



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO NETO PEREIRA DE ALENCAR.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO.

São Raimundo Nonato - PI

2018



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO NETO PEREIRA DE ALENCAR.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma de Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Píauí. Campus São Raimundo Nonato.

Orientador: Prof Me. Adécio da Silva Santos
Coorientador: Prof Esp. Carlos Alberto da Silva

São Raimundo Nonato - PI
2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A368c Alencar, João Neto Pereira de
Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. / João Neto Pereira de Alencar -
2018.
55 f. : il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, Licenciatura em
Matemática, 2018.

Orientador : Prof Me. Adecio da Silva Santos.
Coorientador : Prof Esp. Carlos Alberto da Silva.

1. Álgebra. 2. Derivada. 3. Integral. 4. Limites. I.Título.

CDD 510

JOÃO NETO PEREIRA DE ALENCAR.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma de Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus São Raimundo Nonato.

Aprovada em 06/03/2018.

BANCA EXAMINADORA

**Prof Me. Adecio da Silva
Santos(Orientador)**
Instituto Federal do Piauí(IFPI)

**Prof Esp.Carlos Alberto da
Silva(Coorientador)**
Instituto Federal do Piauí(IFPI)

Prof Me. Amaya de Oliveira Santos
Instituto Federal do Piauí(IFPI)

São Raimundo Nonato - PI
2018

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia, ao meu pai Guiomar, minha mãe Marilene e aos meus irmãos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre esteve presente na minha vida. Ao meu pai, Guiomar que sempre fez o impossível para realizar meus sonhos e a minha Mãe Marilene, pelos cuidados, carinhos e a força de motivação para continuar lutando pelos meus objetivos. Meu muito obrigado, por acompanharem de perto e terem me incentivado na busca incansável na realização dos meus sonhos.

Sou grato por cada apoio de meus queridos irmãos: Amanda, Fernanda e Haline que sempre torcem por mim. Ao incentivo do meu orientador Adecio da Silva Santos. Agradeço ainda todos os servidores e professores do IFPI, campus São Raimundo. Pois todos contribuíram de forma direta e indireta na realização desse trabalho.

*A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre
aquilo que todo mundo vê.
Arthur Schopenhauer*

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso aborda um resumo histórico do Cálculo pelos estudos de Newton e Leibniz, explora as noções básicas de álgebra, limites, derivadas e integrais. Mostra como os produtos notáveis e as fatorações algébricas facilitam o manuseio das operações que envolva o Cálculo. Expõe aplicações de limites na física, de derivadas no movimento uniformemente variado e a integral como ferramenta de cálculo de áreas de figuras planas.

Palavras-chaves: Álgebra. Derivada. Integral. Limites.

Abstract

This Course Conclusion Paper approaches a historical summary of Calculus by the studies of Newton and Leibniz, explores the basics of algebra, Limit, derivatives, and integrals. It shows how noteworthy products and algebraic invoices facilitate the handling of operations involving Calculus. It exposes applications of limit in physics, of derivatives in uniformly varied motion, and integral as a tool for calculating areas of plane figures.

Keywords: Algebra. Derived. Integral. Limits.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Demonstração visual do produto notável do quadrado da soma.	18
Figura 2 – Demonstração visual do produto notável do quadrado da diferença. . .	18
Figura 3 – Demonstração visual do produto notável Produto da soma pela diferença	19
Figura 4 – Demonstração visual do produto notável do cubo de uma soma	20
Figura 5 – Demonstração visual do produto notável cubo da diferença	20
Figura 6 – Reta secante a curva	32
Figura 7 – Reta tangente T	33
Figura 8 – Parábola concavidade	41
Figura 9 – Função: espaço x tempo.	42
Figura 10 – Região sob o gráfico.	43
Figura 11 – Função Constante	44
Figura 12 – Soma superior	45
Figura 13 – Soma inferior	46
Figura 14 – Integral definida	47
Figura 15 – áreas	48
Figura 16 – triângulo	50
Figura 17 – Quadrado	51
Figura 18 – Circunferência	52
Figura 19 – relações	53

Sumário

1	Introdução	13
2	Resumo Histórico	14
2.1	Alguns problemas iniciais sobre o cálculo	14
2.2	Cálculo de Newton e Leibniz	15
3	Álgebra Básica	17
3.1	Produtos Notáveis	17
3.2	Fatoração de expressões algébricas	21
3.3	Produtos Notáveis: um Auxílio para o Cálculo	22
4	Limites	25
4.1	Definições e propriedades	25
4.2	Limites em uma aplicação na física	29
5	Derivada	32
5.1	Problema de definir uma reta tangente a uma curva.	32
5.2	Derivada de uma função	33
5.3	Derivadas de x^n e $\sqrt[n]{x}$	34
5.4	Derivadas de e^x e $\ln x$	36
5.5	Derivadas das Funções Trigonométricas	36
5.6	Regras de derivação	39
5.7	Velocidade instantânea	40
5.7.1	Movimento Uniformemente Variado (MUV)	40
5.7.2	Velocidade e aceleração instantânea	41
6	Integral	43
6.1	Definições e propriedades	43
6.1.0.1	Integral definida	46
6.1.1	Propriedades da integral	48
6.1.2	Teorema Fundamental do Calculo	48
6.1.3	Integral indefinida	49
6.2	Cálculo de Áreas	49
6.2.1	Área de de figuras planas	50
6.2.1.1	Área do triângulo	50
6.2.1.2	Área do Quadrado	51
6.2.1.3	Área do circulo	51

7 Conclusão	55
--------------------	-----------

1 Introdução

A abordagem do Cálculo na Educação Básica surgiu da necessidade de alunos do ensino médio terem um conhecimento prévio sobre limites, derivadas e integrais, precisamente aqueles que migram para o Ensino Superior em cursos na área das ciências exatas e da natureza. Por isso é fundamental a apresentação desse tema no ensino médio para que esses discentes tenham os pré-requisitos necessários em estudos acadêmicos.

