



Ministério da Educação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
Campus São Raimundo Nonato
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA

**O USO DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO NO INSTITUTO
FEDERAL DO PIAUÍ CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO**

JONATHAS OLIVEIRA BRAGA

São Raimundo Nonato – PI

Abril 2016

JONATHAS OLIVEIRA BRAGA

**O USO DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO NO INSTITUTO
FEDERAL DO PIAUÍ CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí, campus São Raimundo
Nonato, como requisito para obtenção do
grau de licenciado em Matemática sob
orientação do Prof. MSc. Fábio Barbosa de
Oliveira e coorientação do Prof. Ronnyere
Cardoso Oliveira.

São Raimundo Nonato – PI

Abril 2016

A Floraci de Sousa Oliveira,
Clarismundo Batista de Oliveira (in memoriam),
Luzia Oliveira da Rocha,
Iranilde Oliveira de Farias,
Valdemar Dias de Farias e
Rafael Oliveira Braga (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Não me sentiria digno de concluir este momento tão importante da minha vida, sem antes agradecer a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para tal.

Antes de tudo, agradeço a Deus, força maior que rege o universo, força a qual acredito veementemente.

A minha família que nunca poupou esforços para que a educação sempre estivesse em primeiro lugar, mesmo com todas as dificuldades impostas em nossas vidas.

Aos meus colegas de curso de todas as turmas, pela amizade e companheirismo ao longo de todos esses anos de curso. Pela força nos momentos em que o peso das disciplinas pairavam sobre os nossos ombros, pelas horas reunidas em prol dos estudos e pelas horas reunidas em prol do sucesso individual ou do grupo.

Dirijo também meus agradecimentos a uma família muito especial, a família jurema, pessoas com as quais convivo há mais de quatro anos. Foram momentos de acolhimento, união, diversão, polêmicas, mas acima de tudo foram momentos de muito aprendizado e construção de personalidade. Obrigado meus historiadores, biólogos, cientistas da natureza, contadores, geógrafos, pedagogos, arqueólogos, matemáticos e técnicos em informática, turismo e enfermagem.

Agradeço a todos os professores que participaram dessa jornada desde os tempos de creche até a concretização deste sonho.

Ao meu orientador e meu coorientador pela ajuda nesta tarefa.

Aos meus amigos da vida toda e minha namorada, pelo incentivo e compreensão.

Àqueles que acreditaram e àqueles que duvidaram, o meu muito obrigado.

Nenhuma investigação feita pelo homem pode ser
chamada realmente de ciência se não puder ser
demonstrada matematicamente.

Leonardo da Vinci.

RESUMO

O presente instrumento de pesquisa, procurou saber a possibilidade de inserção das demonstrações no ensino básico e sua utilização nos cursos de formação de professores, sob o ponto de vista de alunos e professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí- campus São Raimundo Nonato. Fizemos uma análise bibliográfica, análise institucional e discussões que nos levaram à concepção da importância das demonstrações em Matemática. Conhecemos os pontos de vista dos alunos e professores do IFPI, bem como suas dificuldades na hora de ensinar e de aprender demonstrações. Produzimos ainda um material crítico-reflexivo com o intuito de que sirva de base para um estudo inicial sobre demonstrações, de maneira a facilitar o aprendizado das mesmas, sempre com a intenção que o ensino da Matemática seja baseado no rigor científico e na lógica matemática sem contudo carregá-la de abstrações. Procuramos neste sentido contribuir para uma melhor compreensão do uso das demonstrações e para uma melhoria no ensino de Matemática em níveis superior e básico.

Palavras-chave: Demonstrações, ensino, aprendizagem, formação de professores, Matemática.

ABSTRACT

This instrument of research, sought the possibility of insertion of statements in the basic education and its use in training courses for teachers, from the point of view of students and teachers of the Degree in Mathematics from the Federal Institute of Piauí- campus are Raimundo Nonato. We made a bibliographic analysis, institutional analysis and discussions that led us to the conception of the importance of the demonstrations in mathematics. We know the views of students and teachers IFPI and their difficulties in time to teaching and learning statements. We produce also a critical-reflective material in order to provide a basis for an initial study on demonstrations, in order to facilitate the learning of it, always with the intention that the teaching of mathematics is based on scientific rigor and mathematical logic without but carries it abstractions. We seek in this sense contribute to a better understanding of the use of statements and for an improvement in mathematics teaching in higher and basic levels.

Keywords: Demonstrations, teaching, learning, teacher training, mathematics.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	9
2. Metodologia.....	12
3. Discussões sobre formação de professores.....	14
3.1 A formação de professores sob a perspectiva do IFPI-SRN.....	17
4. Falando de demonstrações.....	19
4.1 Alguns termos usados em demonstrações.....	22
4.2 Símbolos utilizados com frequência em Matemática.....	24
4.3 Um pouco de lógica matemática.....	25
4.4 Escrevendo uma boa demonstração	27
5. Estudando os métodos de demonstração.....	28
5.1 Demonstração direta.....	28
5.2 Demonstração por contraposição.....	29
5.3 Demonstração por casos/exaustão.....	30
5.4 Principio da Indução Finita.....	31
5.5 Demonstração por redução a um absurdo.....	34
6. Análise sobre os pontos de vista de alunos e professores sobre as demonstrações.....	36
6.1 Ponto de vista dos alunos sobre as demonstrações.....	36
6.2 Ponto de vista dos professores sobre as demonstrações.....	41
7. Conclusões.....	44
Referências.....	46
Apêndices.....	49
Anexo 1.....	53

1. INTRODUÇÃO

Na busca por um ensino de Matemática cada vez mais sólido nos deparamos com vários problemas, desde os mais simples até os mais complexos, sendo que todos merecem ser discutidos. Falar de dificuldades no ensino de Matemático não é fácil, porém torna-se necessário uma vez que este ramo do conhecimento tem importância fundamental para o desenvolvimento das ciências e para o progresso do mundo globalizado.

Rodrigues (2014, p.2) enfatiza que “Falar em educação de uma maneira restrita é uma tarefa um pouco complexa, até porque a abrangência desse termo engloba a família, escola, trabalho, religião, aspecto sociocultural e alguns outros”. Por outro lado, julgamos necessário discutir esses problemas como uma forma de entendê-los e procurarmos soluções cabíveis.

Uma vez inseridos na busca pela consolidação de um bom ensino de matemática e das dificuldades apresentadas nesse contexto, nos deparamos com o ensino das demonstrações. Ao notar que durante o curso de Matemática muitos alunos tem dificuldades com as mesmas, nos propusemos a realizar este estudo.

A proposta surgiu também de uma inquietação particular, que surgiu ao ingressar no ensino superior e sentir-se envolvido em situações matemáticas em que o uso de fórmulas e o pensamento empírico já não eram suficientes para resolver os problemas propostos. Na graduação foi possível notar que a matemática ensinada nos currículos da educação básica está aquém da matemática proposta nos programas e da que necessitamos para um estudo aprofundado nesta relevante área do conhecimento.

Ao trabalhar sobre este tema, notamos a falta de habilidade de alguns alunos dos cursos de licenciatura e até mesmo de professores da educação básica e superior na hora de lidar com as demonstrações. Surgem dúvidas quanto ao uso de alguns termos, e quanto ao significado de muitos deles.

Quando isso ocorre, a tendência é que haja um certo receio e muita dificuldade na hora de demonstrar um fato na linguagem matemática. Diante dessas dificuldades, muitos chegam a resultados não satisfatórios no que se refere ao rigor matemático, e em casos bem mais críticos chegam a abandonar essa prática.

A ideia em discorrer sobre as demonstrações surge da inquietude de ver o ensino da matemática, muitas vezes, resumido na decoreba de fórmulas com os alunos sendo levados incessantemente a ficar repetindo de forma desenfreada um certo método sem saber o motivo,

sem conhecer o estudo por trás daquela fórmula, sem ser levado a construir um pensamento próprio acerca do problema a ser resolvido.

Entende-se aqui que não é interessante nem tão pouco necessário estar a todo tempo fazendo demonstrações em sala de aula, mas sim que é necessário que alunos e professores saibam que elas existem e saibam como fazê-las no momento oportuno. Acredita-se que, as discussões que permeiam o campo da educação devem sempre levar em conta todos os envolvidos, desde alunos, professores, comunidade e gestão escolar.

Por acreditar que uma boa formação profissional ajuda na qualificação do professor e influi diretamente na qualidade do seu trabalho, estudamos neste instrumento de pesquisa a formação de professores de matemática no IFPI campus SRN, mas não sobre qualquer ponto de vista, baseamo-nos em saber como os futuros profissionais da área estão sendo formados para trabalhar com as demonstrações.

O interesse consistiu também em saber a opinião dos formadores a respeito da problemática: se é importante trabalhar a matemática sob este enfoque e se isso é relevante para o ensino de forma geral, ou seja, procuramos saber se as demonstrações podem ser inseridas também no ensino básico e se elas podem ajudar a desenvolver melhor o aprendizado dos alunos.

Partindo desse ponto de vista buscamos conhecer os personagens da nossa pesquisa. Quem são, o que pensam a respeito do tema, como o abordam e, sobretudo, o que sabem sobre ele. Vale informar que objetivo aqui não foi somente analisar informações sobre alunos e professores, isso por que não achamos pertinente apenas apontar falhas. O desejo consistiu em contribuir para o processo de formação dos leitores.

Assim ao longo desta obra procuramos produzir material que sirva de apoio para um estudo inicial sobre demonstrações, desde conceitos básicos até alguns exemplos exploratórios de métodos a respeito do tema.

Ao desenvolvermos este trabalho almejamos que os leitores não apenas viessem a conhecer alguns tipos de demonstrações, ou mesmo aplicações destas, mas que chegassem a conhecer um pouco mais sobre a construção de uma boa demonstração, além é claro, da sua importância na formação de professores para a educação básica. No desenvolvimento dessa obra não foram apenas mostrados os tipos de demonstrações mais utilizados, fizemos uma análise sobre o conhecimento dos alunos da licenciatura em matemática acerca do assunto, bem como a visão dos professores a respeito da problemática.

Por entendermos que as demonstrações são de fundamental importância para a compreensão e desenvolvimento da Matemática, procuramos fazer com que no decorrer deste registro, alunos da graduação em matemática e, por que não, professores de licenciatura e também da educação básica, conhecessem um pouco mais do universo das demonstrações matemáticas, a sua estrutura e os termos empregados. Para tal, encontramos respaldo nas palavras de Freitas (2011, p.1), em que para este:

Mesmo nos níveis elementar e médio é proveitoso desenvolver nos alunos o gosto pela argumentação em geral e pela demonstração como elemento central da própria matemática, como aliás vem referido de forma muito clara nos programas. Sem deduções, a matemática pode tornar-se uma simples coleção de resultados interessantes e úteis, mas desconexos, sem uma visão clara de quais são os pontos de partida e quais as conclusões que deles se podem tirar.

As conclusões obtidas com a realização deste trabalho ajudaram a compreender melhor o uso das demonstrações no ensino, sob o ponto de vista de alunos e professores da graduação. Conhecemos um pouco melhor as funções de uma boa demonstração e sob qual perspectiva podemos usá-la no ensino básico. Espera-se que este registro crítico-reflexivo sirva de incentivo para os educadores em Matemática continuem com as reflexões a este respeito, almejando sempre o melhor para seus alunos e para a educação em geral.

2. METODOLOGIA:

A presente pesquisa foi desenvolvida através de análise bibliográfica em livros e artigos científicos e aplicação de questionários com alunos e professores do ensino superior do curso de Matemática do Instituto Federal do Piauí *campus* São Raimundo Nonato.

A análise bibliográfica foi fundamental para sabermos o ponto de vista de outros estudiosos no ensino de Matemática, para a partir das reflexões por eles estabelecidas fazermos nossas considerações a respeito do tema. A aplicação de questionários fez-se necessária para conhecer melhor a concepção dos alunos e professores a respeito da problemática desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.

