



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TENCNOLOGIA  
DO PIAUÍ - IFPI  
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO-PI  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**ANDERSON PAES LANDIM ALVES**

**FORMULAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL: DA FORMA  
INTEGRAL À COVARIANTE**

**SÃO RAIMUNDO NONATO - PI  
2022**

ANDERSON PAES LANDIM ALVES

FORMULAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL: DA FORMA INTEGRAL À  
COVARIANTE

**Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato-PI.**

Orientador: Prof. Dr. Francisco Nogueira  
Lima

---

A474f      Alves, Anderson Paes Landim  
              Formulação das equações de Maxwell: da forma integral à covariante /  
              Anderson Paes Landim Alves. – 2022.

51 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto  
Federal do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Nogueira Lima.

1. Equações de Maxwell. 2. Teorema de Gaus. 3. Forma Covariante. I.  
Título

CDD – 530.1

---

Ficha catalográfica: Josué de Moura Costa (Bibliotecário) – CRB3/1130

**ANDERSON PAES LANDIM ALVES**

**FORMULAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL: DA FORMA INTEGRAL À  
COVARIANTE**

**Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato-PI:**

**Data de aprovação:**

**13/07/2022**

**Banca Examinadora:**

---

**Orientador: Prof. Dr. Francisco Nogueira Lima**

---

**Prof. Dr. Antônio de Sousa Ribeiro**

---

**Prof. Me. Valdeci Nunes Costa**

*Dedicatória: Dedico este trabalho à minha mãe que tanto me ensinou e me apoiou, à minha irmã e ao meu pai por sempre me ajudarem nessa trajetória, e à minha namorada por ser minha companheira e amiga. Os grandes autores desse trabalho são vocês.*

## **AGRADECIMENTOS**

Durante toda a minha vida acadêmica, passei por inúmeras dificuldades, situações essas que me deram todas as razões necessárias para desistir durante essa jornada. E não seria errado desistir. Nesses momentos, talvez seria um alívio pra mim. Mas, em nenhum momento, cogitei essa possibilidade, mesmo parecendo que tudo dava errado, mesmo querendo abraçar o mundo com as mãos e me sentindo incapaz de fazê-lo. Tudo isso graças às pessoas que estavam ao meu redor, os verdadeiros autores desta obra, os construtores da minha trajetória, os quais agradeço e dou o reconhecimento nesse momento. Ao meu Deus Jeová, que se tornou todas as coisas necessárias, assim como o significado do Seu Nome, para que eu aguentasse nos momentos mais difíceis e tivesse sabedoria e entendimento. Agradeço a Ele por todos os momentos que vi os dedos das suas mãos trabalharem diante de mim, e agradeço a Ele pelas vezes que trabalhou no anonimato, assim como gosta de fazer todas as coisas. Agradeço primeiramente e inteiramente a Jeová, porque isso e todas as coisas que se seguem, provém Dele. Agradeço a minha mãe que foi e é uma das grandes inspirações da minha vida, que me ensinou o verdadeiro significado da vida e me apresentou à verdade de Deus, pela demonstração de amor diário, pelos cuidados, carinhos e por ter me levantado nos momentos em que eu estava fraco, pelos princípios que me ensinou e ensina até hoje e que sempre irei guardá-los. Obrigado pelos os seus ensinamentos. A minha irmã pelas contribuições como orientadora desse projeto, sempre que possível, pela generosidade e pelas palavras de apoio, por ser minha amiga. Me orgulho de ser seu irmão. Agradeço a minha namorada por ter sido minha companheira, minha amiga, e pelas vezes em que me orientou na elaboração deste trabalho. Agradeço a ela por tornar esses momentos mais leves, por tornar mais fácil e prazerosa essa jornada, por ter ficado ao meu lado nos momentos mais difíceis e por me dar a certeza, dia após dia, que você é a pessoa que eu quero pra sempre em minha vida. Ao meu pai por todo apoio, por sempre ter acreditado em mim, pelo orgulho que vejo em seus olhos ao falar dos filhos. Vocês são minha base. Agradeço aos meus amigos, e à minha professora Mauriléia, por lutar, literalmente, por mim algumas batalhas. Agradeço ao meu professor orientador Francisco Nogueira Lima que, enquanto diretor geral, me ajudou na aprovação de um estágio que foi fundamental para que eu concluísse minha graduação.

## RESUMO

As equações de Maxwell fazem parte, em conjunto, da base fundamental do que chamamos de eletromagnetismo clássico, tratando-se de equações diferenciais parciais capazes de descrever, direta ou indiretamente, através da aplicação de teoremas matemáticos apropriados e manipulações algébricas, a totalidade dos fenômenos de natureza eletromagnética, com contribuições para óptica clássica, além de consequências diretas no campo das aplicações tecnológicas. O que denominamos força de Lorentz também se insere nesse contexto de bases fundamentais da teoria eletromagnética, que é um ramo da física ativo nas mais diversas áreas de pesquisa teóricas, experimentais e/ou aplicadas. Neste trabalho mostramos as formulações integral, diferencial e covariante para as equações de Maxwell. Existem algumas representações matemáticas das equações de Maxwell que, em essência, descrevem os mesmos fenômenos físicos, muito embora determinada formulação mostre-se mais adequada, a depender dos fenômenos físicos investigados, etc. A formulação covariante (em termos de tensores covariantes de campo) destas equações é bastante útil em teoria de campos e, em particular, no estudo da relatividade restrita. As formas integral e diferencial são abordadas mais comumente nos currículos de graduação em física, em nível de licenciatura. Neste trabalho, além das duas formulações mais comuns, mostraremos através das deduções matemáticas que se fizerem necessárias, as equações de Maxwell escritas em sua forma mais compacta, covariante, em termos de um quadritensor que claramente unifica os campos elétrico e magnético em um único ente físico/matemático, o campo eletromagnético. Com a formulação covariante, visamos ampliar a formação de um aluno iniciante em um curso de eletromagnetismo introdutório, inserindo bases físicas fundamentais que, de certo, encontrarão forte relevância para vida acadêmica desse, tanto para os que seguirão para Pós-Graduação nas áreas acima apontadas, quanto para qualquer estudante de Física em nível de graduação e/ou pós-graduação, independente da área específica eventualmente escolhida.

**Palavras-Chave:** equações de Maxwell; teorema de Gaus; teorema de Stokes; forma covariante; tensores.

## ABSTRACT

Maxwell's equations are part, together, of the fundamental basis of what we call classical electromagnetism, being partial differential equations capable of describing, directly or indirectly, through the application of appropriate mathematical theorems and algebraic manipulations, the totality of phenomena of an electromagnetic nature, with contributions to the electromagnetic phenomena, with contributions to classical optics, besides direct consequences in the field of technological applications. What we call Lorentz force is also in this context of fundamental bases of electromagnetic theory, which is a branch of physics active in various areas of theoretical, experimental and/or applied research. In this paper we show the integral, differential and covariant formulations for Maxwell's equations. There are some mathematical representations of Maxwell's equations that, in essence, describe the same physical phenomena, although particular formulation proves to be more appropriate, depending on the physical phenomena investigated, etc. The covariant formulation (in terms of covariant field tensors) of these equations is very useful in field theory and, in particular, in the study of special relativity. Integral and differential forms are commonly used in undergraduate physics curricula. In this paper, in addition the two most common formulations, we will show, through the mathematical deductions that Maxwell's equations written in their most compact form, covariant, in terms of a quadraten-sor that clearly unifies the electric and magnetic fields into a single physical/mathematical entity, the electromagnetic field. With the covariant formulation, we aim to extend the training of a beginning student in an introductory electromagnetism course, inserting fundamental physical bases that, for sure, will find strong relevance for their academic life, as much for those who will go on to graduate studies in the areas mentioned above, as for any physics student at the undergraduate and/or graduate level, regardless of the specific area eventually chosen.

**Keywords:** Maxwell's equations; Gauss's theorem; Stokes' theorem; covariant form; tensor.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$  Símbolo do campo elétrico

$B$  Símbolo do campo magnético

$\nabla$ . O operador de divergência

$\nabla \times$  Rotacional

$\frac{\partial}{\partial t}$  derivada parcial em relação ao tempo

$dA$  elemento vetorial diferencial da área de superfície  $A$

$dl$  elemento de vetororial diferencial do comprimento de  $l$

$\varepsilon_0$  permissividade do meio

$\mu_0$  permeabilidade do meio

$J$  Densidade de corrente

$\oint E \cdot dA$  integral de linha do campo elétrico

$\oint B \cdot dl$  integral de linha do campo magnético

## SUMÁRIO

|          |                                                                      |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO.....</b>                                               | <b>10</b> |
| 1.1      | LEI DE AMPÈRE – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL.....                    | 16        |
| 1.2      | LEI DE FARADAY-LENZ – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL.....              | 18        |
| 1.3      | LEI DE GAUSS PARA O ELETRICIDADE – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL..... | 20        |
| 1.4      | LEI DE GAUSS PARA A MAGNETISMO – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL .....  | 23        |
| 1.5      | EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE.....                                         | 24        |
| <b>2</b> | <b>FORMALISMO COVARIANTE .....</b>                                   | <b>26</b> |
| <b>3</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....</b>                        | <b>35</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS.....</b>                                              | <b>37</b> |
|          | <b>APÊNDICE A – GRANDEZAS ELETROMAGNÉTICAS.....</b>                  | <b>40</b> |
|          | <b>APÊNDICE B – RELATIVIDADE E ALGEBRA TENSORIAL.....</b>            | <b>43</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

A princípio, a humanidade não possuía conhecimento sobre o eletromagnetismo e nem mesmo sobre a sua relação com a eletricidade. Por isso, os campos de pesquisas na área da eletricidade e magnetismo eram estudados de forma separada, sem relações significativas entre si. Para tratar desses fenômenos, utilizava-se as conquistas de Ampère e Gauss para a eletricidade e o magnetismo [1]. Foi então que Faraday observou uma relação entre essas duas áreas, ao perceber a existência de um campo magnético em torno de um fio por onde passava uma corrente elétrica. Porém, “Faraday, limitado por sua formação atípica e autodidata, jamais pôde ou interessou-se em formalizar suas teorizações em equações matemáticas, deixando-nos suas concepções elaboradas de forma qualitativa” [2, p.1].