Porém, as noções do cálculo utilizam muito as propriedades dos produtos notáveis, fatorações e simplificações algébricas, os quais são pré-requisitos para os estudos básicos de limites, derivas e integrais.

Diante disso, esta dissertação compõe-se de 7 capítulos. O primeiro é a introdução do tema desta dissertação. O segundo aborda um resumo histórico da construção do cálculo e suas aplicações em nossa sociedade atual. O terceiro capítulo explora as noções de Produtos notáveis e fatorações algébricas como ferramentas auxiliares no estudo do Cálculo. O quarto capítulo aborda os conceitos de Limites e como explorar suas propriedades e noções no estudo de velocidade média e instantânea e aceleração. O quinto capítulo analisa as noções de derivada aplicadas em assuntos envolvendo velocidade instantânea. O capítulo 6 mostra uma forma de abordar as noções intuitivas das integrais no estudo das principais figuras planas. E o sétimo capítulo são as conclusões deste trabalho.

Esta dissertação tem por objetivo principal fornecer bases de estudos a nível médio em assuntos de Cálculo diferencial e integral em funções polinomiais e os objetivos secundários são de expor abordagens concretas de tais assuntos.

Portanto, espera-se que este trabalho contribua significativamente nos estudos de limites, derivas e integrais para discentes e docentes da educação básica, além de servir como material didático para outras dissertações.

2 Resumo Histórico

Ao falar em cálculo diferencial e integral hoje, os nomes de Sir Isaac Newton (de 04/01/1643 até 31/03/1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (de 01/07/1646 até 14/11/1716) são lembrados como os idealizadores do cálculo diferencial e integral, Conforme Portal El País [5]. Mas é importante ter conhecimento que algumas noções sobre o Cálculo já existiam antes dos mesmos. Nesse capítulo aborda-se o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, fazendo uma retrospectiva desde as primeiras noções sobre o calculo até os dias atuais.

2.1 Alguns problemas iniciais sobre o cálculo

A ideia de cálculo de maneira primordial surgiu com a necessidade de se obter áreas de figuras e volumes de sólidos. Os gregos foram pioneiros no que entende-se sobre cálculo hoje; por volta de 200 a.C os mesmo traziam uma noção inicial do que seria o cálculo, pois realizavam o cálculo de regiões como uma técnica conhecida como quadratura, Conforme Portal El País [5] . Essa técnica tinha por base encontrar o quadrado de mesma área da figura poligonal escolhida para se calcular a área. O principal desafio era encontra as quadraturas de figuras curvas.

O leitor não tão familiarizado com esses termos pode achar estranho “enquadrar uma curva”, mas em matemática às vezes um “absurdo” pode solucionar vários problemas.

Conforme Portal El País [5], a partir da ideia inicial de encontrar uma quadratura de figuras curvas, os matemáticos daquele tempo juntaram esforços em encontrar maneiras cada vez mais simples para se calcular a área de uma região curva. Credita-se a Arquimedes o início destes estudos devido à criação da maneira de demonstração conhecido por método da exaustão. Mas, diante desse cenário, muitos matemáticos fizeram estudos com o intuito de procurar encontra uma técnica mais simples possível para o cálculo de regiões curvas, fator esse que deu o surgimento de um imenso número de trabalhos.

Um destes trabalhos desenvolvidos foi o de calcular a inclinação de uma reta tangente a uma curva. E para estes estudos novamente usou-se ideias do Cálculo, particularmente cálculos infinitesimais. Conforme Portal El País[5] Ainda, estas ideias ganham proporções maiores através dos estudos de Pierre de Fermat (de 1607 até 12/01/1665). Esse, por sua vez, desenvolveu uma técnica para achar os máximos e mínimos de uma curva.

Segundo Boyer [1] ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor $f(x + E)$, ou seja, x e $x + E$ são pontos vizinhos. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas “num alto” ou “num baixo” de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo e mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x+E)$, percebendo que os valores, embora não são exatamente iguais, nesses pontos onde chega-se o ponto

máximo ou mínimo da curva a diferença entre os mesmo é muito pequena. Quando menor o valor de E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação.

A técnica desenvolvida por Fermat, Segundo Boyer [1], traça um paralelo com a ideia sobre diferenciação atualmente. Ao longo dos seus estudos ele também criou ferramentas para encontrar uma tangente a uma curva. Em estudos posteriores Fermat, desenvolveu um teorema para calcular áreas sob curvas, essa técnica usa as ideias intuitivas de aplicações Integráveis. Diante desse fato pode-se concluir, ou acreditar que a ideia de integração surgiu muito antes do conceito de derivadas. Mas, devido a Fermat ter apenas escrito, porém não publicado seus estudos (apenas os registrou), recebeu o devido reconhecimento somente após a sua morte.

