal da temperatura através da fórmula:

$$\frac{\partial q(\vec{r}, t)}{\partial t} = c\rho \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3.20)$$

Igualando as equações 3.19 e 3.20, temos:

$$K\nabla^2 u(\vec{r}, t) = c\rho \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3.21)$$

isolando $\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 u(\vec{r}, t)$$

e definindo:

$$K = \frac{k}{\rho c}$$

obtemos a equação do calor:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = K\nabla^2 u(\vec{r}, t)$$

onde K é a difusibilidade térmica. A equação acima para uma dimensão, que é a porposta de estudo no presente trabalho, é:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

Capítulo 4

Conclusão

4.1 Resolução da equação do calor

Nosso objetivo agora será resolver a equação do calor unidimensional.

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

para vermos qual seria a cara da função $u(\vec{r}, t)$. Para isso, utilizaremos o método de separação de variável para EDO que consiste em supor que a equação 4.1 possui uma solução do tipo:

$$u(\vec{r}, t) = F(x)G(t) \quad (4.2)$$

Ao substituir 4.2 em 4.1, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(F(x)G(t)) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F(x)G(t)) \Rightarrow F(x) \frac{\partial G(t)}{\partial t} = KG(t) \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

como $G(t)$ depende apenas de t e $F(x)$ depende apenas de x , as derivadas na equação 4.3 são na verdade, ordinárias.

$$F(x) \frac{dG(t)}{dt} = KG(t) \frac{d^2 F(x)}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{KG(t)} \frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{F(x)} \frac{d^2 F(x)}{dx^2}$$

Note que o 1º membro da equação acima depende apenas de t e o 2º membro depende apenas de x . A única solução possível para que uma função que dependa somente de

t seja igual a uma função que dependa somente de x é se ambas forem uma constante. Digamos que:

$$\frac{1}{F(x)} \frac{d^2}{dx^2} = \sigma \quad \text{e} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{KG(t)} \frac{dG(t)}{dt} = \sigma \quad (4.5)$$

Podemos escrever a equação 4.4 como:

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \sigma F(x) \Rightarrow \frac{d^2 F(x)}{dx^2} - \sigma F(x) = 0 \quad (4.6)$$

Note que ela é uma EDO linear de 2ª ordem com coeficientes constantes, tal qual a equação 1.12. Sua equação característica é:

$$m^2 - \sigma = 0$$

logo:

$$m^2 = \sigma \Rightarrow m = \pm\sqrt{\sigma} \quad \text{se} \quad \sigma > 0$$

o que nos dará:

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

Agora, se $\sigma = 0$, então $m = 0$ e a solução da EDO 4.6 será:

$$F(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} = c_1 + c_2 x$$

E, se $\sigma < 0$, então $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$, daí:

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda^2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda^2} = \pm\lambda i$$

assim, as raízes são:

$$m_1 = \lambda i \quad \text{e} \quad m_2 = -\lambda i$$

daí, teremos a solução:

$$F(x) = c_1 e^{0x} \sin \lambda x + c_2 e^{0x} \cos \lambda x$$

$$F(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

Vamos agora resolver a equação 4.5 que pode ser escrita como:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \sigma K G(t) \Rightarrow \frac{dG(t)}{G(t)} = \sigma K dt \Rightarrow \frac{1}{G(t)} dG(t) - \sigma K dt = 0$$

A equação acima é separável e resolveremos como a equação 1.11.

$$\int \frac{1}{G(t)} - \int K \sigma dt = c$$

$$\ln(G(t)) - K \sigma t = c$$

$$\ln(G(t)) = c + K \sigma t$$

$$G(t) = e^{c + K \sigma t}$$

$$G(t) = e^c \cdot e^{K \sigma t}$$

e chamando $e^c = c_3$, temos:

$$G(t) = c_3 e^{K \sigma t}$$

Assim, as possíveis soluções para a equação 4.1 são:

I - para $\sigma > 0$

$$u(x, t) = (c_1 e^{\sqrt{\sigma} x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma} x}) c_3 e^{K \sigma t} \quad (4.7)$$

II - para $\sigma = 0$

$$u(x, t) = (c_1 + c_2 x) c_3 e^{K \sigma t} = (c_1 + c_2 x) c_3 \quad (4.8)$$

III - para $\sigma = -\lambda^2 < 0$

$$u(x, t) = (c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x) c_3 e^{-K \lambda^2 t} \quad (4.9)$$

4.2 Condução do calor numa barra com extremidades mantidas a 0 °C

Agora nosso objetivo será estudar a propagação do calor em uma barra fina de comprimento L com as laterais isoladas termicamente, podendo haver troca de calor apenas nas extremidades, que por sua vez, estão mantidas a temperatura a 0 °C.