Foi então que, James Clerk Maxwell, físico nascido em Edimburgo, Escócia, por volta do século XIX, juntou as descobertas existentes até a sua época, de Ampère, Faraday, Lenz e Gauss. Então “[...] debruçou-se sobre trabalhos desenvolvidos previamente por outros físicos europeus e unificou aquelas teorias apresentadas, até então, de forma separada [...]”, [3, p.1] acrescentando, assim, sua contribuição primordial para o campo do eletromagnetismo de que a variação de um campo elétrico poderia, por sua vez, produzir um campo magnético induzido [1]. Desde então, ficou conhecido por ter criado a teoria do eletromagnetismo, condensada em um arranjo de equações diferenciais [4].

As equações de Maxwell, inspiradas nos trabalhos de outros cientistas, foram fundamentais para que pudéssemos ter o conceito de campo como temos hoje. A definição de campo elétrico dada por Passos et al [4] é de que este seria gerado por uma determinada carga, que não se movimenta no espaço e, por sua vez, gera um campo elétrico. Para o autor, a definição de campo magnético seria quando uma determinada carga no espaço possui movimento e, por sua vez, uma velocidade, pois através desse movimento, uma corrente elétrica é gerada, criando, assim, um campo magnético. A união entre esses dois conceitos, entretanto, só foi dada após o trabalho de Maxwell. Seu conjunto de equações diferenciais permitiu perceber a relação existente entre essas duas áreas.

Por meio dessas equações, tornou-se possível a explicação, através de métodos matemáticos, de conceitos que anteriormente não eram bem compreendidos tanto sobre fenômenos elétricos quanto magnéticos. Graças a essas descobertas, ficou assim demonstrado que essas áreas de pesquisa; da eletricidade e do magnetismo, fazem parte, na verdade, do mesmo ramo de pesquisa.

Para Oberziner [5], outra grande descoberta foi de que a velocidade de propagação

do campo magnético e também do campo elétrico era de 300 000 000 m/s. Tal parâmetro pôde ser comparado com as medições da razão entre as unidades eletrostática e eletrodinâmica — em 1856 feito por Wilhelm Weber e Rudolf Kohlrausch, na Alemanha — onde conseguiram obter padrões de medidas da carga elétrica; eletrostática e eletrodinâmica e, descobrindo, assim, um valor equivalente ao da velocidade da luz. Tal valor foi reconhecido, posteriormente, por Bernhard Riemann [2].

Vale referenciar que Faraday não possuía, à sua disposição, o cálculo da velocidade, tampouco tinha condições de obtê-la à sua época, pois a corrente de deslocamento e a constatação de que variações de campo elétrico poderia gerar campo magnético foram questões introduzidas por Maxwell. Ainda, Maxwell, após identificar a velocidade da propagação das perturbações pelo seu “mar de vórtices” – “[...] ou seja, um redemoinho do meio material ao redor do fio com corrente [...]” [6, p.5], com o uso da constante de Weber, firmou entendimento de que as ondas se moviam na mesma velocidade da luz [2].

Com isso, Maxwell chegou à conclusão de que a variação de campo elétrico produz, por sua vez, um campo magnético [5]. E, ao calcular a velocidade através das flutuações do campo, chegou no valor próximo de 300 000 000 m/s, que é a velocidade da luz. Sendo assim, logo, “[...] a luz nada mais era do que uma radiação eletromagnética [...]” [5, p.11]. Dessa forma, tendo em vista que nós não podemos ver campos, mas podemos perceber os seus efeitos, essas equações, organizadas da forma correta, nos mostram uma onda formada por campos eletromagnéticos. Essa onda se movimenta na velocidade da luz, e possui energia e momento tal como a luz, mostrando, assim, que essa onda é a própria luz. Por meio dos conhecimentos sobre campos elétricos e como eles se comportam, é possível entender melhor o mundo a nossa volta.

Maxwell revolucionou o conhecimento científico, mudou as concepções na sua época sobre o assunto, e criou uma nova forma de estudar, com outros olhos, a teoria do eletromagnetismo [4]. Hoje em dia, por meio dessas descobertas, podemos ter, em nosso cotidiano, a existência de aparelhos que fazem uso de regras do eletromagnetismo, como linhas de transmissão, antenas e outros equipamentos que usam uma corrente de deslocamento para o seu funcionamento [4]. Segundo Ota [7], o objetivo dessa teoria é mostrar a criação dos campos, como se comportam e quais são os seus efeitos. Sua importância deu-se pelo fato de que, com ela, pode-se entender inúmeros eventos que acontecem no universo, como por exemplo, explicar acontecimentos que ocorrem no nosso próprio corpo, como a parte física dos nossos sentidos; tato, visão e transmissão de informações ao cérebro. Como mostrado pelas equações de Maxwell, a onda eletromagnética é a

própria luz, e a luz pode ter diferentes tipos de frequência, logo, essas ondas eletromagnéticas podem ter espectros eletromagnéticos diferentes (podem ser diferentes umas das outras). Algumas ondas, por terem o comprimento de onda muito grande, não são capazes de penetrar o nosso corpo e interagir com ele, portanto, a sua exposição não provoca danos; servem para sinais de celular, rádio e tvs. Frequências menores interagem com o corpo humano, e é esses tipos de ondas que são usadas em exames de tomografias, devendo ser controlado a sua exposição a esse tipo de frequência, devido a sua interação com as moléculas do corpo humano.

Apesar de conhecermos, hoje em dia, as leis do magnetismo como sendo quatro equações, as quais explicam eventos acerca da eletricidade e do magnetismo [4], consoante Nogueira [3], às teorias do eletromagnetismo apresentadas por Maxwell constituía um total de 20 equações com 20 variáveis. Posteriormente, Oliver Heaviside, um cientista inglês, reduziu todas as informações em 4 equações — ou postulados. Conquanto, “elas nunca foram provadas, ou seja, não há garantia de que as equações de Maxwell sejam exatas. Todavia, até hoje, as precisas medições experimentais nunca as contradisseram [5].

Dessa forma, cada uma dessas equações recebe uma ou mais denominações. A exemplo disso, as equações que dizem respeito a interação entre campo elétrico e as cargas que geram esse campo é conhecida como lei de Gauss. Do mesmo modo, as equações que tratam dos fenômenos de indução eletromagnética é denominada lei de Faraday [3]. No entanto, as equações que remetem às duas maneiras de gerar um campo elétrico são a lei de Gauss da eletricidade e a lei de Faraday. Além disso, no que diz respeito às equações que se referem a geração de campo magnético, essas são a lei de Gauss do magnetismo e lei de Ampère-Maxwell [1].

Se considerarmos o vácuo, é importante escrevermos desde já as quatro equações de Maxwell, em sua forma local ou diferencial, no sistema internacional de unidades, conforme segue [5]:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

O conjunto de equações acima será visto em detalhes no capítulo 1.1. A equação (1) refere-se à lei generalizada de Ampère a qual aponta como a densidade de deslocamento de corrente no tempo  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , juntamente com os efeitos oriundos da densidade superficial de corrente. Já a equação (2) refere-se a lei Faraday, a qual nos mostra como a variação do campo elétrico é igual a variação negativa da indução magnética no tempo. A equação (3) é a lei de Gauss para campos elétricos e nos mostra que a densidade de carga é uma fonte de linhas de fluxo do campo campo elétrico. A equação (4) é a lei de Gauss para campos magnéticos e descreve a inviabilidade de conhecermos os polos magnéticos devido ao fluxo estar sempre em um caminho fechado e não se propagar de uma origem [4].

Essas 4 equações, apresentadas pela primeira vez em 1873, descreviam tanto fenômenos elétricos quanto magnéticos. Por meio delas, foi possível esclarecer, destarte, que tanto a eletricidade quanto o magnetismo, diferentemente do que se acreditava à época, pertenciam, na verdade, ao mesmo campo de pesquisa [5].

Sobre como as equações de Maxwell são escritas, podemos dizer que as quatro equações do eletromagnetismo podem ser escritas de três maneiras diferentes: na forma integral, na forma diferencial e na forma covariante. Essas três formas correspondem a modos diferentes de expressar matematicamente a mesma concepção da natureza. Com isso, podemos dizer que a forma integral dessas equações também pode ser dita global, uma vez que campos em diferentes pontos são igualmente relacionados a causas distribuídas por outras regiões do espaço. já, no que diz respeito a forma diferencial, essa relaciona campos em um ponto do espaço-tempo a outras grandezas neste mesmo ponto. Utilizaremos essa para a transformar as equações de Maxwell no formalismo covariante se seção 2. [7].

As equações de Maxwell nos levam a conclusões de que não existem monopólios magnéticos, e de que os campos elétricos produzidos por cargas elétricas serão divergentes — no qual os campos elétricos possuem cargas positiva e, por sua vez, possuem força de afastamentos — ou convergentes — onde os campos elétricos são gerados por cargas negativas, logo, possuem força de aproximação.

Por outro lado, na visão de Oberziner [5], a forma integral das equações de Maxwell ficam melhor adaptadas quando desejamos expressar o campo elétrico pela indução magnética. A ideia aqui, com uso da forma integral, é restringir o domínio de estudo, atendo-

se a uma área para se estudar o campo magnético, a fim de não precisar trabalhar com planos cartesianos inteiros.

No que diz respeito a forma covariante das equações, no entendimento de Ota [7], dizer que algo é covariante significa dizer que, ao se observar eventos da natureza por um determinado referencial inercial, será obtido determinados valores que expressam leis da natureza. No entanto, ao se alterar este referencial inercial, os valores obtidos serão diferentes daqueles. Porém, acontece que, os mesmos meios físicos utilizados para se chegar a ambos resultados — apesar desses valores serem diferentes por conta da mudança do referencial — serão os mesmos; ou seja, a interpretação física é única. Para a autora, apesar de essa teoria ter sido formulada muito antes da teoria da relatividade proposta por Albert Einstein, esta estabelece perfeita harmonia com aquele. A qual afirma que referenciais inerciais são equivalentes no que diz respeito à aplicação das leis da física. Portanto, torna-se possível uma aplicação covariante das equações de Maxwell. Sobre o assunto, para Heras and Báes [8], os livros didáticos, disponíveis, de nível de graduação empregam unidades SI, e alguns dos livros didáticos de nível de pós-graduação, amplamente adotados, empregam unidades gaussianas. Assim, podemos ignorar as unidades  $\text{esu}$  e  $\text{emu}$ . Neste caso, três constantes são suficientes. todos para expressar as equações de Maxwell de forma independente de unidades como unidades gaussianas e SI.