Portanto, pode-se ter uma consciência que os problemas iniciais sobre o Cálculo foram instigados pelo problema de calcular áreas sob curvas e de encontrar a reta tangente. É de tamanha importância que dividir o desenvolvimento do cálculo em partes, obedecendo uma ordem, o seu desenvolvimento se deu primeiramente por integração, diferenciação e muito depois o surgimento da ideia de limites.

2.2 Cálculo de Newton e Leibniz

Por volta dos anos 300, Newton e Leibniz disputavam uma batalha científica pela descoberta do Cálculo, pois Newton estudou e descobriu primeiro a ideia intuitiva do mesmo, porém não fez a publicação. Por outro lado, Leibniz publicou seu trabalho primeiro que Newton. O mesmo declarou de forma irônica que “Os segundos inventores não têm direitos”.

O certo é que Newton e Leibniz contribuíram de maneira significativa para o desenvolvimento do Cálculo. Conforme Portal El País [5], juntos sistematizaram o conceito de derivadas e integral os quais são tão conhecidos hoje dentro do Cálculo. Desenvolveram propriedades operacionais de derivadas e integrais. Mostraram que esses conceitos são inversos. Desenvolveram um manual unificado que resolvera uma enorme lista de problemas até aquela época sem soluções.

O cálculo infinitesimal é muito útil em varias aplicações distintas do conhecimento, como por exemplo na área de Matemática, Física, Engenharia, Medicina, entre outros.

Em física, mas especificadamente, a ideia de derivada é fundamental no estudo da aceleração, velocidades instantâneas e forças. Assim como na matemática pode-se utilizar o conceito de derivada para achar área máxima ou mínima de uma determinada região.

Conforme Portal El País [5] Credita-se, a Newton os primórdios da física moderna. O Cálculo infinitesimal foi uma das ferramentas que o mesmo utilizou para aprofundar suas pesquisas nessa área.

Leibniz, por sua vez, utilizara técnicas do Cálculo para desvendar problemas mecânicos que até aquele momento não tinham soluções, Conforme Portal El País [5].

A disputa pela paternidade do Cálculo infinitesimal, teve seu fim em 1727 com a morte de Newton. Porém, o importante a notar é que ambos foram fundamentais para o desenvolvimento deste brilhante campo da matemática.

3 Álgebra Básica

Na matemática as expressões algébricas são apresentadas de várias formas, algumas mais complexas outras mais triviais. Dentre estas últimas, consideradas mais “fáceis” são estudados os conhecidos produtos notáveis.

Os produtos, para os matemáticos, é outro nome que se dá para a conta de vezes (x). E notável, como o próprio nome fala por si só, é algo notório, de fácil entendimento. Portanto, produtos notáveis, em matemática, são as expressões, consideradas mais simples, em forma de multiplicação.

Tendo tal conhecimento, pode-se economizar cálculos e tempo em certos problemas que envolvam simplificações.

Nesse primeiro momento apresenta-se os Produtos Notáveis conhecidos como quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma, cubo da diferença, Além de sua ligação com a fatoração de expressões algébricas.

3.1 Produtos Notáveis

Alguns dos primeiros registros sobre produtos notáveis encontram-se na obra *Elementos* do grego Euclides de Alexandria. Interessante notar que, de sua época até os dias atuais, são usados os mesmos procedimentos algébricos e geométricos.

Os produtos notáveis são muito utilizados em problemas de simplificações algébricas para tornar suas resoluções mais ágeis. Além de possibilitar a visualização geométrica das mesmas, assim como os gregos faziam.

Neste parte são abordados os produtos notáveis, Conforme Dante [2], mais utilizados em problemas matemáticos com suas provas e uma visão geométrica de alguns deles.

- Quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \times (a + b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

Geometricamente pode-se visualizar a expressão $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ como sendo a área da região quadrada de lado $(a + b)$. Veja Figura 1.

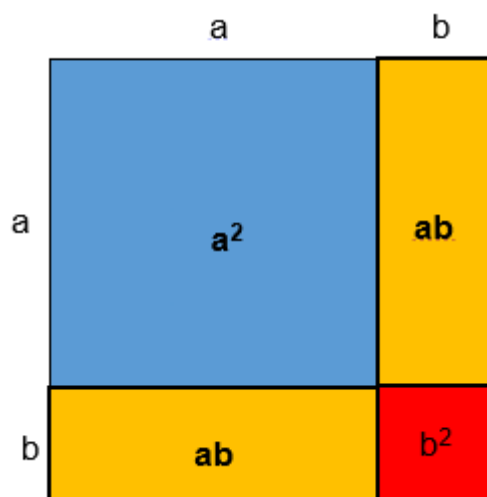


Figura 1: Demonstração visual do produto notável do quadrado da soma.

- Quadrado da diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 &= (a + (-b))^2 \\
 &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 \\
 &= a^2 - 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

□

Geometricamente é o mesmo que calcular a área da região quadrada de lado $(a-b)$ conforme Figura 2.