Foram aplicados 20 (vinte) questionários aos discentes de Matemática dos módulos IV, VI e VIII e 6 (seis) questionários aos professores que lecionam no curso de Matemática e também no ensino médio, do Instituto Federal do Piauí *campus* São Raimundo Nonato.

As turmas foram escolhidas por serem compostas por alunos com uma certa experiência no curso, o que nos leva ao entendimento de que já tenham passado por várias experiências na licenciatura. Os questionários aplicados continham 11 (onze) questões subjetivas relacionadas ao conhecimento que os graduandos possuem a respeito das demonstrações.

Resolvemos questionar os professores por estes serem peça fundamental na formação dos futuros docentes em Matemática na nossa região e pelo conhecimento que os mesmos tem a respeito dos conteúdos específicos da matemática e sobre a formação de professores.

Dos questionários entregues aos alunos, apenas 15 (quinze) foram devolvidos para análise, tal fato não comprometeu o andamento da pesquisa, pois a quantidade de alunos estudada representa uma quantidade significativa do total de matriculados nos módulos supracitados.

Dos seis professores indagados, cinco contribuíram com a sua visão a respeito da problemática e foram de fundamental importância para a confecção deste material.

Além dos questionários, foram estudados livros e artigos de autores que versam sobre essa problemática, dentre os quais *Um convite à Matemática e manual de redação Matemática* de Daniel Cordeiro de Moraes Filho foram de leitura imprescindível para a realização deste trabalho, ajudando desde a compreensão de aspectos importantes sobre as demonstrações, até a redação do nosso texto.

Os dados obtidos foram detalhados ao longo deste trabalho, procurando a cada capítulo analisar as situações que permeiam o campo do saber, avaliando discussões a respeito das demonstrações e sobretudo propondo formas de melhorar a aprendizagem.

3. DISCUSSÕES SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES:

Uma vez que buscamos entender se é possível ensinar demonstrações na educação básica, se esse ensino é indispensável no ensino superior e preocupados em saber como o ensino de Matemática ocorre no contexto atual, não poderíamos começar este trabalho sem dedicar um capítulo às discussões que envolvem a qualificação dos profissionais responsáveis pelo ensino.

Partimos da ideia de que discutir sobre a formação de professores é imprescindível para discutirmos o nosso sistema de ensino procurando maneiras de consolidá-lo, Santos e Rosa (2009, p.3) registram que;

É fundamental que os formadores de professores de matemática compreendam que além das suas pesquisas específicas em suas áreas de atuação, é essencial tomarem o ensino de matemática como um objeto de estudo. Não temos aqui a inocência e nem tão pouco a intenção de sugerir que os pesquisadores da matemática pura minimizem suas pesquisas, mas é necessário que tenham a compreensão dos seus papéis de pesquisadores-professores.

Atualmente muito se fala em qualidade de ensino de maneira geral e muito se indaga sobre as dificuldades em ensinar e aprender Matemática, até mesmo porque, o aprendizado em Matemática é importante inclusive para aqueles que não querem conhecê-la profundamente, Campos (1994, p. 3) ressalta que:

A Educação Matemática é uma parte essencial da educação, tão essencial como a leitura e a escrita, mesmo para aqueles alunos que não pretendem avançar em Matemática como uma ciência. Muitos de seus conceitos básicos são fundamentais também em outras ciências e importantes no trabalho e na vida diária.

Observa-se por parte da maioria dos alunos um grande desinteresse pelo aprendizado de Matemática. Notoriamente ao passo que as crianças evoluem de série perde-se todo o encantamento pela disciplina, a mesma vai se encorpando e exigindo dos docentes um olhar mais perspicaz a respeito dos conteúdos e das formas de assimilação destes. Para, Soares (2004, p. 1):

Essas atitudes negativas parecem estar associadas a um menor rendimento na disciplina de Matemática à medida que a escolaridade avança, podendo estar associada à mudança da formação dos professores, dos métodos de ensino utilizados e da relação professor x aluno.

A figura do professor segundo Bristot (2006, p. 8) tem a tarefa de “preparar o aluno para a vida, deixá-lo com bagagem necessária para enfrentar novos desafios”. Uma vez que o professor possui um papel fundamental como promotor do processo de aprendizagem ou como organizador do ambiente pedagógico, analisar o seu papel é imprescindível para se entender a problemática do ensino-aprendizagem de Matemática inclusive no contexto das demonstrações.

Para Muniz (2007) o professor deve propor situações problema para proporcionar ao aluno a construção do conhecimento matemático, para o autor:

Propor situações-problema deve significar a oferta de situações de desafio geradoras de desestabilização afetiva e cognitiva, que façam com que a criança se lance à aventura de superação da dificuldade proposta pelo educador e, assim, que realize atividades matemáticas (Muniz 2007, p.37).

Vivemos numa época de grande distanciamento entre alunos e matemática, uma boa prática docente é de suma importância no momento em que se procura estreitar essa relação, logo o professor como mediador do processo de conhecimento, deve constantemente analisar o seu papel de maneira a tornar a relação aluno-matemática a mais harmoniosa possível, despertando no aluno o gosto em aprender matemática, segundo Selbach (2010, apud GABINO 2013, p. 4):

Cabe ao professor tornar os conteúdos conceituais com que trabalha algo interessante, novo, surpreendente, colorido, grande, criativo, desafiador, principalmente quando trabalha com alunos mais novos que ainda não agregam razões externas (medo de uma nota baixa e outros medos) para sua atenção”.

Uma grande preocupação no que se refere ao papel do professor é a sua formação, não só a formação universitária, mas sua formação continuada, visto que o mesmo não deve se prender apenas às técnicas que aprendeu na faculdade, ao tentar promover um ensino de qualidade o docente deve constantemente atualizar-se, procurar algo inovador e que dê significado ao aprendizado de sua disciplina.

Lima (2012, p. 2) ressalta que, “o profissional da educação evolui suas práticas de ensino e sua atuação no meio escolar à medida que busca aprimoramento da mesma, com o que chamamos de formação continuada”. Segundo Alencar (2013, p. 2):

Observa-se que, na maioria das escolas, há profissionais que não estão preocupados com o ensino-aprendizagem dos alunos, perpetuando metodologias tradicionais. Devido a esse ensino, os docentes não buscam meios de planejar novas metodologias e objetivos que norteiam um ensino de qualidade, nem procuram se qualificar para que possam repassar a seus alunos segurança e domínio do que está sendo estudado.

Cabe destacar que o professor não é o único responsável pelas falhas ou pelo sucesso no processo de ensino-aprendizagem, deve-se também dar atenção especial aos alunos, estes por sua vez geralmente tendem a se desinteressar por alguma atividade quando não entendem seu significado, e com o passar do tempo o que se observa é que os docentes estão um tanto quanto dispersos, ou seja, não dão a devida atenção aos estudos, nesse caso recorre-se a D’Ambrósio (2010), pois não basta ensinar se os alunos não se interessam o suficiente.

É louvável que ao falarmos na relação professor-aluno, façamos um estudo aprofundado da postura do docente frente ao desinteresse dos alunos, pois se presume que mais importante

que investigar as causas de um determinado problema, é refletir como cada agente se posta diante dos desafios impostos pelo mesmo. Logo, discutir como o professor pensa a sua formação e reflete sobre sua profissão é um importante foco de estudo para desmistificar o processo de ensino-aprendizagem.

Imbernón (2011, p. 42) enfoca que “o professor não deve refletir unicamente sobre sua prática, mas sua reflexão atravessa as paredes da instituição para analisar todo tipo de interesses subjacentes à educação, à realidade social, com o objetivo concreto de obter a emancipação das pessoas”.

Sobre essa análise a respeito da formação de professores, entendemos ser importante conhecer como está essa formação no que diz respeito às demonstrações em Matemática, e o entendimento sobre o uso dessa prática no ensino básico. São muitas as discussões a respeito da introdução das demonstrações no ensino básico, e nem todos concordam com essa prática alegando que a mesma exige rigor e níveis de abstração que somente podem ser alcançados por estudantes do ensino superior.

Vale ressaltar que os estudiosos que defendem essa prática, a defendem desde que seja usada com cuidado e com a função apenas de desenvolver o raciocínio dos alunos e tirá-los da zona de conforto que muitas vezes os levam a apenas acreditar nas fórmulas e conceitos que lhes são expostos, evitando assim o uso exacerbado de termos e mecanismos abstratos.

Neste ponto usamos as palavras Sales e Pais (2010, p.4) para justificar o uso das demonstrações com a devida cautela, para estes;

A demonstração tem uma grande contribuição para a aprendizagem da Matemática, mas que essa contribuição somente se efetiva quando são elaboradas atividades de tal modo que a demonstração seja a culminância de um processo. A demonstração como ponto de partida, ou como finalidade improrrogável, transparece um caráter impositivo. Ela encerra abruptamente o assunto em um contexto social em que o debate é valorizado produzindo a impressão de que a Matemática acontece na contramão do contexto histórico em que vivemos.

No Brasil o ensino de demonstrações para alunos que ainda não chegaram a um curso superior de matemática não é tão utilizado como em outros países, Pietropaolo (2005 p. 71) nos traz que os debates a este respeito tem sido mais intensos em países como, Inglaterra, Estados Unidos, França e Itália.

Entendemos que uma vez ocorridas ideias dispares a respeito do uso das demonstrações é necessário que ajam discussões, no sentido de entender melhor os pontos de vista, os prós e os contras, para enfim termos uma direção a seguir, ou ficaremos propensos a deixar de usar uma ferramenta de ensino com medo da abstração que a mesma pode trazer. Entendemos que

uma vez existindo as discussões podemos procurar uma maneira de conciliar o uso das demonstrações no ensino básico às práticas já existente e utilizadas atualmente.

Destacamos que um bom ensino passa pela boa capacitação do profissional, assim não podemos deixar de abordar a temática a partir desse ponto de vista, para (SANTOS, M., 2013, p.3)

O mérito das demonstrações de teoremas no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio passa despercebido, sendo condensado com a falta de capacitação dos professores de Matemática para trabalhar esta ferramenta de grande importância para a construção do conhecimento matemático.

Procuramos ao longo do nosso trabalho, abordar o ensino da Matemática focando na formação de professores e nas discussões que envolvem a prática docente, entrando em contato com alunos e professores visando colher informações relevantes que nos levem a entender este processo tão importante que é o de ensino-aprendizagem.

3.1 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES SOB A PERSPECTIVA DO IFPI-SRN:

O curso de Licenciatura em Matemática Instituto Federal do Piauí integra Núcleo comum, Núcleo de Ensino em Área Específica e Núcleo de Pesquisa e Prática em Docência como componentes curriculares da formação de professores para a área de Matemática e suas Tecnologias, conforme figura a seguir.

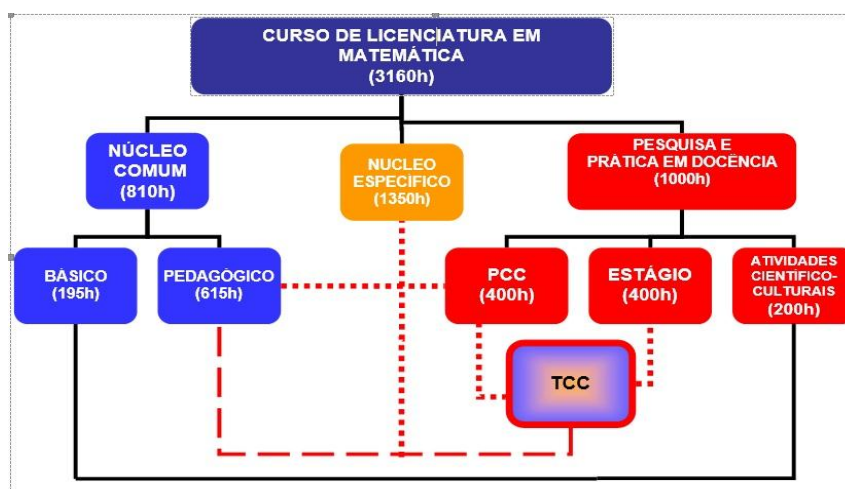


Figura 1 – Desenho Curricular do Curso Licenciatura em Matemática.
Fonte: PPC Licenciatura em Matemática IFPI-SRN

No anexo 1 traremos a matriz curricular do curso com todas as disciplinas e seus pré-requisitos.