Para o autor [8], a forma que os cursos trabalham com essas equações em unidades de medidas SI e gaussianas, não aparenta ser a melhor forma de abordagem pedagógica. Por conseguinte, para que, no final do curso, os alunos saibam expressar essas equações em qualquer tipo de unidade de medida, esse tipo de sistema pode servir como uma escolha instrutiva para auxiliar os alunos a resolverem problemas eletromagnéticos.

Outrossim, o tempo escasso da disciplina de eletromagnetismo no curso de licenciatura em física não permite ser detalhista o suficiente nas explicações em sala de aula sobre as leis de Maxwell, em que, em alguns casos, os graduandos podem ficar sem ver, ou ver superficialmente, a forma covariante das equações de Maxwell, pois essa demandaria um tempo maior para sua explicação e assimilação do conteúdo — algo que se tornaria inviável no decorrer da disciplina, tendo em vista a relevância de outros pontos a serem explanado ao longo do curso. A existência desse trabalho deu-se pela importância de uma complementação para aqueles que desejam um material mais completo com uma linguagem objetiva e direta sobre o assunto, servindo como material de apoio aos alunos — e público em geral — que desejam ter uma aquisição mais completa sobre o assunto, e melhorar, ou acrescentar, pontos a serem visto no decorrer das aulas

da disciplina. Visto que não é um tópico abordado regularmente, não significa que não seja importante, já que em qualquer pós-graduação em física, a forma covariante é um tópico obrigatório. A dificuldade de se encontrar um material detalhista, que demonstre de forma clara todos os passos para se chegar nos resultados e discuti-los de forma que o leitor possa visualizar e entender as ideias e conclusões apresentadas pelas equações, e com uma linguagem objetiva sem “juridiquês” — pois na maioria dos livros didáticos, pressupõe-se que o aluno já tenha um determinado nível de conhecimento — torna-se fundamental a elaboração de um trabalho como esse; trazendo todos os pontos a respeito do assunto, que possam ser compreendidos por aqueles que tiveram algum dano no processo de ensino durante a graduação, e sem prejuízo ou perda da qualidade para aqueles que queiram uma complementação aprofundada do conteúdo.

Levando em consideração a importância dos seus estudos e suas conclusões, este trabalho tem a incumbência de desenvolver de forma explicativa e detalhada, servindo como material de consulta para os acadêmicos de cursos de licenciatura em física ou áreas correlatas, sobre as três formas das equações de Maxwell: integral; diferencial; covariante; no que diz respeito aquela, fica mais adequado utilizá-la quando pretendemos calcular o campo elétrico gerado por indução magnética [5]. No que se refere a esta, é comum ser apresentado na grade curricular nos cursos de bacharelado em física, e pouco explorado nos cursos de licenciatura em física — o qual este trabalho será voltado como meio de acesso e suplementação desta lacuna. O trabalho será orientado para a explicação das diferentes formulações das equações de Maxwell supracitadas, seu surgimento e principais cientistas que publicaram obras acadêmicas que serviram de inspiração para a criação das suas equações para o eletromagnetismo. Assim, apresentaremos as formas integral, diferencial e covariante das equações de Maxwell, e, em seguida, discutir as vantagens do seu uso juntamente a elegância das equações. Sendo assim, o trabalho não tem como foco o desenvolvimento de formalismo matemáticos, os quais constaram como apêndices, mas fazer o uso dessa matemática para a compreensão das formulações das equações que serão apresentadas.

Assim, no capítulo 1.1 ao 2 deste trabalho, demonstramos, de forma pormenorizada, as equações de Maxwell na forma diferencial e integral, para uma melhor compreensão das grandezas eletromagnéticas utilizadas nesse capítulo, indicamos ao leitor que veja o apêndice A deste trabalho. A seguir, utilizando conhecimentos prévios de espaço de Minkowski e operações com tensores discriminados no apêndice B, demonstramos no capítulo 2 o formalismo covariante das equações de Maxwell.

Primeiramente, para conseguirmos a forma integral das equações de Maxwell, nós

vamos utilizar, nas equações que possuem rotacional (1) (2), o teorema de Stokes [9], disponível no Apêndice A.

## 1.1 LEI DE AMPÈRE – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL

A equação (1) é fruto de uma descoberta muito importante feita por Hans Cristian Oersted, em 1820, na qual esse percebeu que, quando uma corrente elétrica percorre um fio, existe, também, um campo magnético ao redor desse. Contudo, as deduções dessa observação por meios matemáticos, da interação de correntes estacionárias e, ainda, sobre a equivalência entre matéria magnetizada e sistemas de correntes permanentes, foi realizada pelo francês André Marie Ampère [1] [10] [11]. Apesar de grande parte dos livros didáticos, atualmente, promoverem uma visão deturpada de que o principal objetivo de Ampère era o de compreender como uma corrente elétrica poderia gerar um campo magnético, Ampère afirmou, de forma clara, que era contrário a ideia de campo magnético circulando um fio condutor –matéria elétrica ou, de forma análoga, campo magnético [6].

Por essa razão, Ampère não chegou a nenhuma expressão matemática que abor-dasse o termo campo magnético gerado devido uma corrente elétrica. Em vez disso, considerou a força à distância entre dois elementos de correntes, a saber,  $I_1 d\vec{l}_1$  juntamente com  $I_2 d\vec{l}_2$  [6].

Dessa forma, é evidente que a linha de pensamento seguido por Ampère, das interações eletrodinâmicas por ação à distância entre elementos correntes, é diferente dos pensamentos da física atual, medida por campos magnético, pois, hoje em dia, esse interação é dada por meio do conhecimento de campos magnéticos [6].

Assim, a lei de Ampère, em termos diferenciais, pode ser escrita de seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5)$$

Nesse caso,  $J$  é a densidade volumétrica de carga [6]. Nesse sentido, levando em consideração todos esses argumentos supramencionados, não há indícios de que Ampère tenha formulado essa lei na forma diferencial ou integral [6].

Sendo assim, o primeiro a chegar nessa equação (5), foi Maxwell , em 1855. Além disso, ele notou que essa equação não estava completa e, assim, fez uma correção acrescentando a corrente de deslocamento na equação [6]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

Essa é a lei de Ampère na forma diferencial, a qual é válida para campos dependentes do tempo [12]. Esse foi um dos passos mais importantes para se concretizar as equações de campo elétrico e campos magnéticos estáticos; eletrostática e magnetostática, no qual, aquele diz respeito a cargas elétricas que estão estáticas, e este dizemos que as correntes estão estáticas [13].

Outrossim, a equação (6), está correta do modelo como se encontra. Além disso, essa equação nos fornece informações suficientes quando se trata de um domínio microscópico [12]. Porém, quando se utiliza determinados materiais, os quais estão sujeitos a determinadas polarização elétricas e eletromagnéticas – característica de uma onda que determina a variação da direção da onda no tempo, juntamente com os valores do vetor campo elétrico [14] – existe um modelo adequado de descrevê-las, pois, tendo em vista que dentro da matéria polarizada, temos um acúmulo de cargas e correntes, nas quais você não tem controle direto, reformulamos, desse modo, as equações de Maxwell, de forma a fazer referência, exclusivamente, àquelas que podem ser controladas diretamente, e, assim, desconsiderar informações desnecessárias [15]. Para isso, a equação (6) no domínio macroscópico, pode ser expressa da seguinte maneira [12].

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7)$$

Para obtermos a forma integral desta equação, vamos definir uma superfície  $S$  de contorno  $C$ , e vamos calcular o seu fluxo [12], ou seja:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} d\vec{A} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} d\vec{A} \quad (8)$$

Utilizando o teorema de Stokes [12] [9],

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} d\vec{A} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

para transformar, em seguida o lado esquerdo, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} d\vec{A} + \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} d\vec{A} \quad (10)$$

Reescrevendo a equação acima, chegamos no seguinte resultado:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = i + i_D \quad (11)$$

A equação (10) e (11) é a lei de Ampère-Maxwell em sua forma integral.

## 1.2 LEI DE FARADAY-LENZ – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL

Outra grande descoberta para área do eletromagnetismo foi realizada por Michael Faraday em 1831 [1]. As equações acima de Ampère demonstram que campos elétricos podem gerar, por sua vez, campos magnéticos. Porém, é razoável perguntar-se se o inverso pode acontecer; se corrente elétrica, ou campos elétricos podem gerar campos magnéticos. Esse foi o motivo dos experimentos de Faraday nesse quesito [12]. Dessa forma, por meio deles, Faraday comprovou que um campo magnético que varia induz um campo elétrico [15]. Com isso, temos a lei de Faraday na forma diferencial.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12)$$

Levando em consideração uma superfície  $S$  de contorno  $C$ , e, em seguida, integrando os dois lados da equação, temos:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (13)$$

Utilizando teorema de Stokes – onde o fluxo do rotacional do vetor, é a própria circulação do vetor, no caso,  $E \cdot d\vec{l}$  ao longo de todo o contorno.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (14)$$

Essa é a equação de Faraday em sua forma integral [6]. A equação (14) nos mostra que a circulação de  $\vec{E}$  em torno de um contorno  $C$  ou de uma determinada superfície  $S$  é determinada pela taxa de variação temporal do fluxo magnético que faz a ligação da superfície delimitada por esse contorno/superfície [16].

Tanto a equação (12) quanto a equação (14) são válidas em situações distintas: enquanto aquela o termo relevante é, apenas, a variação temporal do campo magnético, nesta, o fator importante para produção de um campo elétrico é a variação temporal do fluxo magnético através da superfície  $S$  que tem contorno  $C$  – pode acontecer tanto pela variação do campo magnético quanto na área que circula o fluxo [12]

Dessa forma, enquanto a equação (12) nos mostra que, independentemente de existir um circuito ou não, qualquer ponto no espaço, que tenha uma variação do campo magnético no tempo, proporciona o aparecimento de um campo elétrico nesse ponto, a equação (14) nos mostra que, em uma superfície  $S$  de contorno  $C$  e área  $A$ , onde passa um fluxo magnético, qualquer variação desse fluxo, produzirá, por sua vez, um campo elétrico e uma corrente induzida [15].