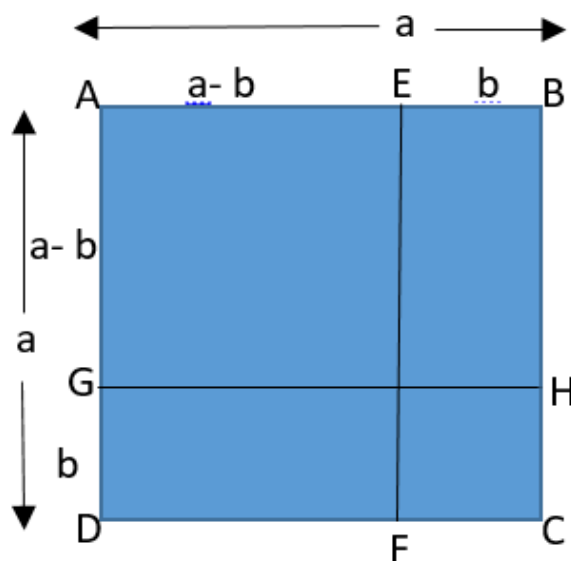


Figura 2: Demonstração visual do produto notável do quadrado da diferença.

- Produto da soma pela diferença: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

Geometricamente $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ é vista como na Figura 3. Equivale a calcular a área do retângulo de lados $(a-b)$ e $(a+b)$.

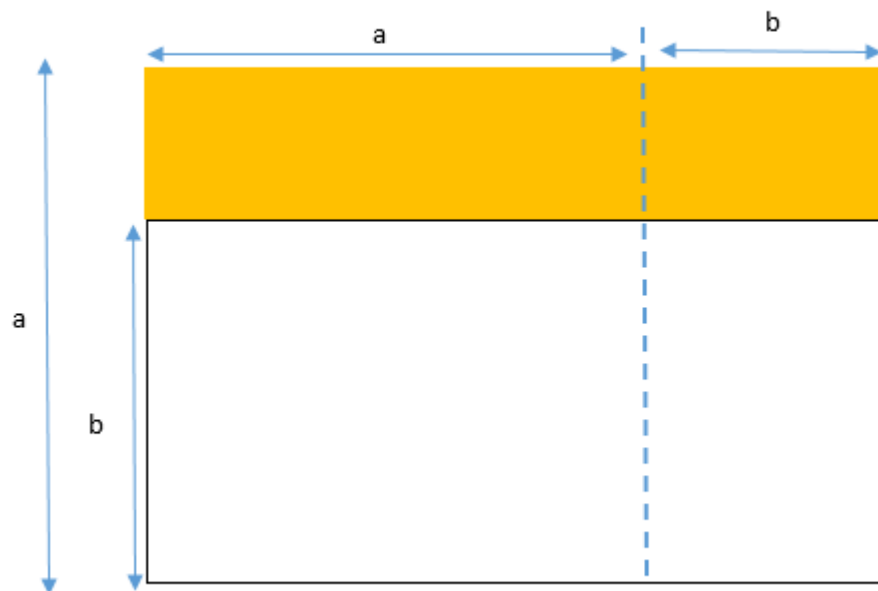


Figura 3: Demonstração visual do produto notável Produto da soma pela diferença

- Cubo da soma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

□

Geometricamente, $(a + b)^3$ indica o volume de um cubo com arestas que medem $a+b$ conforme Figura 4.

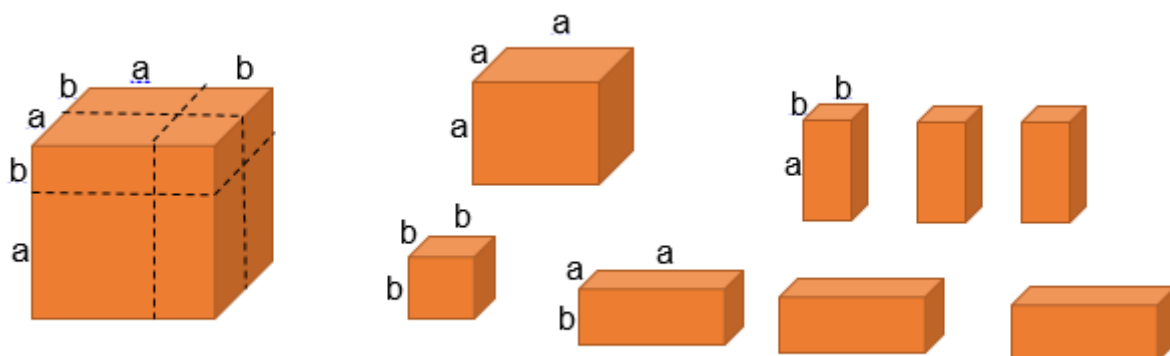


Figura 4: Demonstração visual do produto notável do cubo de uma soma

- Cubo da diferença: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 (a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2 \\
 &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
 \end{aligned}$$

□

Geometricamente, $(a - b)^3$ indica o volume de um cubo.

Sendo um cubo de volume V reparticionado em respectivos cubos de volumes V_1, V_2, V_3 e V_4 conforme a Figura 5.