Dentre os perfis que os egressos devem possuir ao terminar o curso está o de,

Ter interesse no auto aperfeiçoamento contínuo, curiosidade e capacidade para estudos extracurriculares individuais ou em grupo, espírito investigativo, criatividade e iniciativa na busca de soluções para questões individuais e coletivas relacionadas com o Ensino de Matemática, bem como para acompanhar as rápidas mudanças tecnológicas oferecidas pela interdisciplinaridade, como forma de garantir a qualidade do Ensino de Matemática. (PPC MATEMÁTICA IFPI-SRN, 2014, p.10)

Assim como em outros cursos voltados para a educação, o curso de licenciatura em Matemática do IFPI busca formar profissionais qualificados para o mercado de trabalho, que sejam capazes de acompanhar as mudanças do mundo globalizado e que constantemente sintam a necessidade de inovação, tendo em vista o aprendizado de seus alunos.

Quando falamos em formação de professores e a necessidade do aprendizado em demonstrações lembramos que o egresso do curso de matemática do IFPI, deve “Compreender os conceitos, axiomas, teoremas e princípios da Matemática de forma que possam ser aplicados em modelos de aprendizagem”. (PPC MATEMÁTICA IFPI-SRN, 2014, p.13)

Dentre os objetivos almejados pelo curso está o de formar professores para a educação básica que tenham comprometimento com a aprendizagem dos alunos, que pesquisem e invistam na própria formação, para desenvolver melhor suas atividades no ensino fundamental e ensino médio.

Partimos desta perspectiva para reforçar a necessidade dos professores de todas as áreas e níveis de ensino buscarem a formação continuada, como forma de desenvolverem suas aptidões, e se prepararem para o exercício da profissão docente. O professor que se capacita tem mais condições de capacitar seus alunos, seja para o mercado de trabalho seja para a vida como cidadão.

4. FALANDO DE DEMONSTRAÇÕES:

No estudo da matemática, por muitas vezes nos deparamos com problemas cuja resolução nos leva ao manuseio de fórmulas que por um instante nos parecem mágicas dentro de certo contexto matemático. O que muitos não entendem é que na matemática, assim como na vida, as coisas não surgem de um passe de mágica, muitas vezes no nosso cotidiano somos levados a nos debruçar sobre nossos problemas e é através de erros e acertos que encontramos o caminho para resolvê-los.

Devemos estar cientes que as fórmulas que conhecemos não surgiram do nada. Ao longo do tempo pessoas de diversos pontos do mundo levaram parte de sua vida para formular um conceito matemático, para resolver um problema e para desenvolverem ideias que hoje por diversas vezes não temos entusiasmo ao usar por que já nos são entregues de forma compensada, compactada e resumida a uma fórmula.

Neste capítulo iniciaremos a nossa abordagem sobre as demonstrações, trazendo significados, pontos de vista e sua contribuição para a matemática. Para tal, faremos sempre um diálogo com os autores pesquisados visando uma boa explanação do conteúdo por nossa parte e uma boa compreensão por parte dos leitores.

A palavra **demonstrar** tem origem etimológica no termo latino *demonstrare* e pode ser facilmente associado à palavra **prova**, sendo inclusive usados como sinônimos um do outro por alguns autores. Outros autores porém dão significados distintos aos termos considerando que um tenha mais abrangência que o outro.

Entre os que preferem diferir os termos está Daniel Cordeiro de Moraes Filho, para este, demonstração é “um processo lógico dedutivo, que utiliza as hipóteses para deduzir a tese.” (FILHO, 2014 p.102). Nesse caso a prova não seria tratada como um processo lógico dedutivo, embora possa evidenciar um fato.

Para os que compartilham as ideias de Daniel Cordeiro, a **prova** constitui de uma verdade aceita por um determinado grupo, não sendo necessariamente uma verdade matemática, enquanto a **demonstração** após passar por um rigoroso processo lógico-dedutivo é validada por toda a comunidade científica detentora de conhecimentos sobre a mesma.

Mota e Carvalho definem prova seguindo a mesma linha de raciocínio usada por Cordeiro para definir demonstrações, para os mesmos “provar: é utilizar uma argumentação precisa que convença o leitor de que certa proposição anteriormente enunciada está correta. É

algo essencial para o estabelecimento da verdade matemática. Pode ser realizada direta ou indiretamente”. (MOTA e CARVALHO, 2011, p.2)

Reforçando a ideia daqueles que tratam os termos como sinônimos, Pietropaolo (2005, P.49) nos traz que:

No âmbito exclusivo da Matemática, prova e demonstração são, em geral, sinônimas e não precisariam de adjetivações: se uma prova foi plenamente aceita pela comunidade de matemáticos, então ela teria adquirido o status de rigorosa, embora a noção de rigor tenha sofrido algumas adaptações no decorrer do tempo.

O mais importante é que o leitor não se preocupe ao usar qualquer um dos conceitos por medo de estar errado, o crucial é estabelecer sobre qual ponto de vista trabalhar, aqui não faremos a distinção entre os termos. Assim, pressupõe-se que os mesmos sejam usados como sinônimos, ambos designarão o processo pelo qual se estabelece a veracidade de um fato matemático, por meio da lógica matemática, utilizando-se de artifícios previamente disponibilizados.

Desta forma, achamos importante também trazer as contribuições de Domingues e Iezzi (2003, P.17), os mesmos ressaltam não ser fácil definir o que é uma demonstração, mas que “basicamente, é uma sucessão bem articulada de raciocínios lógicos que permite mostrar que um resultado proposto é consequência de princípios previamente fixados e de proposições já estabelecidas”.

Embora os estudos realizados em alguns artigos nos leve a acreditar que o desenvolvimento das noções de demonstração em matemática tenham surgido na Grécia, devido ao fato de não haver documentos de civilizações mais antigas que venham contradizer esse fato, ninguém sabe ao certo quando surgiram as primeiras ideias a respeito das demonstrações em Matemática.

As dificuldades na hora de analisar o desenvolvimento das demonstrações ao longo do tempo e até mesmo a sua contribuição para a formação de professores pode ser atribuído, em partes, ao fato de existirem poucos trabalhos que abordam o tema em questão.

Segundo Pietropaolo (2005, p.118) não há nas pesquisas sobre formação de professores de matemática nenhum trabalho que aborde a relevância das demonstrações na formação do professor, exceto as de Garnica (1995,2002), o autor relaciona a essa falta de estudos o fato dos primeiros cursos de matemática no Brasil não serem lecionados visando a formação de professores e os que vieram posteriormente com essa finalidade não deram destaque ao uso das demonstrações.

O certo é que as demonstrações tem uso frequente na Matemática e merecem toda a nossa atenção e estudo, não somente do ponto de vista geométrico, conforme encontramos na maioria dos estudos que discutem as suas contribuições no ensino.

Mesmo as demonstrações dispendo de relevante importância para a Matemática muitas pessoas podem indagar o porquê do seu uso no ensino. Uma razão bem simples pode ser encontrada em (FILHO, 2012, p.209) quando o mesmo ressalta que, “ninguém deve acreditar em um fato matemático, mas deve ser convencido por meio de uma demonstração de que ele é válido”.

Assim podemos destacar que a demonstração matemática é antes de tudo um instrumento de validação do pensamento matemático, dando suporte para que o matemático possa de fato ser convencido ou convencer alguém sobre determinada conclusão matemática.

Caputi e Miranda nos trazem que o principal motivo pelo qual as demonstrações são importantes “é que nossa intuição falha. E na história da matemática, diversos exemplos demonstraram e convenceram os matemáticos que só a intuição é insuficiente para compreender os fatos matemáticos” (CAPUTI e MIRANDA, 2015, p.20).

Para Nickerson (2010 apud FILHO, B., 2013, p.2), “se quisermos compreender o raciocínio matemático de uma forma global, temos de entender, pelo menos da perspectiva de nossa cultura e de nosso tempo, sobre a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos na construção dessa demonstração”.

É de fundamental importância sabermos que fazemos um curso de licenciatura e precisamos estarmos aptos a formar cidadãos com mentes desenvolvidas e com senso crítico além de raciocínio lógico aguçados. É neste cenário que entra o ensino e aprendizado das demonstrações matemáticas, não como salvador da pátria, mas como uma alternativa a mais no desenvolvimento cognitivo de nossos alunos.

Para tal é importante que as universidades trabalhem esse assunto, para que cada vez mais cedo os professores possam instigar seus alunos na busca pelo conhecimento. Neste sentido concordamos com Almouloud *et al*, quando afirmam que:

Precisamos buscar caminhos que promovam mudanças nas concepções dos professores a respeito de prova e demonstração, bem como nas linguagens adotadas, posto que muitas vezes as linguagens utilizadas carecem de significado. Esses encaminhamentos poderão prepará-los para ensinarem seus alunos a raciocinar, argumentar, provar e demonstrar. (ALMOULOUD *et al*, 2008, p.244)

Quando levamos nossos alunos no caminho pela busca do conhecimento os instigamos a questionar as informações que lhes são passadas e a buscar desenvolver argumentos próprios,

isso será importante não somente na Matemática, visto que poucos desenvolverão aptidão por essa área do conhecimento a tal ponto de se especializar na mesma, mas os ajudará na vida como um todo e no aprendizado de outras disciplinas.

Nesse ponto Freitas (2011, p.13) é bastante preciso ao afirmar que:

Quando um aluno entende que é preciso justificar uma afirmação, e examinar essa justificação, a confirmar se está certa, está a desenvolver o espírito crítico. Este tipo de atitude é crucial na formação de um cidadão, e será talvez um dos maiores contributos que a matemática poderá dar às pessoas, independentemente da profissão que venham a ter no futuro.

Desta forma não podemos simplesmente deixar de usar esse inegável instrumento que só tem a somar para o ensino matemático, desde que usado de maneira correta. Assim, devemos compreender bem o que são e como usar as demonstrações, e para que haja essa compreensão é que se julga necessário um estudo aprofundado a respeito. Acreditamos aqui que este trabalho possa ser útil para tal propósito por trazer uma abordagem das demonstrações através de autores consagrados, alunos e professores de licenciatura.

4.1 ALGUNS TERMOS IMPORTANTES EM DEMONSTRAÇÕES:

Conforme visto na sessão anterior um simples conceito pode ser visto sobre enfoques diferentes e isso pode causar certa confusão no seu estudo. A melhor forma de evitar quaisquer transtornos é sempre escolher a melhor terminologia a ser usada, é neste ponto que julgamos necessário conhecer bem os termos que devemos utilizar e acima de tudo como explicitá-los.

Começaremos falando das **definições**, objeto de uso constante na Matemática. Algo de relevância ao se debruçar sobre determinado objeto de estudo é saber defini-lo, dando suas características e deixando bem claro com o que está lidando.

Saber lidar com as definições é essencial para quem estuda matemática, especialmente para quem quer obter êxito em suas demonstrações uma vez que, demonstrar exige conhecimento do assunto trabalhado e esse conhecimento só é possível se forem conhecidas as peculiaridades do objeto em estudo. Por exemplo, é inviável demonstrar que um número é primo sem antes saber quais as propriedades definem os números primos.

Seja qual for a forma com a qual o termo seja citado em gramáticas, dicionários ou em quaisquer livros, é notório que todos concordam com o fato de que uma definição jamais deve

ter caráter ambíguo, não devendo levar a falsas impressões. Tal definição deve ser clara e precisa, indo direto ao ponto e sendo feita apenas quando for indispensável.