Desse modo, temos, destarte, que a equação (12) é válida para cada ponto no espaço, e a equação (14) é válida para uma superfície de tamanho finito [15].

### 1.3 LEI DE GAUSS PARA O ELETRICIDADE – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL

Outra grande descoberta que nos permite, hoje em dia, descobrirmos formas mais simples de resolver problemas complexos por meio da simetria, esférica, cilíndrica ou planar – situações nas quais é possível identificar grandeza, forma e posição de cargas que se mostrem distribuídas em volta de um eixo ou em lados opostos – e, assim, calcular campos elétricos por meio de poucas equações foi descoberta por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [17].

Dessa forma, quando se trata de distribuição contínua de carga, é necessário lidarmos com a densidade, ou variação de cargas em linha, superfícies e volumes. Com isso, temos  $dq$  que é o elemento de carga infinitesimal, o qual se relaciona com a densidade da seguinte forma [9]:

$$\frac{dq}{d\vec{l}} = \lambda$$

$$\frac{dq}{d\vec{S}} = \sigma$$

$$\frac{dq}{d\vec{V}} = \rho$$

Com isso, podemos representar a variação de carga por elemento infinitesimal, na qual, para linha, temos  $\lambda \cdot d\vec{l}$ , para superfície,  $\sigma \cdot d\vec{S}$ , e, para volume,  $\rho d\vec{V}$ , com  $d\vec{l}$ ,  $d\vec{S}$  e  $d\vec{V}$ , que são discriminados respectivamente como: elementos infinitesimais de linha, superfície e volume [9]. Considerando o caso de uma carga dentro de uma superfície fechada:

$$dq = \rho d\vec{V}$$

$$\int \int \int_V \rho d\vec{V} = q$$

no qual  $q$  é nossa carga total

$$q = \int \int_F \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V \rho d\vec{V}. \quad (15)$$

temos

$$\int \int_F \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) d\vec{V}$$

ou

$$\int \int \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) d\vec{V} = \int \int \int_V \rho d\vec{V}$$

Portanto, para um determinado  $V$  arbitrário, temos a lei de Gauss no formalismo diferencial [9]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (16)$$

A lei de Gauss em sua forma diferencial (16) é útil em alguns problemas, os quais a variação do vetor campo elétrico no espaço é determinado em um lugar específico. Dessa forma, é possível encontrar o volume de densidade de carga nesse local com a forma diferencial supracitada. E, ainda, se o volume de densidade de carga é conhecido, é possível determinar, usando a forma diferencial, a divergência do campo elétrico [18].

A forma integral da lei de Gauss para a eletricidade pode ser útil nas seguintes situações: para nos fornecer informações sobre a distribuição de cargas elétricas, encontrando o fluxo elétrico por meio da superfície que envolve essa carga; para nos fornecer informações sobre o fluxo elétrico através de uma superfície fechada, encontrando o total de cargas elétricas entorno dessa superfície [18]. Pode-se definir o fluxo elétrico, o qual é representado pela letra  $\Phi_E$ , como sendo o total de linhas de campo elétrico, representado pela letra  $E$ , que atravessam a superfície gaussiana. Dessa maneira, se há mais linhas de campo saindo do que entrando na superfície, o fluxo será positivo, o contrário será negativo, e, ainda, no caso de os número de linhas de campos que entram na superfície forem iguais aos que saem dessa superfície, dizemos que o fluxo através da superfície é nulo [1].

A fim de obtermos a forma integral da lei de Gauss para a eletricidade, devemos considerar uma superfície  $S$  que está envolvendo uma determinada carga  $Q$ . Com isso sabemos que o campo elétrico, representado pela letra  $E$ , gerado pela carga  $Q$  é definido como sendo:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Com isso, podemos obter o fluxo do campo elétrico que atravessa essa superfície  $S$  integrando o campo elétrico  $\vec{E}$ .

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_E$$

Como  $\vec{E}$  é constante, podemos tira-lo da integral:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \oint_S d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

É possível perceber que o fluxo que sai da superfície fechada gaussiana é um número que não depende do seu raio [1]. Com isso, podemos definir o fluxo como:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Assim, podemos escrever a lei de Gauss na forma integral como sendo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (17)$$

onde  $Q$  é a carga elétrica que está localizada no interior da superfície  $S$  [1]. O lado esquerdo da equação (17) nos mostra o número de linhas de campo elétrico que passa através da superfície fechada  $S$ , enquanto o lado direito nos mostra o resultado total de cargas dentro da superfície  $S$ , dividido pela constante de permissividade no espaço [18].

## 1.4 LEI DE GAUSS PARA A MAGNETISMO – FORMA INTEGRAL E DIFERENCIAL

Podemos entender, na física, o conceito de magnetismo como sendo o conjunto de fenômenos os quais envolvem a interação entre campos magnéticos, que estão, por sua vez, sob influência de correntes elétricas [1]. A lei de Gauss para campos magnéticos e campos elétricos são similares em sua forma, mas diferente em seu conteúdo. Sendo assim, a principal diferença entre campos elétricos e magnéticos surge do fato de que aquele pode ser isolado, em cargas "positivas" e em cargas "negativas", enquanto este sempre acontece em pares, o qual nós conhecemos, hoje em dia, como dipolos – polo norte e polo sul. Com isso, a ausência de monopolos magnéticos na natureza resulta na alteração do comportamento do fluxo magnético e na divergência de a campos magnéticos [18]. Além disso, a diferença entre linhas de campos elétricos e linhas de campo magnéticos está no fato de que estas formam curvas fechadas, enquanto aquelas começam e terminam em cargas elétricas, positivas ou negativas [19].

A natureza contínua das linhas de campo magnéticos proporciona uma representação simples da lei de Gauss para campos magnéticos na forma diferencial, escrita da seguinte forma [18]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

O lado esquerdo dessa equação, nos mostra uma descrição matemática da divergência do campo magnético – a tendência do campo magnético fluir mais para longe de um determinado ponto, do que fluir em direção a ele – enquanto a lado direito é, simplesmente, zero [18]. Com isso, a expressão acima nos mostra que o divergente do campo magnético é zero.

Considerando uma determinada superfície fechada  $S$  que envolve um determinado

volume  $V$ . Fazendo a integral de volume de ambos os lados da equação, temos:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Utilizando o teorema da divergencia,

$$\oint_{J(V)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

que representa a conservação do fluxo total  $\Phi_B$ . Assim:

$$\Phi_B = \oint_{J(V)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (18)$$

O lado esquerdo dessa equação nos mostra, por meio de uma descrição matemática, o fluxo do vetor campo elétrico através de uma superfície fechada – o número de linhas de campos que passa através da superfície  $S$ . O lado direito nos mostra que essa variação é zero [18].

Desse modo, a equação (18) nos mostra que o fluxo magnético resultante em uma superfície fechada é zero [9].

Em outras palavras, isso nos diz que se nós tivermos qualquer superfície fechada, de qualquer forma ou tamanho, o total de fluxo do campo magnético deve ser zero. Observe que isso não significa que o número de linhas de campo que entra na superfície é zero, mas que, para cada linha de campo que entra, deve existir outra linha de campo saindo desse volume. Dessa maneira, o fluxo de campo para dentro (negativo) deve ser exatamente igual ao fluxo de campo para fora (positivo) [18].

## 1.5 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Por meio das equações de Maxwell na forma diferencial, podemos demonstrar o comportamento andulatório. Sendo assim, ao calcularmos o rotacional da equação (12), ob-

temos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (19)$$

No lado direito da equação, temos coordenadas espaciais, representadas por  $\vec{\nabla}$  e coordenadas temporais. Assim, levando em consideração que ambos os termos podem permutar entre si e aplicando a identidade no lado esquerdo, podemos escrever [20]:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (20)$$

Levando em consideração que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , e substituindo  $\nabla \times \vec{B}$  pela equação (5), temos:

$$-\nabla^2 \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (21)$$

O que resulta em [20]:

$$\nabla^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (22)$$

Da mesma forma, a partir da equação (5), ao calcularmos o rotacional, obtemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (23)$$

O que, de forma analoga, resulta na seguinte equação de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (24)$$

Para Heras [20] o significado físico, ao se considerar a equação da continuidade como um axioma para a obtenção das equações de Maxwell, é uma das coisas mais bonitas na física. Essa equação nos mostra que a velocidade de propagação do campo magnético é a velocidade da luz. O que nos mostra que a luz é uma onda eletromagnética.

## 2 FORMALISMO COVARIANTE

As transformações de Lorentz nos mostram que as equações do eletromagnetismo são invariantes. Ao seu turno, no caso das transformações de Galileu, as equações do eletromagnetismo não são invariantes e, na época, acreditava-se que essas equações eram válidas apenas no referencial do éter. Por isso, Lorentz não entendia o significado físico em diferentes referenciais inerciais [21]. Sugerimos ao leitor que veja o apêndice B para mais informações sobre transformações de Lorentz.

Assim, partindo dos dois postulados de sua teoria, Einstein interpretou a equação de outro ponto vista, deduzindo, assim, as transformações matemáticas na mudança de referenciais inerciais que mantivessem a invariância das equações de Maxwell [21]. Com isso, o eletromagnetismo constituiu, assim, um ponto crucial para o desenvolvimento da teoria da relatividade, pois, conforme demonstrada, a covariância é um dos fundamentos dessa teoria. Nosso objetivo é demonstrar que é possível escrever as equações de Maxwell do eletromagnetismo por meio de quadri vetores e quadri tensores. Primeiramente vamos iniciar com o chamado quadri vetor corrente [22].