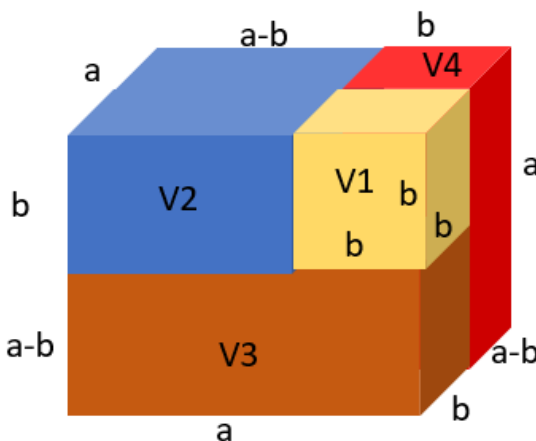


Figura 5: Demonstração visual do produto notável cubo da diferença

Então, com o auxílio geométrico da Figura 5, pode-se demonstrar que:

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 (a-b)^3 &= V - V1 - V2 - V3 - V4 \\
 &= a^3 - b^3 - a \times b \times (a-b) - a \times b \times (a-b) - a \times b(a-b) \\
 &= aa^3 - b^3 - a^2b + ab^2 - a^2b + ab^2 - a^2b + ab^2 \\
 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
 \end{aligned}$$

□

- Diferença de dois cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 (a-b) \times (a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - b^3 \\
 &= a^3 - b^3.
 \end{aligned}$$

□

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Demonstração. Para $n=1$ tem-se que a sentença é verdadeira, pois $a^1 - b^1 = a - b$. Suponha, por hipótese de indução, que valha para algum $n > 1$. Agora, note que

$$\begin{aligned}
 a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n b - b^n b \\
 &= a^n b - ab^n + ab^n - b^n b \\
 &= a(a^n - b^n) + b^n(a-b) \\
 &= a[(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})] + b^n(a-b) \\
 &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) + b^n(a-b) \\
 &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)
 \end{aligned}$$

Logo, a sentença é válida $\forall n \in N$.

□

3.2 Fatoração de expressões algébricas

Nesta parte observa-se a ligação das fatorações de expressões algébricas com os produtos notáveis do item 3.1, objetivando a habilidade de manusear técnicas algébricas de simplificação de expressões.

Abaixo está listada, conforme Dante [2], as principais técnicas de fatoração de expressões e suas ligações com os produtos notáveis.

- Colocando um termo em evidência:

$$ax^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + ax^3 + ax^2 + ax = a(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^3 + x^2 + x)$$

Esta fatoração está associada ao produto notável

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

- Agrupamento: É o método pelo qual simplifica-se uma expressão algébrica ao agrupar os termos semelhantes.

Esta fatoração também está ligada com o produto notável

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

- Trinômio quadrado perfeito : Utiliza-o quando a expressão algébrica for um trinômio e o mesmo ao ser fatorado resulta em quadrado (da soma ou diferença) perfeito.
- Diferença de dois quadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Esta fatoração usa a mesma fórmula do produto da soma pela diferença.

- Soma e diferença de dois cubos: A soma de dois cubos é igual ao produto do fator $a + b$ pelo fator $a^2 - ab + b^2$.

A diferença entre dois cubos é igual ao produto do fator $a - b$ pelo fator $a^2 + ab + b^2$.

Estas fatorações estão ligadas com os produtos notáveis da soma ou diferença de dois cubos.

- Fatoração de expressões quadráticas: Ao considerar uma expressão quadrática do tipo $ax^2 + bx + c$, onde **a**, **b** e **c** são números reais e $a \neq 0$. Então esta equação é do segundo grau e sua forma fatorada é dada por $a(x - x_1) \times (x - x_2)$, sendo **a** o coeficiente da equação do segundo grau e x_1 e x_2 suas raízes.

3.3 Produtos Notáveis: um Auxílio para o Cálculo

O Cálculo é entendido como o estudo das noções intuitivas, definições e propriedades dos assuntos limites, derivadas e integrais a luz do rigor matemático em suas afirmações, além da exploração de aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Porém, as bases para desenvolver operações matemáticas aritméticas e algébricas, simplificações fracionárias e manipulações de forma geral em algumas expressões de problemas em Cálculo requer o conhecimento prévio dos produtos notáveis.

Um exemplo deste fato, conforme Guidorizzi [3], é o processo para calcular o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$. Observe-o abaixo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Note que na parte $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right)$ foi usado o produto da soma pela diferença de dois termos, objetivando retirar uma indeterminação matemática e concluir o cálculo do limite.

Outro exemplo pode ser visto, segundo Guidorizzi [3], na derivada da função $f(x) = x^2$ calculada no ponto 2.

Observe que

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = 2.$$

As mudanças de variáveis na integral também utilizam muito os produtos notáveis. Um exemplo disto, conforme Guidorizzi [3], é o cálculo da integral a baixo:

$$\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x + 1} dx$$

Solução:

Aqui é conveniente a mudança $u = x + 1$

$$\begin{cases} u = x + 1; & du = dx \\ x = -1; & u = 0 \\ x = 0; & u = 1 \end{cases}$$

De $u = x + 1$, segue $x = u - 1$. Então,

$$\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x + 1} dx = \int_0^1 (u - 1)^2 \sqrt{u} du = \int_0^1 (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du = \int_0^1 (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du.$$

Assim,

$$\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x + 1} dx = \left[\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 2 \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{16}{105}.$$

Observe que neste cálculo na parte $\int_0^1 (u - 1)^2 \sqrt{u} du = \int_0^1 (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du$ foi-se recorrido o produto notável quadrado da diferença para dar continuidade no desenvolvimento da expressão da integral

$$\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x + 1} dx$$

.