Evaristo e Perdigão (2011, p.7) nos trazem que:

Para que o objetivo de uma definição seja atingido, devem ser observados dois aspectos: uma definição só pode conter termos que foram definidos previamente e uma definição de um objeto não pode conter um termo cuja definição contenha referência ao próprio objeto. Exemplos claros de “definições” que pecam em relação ao segundo aspecto levantado são: um *ponto* é a interseção de duas *retas* e uma *reta* é um conjunto de *pontos*. Com estas “definições”, para se entender o que é um *ponto* seria necessário saber o que era uma *reta* e para compreender o que é uma *reta* é indispensável se saber o que é um *ponto*.

Vale salientar que quando trabalhamos com a Matemática nem sempre podemos definir todos os entes matemáticos, esses entes são considerados entes primitivos e são aceitos sem definição. Podemos citar como entes primitivos as retas, pontos e planos estudados na geometria, em geral usamos entes primitivos para definir ou deduzir outros entes que possam vir a ser demonstrados.

No caso das demonstrações sob o risco de cairmos num ciclo vicioso, também precisamos começar de algum lugar para provar o que nos é proposto, devemos aceitar sem demonstração alguns conceitos para a partir destes provar outros casos. Esses conceitos são chamados de axiomas ou postulados.

Devemos no entanto ressaltar, que tanto os entes primitivos como os axiomas não surgem ao acaso como um mero devaneio das nossas mentes. Esses resultados são frutos de estudos, precisam ser aceitos por consenso entre membros de determinado grupo e necessitam de regras para sua manipulação, as chamamos de regras de inferência. Para fazermos demonstrações precisamos dos entes primitivos, dos axiomas e das regras de inferência. Um conjunto finito desses entes, regras e axiomas chamamos de modelo axiomático e usamos para desenvolver as teorias matemáticas.

Para Cordeiro Filho um modelo axiomático pode ser **consistente ou inconsistente**. Se não for possível deduzir afirmações contraditórias é **consistente** caso contrário caímos no segundo caso. “Sem dúvida, a menos de servirem para exemplos, ninguém deseja trabalhar com um modelo axiomático inconsistente”. (FILHO 2012, P.167)

Observe que ao falar de demonstrações, os leitores também serão frequentemente apresentados aos termos **hipótese** e **tese**, ambas estão diretamente ligadas a uma outra palavra muito importante chamada de **teorema**. Esses termos são essenciais no estudo das demonstrações e defini-los torna-se imprescindível no decorrer dos estudos sobre este tema,

uma vez que um teorema precisa de uma demonstração para validá-lo e essa demonstração só se torna possível através do manuseio das hipóteses e das teses.

Vejamos então como esses termos são definidos por Daniel Cordeiro de Moraes Filho, visto que sua obra é fundamentalmente importante para a realização deste trabalho. Este autor define Teorema como “uma afirmação matemática condicional ou implicativa, que precisa de uma demonstração para garantir sua validade.” (FILHO, 2014, p.97)

O mesmo autor acima citado define os termos hipótese e tese da seguinte maneira,

TESE: provém do grego, significando proposição, conclusão mantida por raciocínio. Já a palavra **HIPÓTESE** é formada pelas palavras *hipo+tese* ..., o sufixo *hipo* transmite a ideia daquilo que está em posição inferior, de baixo de. Assim etimologicamente, hipótese é aquilo que é inferior à tese, que está abaixo, que vem antes da tese, ou ainda aquilo que dá base a um argumento, a uma conclusão. (FILHO, 2014, p.148).

Seja qual for a atividade que desejarmos desempenhar no nosso dia a dia, devemos saber exatamente o que fazer, de onde partir e qual resultado desejamos obter com a nossa ação. Na matemática e em especial no nosso caso (demonstrações) essa lógica se encaixa muito bem às definições de teorema, tese e hipótese.

O teorema é o primeiro comando que recebemos sendo formado pelas hipóteses e teses. As hipóteses indicam de onde devemos partir, dando início à nossa jornada, a qual se findará com as teses, que são nosso ponto de chegada. Lembrando que durante todo esse percurso devemos fazer uso de artifícios matemáticos bem elaborados já aceitos pela comunidade matemática.

Nos tópicos que seguem, falaremos um pouco mais sobre a nossa caminhada pelo universo das demonstrações, sempre que expressarmos algum teorema mostraremos quais as hipóteses e teses que o envolvem de modo a compreendermos melhor a construção da demonstração.

4.2 SÍMBOLOS USADOS COM FREQUÊNCIA EM MATEMÁTICA:

Destacamos na tabela abaixo alguns símbolos que são constantemente utilizados, e os seus respectivos significados. O uso de uma simbologia adequada ajuda e muito na hora de trabalharmos com as demonstrações, por isso resolvemos trazer alguns que certamente serão úteis para a vida acadêmica.

Tabela 1: Símbolos matemáticos

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS	
$=$	Igual à
$\neq$	Diferente de
$\emptyset$ ou $\{\}$	Conjunto vazio
$\in$	Pertence à
$\notin$	Não pertence à
$\subset$	Está contido
$\not\subset$	Não está contido
$\supset$	Contém
$\not\supset$	Não contém
$\exists$	Existe pelo menos um
$\nexists$	Não existe
$\exists!$	Existe e é único
$ $	Tal que / tais que
$\vee$	Ou
$\wedge$	E
$A \cap B$	Interseção dos conjuntos A e B
$A \cup B$	União dos conjuntos A e B
$\forall$	Para todo e qualquer, qualquer que seja
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Implica e a recíproca é equivalente

Fonte: Os organizadores

4.3 UM POUCO DE LÓGICA MATEMÁTICA:

Note que na definição de teorema na seção anterior, falamos em afirmação matemática condicional ou implicativa. Ao usar tais termos estamos nos referindo às sentenças ou

proposições matemáticas que são frases afirmativas na forma de oração, com sujeito, verbo e predicado e podem ser apenas verdadeiras ou falsas. Uma terceira opção jamais deve ocorrer, essa inviabilidade é o que conhecemos como princípio do terceiro excluído.

Há ainda uma outra condição necessária para designarmos uma proposição, a mesma jamais poderá assumir dois valores lógicos. Ou seja, jamais será verdadeira e falsa ao mesmo tempo, sendo conhecido por princípio da não-contradição. Segue abaixo alguns exemplos de sentenças ou proposições e seus respectivos valores lógicos:

- a) Leonard Euller não sabia Matemática. (F)
- b) Isaac Newton desenvolveu a teoria da relatividade. (F)
- c) Albert Einstein foi um notável físico alemão. (V)
- d) Einstein foi um notável físico alemão **e** desenvolveu a teoria da relatividade. (V)

Uma sentença pode ser dita simples ou composta. Será simples quando não for formada por mais de uma proposição e será composta quando for formada pela junção de proposições. Das proposições anteriores a, b e c são simples e d é composta. Na alínea d a vogal em negrito entre as duas proposições chama-se **conectivo** (termo que liga, ou une.) e tem a função de unir as proposições.

Uma sentença condicional é uma sentença composta, do tipo: Se P , então Q . Onde P e Q são duas sentenças ligadas pelo conectivo “Se...então”. Trabalharemos aqui com as condicionais em que a sentença Q possa ser deduzida da sentença P , sempre que admitirmos a ocorrência de P . Em outras palavras se P valer, então Q vale.

Ex₁: Se n e a são dois números naturais e $n = a^2$, então n é um quadrado perfeito.

Ex₂: Se n for um número inteiro par, então $n^2 + 1$ é um número ímpar.

Dada uma sentença P e uma sentença Q , sempre que a sentença P implicar a sentença Q , diremos que P implica Q ou simplesmente $P \Rightarrow Q$, denominada sentença implicativa, que nada mais é que outra forma de escrever uma sentença condicional se P , então Q .

Ex₃: Se n e a são dois números naturais e $n = a^2 \Rightarrow n$ é um quadrado perfeito.

Ex₄: Se n for um número inteiro par $\Rightarrow n^2 + 1$ é um número ímpar.

Vale lembrar que muitas vezes temos que provar implicações do tipo *se, e somente se*, nesses casos, dadas duas sentenças P e Q , teremos que P vale *se, e somente se*, P valer ($P \Leftrightarrow Q$), ou seja, as sentenças são equivalentes. Para provar sentenças desse tipo teremos que dividi-la numa $P \Rightarrow Q$ e numa $Q \Rightarrow P$, e provar uma de cada vez.

A negação de uma sentença P é uma sentença $\sim P$ (não P), a negação de uma sentença $\sim P$ é uma sentença $\sim(\sim P) = P$. Deste modo, se uma sentença P é verdadeira uma sentença $\sim P$ é dita falsa, de modo análogo, se $\sim P$ é verdadeira, P é falsa.

4.4 ESCRREVENDO UMA BOA DEMONSTRAÇÃO:

Muitos podem se perguntar o que fazer na hora de escrever a demonstração de um teorema. Esse fato é realmente digno de preocupação, visto que a hora da redação da demonstração é crucial para o sucesso ou fracasso da mesma. Neste momento nenhum cuidado pode ser considerado demasiado, este fato foi inclusive citado pelos professores pesquisados neste trabalho como o momento em que os alunos mais apresentam dificuldades na hora de demonstrar.

Não é suficiente apenas conhecer bem todos os conceitos envolvidos numa demonstração, é preciso sabermos redigi-la corretamente. Na hora de escrever a demonstração é crucial deixarmos de lado a prolixidade e o imediatismo, sob o risco de tornar obscuro aquilo que nos propusemos a esclarecer.

Ao expressar em uma demonstração devemos esclarecer cada passo, desde a escolha do método a ser utilizado até os objetivos a que se propõe. É importante informar a todo momento se está usando a hipótese, alguma definição ou um teorema já demonstrado. Enfim, explique o passo a passo da sua demonstração não deixando de justificar cada um desses passos. O leitor não deve apenas acreditar no que está escrito, ele deve ser convencido por meio de artifícios de lógica matemática e ideias bem concatenadas daquilo que ele ler.

É imprescindível que a pessoa que ler uma demonstração saiba exatamente onde a mesma começa, entenda todo o percurso e ao fim não tenha dúvidas que o processo foi encerrado. Por outro lado, é entediante e desmotivante aos estudos ler uma demonstração e não obter clareza do que está acontecendo. É fundamental não deixar que o leitor acredite que as ideias surgiram do nada em seu texto.

Ao encerrar o ato demonstrativo deixe claro que já terminou, use frases do tipo **como queríamos demonstrar (c.q.d)**, **demonstramos que**, ou notações já consagradas no meio acadêmico. Não invente notações ou expressões sem necessidade, isso pode confundir o público alvo da leitura.

5. ESTUDANDO OS MECANISMOS DE DEMONSTRAÇÃO:

Uma vez definido o nosso objeto de estudo e alguns termos relacionados, chega o momento de aprendermos a manusear as demonstrações. Como toda ferramenta, as demonstrações também carecem de técnicas para o seu manuseio, conforme visto anteriormente estamos falando de um mecanismo de validação de pensamentos matemáticos e não podemos esperar bons resultados agindo de forma avulsa.

Nessa seção trataremos das técnicas de demonstração mais utilizadas na matemática. Daremos ênfase às *Demonstrações Diretas, Exaustivas, pelo Princípio da Indução Finita, por Contraposição e por Redução a um Absurdo*.

5.1 DEMONSTRAÇÃO DIRETA

A técnica de demonstração direta diz que, dada uma sentença condicional $p \rightarrow q$ assumimos que p seja verdade e deduzimos q através de um processo lógico dedutivo. Em outras palavras, fazemos uma verificação, assumimos a veracidade da hipótese e então deduzimos diretamente a tese por meio de uma argumentação aceita pela comunidade matemática.

Exemplo: Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar

Assim temos;

- P : n é um inteiro ímpar (hipótese);
- Q : n^2 é ímpar (tese).