Ao considerarmos uma superfície fechada, em determinado referencial  $R$ , possuindo no seu interior cargas elétricas, caso aconteça algum fenômeno físico a quantidade de cargas que sai do interior da esfera deverá ser igual a quantidade de carga que entra no interior da esfera. Com isso, essa quantidade exata de cargas que entram e saem do interior da esfera, mostra que a lei conservação se verifica [21]. Dessa forma, a conservação de carga pode ser expressa da seguinte forma por meio da equação da continuidade [23]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

Sobre a equação (25), Griffiths [15] nos diz que esta mostra precisamente a conservação local de carga, oriunda das equações de Maxwell. A equação (25) está escrita de uma maneira que todas as derivadas das cargas estão do lado esquerdo. Desse modo, se escrevermos a divergência em coordenadas cartesianas [24], obteremos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

Vamos considerar as coordenadas em três dimensões e considerar como coordenadas as seguintes letras:  $t, x, y, z$  e o vetor sobre o qual se calcula a divergência:  $\rho, J_x, J_y, J_z$  mesmo sabendo que  $t$  tem unidades diferentes de  $x, y, z$ , e que  $\rho$  tem as unidades diferente de  $J$ . Porém, a velocidade da luz,  $c$  nos proporciona um fator de conversão natural entre tempo e distância. A partir disso, podemos definir as seguintes coordenadas [24]:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (26)$$

De acordo a notação em relatividade, usando superíndices para nomear as coordenadas, temos que:

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial x^0} + \frac{\partial J_x}{\partial x^1} \quad (27)$$

Colocando os índices dos vetores quadridimensionais como sobrescritos, temos:

$$(J^0, J^1, J^2, J^3) := (c\rho, J_x, J_y, J_z). \quad (28)$$

O que resulta em:

$$\frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J^1}{\partial x^1} + \frac{\partial J^2}{\partial x^2} + \frac{\partial J^3}{\partial x^3} = 0 \quad (29)$$

Até o momento, essas mudanças nas equações foram apenas com o objetivo de renomear algumas quantidades, utilizando o fator "c" para unidade de comprimento como unidade de tempo. Dessa forma, a equação (29) assume explicitamente a forma da divergência quadridimensional de um vetor quadridimensional [24]. Para que possamos apresentar a forma compacta da equação, utilizamos a letra  $J$  com um sobrescrito grego  $J^\mu$ . Assim, podemos imaginar esse sobrescrito como substituindo os números 0, 1, 2, 3, ou , simplesmente, como uma demonstrativo de que se trata de um quadridimensional e não de um vetor tridimensional. Assim, podemos representar as coordenadas como  $x^\mu$  [24]. Assim, para as derivadas parciais, temos:

$$\partial_0 := \frac{\partial}{\partial x^0}, \partial_1 := \frac{\partial}{\partial x^1}, \partial_2 := \frac{\partial}{\partial x^2}, \partial_3 := \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad (30)$$

Representando genericamente  $\partial_\mu$ , podemos escrever da forma compacta como:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (31)$$

Agora, vamos escrever as equações de Maxwell utilizando tensores de Lorentz. O fato de escrevermos as equações utilizando os tensores de Lorentz nos mostra que essas são covariantes. Nesse caso, vamos utilizar o sistema gaussiano, no qual  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  possuem as mesmas unidades [20]. Assim, as equações de Maxwell no sistema gaussiano, possuem a seguinte forma, segundo Ferreira [25], [22].

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (33)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (34)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (35)$$

Primeiramente, vamos verificar o chamado quadrivetor corrente a partir das equações (32) e (33) utilizando a forma compacta da equação da continuidade (31), com as quantidades representadas por  $J^\mu$ , na equação (28), obtemos o vetor quadricorrente [26] [23] [22], [24]:

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad (36)$$

Apesar de escrevermos a relação na forma quadridimensional, isso não significa dizer que todos os seus elementos sejam, necessariamente, quadrivetores ou quadritensores. Logo, somente pela equação (31), não podemos dizer com exatidão que a  $J^\mu$  seja um quadrivetor na representação contravariante. Outrossim, caso tenhamos um fato experimental no qual a carga elétrica seja uma invariante de Lorentz e que, conseqüentemente, sua conservação depende do seu observador em qualquer que seja o referencial inercial, a equação (31) terá que ser válida para qualquer referencial inercial. Como, nessa situação,  $\partial_\mu$  é um quadrivetor, podemos afirmar que  $J^\mu$  será realmente um quadrivetor [22].

A partir da equação (35) podemos definir:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (37)$$

E, A partir da equação (34), podemos definir a seguinte expressão:

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (38)$$

Por definição, temos:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (39)$$

Assim, dizemos que

$$A^\mu = (A^0, A^i) = \left( \frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (40)$$

$$A_\mu = (A_0, A_i) = \left( \frac{\Phi}{c}, -\vec{A} \right) \quad (41)$$

Desse modo:

$$A^0 = \frac{\Phi}{c}$$

O que nos mostra que

$$\Phi = c A^0 \quad (42)$$

Com isso, a partir da equação (37), podemos obter a componente de  $B_x$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (43)$$

Com isso, podemos definir as nossas componentes  $B^1, B^2, B^3$  como sendo:

$$B^1 = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 = F^{3,2} = -F^{2,3}$$

$$B^2 = \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = F^{1,3} = -F^{3,1}$$

$$B^3 = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 = F^{2,1} = -F^{1,2}$$

Analogamente, para a equação (39), podemos definir a nossa componente  $E_x$  como sendo:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Assim, temos que

$$E^1 = -\frac{\partial cA^0}{\partial x^1} - c\frac{\partial A^1}{\partial x^0} \quad (44)$$

As componentes  $\frac{E^1}{c}, \frac{E^2}{c}, \frac{E^3}{c}$ , podem ser definidas como:

$$\begin{aligned} \frac{E^1}{c} &= -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1 = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = F^{1,0} = -F^{0,1} \\ \frac{E^2}{c} &= -\partial_2 A^0 - \partial_0 A^2 = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 = F^{2,0} = -F^{0,2} \\ \frac{E^3}{c} &= -\partial_3 A^0 - \partial_0 A^3 = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = F^{3,0} = -F^{0,3} \end{aligned}$$

Assim, para  $\mu = \nu$ , podemos definir os vetores duais:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (45)$$

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0 \quad (46)$$

Dessa forma, obtemos a seguinte matriz:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E^1}{c} & -\frac{E^2}{c} & -\frac{E^3}{c} \\ \frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ \frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ \frac{E^3}{c} & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

No qual  $F^{1,0} = \frac{E^1}{c}$  e  $E^1 = cF^{1,0}$

No caso da equação (33), que também pode ser escrita como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (48)$$

A qual podemos obter as seguintes componentes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
c(\partial_1 F^{1,0} + \partial_2 F^{2,0} + \partial_3 F^{3,0}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
0 + \partial_1 F^{1,0} + \partial_2 F^{2,0} + \partial_3 F^{3,0} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0 c} \\
\partial_0 F^{0,0} + \partial_1 F^{1,0} + \partial_2 F^{2,0} + \partial_3 F^{3,0} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0 c} \\
\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 c} = \frac{c\rho}{c\varepsilon_0} = \frac{\mu\varepsilon c\rho}{\varepsilon} = \mu_0 c\rho \\
\partial_\mu F^{\mu 0} &= \mu_0 j^0
\end{aligned} \tag{49}$$

Onde

$$j^0 = c\rho \tag{50}$$

Para a equação (32), podemos definir a componente  $x$  como sendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\
\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 &= \mu_0 j^1 + \frac{1}{c} \partial_0 E^1 \\
\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 - \partial \frac{E^1}{c} &= \mu_0 j^1 \\
\partial_2 F^{2,1} - \partial_3 F^{1,3} - \partial_0 F^{1,0} &= \mu_0 j^1 \\
\partial_0 F^{0,1} + \partial_1 F^{1,1} + \partial_2 F^{2,1} + \partial_3 F^{3,1} &= \mu_0 j^1
\end{aligned}$$

Assim, podemos definir:

$$\partial_\mu F^{\mu,1} = \mu_0 j^1$$

$$\partial_\mu F^{\mu,2} = \mu_0 j^2$$

$$\partial_\mu F^{\mu,3} = \mu_0 j^3$$

Resumidamente, obtemos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (51)$$

Podemos definir  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$ . Assim,

$$\tilde{F}^{0,1} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{32}$$

$$\tilde{F}^{0,1} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23} - \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}(-F_{23})$$

$$\tilde{F}^{0,1} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23}$$

$$\tilde{F}^{0,1} = \varepsilon^{0123}F_{23} = 1 \cdot F^{23} = F_{23}$$

$$\tilde{F}^{01} = F^{23} = -B^1 = \left( -\frac{E^1}{c} \rightarrow -B^1 \right)$$

Para  $F^{23}$ , temos:

$$\tilde{F}^{23} = \frac{1}{2}\varepsilon^{2301}F_{01} + \frac{1}{2}\varepsilon^{2310}F_{10}$$

$$\tilde{F}^{23} = \frac{1}{2}\varepsilon^{2301}F_{01} - \frac{1}{2}\varepsilon^{2310}(-F_{10})$$

$$\tilde{F}^{23} = \frac{1}{2}\varepsilon^{2301}F_{01} + \frac{1}{2}\varepsilon^{2310}F_{10} = \varepsilon^{2301}F_{01}$$

$$\tilde{F}^{23} = -F^{01} = \frac{E^1}{c} = \left( -b^1 \rightarrow \frac{E^1}{c} \right)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ +B^1 & 0 & +\frac{E^3}{c} & -\frac{E^2}{c} \\ +B^2 & -\frac{E^3}{c} & 0 & \frac{E^1}{c} \\ +B^3 & \frac{E^2}{c} & -\frac{E^1}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Para a equação (35):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} &= 0 \\
\partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 &= 0 \\
0 + \partial_1 \tilde{F}^{10} + \partial_2 \tilde{F}^{20} + \partial_3 \tilde{F}^{30} &= 0 \\
\partial_0^{00} \tilde{F} + \partial_1 \tilde{F}^{10} + \partial_2 \tilde{F}^{20} + \partial_3 \tilde{F}^{30} &= 0 \\
\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned} \tag{52}$$