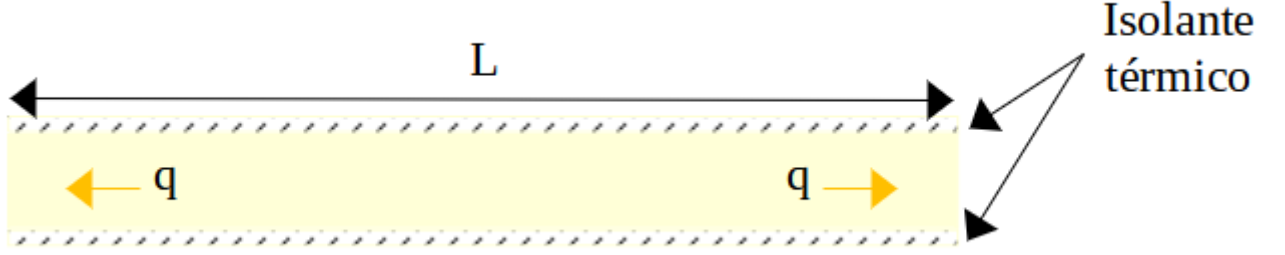


Figura 4.1: Corte longitudinal de uma barra fina.

Vamos supor que exista uma função $f(x)$ que é a temperatura inicial ao longo da barra. Matematicamente, a propagação do calor deve satisfazer a equação do calor unidimensional.

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial x^2}$$

Visto que as laterais não trocam calor, o mesmo tem propagação longitudinal. Podemos escrever o seguinte problema de valor inicial e de contorno.

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad (4.11)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.12)$$

Vimos na seção anterior que temos três soluções possíveis para a equação 4.10. Assim, aplicaremos as condições iniciais nelas.

Para a equação 4.7, temos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \\ (c_1 e^{\sqrt{\sigma}0} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}0}) c_3 e^{K\sigma t} &= 0, \quad \forall t > 0 \\ (c_1 + c_2) c_3 e^{K\sigma t} &= 0, \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

logo, $c_1 + c_2 = 0$ ou $c_3 = 0$. Se $c_3 = 0$, então $u(x, t) = 0$, e portanto, apesar de ser uma solução, ela não é interessante para nós, logo:

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{4.13}$$

Temos também que:

$$(c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L}) c_3 e^{K\sigma t} = 0$$

mais uma vez, se $c_3 \neq 0$, então:

$$c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0 \tag{4.14}$$

As equações 4.13 e 4.14 nos geram o sistema :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0 \end{cases}$$

daí, multiplicando na 1ª equação do sistema por -1 e na 2ª, por $e^{\sqrt{\sigma}L}$, temos:

$$\begin{cases} -c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 e^{2\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^0 = 0 \end{cases}$$

assim, fazendo o somatório das equações do sistema, fica:

$$c_1 e^{2\sqrt{\sigma}L} - c_1 = 0 \Rightarrow c_1 (e^{2\sqrt{\sigma}L} - 1) = 0$$

como que $\sigma > 0$, logo:

$$\sqrt{\sigma} > 0 \Rightarrow 2\sqrt{\sigma}L > 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\sigma}L} > 1 \Rightarrow e^{2\sqrt{\sigma}L} - 1 > 0$$

logo, $c_1 = 0$, mas:

$$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

portanto, $u(x, t) \equiv 0$. Mais uma vez, esta não é uma solução interessante.