Como provaremos pelo método direto assumimos ser válido que n é um inteiro ímpar (hipótese). Assim, assumiremos $n=2j+1$ (definição de número ímpar) e concluiremos n^2 ímpar (tese) através de argumentações matemáticas válidas. Desta forma se $n=2j+1$;

$$n^2 = (2j+1)^2 = 4j^2 + 4j + 1 = 2(2j^2 + 1) + 1 = 2j' + 1, \text{ onde } j' = 2j^2 + 1$$

Portanto n^2 é ímpar, **como queríamos demonstrar**.

Geralmente este método é o que procuramos inicialmente utilizar para fazer uma demonstração, caso o mesmo não seja viável passamos a testar um dos métodos que estudaremos adiante.

Entenda por método o processo pelo qual utilizamos conhecimentos prévios e comprovados para o estabelecimento de uma conclusão sólida. Em demonstração é o processo que utilizamos para estabelecer a verdade do conhecimento matemático conjecturado.

As demonstrações por absurdo e por contraposição serão devidamente trabalhadas adiante, a primeira tem o perfil das chamadas demonstrações indiretas. A segunda é uma técnica de demonstração direta na qual trabalharemos com a negação das sentenças.

5.2 DEMONSTRAÇÃO POR CONTRAPOSIÇÃO:

Antes de falarmos do método em si, veremos novamente um pouco de lógica matemática definindo o que vem a ser a contrapositiva de uma sentença. Em geral, dada uma sentença condicional do tipo,

$$p \Rightarrow q \text{ (Se } p \text{ então } q)$$

Diz-se sua contrapositiva uma sentença do tipo,

$$\sim q \Rightarrow \sim p \text{ (Se } \sim q \text{ não ocorre, então } \sim p \text{ também não ocorre).}$$

Assim, para quaisquer duas sentenças P e Q , temos que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \Rightarrow \sim P)$, a qual é chamado de **princípio da contrapositividade**. O princípio nos diz que uma sentença implicativa é equivalente a sua contrapositiva. Assim uma implicação $p \Rightarrow q$ será válida se, e somente se, sua contrapositiva $\sim q \Rightarrow \sim p$ for válida.

Ao provarmos sentenças usando a contrapositiva, provaremos a sentença $\sim Q \Rightarrow \sim P$, ao invés da sentença $P \Rightarrow Q$. Partimos da negação da tese para chegarmos à negação da hipótese. Vejamos o caso a seguir.

Mostre que se $3n + 2$ é ímpar, no qual n é inteiro, então n é ímpar.

- P : $3n+2$ é ímpar;
- Q : n é ímpar;
- $\sim P$: $3n+2$ é par;
- $\sim Q$: n é par.

Como desejamos provar usando a contrapositiva, devemos provar $\sim Q \Rightarrow \sim P$. Dessa forma assumimos n como sendo um número par ($\sim Q$), ou seja $n = 2j$, com j natural, (definição de número par) e devemos concluir que $3n+2$ é par ($\sim P$). De fato;

$$3n + 2 = 3(2j) + 2 = 6j + 2 = 2(3j + 1) = 2j', \text{ onde } j' = 3j + 1.$$

Como queríamos demonstrar.

5.3 DEMONSTRAÇÃO POR CASOS/EXAUSTÃO:

Algumas vezes temos que dividir a hipótese de um teorema de maneira a facilitar a demonstração do mesmo. Quando isso acontece devemos exaurir todas as possibilidades, ou seja, cada passo deve ser estudado antes de concluir a demonstração. A esse método é dado o nome de demonstração por casos ou por exaustão, nesse método trabalhamos com teoremas do tipo se P_1 ou P_2 , então Q .

Quando usamos a demonstração por casos verificamos que uma conjectura é válida para todos os elementos que a compõem. Quando queremos mostrar que a conjectura é falsa, mostramos um contraexemplo.

Exemplo: Mostre que se x e y forem inteiros ímpares, então xy é ímpar.

Demonstração: Se x e y são ímpares, então podemos escrever $x = 2m$

$$xy = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1 = 2k + 1, \\ \text{onde } k = 2mn + m + n.$$

$+ 1$ e $y = 2n + 1$ com m, n pertencendo aos inteiros (definição de número ímpar). Logo;

Portanto sempre que x e y forem ímpares, xy será ímpar. **Como queríamos demonstrar.**

Exemplo: Se x é um inteiro primo, então x é ímpar.

Nesse exemplo encontramos inúmeros caso em que a sentença é válida $x = 3, 7, 11, 13...$, no entanto para $x=2$ a sentença falha, portanto é falsa pois encontramos um caso em que a mesma não é válida.

Caso a sentença não possua um contraexemplo devido à sua construção diremos que a mesma é válida por **vacuidade**.

Exemplo: Em todo quadrado de cinco lados podemos encontrar sua área pela expressão l^2 , onde l corresponde à medida de cada um dos lados do quadrado.

Note que é inviável encontrar um contraexemplo para essa sentença, pois não existem quadrados com cinco lados, assim a mesma está provada por vacuidade.

5.4 PRINCIPIO DA INDUÇÃO FINITA (PIF):

Um fato comumente observado nas ciências não exatas é a dedução da validade de algum evento apenas por observação. Observa-se a ocorrência do mesmo e após verificar sua incidência por um determinado período conclui-se a veracidade ou a sua refutação. A esse tipo de estudo dá-se o nome de raciocínio indutivo.

Podemos citar como exemplo de raciocínio indutivo um cidadão, que passa sempre pela mesma rua todos os dias, mas em horários diferentes, após observar que próximo ao meio dia o trânsito é maior que em outros horários, conclui que próximo ao meio dia não é um bom momento para sair de casa, caso tenha escolha. Note que bastou apenas algum tempo observando o contexto em que estava inserido, para a pessoa tirar as suas conclusões e tomar decisões.

Em ciências como a Matemática, esse tipo de raciocínio não é suficiente para a validação de um objeto de estudo. É nesse contexto que entra o papel das demonstrações em Matemática, sendo a observação um elemento necessário, mas não suficiente para saciar os nossos anseios.

Segundo Rossi (2006 apud FILHO, B., 2013, p.5) o matemático pode até utilizar o raciocínio indutivo para elaborar suas hipóteses, mas não o emprega para prová-las devido o mesmo não garantir a validade da conjectura proposta.

Ainda a esse respeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais salientam que,

Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. Nesse sentido, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. (PCNs 1998, p.26)

O princípio da indução finita é muito utilizado quando queremos generalizar para todos os números naturais, implicações que anteriormente foram comprovadas apenas para alguns casos particulares. Segundo (HEFEZ, 2009, p.6), estabelecemos com o conceito de indução finita o primeiro contato com a ideia de infinito em matemática, daí sua importância, mesmo com toda sutileza e delicadeza que possuí, e com o tempo que necessita para ser desenvolvido.

Uma vez que na Matemática não podemos assumir a veracidade de um fato matemático apenas por observação, não devemos apenas acreditar e sim usar artifícios para validar o que foi conjecturado pela nossa observação, ganha força o método da indução, para Abramo Hefez

É preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número, necessariamente finito, de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário “Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença aberta sobre os naturais é sempre verdadeira”. (HEFEZ, 2009, p.7)

Reforçando as ideias apresentadas, Elon Lages Lima nos traz que,

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais. (LIMA, E. 1998, p.1)

De modo geral, ao desejarmos provar determinada propriedade $P(n)$ envolvendo números naturais, verificamos a validade de $P(1)$, e mostramos que, qualquer que seja n pertencente aos naturais, sempre que $P(n)$ é verdadeira, temos então que $P(n+1)$ também é verdadeira, logo $P(n)$ é verdadeira para todo número n pertencente aos naturais.

Devemos, no entanto, observar que muitas vezes, uma propriedade só começa a ser válida a partir de um certo $n_0 > 1$, nestes casos, a indução só começa a partir de n_0 .

Vejamos os exemplos abaixo.

$$\text{Ex: } P(n): \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ para todo } n$$

O primeiro passo para provar a propriedade $P(n)$ apresentada a cima é mostrarmos que a mesma vale para um valor inicial $n=1$. Ou seja, devemos verificar $P(1)$, desta forma temos que para $n=1$:

$$P(1) = \frac{1}{1.(1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \text{ logo } P(n) \text{ é válida para } n=1.$$

Assumamos que $P(n): \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ seja válida para algum n natural, e a chamamos de hipótese de indução. Agora que já sabemos de onde devemos partir (hipótese), provaremos que para $n+1$, $P(n+1)$ também é válida (tese), ou seja,

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} + \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

O que fizemos acima foi somente somar a ambos os membros da igualdade o termo imediatamente subsequente ao anterior, e o fizemos substituindo n por $n+1$ por ser a condição que temos de provar. Observe que os termos destacados na expressão do parágrafo anterior corresponde a nossa hipótese de indução, logo temos:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Agora basta manusear o lado esquerdo da nossa equação e chegarmos na expressão do lado direito, caso obtenhamos êxito nossa demonstração terá sido feita corretamente. De fato, veja.

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+2)} &= \frac{n.(n+2)+1}{(n+1).(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1).(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1).(n+2)} = \frac{(n+1).(n+1)}{(n+1).(n+2)} = \\ &= \frac{(n+1)}{(n+2)}. \end{aligned}$$

Portanto a propriedade $P(n): \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, é válida para qualquer número natural n , **como queríamos demonstrar.**

$$\text{Ex}_2: P(n): 1+2+3+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Neste caso queremos provar que a expressão para calcular a soma dos n primeiros números naturais é $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Deste forma, a exemplo do item anterior iniciaremos verificando para um valor inicial $n=1$, ou seja:

$P(1): \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, note que a expressão é válida para nosso valor inicial. O passo seguinte é admitir que $P(n)$ é válida para todo n natural (hipótese de indução) e provarmos que também é válida para $n+1$, ou seja, provaremos o $P(n+1)$. Assim temos:

$$P(n+1): 1 + 2 + 3 + \dots + \mathbf{n} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Devemos agora partir da expressão do lado esquerdo e chegarmos à expressão do lado direito, mas observe que os termos em negrito correspondem à nossa hipótese de indução, assim temos:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \text{ usamos o mínimo múltiplo comum e obtemos } \frac{n \cdot (n+1) + 2n+2}{2} =$$

$$\frac{n \cdot (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1) + (n+2)}{2}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Atente ao fato de que procuramos sempre organizar as expressões de maneira a sabermos exatamente onde terminar a demonstração, essa é uma maneira interessante de evitarmos manusear a nossa hipótese sem saber qual o propósito seguir. Analisaremos na próxima seção o último método de demonstração abordado neste trabalho, espera-se que as nossas análises em todos os métodos aqui abordados sejam de grande valor para os estudantes de Matemática que visem uma boa formação para a carreira docente.

5.5 DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO A UM ABSURDO:

É comumente observado no trato das demonstrações, o uso do método direto, que consiste em partir da hipótese (H) e diretamente, deduzir a tese (T). Porém, esse método mostra-

se insuficiente para provar todos os resultados desejados, neste cerne, surge a necessidade de usarmos outros artifícios. Nesta seção trataremos do método de redução ao absurdo (pode ser chamado de demonstração por contradição ou *reductio ad absurdum*), método de demonstração indireta por usar-se de argumentos de contradição. Nesse instrumento de demonstração, devemos mostrar que se uma proposição dada fosse verdadeira ocorreria alguma contradição do ponto de vista lógico.

Dada uma sentença se P então Q , a técnica consiste em negar temporariamente a validade de Q , para posteriormente chegarmos a um absurdo. Vale ressaltar que, o valor lógico de uma contradição é falso, assim, se em um processo lógico dedutivo válido deduzirmos uma sentença falsa, implica ser falsa a premissa inicial da qual partimos, que em nosso caso é nossa suposição temporária, e portanto, a sentença se H então T é válida. Vejamos o caso a seguir.

Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 for divisível por 2, então n é divisível por 2

Para fazer esta demonstração é necessário conhecimentos sobre divisibilidade por 2 e sobre as definições de números ímpares e pares. Note que temos uma proposição do tipo se P , então Q , onde;

- P : $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é divisível por 2; (hipótese)
- Q : n é divisível por 2; (tese)
- $\sim Q$: n não é divisível por 2. (Negação da tese)

Provaremos por redução a um absurdo. Logo, devemos admitir que exista um elemento que satisfaça a hipótese, mas não cumpra a tese, ou seja, ao invés de $P \Rightarrow Q$ teremos $P \wedge \sim Q$.

Demonstração:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e n^2 divisível por 2 (hipótese), suponhamos que n não seja divisível por 2, ou seja n é ímpar (negação da tese). Logo n é da forma $2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ (definição de números ímpares), assim;

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1 = 2j+1, \text{ onde } j = 2k^2 + 2k, j \in \mathbb{Z}.$$

Portanto n^2 é ímpar, mas isso contradiz a hipótese n^2 é divisível por 2. Desta forma chegamos a um absurdo, gerado pela negação da tese. Logo n é divisível por 2, **como queríamos demonstrar**.

6. ANALISANDO OS PONTOS DE VISTA DE ALUNOS E PROFESSORES SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES:

Procuramos neste capítulo trazer a discussão sobre o uso das demonstrações sob o ponto de vista de alunos e professores do IFPI-SRN, trazendo sempre que possível e necessário a visão de autores que abordaram o tema, contribuindo também com o nosso entendimento a respeito da dialética.

Faremos as nossas ponderações a partir do entendimento dos alunos e professores da licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí-campus SRN. Para tal, aplicamos questionários que serão analisados a seguir com as devidas discussões, buscando sempre entender as perspectivas de discentes e docentes em relação ao processo de ensino e aprendizagem.

6.1 O PONTO DE VISTA DOS ALUNOS SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES:

Uma das inquietações que serviram de base para desenvolver esta pesquisa foi saber o conhecimento que os alunos da licenciatura em Matemática do IFPI-SRN tem a respeito das demonstrações. Para as perguntas que envolvem conceitos ou definições, as respostas foram analisadas como satisfatórias para aquelas que muito se aproximam ao que foi pesquisado nas bibliografias base deste trabalho, pouco satisfatórias para as que deixam a desejar em algum quesito e insatisfatórias para aquelas que destoam da realidade estudada.

Ao serem indagados sobre o que entendem por demonstração matemática 35,7% dos graduandos questionados responderam satisfatoriamente à pergunta. Para estes, demonstrar é tornar um conhecimento matemático válido, seja ele um teorema ou uma proposição. Ressaltaram ainda a necessidade de se admitir certas propriedades ou certas condições como verdadeiras para conseguir fazer a demonstração.

Das respostas tidas como pouco satisfatórias obtivemos um percentual de 28,6%. Estes analisaram as demonstrações apenas sob o aspecto das generalizações ou apenas como uma maneira de entender melhor um determinado problema. Quando falamos do ponto de vista das generalizações estamos dizendo que os que compreenderam as demonstrações sob essa

perspectiva responderam que demonstrar é generalizar o que até então é aceito apenas para alguns casos.

Das respostas consideradas como insatisfatórias (35,7%) tratamos aquelas em que os alunos consideraram o ato de demonstrar como uma maneira de explicar melhor um conteúdo, ou os que disseram apenas que provar é entender uma determinada fórmula. Estas respostas ao nosso ver não configuram o sentido de demonstrar, visto que nem todos os conteúdos podem ser estudados sob o ponto de vista demonstrativo e muitas vezes não entendemos a fórmula em si ou como usá-la, e sim como pode ser deduzida.

Entende-se que ao avaliar o ato de demonstrar como uma maneira de entender uma fórmula Matemática, os alunos tiveram uma percepção do tipo funcional, ou seja, procuraram discernir para que serve a demonstração, mas ainda não foram capazes de caracterizar o processo em si.

A esse respeito Freitas ressalta que

A demonstração é um patrimônio central da matemática. Ela dá um nível de certeza e coerência aos resultados apresentados que não pode ser adquirido de nenhuma outra forma. Além disso, mostra mais claramente as relações entre os conceitos, desfazendo a ideia de que a matemática é apenas um conjunto desconexo de fórmulas para resolver problemas. (Freitas 2011, P.11)

Ao analisar este quesito foi possível notar que o significado de demonstrar ainda não está claramente notório para os alunos, falta um entendimento mais aguçado do ponto de vista do raciocínio lógico. Os educandos em sua maioria ainda não são capazes de analisar as demonstrações sobre essa perspectiva, isso é um erro visto que a lógica é imprescindível para fazer uma boa demonstração. Por outro lado foi possível ver uma evolução nos alunos a medida que estes se aproximam do fim do curso, a percepção de demonstração foi melhor exposta por alunos com mais experiência na graduação.

Perguntados sobre a etapa de suas vidas como estudantes em que a demonstrações em matemática lhes foram apresentadas, 92, 9% dos alunos afirmaram ter se deparado com essa ferramenta apenas no ensino superior. Alguns alunos inclusive apontaram esse fato como o principal agente causador de dificuldades na hora de demonstrar. Fica nítida, mais uma vez, a importância de desenvolver o raciocínio lógico dos alunos desde a educação básica.

As dificuldades em demonstrar são bastante notáveis no ensino superior. O alunado que respondeu à nossa pesquisa tem dificuldade na hora de saber por onde começar a demonstrar, saber de onde surgem aquelas ideias que o professor usa ao escrever as demonstrações e, mesmo

aqueles que tem uma boa visão de como proceder para provar um teorema ou proposição se perdem na hora de escrever na linguagem matemática.

Na análise dos questionários foram notadas expressões como “tirar ideias do bolso” ou “será adivinhação?”. Essas frases expressam bem as dúvidas que os alunos tem ao fazer demonstrações, muitos revelaram não saber diferenciar hipóteses das teses, não saber onde devem terminar a demonstração, não saberem os passos a serem seguidos e nem como se expressarem matematicamente.

É notável que falar em demonstrações mesmo no ensino superior ainda é um desafio, e demonstrar não é uma tarefa nada fácil aos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Por outro lado, entendemos que só após vencermos essas barreiras daremos passos mais largos rumo a um ensino de qualidade, que vise instigar nos alunos a capacidade de duvidar do que parece óbvio e procurar ir sempre além na procura pelo conhecimento matemático.

Ao serem indagados sobre o que entendem por teorema, hipótese e tese, os alunos em sua maioria foram bastante concisos em suas respostas. Para estes, teorema é uma afirmação que pode ser provada matematicamente, hipótese uma condição aceita como válida e deve ser tomada como ponto de partida para a demonstração e tese é o resultado que se quer provar. Entre os alunos que não foram totalmente felizes em suas definições estão os que confundiram hipótese com tese e os que não lembram algum termo ou deixaram de responder à pergunta, estes somam 21,4% dos questionados.

Todos os alunos pesquisados relataram que várias disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática necessitam de demonstração em algum momento (teoria dos números, geometria, estruturas algébricas, análise real). Os alunos demonstraram também que o modo de abordagem dessas demonstrações por parte do professor vem mudando ao passar dos anos, os discentes principalmente do VIII módulo que estudaram com os primeiros professores da instituição, relataram que antes alguns professores apenas escreviam as demonstrações sem mostrar-lhes como era feita a construção da mesma.

Atualmente os discentes concordam com o fato de que a explanação por parte do professor tem um caráter mais incentivador ao ensino das demonstrações. Nota-se que os estudantes sentem que os professores tenta ensinar-lhes o percurso para fazer uma boa demonstração e ressaltam a importância de fazê-la.

Ao serem questionados sobre a possibilidade de inserção das demonstrações na educação básica, mesmo com alguma ressalva 92,9% dos discentes da Licenciatura em Matemática do IFPI-SRN destacaram que as demonstrações devem ser inseridas no ensino

básico desde que se tenha os devidos cuidados para não complicar muito o assunto invés de torná-lo mais claro.

O principal motivo que levaram os alunos a acreditarem que as demonstrações devem ser ensinadas nos ensinos fundamental e médio, é o fato de que a Matemática deve ser carregada de significações, e as demonstrações tem papel relevante na construção de significados pra questões que muitas vezes são passadas pelos currículos e são aceitas pelos educandos de maneira automática.

Para os questionados que responderam positivamente a essa pergunta, as demonstrações devem ser usadas para mostrar aos alunos que as fórmulas e expressões que lhe são passadas como algo verdadeiro e sólido passaram por um processo de construção e tem mais significados e podem ser mais úteis do que se imagina. Nesse contexto, as demonstrações podem e devem ser utilizadas como forma de melhorar o ensino, desde que sejam usadas sem exageros, conforme relataram os alunos pesquisados. Os alunos que não acham que as demonstrações devem ser usados no ensino básico não justificaram a resposta dada.

Quando a pergunta foi sobre a necessidade das demonstrações nos cursos de formação de professores para a educação básica, todas as respostas foram afirmativas. Os discentes concordam que o graduando precisa, ao sair do curso, estar com uma formação sólida, e as demonstrações contribuem muito para esta solidez.

Ao responderem aos questionários, os alunos deixaram claro que o professor da educação básica, mesmo que não explique certa passagem de um conteúdo, precisa saber como fazê-la. Destacamos do ponto de vista dos alunos da Licenciatura que o professor que sabe provar os resultados que utiliza, está mais apto a conduzir seu alunado para um aprendizado com eficiência, visto que o processo que envolve uma prova é essencial no desenvolvimento do raciocínio lógico.

Uma preocupação destacada pelos alunos do curso de Matemática do IFPI-SRN, foi o cuidado para não se perder muito tempo ensinado apenas demonstrações. Para estes, provar é essencial, mas as resoluções de problemas devem também ser ensinadas com frequência.

Dentre as respostas colhidas, algumas chamaram atenção e resolvemos transcrevê-las ao nosso texto. De maneira a preservar a identidade dos pesquisados, estes serão aqui chamados apenas de A₃ e A₇, a simbologia foi adotada para facilitar a análise dos questionários, sendo que A representa a palavra aluno e a numeração representa a ordem em que os questionários foram analisados. Veja a reprodução fiel das respostas proferidas por estes alunos.

Muitos alunos não gostam de Matemática devido as fórmulas. O professor deve mostrar que a fórmula é uma ferramenta para facilitar a resolução de um determinado problema, mas para isto, deve responder a pergunta que muitos alunos tem em relação a fórmula; ‘De onde veio isto?’ (aluno A₅)

Para o aluno A₇ as demonstrações devem ser utilizadas na formação de professores pois “apesar de ter dificuldade de entender, acho interessante na formação, pois um bom professor tem que sempre saber um pouco a mais do que ministra para os seus alunos, logo um curso tem que ensinar muito além disso”.

Nessas respostas fica nítida a preocupação dos futuros professores de Matemática da nossa região, com a formação sólida do docente, com a maneira como os alunos serão ensinados futuramente e com uma Matemática que não seja tão carregada de abstrações. O grande interesse dos graduandos é que seus alunos sejam bem preparados e que a Matemática seja mais atrativa e significativa em suas vidas.

O curso de Matemática do IFPI-SRN traz muitas disciplinas que necessitam do uso das demonstrações e os discentes foram unânimes ao ressaltar a importância de se ensinar essa ferramenta no ensino básico e superior. Vimos também que o ensino das demonstrações no curso, vem melhorando com o passar dos anos e o comprometimento dos professores é de fundamental importância para tal fato.

Por outro lado, entendemos que é insuficiente que o professor ensine os alunos a demonstrar sem que seja cobrado dos mesmos o comprometimento com os estudos e o esforço para aprender e aplicar os métodos estudados. Assim, perguntamos aos graduandos, se as demonstrações mostradas em sala de aula e nos materiais didáticos foram em algum momento cobradas em avaliações.