A partir da equação (34), obtemos as componente  $x$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial x} \\
\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 &= -c\partial_0 B^1 \\
c\partial_2 \tilde{F}^{12} - c\partial_3 \tilde{F}^{31} + c\partial_0 \tilde{F}^{10} &= 0 \\
\partial_0 \tilde{F}^{10} + \partial_1 \tilde{F}^{11} + \partial_2 \tilde{F}^{12} + \partial_3 \tilde{F}^{13} &= 0 \\
\partial_0 \tilde{F}^{01} + \partial_1 \tilde{F}^{10} + \partial_2 \tilde{F}^{12} + \partial_3 \tilde{F}^{13} &= 0
\end{aligned}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 1} = 0$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 2} = 0$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 3} = 0$$

Logo:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (53)$$

Portanto, essas são as equações de Maxwell na forma covariante. Na prática, tais equações são bem mais compactas e elegantes do que as anteriores, assim como bastante úteis nas mais diversas áreas de pesquisa em física teórica. Além disso, mostramos que é possível demonstrá-las por meio do uso de alguns elementos de álgebra tensorial e da definição do espaço-tempo de Minkowski. Deste modo, introduzi-las para um estudante de graduação é naturalmente possível e permitirá que o mesmo compreenda essa importante formulação da teoria eletromagnética, muito embora traduza os mesmos efeitos físicos das formulações anteriores.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (54)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (55)$$

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Diante da importância do tema e da sua ausência parcial nas disciplinas de eletromagnetismo dos cursos de licenciatura em física, muitos alunos acabam saindo da graduação sem terem visto as três formulações equações de Maxwell. Outrossim, muitos livros didáticos abordam apenas as formas diferenciais e integral das equações de Maxwell. Embora seja um conteúdo pouco abordado, não significa que não seja importante na grade curricular de qualquer curso de licenciatura em física e aprender as formas integral, diferencial e a elegância do formalismo covariante das equações de Maxwell se mostra uma atividade útil para o estudante de graduação. Desse modo, demonstramos, por meio desse trabalho, ainda que se trate de uma revisão, todo o extenso arcabouço de equações construídas de forma empírica ao longo da história pode ser representado por um conjunto de no máximo quatro equações, para as formas integral e diferencial, e duas, em sua forma mais compacta, onde esta última demonstra a conexão entre os campos elétrico e magnético.

As equações de Maxwell formam um conjunto de 4 equações, as quais, por meio delas, podemos descrever os fenômenos físicos, tais como, eletricidade estática, magnetostática, eletromagnetismo. Assim, demonstramos que é possível, por meio do teorema de Gauss e Stokes, transitar sobre as formas diferenciais e integral das equações de Maxwell e, por meio de conhecimentos prévios de álgebra tensorial e espaço-tempo de Minkowski obter as equações de Maxwell no seu formalismo covariante. Demonstrando, em cada uma delas, os conceitos físicos envolvidos. Sendo assim, fica claro que as três formas das equações de Maxwell – integral, diferencial e covariante – fazem parte de "aspectos da mesma moeda". Entretanto, no que diz respeito a essa última, por se tratar de uma forma pouco abordada durante os cursos de licenciatura em física, possui sua relevância e elegância no geral, além de ser uma forma mais compacta, e mais fácil de ser interpretada. Além disso, é útil na área de teoria de campo e aplicações tecnológicas. Outrossim, as ferramentas matemáticas necessárias para a obtenção dos resultados das equações supramencionados, estão disponibilizados nos apêndices A, para as formas integral e diferencial, e B, para o formalismo covariante das equações de Maxwell. Além disso, foi possível demonstrar, não apenas as formulações matemáticas e como transitar, sem muita dificuldade, entre uma e outra, com conhecimentos prévios básico sobre os teoremas supracitados e operações de álgebra tensorial, mas também sua concepção história, e a importância de outros pesquisadores que foram fundamentais para que Maxwell pudesse introduzir sua contribuição imprescindível para o ramo do eletromagne-

tismo.

## REFERÊNCIAS

- 1 SIQUEIRA, F. C. As equações de maxwell e as ondas eletromagnéticas *Maxwell's equations and electromagnetic waves*. *Brazilian Journal of Development*, Curitiba, v. 7, n. 9, p. 93571–93589, 2021.
- 2 LIMA, M. C. d. Sobre o surgimento das equações de Maxwell. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Belém, PA, Brasil, v. 41, p. 3–9, 2019.
- 3 NOGUEIRA, A. F. L. Equações. Maxwell e a física-matemática. *ResearchGate*, Rio de Janeiro, v.1, p. 1–2, 2014.
- 4 PASSOS, M. N. S.; OLIVEIRA, A. M. de; GOMES, A. K. F. Aplicações das Equações de Maxwell. *Brazilian Journal of Development*, IFSP — Campus Cubatão, v. 4, n.4, p. 260–265, 2019.
- 5 OBERZINER, A. P. B. et al. *As equações de Maxwell e aplicações*. Repositório UFSC, Florianópolis, SC, p. 10–25, 2008.
- 6 CHAIB, J. D. C.; ASSIS, A. K. T. Distorção da obra eletromagnética de Ampère nos livros didáticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Campinas, SP, Brasil:, v. 29, p. 65–70, 2007.
- 7 OTA, M. I. N. Eletromagnetismo e Relatividade: continuidade formal- ruptura conceitual. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Londrina – PR, v. 5, n. 10, p. 27–42, 2005.
- 8 HERAS José A.; BÁEZ, G. A formulação covariante das equações de Maxwell expresas em uma forma independente de unidades específicas. *European Journal of Physics*, IOP Publishing Ltd, v. 30, n. 1, p. 5–23, 2008.
- 9 OLIVEIRA, V. R. de; SANTOS, F. M. dos. *As Equações de Maxwell e o Cálculo Vetorial*. Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo:, p. 21–34, 2016.
- 10 PURCELL, E. M. *Curso de Física de Berkeley: eletricidade e magnetismo*. São Paulo: Edgard Blücher, 1988.
- 11 SERWAY, Raymond A.; JEWETT JR., John W. *Princípios de física: eletromagnetismo*. São Paulo: Cengage Learning, 2004. v. 3.
- 12 MACHADO, K. D. *Teoria do Eletromagnetismo*. [S.I.]: UEPG, 2002.
- 13 HANSEN, M. et al. Andreas Wipf Theoretisch-Physikalisches-Institut Friedrich-Schiller-Universität Jena. *ResearchGate*, Deutschland, v.1, p. 7–23, n.2, 2003.
- 14 BALANIS, C. *Antenna Theory Analysis and Design*. John Wiley Sons Inc, New York:, v. 2, p. 30, 1997. page.1717
- 15 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.I.]: San Francisco:, 2005. v. 6. 356 p.

- 16 HAUS, H. A.; MELCHER, J. R. *Electromagnetic fields and energy*. [S.I.]: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1989. v. 107. page.1919
- 17 WALKER, J. et al. *Fundamentos de física*. Estados Unidos: Wiley, 2014. vol. 1
- 18 FLEISCH, D. *A student's guide to Maxwell's equations*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2008. page.2121, page.2323, page.2424
- 19 TIPLER, Paul Allen; MOSCA, Gene. *Física para cientistas e engenheiros: eletricidade e magnetismo, ótica*. Rio de Janeiro: LTC. 2003 . v. 2.
- 20 HERAS, J. A. How to obtain the covariant form of Maxwell's equations from the continuity equation. *European journal of physics*, IOP Publishing, v. 30, n. 4, p. 845, 2009.
- 21 GAZZINELLI, R. *Teoria da relatividade especial*. [S.I.]: Editora Blucher, 2019.
- 22 Barcelos Neto, J., *Fundamentos de Relatividade Especial*, [S.I.] UFRJ, 1994
- 23 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.I.]: American Association of Physics Teachers, 1999. page.2626, page.2828
- 24 ACEÑA, A. La transición a la formulación covariante del electromagnetismo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Mendoza, Argentina:, v. 39, p. 1–6, 2016. page.2626, page.2727, page.2828
- 25 FERREIRA, G. Um enfoque didático às equações de Maxwell. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Carlos, SP, v. 37, p. 2301–1, 2015. page.2727
- 26 GREINER, W. *Classical electrodynamics*. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2012. page.2828
- 27 FERREIRA, M. Campo elétrico. *Revista de Ciência Elementar*, Casa das Ciências, v. 2, n. 2, 2014. page.3939
- 28 EINSTEIN, A. Os fundamentos da teoria da relatividade geral. *Ann. d. Phys.* , v.1 p. 141–214, n.49 1978.
- 29 OWERRE, S. A. Maxwell's Equations in terms of Differential Forms. *African Institute for Mathematical Sciences (AIMS)*, Stinson, Estados Unidos:, v.2, p. 2–23, n.1, 2010.
- 30 OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. *Gravitation and spacetime*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2013. page.4444
- 31 COUTO, R. T. *Introdução aos Tensores*. Rio de Janeiro: UFF, 2003. Disponível em: <[https://www.academia.edu/5858551/Introdu%C3%A7%C3%A3o\\_aos\\_Tensores](https://www.academia.edu/5858551/Introdu%C3%A7%C3%A3o_aos_Tensores)>. Acesso em: 20.03.2022.
- 32 CUNHA, Francisco Gêvane Muniz; CASTRO, Jânio Kléo Sousa de. *Álgebra Linear*. Fortaleza: IFCE, 2010.

- 33 OLIVEIRA, P. H. F. d. *Teorias de Gauge Topologicamente Massivas: Um Ensaio Sobre a teoria de Maxwell*. Repositorio UFC, Fortaleza-CE, p. 10–20, 2020. page.4747, page.4848
- 34 DIAS, R. G. *Formulações Alternativas da Relatividade Geral: da geometrodinâmica à estrutura de gauge de ashtekar-barbero*. São Carlos: USP, 2011.
- 35 GAELZER, R. *Física-Matemática*. Porto Alegre: [s.n], 2021. Disponível em: [https://professor.ufrgs.br/rgaelzer/files/fismat\\_complete-aluno.pdf](https://professor.ufrgs.br/rgaelzer/files/fismat_complete-aluno.pdf). Acesso em: 20/03/2022.

## APÊNDICE A - GRANDEZAS ELETROMAGNÉTICAS

Apesar de as equações de Maxwell formarem postulados que, até hoje, nunca foram provadas, os experimentos físicos realizados nunca as contradisseram [5]. Com isso em mente, a seguir, discriminamos algumas grandezas físicas necessárias para a perfeita compreensão das equações que veremos posteriormente.