Aplicando as condições iniciais para a equação 4.8.

$$u(0, t) = 0$$

$$c_3(c_1 + c_2) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

assim como anteriormente, vamos supor $c_3 \neq 0$, então $c_1 = 0$, assim:

$$u(L, t) = 0$$

$$c_3(c_1 + c_2 L) = 0$$

$$c_3 c_2 L = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

isto é, $c_1 = c_2 = 0$ e $u(x, t) \equiv 0$.

Só nos resta então a opção de $\sigma = -\lambda^2 < 0$, donde:

$$u(0, t) = 0, \quad \forall t > 0$$

$$(c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0) c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t} = c_2 c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t} = 0, \quad \forall t > 0$$

Mais uma vez, se $c_3 \neq 0$ segue que $c_2 = 0$. donde:

$$u(x, t) = (c_1 \sin \lambda x) c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t}$$

temos também de:

$$u(x, t) = 0$$

$$c_1 \sin \lambda L c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t} = 0$$

Se $c_1 = 0$, então $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow u(x, t) \equiv 0$ para que isso não ocorra, devemos ter:

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \sin \lambda L = \sin n\pi \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Isso significa que para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$u_n(x, t) = c_3 c_1 \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

fazendo as constantes $c_3 \cdot c_1 = c_n$, fica:

$$u_n(x, t) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

Obs 2. Não precisamos considerar $n \in \mathbb{Z}$, pois, $u_n(x, t)$ e $u_{-n}(x, t)$ se diferem uma da outra somente pelo sinal.

$$u_n(x, t) + u_{-n}(x, t) = (c_n - c_{-n}) \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

fazendo as constantes $c_n - c_{-n} = C_n$, fica:

$$u_n(x, t) + u_{-n}(x, t) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

Nota-se que ainda n só pode ser diferente de zero. Portanto:

$$u_n(x, t) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}, \quad \text{com } n \geq 1$$

Note que se $u_1(x, t)$ e u_2 são soluções da equação 4.10, então $a_1 u_1 + a_2 u_2$ também é

solução de 4.10, pois, u_1 e u_2 são soluções, logo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

daí, fazendo $v = u_1 + u_2$, então:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u_1 + u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 + u_2) = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Portanto, v satisfaz a equação 4.10. Em geral, se $u_1, u_2, \dots, u_n$ são soluções de 4.10, então:

$$\sum_{n=1}^N = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

também é solução de 4.10. Mais ainda, se a série $\sum_{n=1}^N = u_n(x, t)$ convergir e $u_n(x, t)$ for solução de 4.10 $\forall n \geq 1$, então:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2}$$

também é solução de 4.10. Esta é uma boa candidata a ser solução geral da nosso problema de valor inicial 4.10-4.12. Note que essa satisfaz 4.11, visto que:

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi 0}{L} e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

e

$$u(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi L}{L} e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Para que ela satisfaça 4.12, devemos ter:

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 \pi^2 K 0 / L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

Veja que $f(x)$ é um somatório de funções senos. No mínimo, devemos esperar $f(x)$ ímpar e periódica de período $2L$ que é o período fundamental de $\sin \frac{n\pi x}{L}$ e é período de todas as outras do somatório. Se $f(x)$ for seccionalmente derivável então a sua série de Fourier converge e por ela ser ímpar então sua série de Fourier é de senos, o que faz sentido visto que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

e nesse caso, os valores c_n que estamos procurando devem ser os coeficientes de Fourier na expansão da série de senos.

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

como vimos no fim do capítulo 2.

Referências Bibliográficas

FIGUEIREDE, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Projeto Euclides, 2007.

GONDAR, L. G. *Iniciação à modelagem matemática*. [S.l.]: Instituto de Matemática - UFRJ, 2005.

GRIFFITHS, D. J. *Etrodinâmica*. [S.l.]: Pearson Universidades, 2010.

GUIDORIZZI, H. L. *Um CUrso de Cálculo*. [S.l.]: Editora LTC, 2001.

MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas à Física*. [S.l.]: Editora UEPG, 2004.

TATEISHI, A. A. *Desenvolvimento do Conceito de Difusão: De Fourier ao Modelo de Pente*. 2010. Disponível em: <<http://repositorio.uem.br:8080/jspui/bitstream/1/2672/1/000182446.pdf>>.