Mesmo que por algumas vezes não tenham sido capazes de realizar as demonstrações pedidas, todos os alunos questionados admitiram que os conteúdos de demonstração mostrados em sala ou mesmo em atividades, foram pedidos em algum momento durante o processo de avaliação, inclusive nas provas.

Fato que merece destaque é o relato de alguns alunos que ressaltam uma frequência maior nas cobranças de demonstrações durante as avaliações. Tal fato pode ser explicado em decorrência de um número maior de disciplinas que cobram esse quesito à medida que o curso vai se aproximando do fim.

No questionário foi pedido que os alunos elencassem alguns termos vistos com frequência durante as demonstrações, destacamos que 35,7% dos questionados não

responderam a este quesito. Os alunos que responderam citaram vários termos e demonstraram um bom nível de conhecimento a respeito dos mesmos.

Os termos citados foram teorema, hipótese, tese, proposições, corolário, indução, generalização e recorrência. Alguns discentes citaram inclusive termos que são utilizados no desenvolver da demonstração como: tome, mostre que, se e somente se, então e conclusão. A análise dessas respostas nos leva ao entendimento de que os alunos têm certo conhecimento do que é preciso para desenvolver uma demonstração, a dificuldade em desenvolvê-las pode estar em saber o momento certo de usar cada termo e as definições.

Sabemos que para demonstrar um objeto na linguagem matemática usamos vários artifícios, resolvemos então saber dos alunos da licenciatura quais os métodos que os mesmos conhecem e o quanto cada um dos questionados se sente capaz de utilizar algum método.

Para esta questão 42,86% não citaram nenhum método ou ao menos revelaram se conheciam algum, enquanto 14,28% revelaram conhecer alguns métodos, mas não revelaram quais e nem se sabiam utilizar. Dos que responderam fielmente à questão todos citaram o método da indução finita, sendo que este foi revelado como o método em que os alunos mais sentem confiança ao utilizar. Outros métodos foram citados em menor destaque como redução a um absurdo, contraposição e contraexemplo.

6.2 PONTO DE VISTA DOS PROFESSORES SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES:

Uma vez que nos propusemos a entender o uso de demonstrações em matemática nos cursos de formação de professores na educação básica, e também nos propusemos a estudar sob o ponto de vista dos envolvidos na dinâmica do processo de ensino e aprendizagem não poderíamos deixar de saber o que os professores da graduação pensam a respeito desta problemática.

Assim, aplicamos 6 (seis) questionários com os professores de Matemática do Instituto Federal do Piauí campus SRN, sendo que 5 (cinco) foram devolvidos respondidos. A quantidade estudada representa o quadro de professores de matemática da instituição, sendo que alguns lecionam no ensino médio e no ensino superior. Procuramos entender a visão dos docentes a respeito do uso das demonstrações e como os mesmos observam a visão dos alunos sobre o tema e quais as dificuldades notadas.

Todos os professores arguidos já ministraram ou ministram disciplinas em que o uso de demonstrações é fundamental, procuramos então saber, qual a reação dos alunos no contato com as primeiras demonstrações. Observamos nas respostas dos professores que os discentes sentem receio ou as vezes se assustam no primeiro contato, ou ficam vislumbrados muitas vezes por não saberem como chegar ao fim do processo ou por não estarem acostumados com a estrutura que envolve uma demonstração.

Foi perguntado aos docentes como os mesmos apresentam as demonstrações a seu alunos, a pergunta foi feita por acharmos necessário saber a preocupação dos mesmos para com o aprendizado dos seus alunos e a melhor forma de desenvolver esse aprendizado. Os questionados revelaram mostrar inicialmente um caso particular para depois apresentar o caso geral, destacaram a necessidade de mostrar aos discentes onde os mesmos devem chegar com as demonstrações, e alguns professores revelaram preferir fazer a interpretação geométrica do problema sempre que possível.

Foi detectado que os discentes sentem muita dificuldade em saber iniciar a demonstração e/ou como termina-la, têm dificuldade de pensar de forma generalizada, têm pouco conhecimento dos símbolos matemáticos e preocupam-se muito com o resultado final do problema em vez de pensar como chegar lá. Os professores atribuíram a este fato principalmente a falta de conhecimento prévio e a falta de prática.

Um dos grandes questionamentos a qual nos propusemos a estudar foi a possibilidade de inserir as demonstrações na educação básica, os professores questionados reforçaram o nosso entendimento de que é fundamental fazer demonstrações nesse nível da educação. Para os docentes demonstrar é uma maneira de significar o conteúdo matemático, mostrando aos alunos que as fórmulas matemáticas não tem sentido por si só e que todo conhecimento tem uma justificativa e necessita ser validado.

Quanto a necessidade do uso das demonstrações nos cursos de formação de professores para a educação básica, os professores enfatizaram que seu uso faz-se necessário como uma forma de ampliação da visão dos alunos acerca dos conteúdos tornando as aplicações mais simples. Os docentes elencaram também algumas palavras e alguns termos frequentemente utilizados como hipóteses, teses, manipular, provar, desenvolver e demonstrar.

Ao fazer uma demonstração devemos ter em mente os objetivos que devemos cumprir e o que devemos utilizar para tal. Os educadores que contribuíram para nossa pesquisa deram algumas dicas para o desenvolvimento de uma boa demonstração, destacaram a importância de

usarmos casos particulares, fazer as demonstrações por etapas, ter em mente o que são hipótese e teses e como uma implica a outra.

O professor que aqui chamaremos de P_1 discorreu que uma demonstração deve ter “clareza, elegância e obedecer as normas. Deve ser simples e chegar ao objetivo usando somente o que já foi provado, demonstrado”. Destacamos neste ponto a importância de sermos concisos e não forçarmos resultados, sob pena de comprometermos o resultado da demonstração e o aprendizado dos alunos.

Para que o desenvolver da demonstração seja feito com sucesso, os professores destacaram ainda a necessidade de saber manusear bem as hipóteses, as teses, saber onde se quer chegar e utilizar os conhecimentos prévios e os dados já dispostos no problema.

Na hora de definir um objeto matemático passível de ser demonstrado, os docentes participantes destacaram o caráter de precisão que deve ter uma definição, para definir bem não devemos deixar lacunas, devemos mostrar as leis que regem o objeto em estudo e usar simbologia adequada.

7. CONCLUSÕES:

Após analisar os questionários aplicados aos alunos e professores da licenciatura em matemática do Instituto Federal do Piauí campus São Raimundo Nonato, e após um estudo detalhado de vários teóricos que estudaram as demonstrações em Matemática e suas contribuições para o ensino, podemos tirar algumas conclusões a respeito deste tema ao qual nos dispusemos a analisar, compreender e facilitar o estudo a outros acadêmicos.

Levando em consideração o que foi respondido pelos alunos nos questionários entregues, foi possível captar informações valiosíssimas, para uma melhor compreensão das demonstrações e a importância do seu estudo por alunos da graduação e a possibilidade de inserção no ensino básico.

Observamos que os mesmos veem como de fundamental importância o estudo das demonstrações na licenciatura, e cuja prática é imprescindível para a formação de professores. Destacaram que aprender a demonstrar torna-os mais aptos para desenvolver a carreira como docente, pois o professor fluente em demonstrações tem um leque maior de conhecimentos e pode trabalhar melhor nos seus alunos a capacidade de desenvolvimento do raciocínio lógico e apreensão do verdadeiro significado da Matemática ensinada no dia-a-dia.

Notamos que ainda falta aos discentes uma compreensão melhor do que são as demonstrações e da lógica que as envolvem, alguns termos essenciais ainda não estão bem definidos em suas mentes. Acreditamos que somente após melhorar essa concepção do que são demonstrações e quais os termos utilizados é que será possível um melhor desenvolvimento dos discentes ao entender uma demonstração e a saber escrevê-la com suas palavras.

Produzimos ao longo deste trabalho um material que embora seja bem introdutório, pode ajudar àqueles que se dispuserem a estender seus conhecimentos em matemática, em especial em demonstrações. Os exemplos feitos são considerados simples por entendermos que para que haja compreensão não podemos exigir passos demasiados largos, devemos ter uma boa base e partir sempre de casos mais simples.

Algo que foi notado e que concordamos com os alunos questionados nesta pesquisa é que falta uma boa base antes dos estudantes chegarem a universidade. Observamos que a grande maioria só tiveram contato com demonstrações no ensino superior, e as dificuldades foram e ainda são muitas, o que nos leva a cada vez mais defender a utilização de demonstrações no ensino básico, não de forma abstrata e com toda formalidade exigida numa graduação, mas pelo

menos que aja um entendimento no sentido de desenvolver nos alunos de ensino médio e ensino fundamental a percepção de que é necessário aprender Matemática com um certo rigor e sem necessidade de tantas fórmulas.

Ao longo de vários anos, pesquisadores no ensino de forma geral defendem que os professores devem trabalhar o cognitivo de seus alunos, desenvolver suas aptidões e estimular o seu raciocínio. Pelo que vimos ao longo do texto, alunos e professores concordam que as demonstrações em matemática tem papel preponderante nesse sentido, não há então motivos para abandonar essa prática e deixar de formar professores capacitados para tal.

Mesmo com as dificuldades impostas, foi possível notar que há preocupação no sentido de ensinar bem os alunos da licenciatura a lidarem com as demonstrações, os professores estão mais preocupados com esse fato e os alunos estão cômnicos que devem aprender e estão dispostos a tal.

Esperamos que os registros aqui anotados e as discussões feitas, sejam importantes para aqueles que se interessam por um ensino de qualidade, espera-se mais ainda que estas discussões não parem, que cada vez mais, alunos e professores se preocupem com a qualidade do ensino ofertado aos cidadãos que almejam um desenvolvimento social e intelectual através da educação.

Os estudos feitos neste trabalho foram apenas um ponto de partida para procurar esclarecer melhor alguns pontos que nos parecem obscuros, muitas questões ainda serão levantadas e muitos estudos deverão ser feitos e que cada um que tenha o mínimo de preocupação com o ensino e a aprendizagem sintam-se encorajados a fazer tais estudos e procurar respostas para as questões que surgirem.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, Sanatiana Gomes. **A inclusão da Modelagem Matemática Como Ferramenta no Processo do Ensino da Geometria com os Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental**. Piauí, 2010. Artigo.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. *Et al.* **Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações**. São Paulo: REM, 2008. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/1744/1135>>. Acesso em: 11 fev.2015.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.
- BRISTOT, Talita Isoppo. **Práticas Pedagógicas dos Professores de Matemática da Rede Pública Estadual em Santa Rosa do Sul- SC**. Criciúma: 2006. Disponível em: <<http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/00002C/00002CC3.pdf>>. Acesso em: 08 nov.2015.
- CAMPOS, Tânia MM. NUNES, Terezinha. **Tendências Atuais do Ensino e Aprendizagem da Matemática**. Brasília: 1994. Disponível em: <<http://www.rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/927/833>>. Acesso em: 07 nov. 2015.
- CAPUTI, Armando. MIRANDA, Daniel. **Bases Matemáticas**. Santo André: UFABC, 2015. Disponível em: <<http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/bm/>>. Acesso em: 22 mar. 2016.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Porque se Ensina Matemática**. São Paulo: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.ima.mat.brubipdfuda_004.pdf>. Acesso em: 06 maio. 2013.
- DOMINGUES, H. H. ; IEZZI, G.. **Álgebra Moderna**. 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.
- EVARISTO, Jaime. PERDIGÃO, Eduardo. **Introdução a álgebra abstrata**. Maceió: 2011. Disponível em:

<<http://www.ic.ufal.br/professor/jaime/livros/Introducao%20a%20Algebra%20Abstrata.pdf>>.

Acesso em: 23 mar.2015.