### **Campo elétrico**

O campo elétrico pode ser definido como uma região no espaço que envolve uma carga elétrica. Nesse ponto, qualquer carga elétrica colocada, estará sujeita a uma força elétrica. Dessa forma, representamos o campo elétrico pela letra  $E$  e dizemos que ele é uma realidade física com origem em cargas elétricas ou pela variação de campos magnéticos [27]. Dito isso, podemos definir o conceito de campo elétrico como sendo uma deformação no espaço, ocasionado pela presença de uma carga elétrica e pode ser representado pelas linhas de força.

### **Campo magnético**

Quando temos um conjunto de cargas em deslocamento produzem um campo elétrico que, essas, por sua vez, produzem um campo magnético, o qual é representado pela letra  $H$  [5].

### **Indução magnética $B$ e permeabilidade magnética $\mu$**

A indução magnética, igualmente conhecida como densidade do campo magnético, pode ser expressa por meio do produto do campo magnético com a permeabilidade magnética do meio [4]:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (56)$$

### **Fluxo magnético**

Através da equação (56), é possível identificar que a permeabilidade magnética do meio é inversamente proporcional ao campo magnético e, quanto maior a permeabilidade, maior, também, será a indução do campo magnético pelo meio [4]. A relação do campo magnético é dada por:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Onde  $\Phi$  é o fluxo magnético.

### **Indução elétrica e permeabilidade elétrica**

Chama-se indução elétrica ou, ainda, densidade de fluxo elétrico a relação existente entre campo elétrico e permissividade elétrica, da seguinte maneira [4]:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}.$$

Novamente, pode-se perceber que, quanto maior a permissividade, maior será a indução elétrica e, por conseguinte, maior o fluxo através da superfície [5]. Desse modo, o fluxo  $\psi$  pode ser definido da seguinte forma:

$$\psi = \int_S d \cdot s\vec{S}$$

### **Densidade superficial de corrente**

A densidade superficial de corrente pode ser definida como

$$\vec{J} = \frac{i}{\vec{S}}.$$

Utilizando o Teorema de Stokes, podemos obter o fluxo de  $\vec{J}$ , de forma que obtemos a corrente elétrica  $i$ :

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

### **Condutividade elétrica**

Os meios que se podem encontrar, nos problemas elétricos são: Isolantes, também chamados de dielétricos – caracterizados por meio de permissividade elétrica e rigidez; e os meios condutores – caracterizados por sua condutividade elétrica  $\sigma$  que é a capacidade do meio conduzir corrente elétrica [5]. Fato esse expresso pela lei de Ohm sob forma local:

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

### **Densidade volumétrica de carga**

A densidade volumétrica de carga relaciona a densidade de corrente de convecção e movimento, representada pela seguinte expressão:

$$v = \frac{\vec{J}}{\vec{V}}$$

## APÊNDICE B - RELATIVIDADE E ALGEBRA TENSORIAL

### Relatividade de Einstein

Primeiramente, para compreender de forma eficaz o conteúdo que será abordado nesse capítulo, faz-se necessário demonstrarmos o conceito da primeira lei de Newton, a saber, quando temos um determinado corpo que se move em relação a um determinado sistema de referência e que não se encontra sujeito a nenhum tipo de interação, com uma velocidade constante, podemos deduzir que esse sistema é inercial [22].

Nesse sentido, devemos retomar também o princípio da relatividade Galileu, que nos diz que as leis da natureza devem ser as mesmas para qualquer referencial inercial. Com isso, podemos dizer que as leis físicas utilizadas em qualquer que seja o referencial inercial serão as mesmas, quando forem vistas de outro referencial inercial. Quando isso acontece, essas leis são ditas "covariantes" [22].

Diante disso, faz-se necessário, também, saber outro conceito, as transformações de Galileu, que nos mostra que, se tivermos dois sistemas de referência,  $S$  e  $S'$ , e  $S'$  tenha velocidade constante em relação a  $S$ . Caso um determinado evento aconteça, localizado em  $S$  pelo vetor  $\vec{r}$ , e em  $S'$  pelo vetor  $\vec{r}'$ , no instante em que o evento acontece para o observador no sistema  $S$  é o mesmo, para um observador em  $S'$ . Isso acontece porque, para as transformações de Galileu, as velocidades de propagação de interação são consideradas infinitas [22, 28].

A mecânica Newtoniana satisfaz o princípio de Galileu. Porém, quando se trata da teoria eletromagnética, a forma das equações de ondas não é invariante sob as transformações de Galileu. Podemos perceber essa não-invariância no caso de ondas sonoras, as quais, para o referencial  $S$ , o meio está em repouso, mas, para o referencial  $S'$ , o meio está em movimento. No caso de ondas eletromagnéticas, isso seria satisfeito, caso existisse um meio no qual ondas eletromagnéticas se propagam. Para explicar esse meio, acreditava-se que esse possuía densidade ou nula ou, talvez, muito pequena, para que pudesse ser medida pelos instrumentos disponíveis na época. Como se sabe, isso não existe, e, a esse meio, deu-se o nome de "éter" [22].

Uma possível alternativa seria de que, talvez, não existisse éter algum, e as equações de Maxwell estivessem incorretas. Ao seu turno, as equações de Maxwell poderiam estar corretas, porém, as transformações de Galileu não seriam apropriadas para ir de um sistema inercial a outro, uma corrente de ideias que se desenvolveu por volta de 1900. Contudo, a grande quantidade de trabalhos e experimentos realizados e sua previsão teórica fazia com que a possibilidade das equações de Maxwell estarem incorretas não fosse

sistema inercial a outro, uma corrente de ideias que se desenvolveu por volta de 1900. contudo, a grande quantidade de trabalhos e experimentos realizados e sua previsão teórica fazia com que a possibilidade das equações de Maxwell estarem incorretas não fosse muito cogitada [22].

No entanto, em 1904, Lorentz demonstrou, por meio de um conjunto de transformadas, uma forma covariante para as equações de Maxwell, que, hoje em dia, podem ser deduzidas a partir da teoria da relatividade especial – ou restrita– de Einstein, conhecidas, atualmente, como: transformadas de Lorentz [22].

### **Princípio da relatividade de Einstein**

Os postulados no qual se baseia a teoria da relatividade especial satisfaz também a mecânica de Galileu - Newton, a saber, se uma determinado sistema de coordenadas  $S$  for escolhido de forma que as leis da física sejam nele válidas na sua forma mais simples, então essas mesmas leis serão válidas em relação a qualquer outro sistema de coordenadas  $S'$  que em relação com  $S$  possuam um movimento de translação uniforme [28].

Os postulados no quais se baseiam essa teoria são:

1. As leis da natureza são invariantes – ou covariantes – para todos os observadores inerciais.
2. A velocidade de propagação das interações é finita e independente do sistema de referência.

Dessa forma, Einstein reafirma o postulado de Galileu ao dizer que as leis da física tem a mesma forma para todos os referenciais inerciais, estamos, na verdade, dizendo que não existe um referencial absoluto [21]. No segundo postulado, o princípio da relatividade de Einstein difere com o de Galileu na velocidade de propagação das interações, visto que, na relatividade de Galileu, a velocidade é considerada infinita e, como considerado na teoria da relatividade por Einstein, a velocidade máxima é a velocidade da luz, e essa, por sua vez, é finita. Na teoria de Einstein, portanto, abandona-se a hipótese do éter [22]. Com isso, as equações de Maxwell devem, como todas as outras, permanecer invariáveis quando passam de um sistema inercial a outro. Desse modo, a teoria se propõe a encontrar leis físicas que não dependam da escolha de um referencial inercial [21].

### **Simultaneidade**

A ideia de simultaneidade nos mostra a sincronização de dois acontecimentos ou mais

ao mesmo tempo. A exemplo disso, quando utilizamos as horas para especificarmos o momento exato da ocorrência de um determinado evento, estamos, na verdade, dizendo que esse evento aconteceu no mesmo instante em que o relógio marcou aquela hora, ou seja, aconteceram de forma simultânea. Com isso, podemos dizer que: dois eventos que acontecem em um determinado referencial serão simultâneos se sinais luminosos oriundos dos próprios eventos atingirem um observador no mesmo instante [21].

### **Relatividade da simultaneidade**

Imaginemos agora um em determinado referencial  $R$  e um observador no ponto  $M$  entre dois pontos, ponto  $A$  e ponto  $B$ , os pontos  $A$  e  $B$  estão à mesma distância do ponto  $A$ , porém, em lados opostos. Caso o observador. Queremos comparar relógios em diferentes referenciais. Assim, o observador emite um flash em direção aos dois pontos  $A$  e  $B$ , que chegam aos dois pontos simultaneamente. Agora, tomemos um outro referencial inercial que chamaremos de  $R'$ , que se move para a direita com velocidade  $v$ . O observador em  $R'$  está no mesmo ponto  $M$  que o observador em  $R$  no momento em que o flash é disparado. O observador no referencial  $R'$  vê o observador em  $R$  se afastar para esquerda, enquanto o ponto  $B$ , em  $R$ , se aproxima, e ponto  $A$ , em  $R$ , se afasta. Dessa forma, para o observador no referencial  $R'$ , a luz do flash emitida pelo observador no referencial  $R$ , sai do ponto  $M$  e chega no ponto  $B$  antes de chegar no ponto  $A$ . Com isso, temos que os relógios sincronizados em um determinado referencial inercial não estão sincronizados em outro [21].

### **Espaço tempo de Minkowski**

São diversas as estruturas topológicas existentes na estrutura geométrica do espaço. Por propriedade topológica de um espaço, podemos entendê-la como sendo estruturas do espaço que são inalteráveis diante de determinadas deformações suaves do espaço. Dessa forma, por meio da topologia, podemos saber quais pontos do espaço são iguais – ou seja, que permaneceram inalteráveis – e quais pontos são distintos. Assim, um evento pode ser descrito como quando – tempo – ou onde – espaço – ele aconteceu. Supondo que a topologia do espaço tempo seja quadridimensional Euclidiana, podemos definir pontos no espaço-tempo por meio de coordenadas quadridimensionais, onde cada ponto corresponde ao conjunto de números:  $t, x_1, x_2, x_3$  [29] [30].