Nesta parte, portanto, estudou-se os principais produtos notáveis em uma visão algébrica e geométrica, sua ligação com a fatoração e seu auxílio em algumas expressões que envolvem limites, derivadas e integrais.

Nota-se, então, a importâncias dos pre requisitos que conectam a familiaridade com o manuseio de manipulações algébricas e aritméticas entre estes assuntos.

Os produtos notáveis podem ser encontrados em vários métodos de simplificações no Cálculo. O leitor interessado pode além da referência [3] aprofundar mais os estudos na [10].

4 Limites

Neste capítulo aborda-se as noções intuitivas, definições e propriedades dos limites de sequências e de funções. Observa-se problemas envolvendo o mesmo e como os produtos notáveis junto com a fatoração de expressões algébricas facilitam neste processo. Além de um exemplo aplicável de limites na física.

4.1 Definições e propriedades

Conforme Portal Wikipédia [6], os limites de sequências podem ser entendidos segundo Definição 1.

Definição 1. *Seja $x_1, x_2, \dots$ uma sequência de números reais. A expressão: $\lim x_i = L$ significa que, para índices i suficientemente grandes, os termos x_i da sequência estão arbitrariamente próximos do valor L . Neste caso, dizemos que o limite da sequência é L .*

Ainda segundo Portal Wikipédia [6], a Definição 1 pode ser interpretada em símbolos matemáticos como

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall i \in \mathbb{N} \wedge i \geq N \Rightarrow |x_i - L| < \epsilon.$$

Uma forma didática de entender tal definição matemática é a seguinte:

Tome

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}$$

$$x_4 = \frac{1}{4}$$

$$x_5 = \frac{1}{5}$$

$$x_6 = \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{1}{i}$$

$$\vdots$$

Note que a medida que i cresce x_i decresce. Em outras palavras mais técnicas, quando i tende ao mais infinito x_i tende a 0.

Análise agora o seguinte situação:

Uma pessoa curiosa questiona-se quão perto de 0 os termos da sequência $x_i = \frac{1}{i}$ podem chegar, e outra pessoa mais curiosa ainda pergunta, mas a partir de qual índice i os termos da sequência ficam tão perto quanto se queira de 0.

A primeira pessoa imagina alguma distância entre 0 e $x_i = \frac{1}{i}$, ou seja, um intervalo aberto $I = (-\epsilon, +\epsilon)$. Enquanto que a segunda procura um certo i tal que a partir de $N > i$ os termos $x_N = \frac{1}{N}$ estejam todos contidos no intervalo I .

Estas últimas ideias sobre sequência de limites trabalho somente com o domínio das funções sendo o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Todavia, caso o domínio seja um subconjunto qualquer dos reais, conforme Portal Wikipédia [6], a definição de limites não exigira que tenha $f(c) = L$, muito menos $f(x)$ esteja definida em c .

O entendimento do que seja limites de funções, segundo Portal Wikipédia [6], está descrita na definição abaixo.

Definição 2. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo de números reais, $a \in I$ e $f : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida em $I - \{a\}$. Escrevemos $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ quando para qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$, vale $|f(x) - L| < \epsilon$. Ou, usando a notação simbólica:*

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Algumas propriedades derivadas da definição de limites estão listadas abaixo, conforme Portal Wikipédia[6].

Propriedades:

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$ então:

- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow c} [K] = K$. Sendo K uma constante.

Demonstração. Por hipótese tem-se que o $\lim_{x \rightarrow c} [K] = K$. quer dizer que para todo $\epsilon > 0$ acha-se $\delta > 0$ tal que.

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| = |k - K| = 0 < \epsilon$$

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$ que for tomado, pode-se optar por qualquer $\delta > 0$ que o limite será satisfeito.

□

$$\bullet \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$$

Demonstração. Por hipótese tem-se que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$ quer dizer que para todo $\epsilon > 0$ acha-se um $\delta_1 > 0$, tal que.

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e que}$$

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$ quer dizer que para todo $\epsilon > 0$ acha-se um $\delta_2 > 0$. Tal que.

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considerando o menor valor de delta, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se que

$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2|$. fazendo-se uso da desigualdade triangular tem-se:

$$|f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

A demonstração da propriedade da subtração de limites pode ser vista de maneira semelhante, basta trocar os sinais. $\square$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = L_1 \times L_2$$

Demonstração. Considera-se pela definição formal de limites que dado $\epsilon > 0$. Logo existe $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que.

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon. \text{ E que}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \epsilon.$$

Diante disso é preciso mostrar que.

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| < \epsilon$$

Agora, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, onde $0 < |X - X_0| < \delta$ tem-se que

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| = |(f(x) - L_1)(g(x) - L_2) + L_1(g(x) - L_2) + L_2(f(x) - L_1)| \leq$$

$$|f(x) - L_1||g(x) - L_2| + |L_1||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1|.$$

Em seguida aplica-se a desigualdade triangular e utiliza-se as hipóteses dos limites de $f(x)$ e $g(x)$.

$$|f(x) - L_1||g(x) - L_2| + |L_1||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| \leq \epsilon\epsilon + |L_1|\epsilon + |L_2|\epsilon =$$

$$\epsilon(\epsilon + |L_1| + |L_2|).$$

□

- limite do quociente

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L1}{L2}$$

Demonstração. considera-se a prova do produto dos limites, logo pode-se manipular o limite da seguinte maneira. $\lim_{x \rightarrow c} \left(f(x) \times \frac{1}{g(x)} \right) = L1 \times \frac{1}{L2}$

Se for mostrado que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L2}$ para todo $L2 \neq 0$, pode-se concluir a demonstração.