FILHO, Daniel Cordeiro de Moraes. **Um convite à matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

_____. **Manual de redação matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

FILHO, Inocêncio Fernandes Balieiro. **Alguns aspectos da demonstração em matemática**: Uma discussão sobre os métodos empregados no desenvolvimento do raciocínio matemático.

São Paulo: VII CIBEM, 2013. Disponível em:

<<http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/550.pdf>>. Acesso em 27 ago.2015.

FREITAS, Pedro J. **A demonstração matemática no ensino básico e secundário**. Lisboa: 2011. Disponível em: <http://webpages.fc.ul.pt/~pjfreitas/pdfs/Dem_ProfMat.pdf>. Acesso em: 28 fev.2015.

GABINO, Sidney dos Santos. **Métodos Inovadores no Ensino das Operações Fundamentais**. São Raimundo Nonato, 2013. Artigo.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. Niterói: 2009. Disponível em: <<http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654.o>>. Acesso em: 03 abr. 2013.

IMBERNÓM, Francisco. **Formação Docente e Profissional**: Formar-se Para a Mudança e Incerteza. 9. Ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Indução Matemática**. Rio de Janeiro: Revista Eureka, 1998. Disponível em: <www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/.../inducacao.doc>. Acesso em 22 mar.2016.

LIMA, Marcos Rogério de Sousa. **O Professor de Matemática do Piauí**: Formação, Experiência e Jornada de Trabalho. Piauí, 2013. Artigo.

MOTA, Marcos Coutinho. CARVALHO, Marcos Pavani de. **Os diferentes tipos de demonstrações**: Uma reflexão para os cursos de Licenciatura em matemática. Ouro Preto: Revista da Educação Matemática da UFOP, 2011. Disponível em: <

<http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/download/341/298> >. Acesso em: 20 nov.2015.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Educação e Linguagem Matemática**. Acre: Pedead, 2007. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/images/Mdulo%201%20de%20Educao%20Matemtica%20%20significados%20do%20aprender%20e%20ensinar%20Matemtica%20-%20Cristiano.pdf>>. Acesso em: 07 nov.2014.

PIETROPAOLO, Rui Cesar. **(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. São Paulo: 2005. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/tese_ruy.pdf>. Acesso em 11 fev.2015.

RODRIGUES, Luciano Lima. **A matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano**. Brasília: 2014. Disponível em: <<https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/LucianoLimaRodrigues.pdf>>. Acesso em: 10 abr.2016.

SALES, Antônio. PAIS, Luiz Caros. **Argumentação e demonstração em uma atividade de Geometria em um curso de licenciatura em matemática**. Salvador: ENEM, 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/CC/T18_CC719.pdf>. Acesso em: 5 abr.2016.

SANTOS, Ronan Santana dos. ROSA, Dalva Eterna Gonçalves. **As influências dos formadores sobre os licenciados em matemática do IME-UFG**. Goiás: 2009. Disponível em: <http://www2.unucseh.ueg.br/ceped/edipe/anais/IIIedipe/pdfs/2_trabalhos/gt05_matematica/trab_gt05_as_influencias_dos_formadores.pdf>. Acesso em: 5 abr.2016.

SANTOS, Marconi Coelho dos. **Provas e demonstrações matemáticas: usando o trabalho colaborativo como fio condutor para uma nova visão do resgate significativo destas ferramentas**. Areia: 2013. Disponível em: <ftp://ftp.ifes.edu.br/cursos/Matematica/EBRAPEM/GDs/GD03/Sessao2/Sala_C4/723-857-1-PB.pdf> marconi coelho santos>. Acesso em: 8 abr.2026.

SOARES, Fernando Gabriel Enguia Pereira . **As Atitudes de Alunos do Ensino Básico em Relação à Matemática e o Papel do Professor**. Campo Grande, 2003. UCDB. Disponível em: <<http://congressos.ifal.edu.br/index.php/connepi/CONNEPI2010/paper/viewFile/2395>>.

Acesso em: 10 jan. 2016.

IFPI. **Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática *campus* São Raimundo Nonato**. SRN: IFPI, 2013.

APÊNDICES

O Uso das Demonstrações Matemáticas na Formação de Professores para a Educação

Básica: um Estudo sobre o IFPI-SRN.

Questionário destinado aos alunos da licenciatura em matemática do IFPI-SRN

MÓDULO EM QUE ESTÁ MATRICULADO: _____

OBS: Este questionário destina-se apenas à coleta de dados por parte deste discente, desta forma, nada do que aqui for relatado será utilizado para outros fins que não seja a pesquisa científica, a identificação por parte do questionado não se faz necessária, assim como não há obrigação quanto a sua participação neste projeto.

- 1- Com base nos seus conhecimentos até o presente momento, o que você entende por demonstração matemática?
- 2- Caso tenha já tenha sido apresentado às demonstrações em Matemática, em que parte da sua vida como estudante este fato ocorreu?
- 3- O que entende por teorema? Por hipótese? e tese?
- 4- Nas disciplinas as quais já cursou ou está cursando foi, ou é necessário o uso das demonstrações em alguma delas?
- 5- Em caso de resposta positiva ao item anterior, como foi a apresentação por parte do professor? Você já tinha feito alguma demonstração antes?
- 6- Quais foram, ou são as suas principais dificuldades na hora de fazer uma demonstração na linguagem matemática?
- 7- Como futuro mediador no processo de aprendizado de muitos alunos, você acha que as demonstrações, mesmo da forma mais simples podem ser utilizadas na educação básica? Com qual finalidade?
- 8- Você acha que as demonstrações constituem uma prática que deve ser utilizada com frequência nos cursos de formação, ou acha que a mesma é irrelevante na formação de um bom professor de matemática? Discorra brevemente.
- 9- Na hora da avaliação, as demonstrações que você viu durante as aulas foram cobradas em algum momento?
- 10- Elenque alguns termos que você já ouviu quando se fala em demonstrações, e fale o que entende por cada um.
- 11- Qual ou quais métodos (s) de demonstração você conhece?

O Uso das Demonstrações Matemáticas na Formação de Professores para a Educação

Básica: um Estudo sobre o IFPI-SRN.

Questionário destinado aos professores da licenciatura em matemática do IFPI-SRN

Leciona no ensino superior? _____.

Leciona em algum nível da educação básica? Qual? _____

OBS: Este questionário destina-se apenas à coleta de dados por parte deste discente, desta forma, nada do que aqui for relatado será utilizado para outros fins que não seja a pesquisa científica, a identificação por parte do questionado não se faz necessária, assim como não há obrigação quanto a sua participação neste projeto.

- 1- Nas disciplinas as quais já ministrou, ou está ministrando foi, ou é necessário o uso das demonstrações em alguma delas? Qual a reação dos alunos nas primeiras demonstrações?
- 2- Como o (a) senhor (a) procede na hora de apresentar as demonstrações aos seus alunos?
- 3- Quais as principais dificuldades que um aluno do ensino superior pode encontrar na hora de fazer uma demonstração na linguagem matemática?
- 4- Como mediador no processo de aprendizado de muitos alunos, o (a) senhor (a) acha que as demonstrações, mesmo da forma mais simples podem ser utilizadas na educação básica? Com qual finalidade?
- 5- O (a) senhor (a) acha que as demonstrações constituem uma prática que deve ser utilizada com frequência nos cursos de formação, ou acha que a mesma é irrelevante na formação de um bom professor de matemática? Discorra brevemente.
- 6- Elenque alguns termos frequentemente utilizados quando se fala em demonstrações, e fale um pouco sobre cada um.
- 7- Quais os requisitos que uma boa demonstração deve cumprir? O que deve conter para que atinja o objetivo a que se propõe?
- 8- No passo a passo de uma boa demonstração, existem pontos que não podem ser perdidos de vista? Quais?
- 9- Quais elementos podem ser considerados indispensáveis na hora de definir um objeto matemático? Principalmente os que devem ser demonstrados na linguagem matemática.

ANEXO I



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ

DIRETORIA DE ENSINO

ANEXO II - MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Módulo I	Módulo II	Módulo III	Módulo IV	Módulo V	Módulo VI	Módulo VII	Módulo VIII
NB1. Atividades Linguísticas (45h/10h)	NP2. Educação, Sociedade e Culturas (60h/10h/NP1)	NP4. Psicologia da Educação (60h/10h/NP2)	NP6. Conhecimento Pedagógico (60h/10h/NP4;NP5)	NP8. Didática do Ensino de Matemática (60h/10h/NP6)	NB4. Libras (60h/10h/NP9)	NP11. Educação Profissional e Tecnológica (45h/10h/NP10)	NE19. Modelagem Matemática (60h/NE13)
NB2. Tecnologias na Educação (45h/10h)	NP3. Desenvolvimento Profissional (45h/NP1)	NP5. Política e Gestão da Educação Nacional (60h/10h/NP2)	NP7. Pesquisa em Ensino de Matemática (60h/NP3;NP4)	NP9. Educação Inclusiva (60h/10h/NP6)	NP10. Educação de Jovens e Adultos (45h/10h/NP8)	NE16. Matemática Comercial e Financeira (60h/10h/NE6)	NE20. História da Matemática (60h/10h/NE9;NE13;NE18).
NB3. Inglês Instrumental (45h/10h)	NE3. Geometria Plana (60h/10h)	NE7. Cálculo Integral com uma Variável (60h/10h/NE4)	NE10. Desenho geométrico (60h/10h/NE3)	NE12. Introdução à Álgebra Linear (60h/10h/NE6;NE9)	NE14. Estatística (60h/10h/NE5;NE7)	NE17. Cálculo Numérico (60h/10h/NE7)	NE21. Tópicos de Análise Real (60h/NE7)
NP1. Filosofia da Educação (60h/10h)	NE4. Cálculo Diferencial com uma Variável (60h/10h/NE2)	NE8. Geometria Espacial (60h/10h/NE3)	NE11. Cálculo Diferencial e Integral com Várias Variáveis (90h/NE7)	NE13. Equações Diferenciais (60h/10h/NE11)	NE15. Introdução à Teoria dos Números (60h/10h/NE6)	NE18. Estruturas Algébricas (60h/NE1;NE6)	NE22. TCC (30h)
NE1. Elementos de Matemática (60h)	NE5. Análise Combinatória e Probabilidade (60h/10h/NE1)	NE9. Geometria Analítica (60h/10h/NE3)					
NE2. Funções, Gráficos e Suas Aplicações (90h/10h)	NE6. Teoria dos Conjuntos e Lógica Matemática (60h)						
		Núcleos Temáticos I 60h	Núcleos Temáticos II (60h/NT I)	Prática Profissional I 100h	Prática Profissional II (100h/PP I)	Prática Profissional III (100h/PP II)	Prática Profissional IV (100h/PP III)
C/H NC: 195h C/H NE: 150h C/H PCC: 50h C/H TOTAL: 395h	C/H NC: 105h C/H NE: 240h C/H PCC: 40h C/H TOTAL: 385h	C/H NC: 120h C/H NE: 180h C/H PCC: 110h C/H TOTAL: 410h	C/H NC: 120h C/H NE: 150h C/H PCC: 80h C/H TOTAL: 350h	C/H NC: 120h C/H NE: 120h C/H PCC: 40h C/H PP: 100h C/H TOTAL: 380h	C/H NC: 105h C/H NE: 120h C/H PCC: 40h C/H PP: 100h C/H TOTAL: 365h	C/H NC: 45h C/H NE: 180h C/H PCC: 30h C/H PP: 100h C/H TOTAL: 355h	C/H NE: 210h C/H PCC: 10h C/H PP: 100h C/H TOTAL: 320h

Carga Horária Distribuída

NB – Núcleo Básico: -----	195h
NP – Núcleo Pedagógico: -----	615h
NE – Núcleo Específico: -----	1.350h
PCC – Prática como Componente Curricular: -----	400h
PP – Prática Profissional: -----	400h
AACC – Atividades Acadêmico-Científico-Culturais: -----	200h
TOTAL: -----	3.160h