As coordenadas do espaço-tempo em um ponto  $x$  são demonstradas por um vetor contravariante com quatro componentes  $x^\alpha$ :

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{X}. \quad (57)$$

O vetor covariante com quatro componentes  $x_\beta$  é dado por:

$$x_\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha \quad (58)$$

No qual  $\eta_{\alpha\beta}$  é componente da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

A qual é chamada de tensor métrico plano ou tensor métrico plano de Minkowski,  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ . O tensor métrico tem a finalidade de, ao atuar sobre um índice contravariante,  $\eta, \alpha, \beta$ , o converter em um índice covariante e vice-versa [29]. Com isso, por meio da relação (58), temos:

$$x^\alpha = \eta^{\alpha\beta} x_\beta \quad (60)$$

No qual  $\eta^{\alpha\beta}$  é a matrix inversa de  $\eta_{\alpha\beta}$

Assim, por meio da relação (58) e (60), obtemos:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

Com isso:

$$\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta} \quad (62)$$

Onde:

$$\delta_{\gamma}^{\beta} = 1 \text{ se } \gamma = \beta$$

$$0 \text{ se } \gamma \neq \beta \quad (63)$$

Dessa forma, podemos escrever o vetor tanto na forma covariante quanto na forma contravariante. Onde a invariancia relativística do espaço-tempo pode ser definida como [29]:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - dt^2, \quad (64)$$

No qual, podemos definir  $ds^2$  como:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = dx^{\beta} dx_{\beta}. \quad (65)$$

Definindo a derivação covariante no espaço tempo  $\partial_{\alpha}$  como [29]:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} := \partial_{\alpha} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \eta_{\alpha\beta} \partial^{\beta}, \quad (66)$$

Utilizando a equação (62):

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} := \partial^{\beta} = \eta^{\beta\alpha} \partial_{\alpha} \quad (67)$$

Então, para um determinado vetor  $C^\alpha$ , podemos definir a componente covariante  $C_\beta$ , por [29]:

$$C_\beta = \eta_{\beta\alpha} C^\alpha, \quad (68)$$

Ou, no caso da forma contravariante:

$$C^\alpha = \eta^{\alpha\beta} C_\beta. \quad (69)$$

## Tensores

Para que possamos compreender o formalismo covariante das equações de Maxwell, devemos, primeiramente, dominarmos o cálculo tensorial, pois é por meio dele que podemos demonstrar que as leis da física são válidas independentemente do sistema de coordenadas empregados [31]. Assim, faremos neste capítulo uma revisão sobre tensores para melhor compreensão do assunto que será abordado.

Assim partindo do conceito de espaço vetorial, como sendo um conjunto de objetos – vetores – em um determinado espaço, e um grupo de elementos os quais devem ser, obrigatoriamente, números reais que satisfazem a seguinte relação [32]:

1.  $u + (v + w) = (u + v) + W$
2. Existe um vetor zero em  $V$
3.  $u + (-u) = 0$
4.  $1u = u$

Desse modo, podemos definir um tensor como sendo um mapa, assim como no caso de função temos um valor  $x$  que nos fornece outro valor, ou seja, a partir do domínio de uma função, com uso de um determinado mapa, como  $x^2$ , podemos ter uma representação daquele valor no contradomínio, no caso em questão, o nosso mapa recebe a denominação de tensor. Com isso, a partir de um número real do nosso espaço vetorial, podemos obter um valor, que também será um número real, que nos permite representar as mesmas equações independentemente do referencial inercial utilizado, ou seja, valores covariantes. Por meio de um tensor, podemos mapear objetos como vetores, escalares e, até mesmo, outros tensores.

Assim, consideremos a seguinte transformação de coordenadas [31] [33]:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} dx^j \quad (70)$$

Os números que demonstram as componentes de dois pontos  $\vec{PQ}$  que definem um deslocamento infinitesimal dependem do sistema de coordenadas empregados. Assim, conhecidas as componentes em um sistema, por meio da equação (70), podemos obtê-las em qualquer outro sistema. O conjunto de grandezas que se transformam, de acordo com a equação (70), sob mudança de coordenadas é dito que esse forma um vetor denominado contravariante [31].

Considerando, agora, um ponto numa curva – vetor tangente – com componentes finitas e que satisfaçam a relação:

$$T_{,ij} = \frac{\partial x_{,i}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} = T^{kl} \quad (71)$$

É denominado tensor contravariante de 2ª ordem.

Assim, o deslocamento infinitesimal nos mostra um vetor contravariante, enquanto um exemplo com componentes finitas nos mostra um tensor contravariante de 2ª ordem [31]. Ainda, nota-se que um vetor contravariante é um tensor contravariante de 1ª ordem, o que nos mostra que existe um tensor contravariante de ordem zero, que se transforma de acordo com a identidade [31]:

$$T^i(x') = T(x) \quad (72)$$

Isso nos mostra uma grandeza covariante que é independente do sistema de coordenadas utilizado [31].

Ao definirmos um invariante  $\Phi$ , podemos obter, pela regra da cadeia, a seguinte expressão [33] [31]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \quad (73)$$

Assim como o deslocamento infinitesimal nos mostra que as componentes são protótipo de um vetor contravariante, as derivadas parciais de um invariante são protótipos de vetores covariantes que se transforma de acordo com a relação [31]:

$$X_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} X_j \quad (74)$$

Dessa forma, classificando o vetor covariante com um tensor covariante de 1ª ordem, podemos definir tensores de ordem maiores, como de 2ª ordem que se transformam obedecendo a relação [34]:

$$T_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} T_{kl} \quad (75)$$

Convém mencionar, ainda, o fato de que os objetos com índices sobrescritos são chamados de contravariantes, enquanto aqueles que possuem índices subscritos são denominados covariantes. Com isso, podemos definir, agora, os chamados tensores misto, os quais possuem características tanto contravariante quanto covariante os quais se transformam segundo a equação [31]:

$$T_{ij}^k = \frac{\partial x^l}{\partial x^{,i}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{,j}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{,n}} T_{lm}^n \quad (76)$$

O tensor (76) é um tensor misto de 3ª ordem, com um índice contravariante e dois índices covariantes

citeTensores.

### Operações com tensores

#### (a) Adição e subtração

SE  $T_{ij\dots r}$  e  $U_{ij\dots r}$  são componentes dos seguintes tensores:  $T$  e  $U$ , implica que as somas geram, respectivamente os tensores:  $S$  e  $D$ , que possuem as seguintes componentes [35]:

$$\begin{aligned} S_{ij\dots r} &= T_{ij\dots r} + U_{ij\dots r} \\ D_{ij\dots r} &= T_{ij\dots r} - U_{ij\dots r} \end{aligned} \quad (76)$$

Representadas de forma genérica como  $S = T + U$  e  $D = T - U$  respectivamente [35].

#### (b) Multiplicação externa

Para obtermos o produto externo de dois vetores, um de ordem  $m$  e ou de ordem  $n$ , basta multiplicarmos cada componente e, assim, obtemos um tensor de ordem  $m + n$ . Por exemplo, o produto externo dos tensores  $U_i^{kl}$  e  $W_j^m$  é o tensor  $T_{ij}^{klm} = U_i^{kl} W_j^m$  [31].

#### (c) Contração de tensores

Igualando um índice covariante com um índice contravariante e somando, sabendo que a repetição do índice já indica somatório, fazemos a contração de um tensor misto. Por exemplo, o tensor  $T_{ij}^{kl}$  de 4ª ordem, quando igualamos os índices  $i$  e  $k$  podemos obter um tensor de 2ª ordem  $T_j^l = T_{ij}^{il}$  e, em seguida, fazendo uma segundo contração, igualando os índices  $j$  e  $l$ , podemos obter o seguinte tensor de ordem zero:  $T = T_j^j = T_{ij}^{ij}$  [31].

## (d) Multiplicação interna

Combinando a multiplicação externa e a contração, obtemos a multiplicação interna dos tensores. Desse maneira, dando os tensores  $U_i^{jk}$  e  $W_{lm}^n$ , formamos o produto externo  $U_i^{jk} W_{lm}^n$ , e contraímos os índices  $i$  e  $n$  resultando no seguinte produto interno  $U_i^{jk} W_{lm}^i$  e, igualando  $k = m$  temos:  $U_i^{jk} W_{lk}^i$  [31].

## (e) Tensores simétricos e anti-simétricos

A separação de tensores por partes simétricas e antissimétrica é fundamental a compreensão da disciplina de eletromagnetismo [35]. Por isso, a importância de discutirmos sobre esse conceito nesse capítulo. Um determinado tensor de 2ª ordem  $T_{ik}$  pode manifestar sua simetria de duas formas [35]:

Se  $T_{ij} = T_{ji} \rightarrow$  tensor simétrico;

Se  $T_{ij} = -T_{ji} \rightarrow$  tensor antissimétrico.

Muito embora um determinado tensor  $U$  não possua suas propriedades simétricas bem definidas, podemos sempre escrevê-lo como uma combinação de suas partes simétricas e antissimétricas por meio da seguinte identidade [35]:

$$U_{ij} = \frac{1}{2}(U_{ij} + U_{ji}) + \frac{1}{2}(U_{ij} - U_{ji}) \quad (77)$$

Sendo que, no primeiro termo, temos sua parte simétrica e, no segundo termo, temos sua parte antissimétrica [35]. Então, dizemos que um tensor é simétrico se possuírem componentes iguais obtidos pela troca dos índices considerados. Por outro lado, dizemos que um tensor é antissimétrico se os componentes obtidos pela troca dos índices considerados forem nulos ou diferentes no sinal [31]. Assim, ao considerarmos um tensor de ordem  $N$   $T_{ijk...r}$  há duas possibilidades [35]:

$$\begin{aligned} T_{ijk...r} &= T_{jik...r}, \\ T_{ijk...r} &= T_{kji...r}, \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

É simétrico os índices  $i$  e  $j$  ou  $i$  e  $k$  [35] ...

$$\begin{aligned}
T_{ijk\dots r} &= -T_{jik\dots r}, \\
T_{ijk\dots r} &= -T_{kji\dots r}, \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

É antissimétrico os os mesmo índices [35].