Concedido um $\epsilon > 0$, existem $\delta1 > 0$ e $\delta2 > 0$ tais que.

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta1 &\Rightarrow |g(x)| > \frac{|g(x)|}{2} \\ 0 < |x - x_0| < \delta2 &\Rightarrow |g(x) - L2| < \epsilon. \end{aligned}$$

Diante disso, toma-se um valor de delta $\delta = \min\{\delta1, \delta2\}$, em que $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se que.

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L2} \right| = \left| \frac{L2 - g(x)}{g(x) \times L2} \right| = \frac{|L2 - g(x)|}{|g(x)| \times |L2|} < \frac{|L2 - g(x)|}{\frac{|L2|}{2} \times |L2|} = \frac{2}{L2^2} |L2 - g(x)| < \frac{2}{L2^2} \epsilon$$

□

Alguns exemplos podem ser vistos no cálculo do limites utilizando os produtos notáveis e fatoração, como por exemplos os dois seguintes.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right]$$

- O $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right]$ é o típico do limite que tem-se que fatorar a expressão matemática para tirar a indeterminação e para isso, utiliza-se os produtos notáveis, mais especificadamente o produto da soma pela diferença de dois termos.

- $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$, o numerador dessa expressão matemática pode ser transformado em um produto da soma pela diferença da seguinte forma:

Transforma-se $4 = 2^2$, escreve-se $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$, aplicando o produto da soma pela diferença de dois termos tem-se $x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$, por fim simplifica-se a expressão $\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)}$.

Aritmeticamente, a conta fica

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} \\
&= \frac{(x - 2) \times (x + 2)}{x - 2} \\
&= x + 2
\end{aligned}$$

- Portanto, o $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 2$
- Utilizando a propriedade: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x + 2] = \lim_{x \rightarrow 2} [x] + \lim_{x \rightarrow 2} [2] = 4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^3 - 8}{x - 2} \right]$$

- O $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^3 - 8}{x - 2} \right]$ é mais um caso de indeterminação, para tirar essa indeterminação é necessário fatorar a expressão matemática $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

- $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$, o denominador dessa expressão matemática pode ser transformado em cubo da diferença da seguinte maneira: Transforma $8 = 2^3$, depois utilizando o cudo da diferença de dois termos segue que $(x - 2) \times (x^2 + 2x + 4)$, por fim simplifica a expressão $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2) \times (x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$.

Aritmeticamente a conta fica escrita como abaixo

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\
&= x^2 + 2x + 4
\end{aligned}$$

$$\text{Então, o } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^3 - 8}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + 2x + 4]$$

- Utilizando a propriedade: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + 2x + 4] = \lim_{x \rightarrow 2} [x^2] + \lim_{x \rightarrow 2} [2x] + \lim_{x \rightarrow 2} [4] = 12$$

4.2 Limites em uma aplicação na física

A definição de velocidade está associada à variação de posição. Pode-se afirmar, conforme Portal efísica [9], que um objeto em movimento muda sua posição com o tempo, quando esse está em movimento, pode-se afirma que um objeto que está em movimento tem-se uma velocidade maior que zero. Por outro lado se este objeto estiver em repouso sua velocidade é nula.

Imagine a seguinte situação:

Dois professores de matemática do IFPI-SRN moram em Teresina-Pi, os mesmos para chegar ao local de trabalho embarcam em um Ônibus às 20:30 na rodoviária da Capital e desembarcam às 5:00 em São Raimundo Nonato-Pi. Ao chegarem na rodoviária que desembarcaram um dos professores freta uma corrida de moto-táxi para uma pousada.

O mototaxista em um tempo t_1 percorreu x_1 de distancia para deixar o primeiro professor, depois voltou para pegar o outro. Este último o mototaxista o deixou em outra pousada em um tempo t_2 percorrendo uma distancia x_2 .

A corrida de moto do primeiro professor foi mais demorada do que a do segundo, ou seja, $t_2 > t_1$. Assim, encontra-se a variação no tempo entre as duas corridas, sendo a subtração do tempo final e o tempo inicial, dado por

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

,

Houve, também, uma variação entre as distâncias da rodoviária de São Raimundo para a pousada que ficou o primeiro professor, isto é, x_1 , e a distancia da mesma rodoviária até a pousada que ficou o segundo, ou seja, x_2 ; Chamando esta variação da posição de Δx , tem-se que

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

.

Segundo Portal efísica [9], Defini-se a velocidade escalar média como a divisão da variação da posição ou espaço sobre a variação do tempo.

Então, em nossa situação particular dos professores de matemática a velocidade média do mototaxista foi de $V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

A ideia de limite nesta situação é aplicada quando se queira a velocidade em um certo instante de tempo, e não em um intervalo de tempo. Em física essa velocidade recebe o nome de velocidade instantânea. O cálculo desta última é feito tomando diferenças cada vez menores entre t_2 e t_1 . Matematicamente diz-se que Δt tende a 0.

Agora, chamando a velocidade instantânea de v tem-se, em símbolos, que, a velocidade do mototaxista em determinado instante de tempo é de

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

.

Interpretando a aceleração, segundo Portal efísica [9], como uma grandeza que indica a taxa de variação da velocidade em função do tempo, ou seja, a aceleração que determina o aumento ou queda da velocidade em relação a um tempo percorrido. A aceleração do mototaxista fica sendo dada segundo a expressão:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Onde, a indica aceleração, Δv = variação da velocidade ou seja a velocidade final menos a velocidade inicial e Δt = variação do tempo, ou seja indica a diferença entre a variação do tempo final menos o tempo inicial.

Por exemplo, um dos professores utiliza uma bicicleta para sair da pousada até o IFPI-SRN, o mesmo pedala em uma aceleração constante de $5m/s^2$. Porém, antes de subir na bicicleta ele a empurra correndo até atingir uma velocidade inicial de 2 m/s.

Agora de $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ tem-se $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$, o que implica em $a(t_2 - t_1) = v_2 - v_1$, e isolando x_1 acarreta

$$v_2 = v_1 + a \cdot (t_2 - t_1)$$

O professor nesta situação deixa indícios que possibilitam calcular sua velocidade instantânea.

Por exemplo, sua velocidade instantânea em 4 segundos de trajeto dado que seu tempo $t_1 = 2$ segundos.

$$v_2 = 2 + 5 \cdot (4 - 2)$$

$$v_2 = 2 + 5 \cdot 2$$

$$v_2 = 12m/s$$

Diante Disso, pode-se verificar que após percorrer 4 segundos, o professor estava numa velocidade exatamente de 22 m/s.

5 Derivada

Neste capítulo aborda-se as noções de derivada relacionadas com problemas que envolvam reta tangente ao gráfico de uma função. Fala-se sobre derivadas de funções do tipo x^n , $\sqrt[n]{x}$, e^x , $\ln x$ e derivadas de funções trigonométricas, as relações dos cálculos de derivadas com os produtos notáveis e por fim estuda uma aplicação de derivada para determinar a velocidade instantânea.

5.1 Problema de definir uma reta tangente a uma curva.

Uma das pesquisas que tomou força após a quadratura de curvas foi o estudo do comportamento de retas em relação a curvas em um único gráfico. As Derivadas auxiliam no estudo de retas tangentes aos gráficos de funções polinomiais. Veja Figura 6.

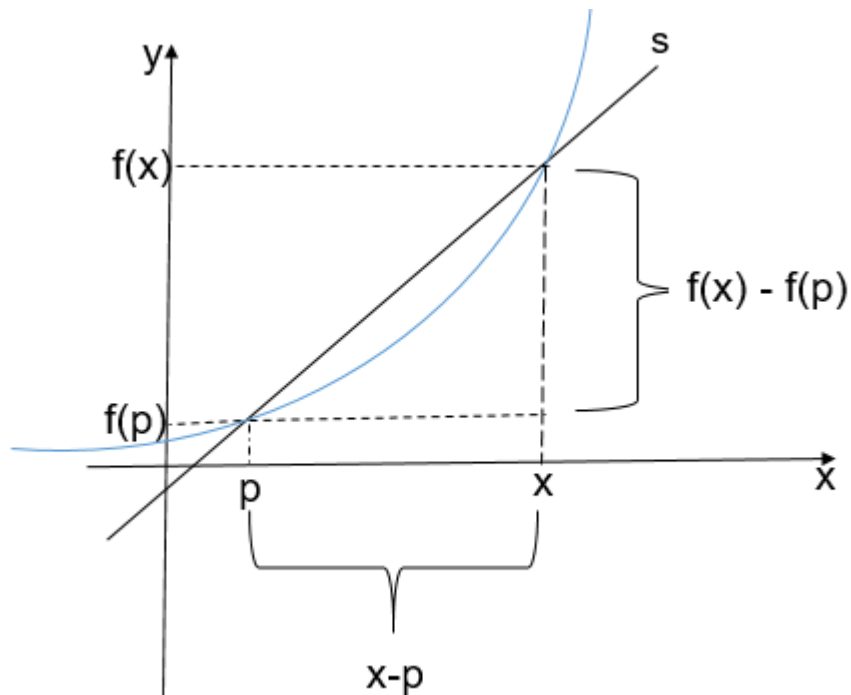


Figura 6: Reta secante a curva

O problema de encontrar a reta tangente ao gráfico de uma função no ponto $(p, f(p))$ depende, conforme Guidorizzi [3], que este pertença ao domínio da função e a reta passe pelo ponto $(p, f(p))$; além de determinar o coeficiente angular.

Então para estes estudos considere que uma reta s passe pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$ conforme Figura 6.

Agora, ao se calcular o coeficiente angular da reta s através da razão entre a variação $f(x)$ e $f(p)$ com a variação entre x e p . Tem-se que o coeficiente angular da reta s é dado

por:

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Agora, quando x tende a p , o coeficiente angular de reta s tende a valor $f'(p)$, que pode ser denotado, conforme Guidorizzi [3], por:

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

A nomenclatura $f'(p)$ se resume, apenas, em indicar o valor do limite $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

Note na Figura 7 que à medida que os valores tomados para x vai se aproximando de p , a reta s vai se inclinando posicionalmente em direção à reta T , segundo Guidorizzi [3].

$$y - f(p) = f'(p) \times (x - p)$$

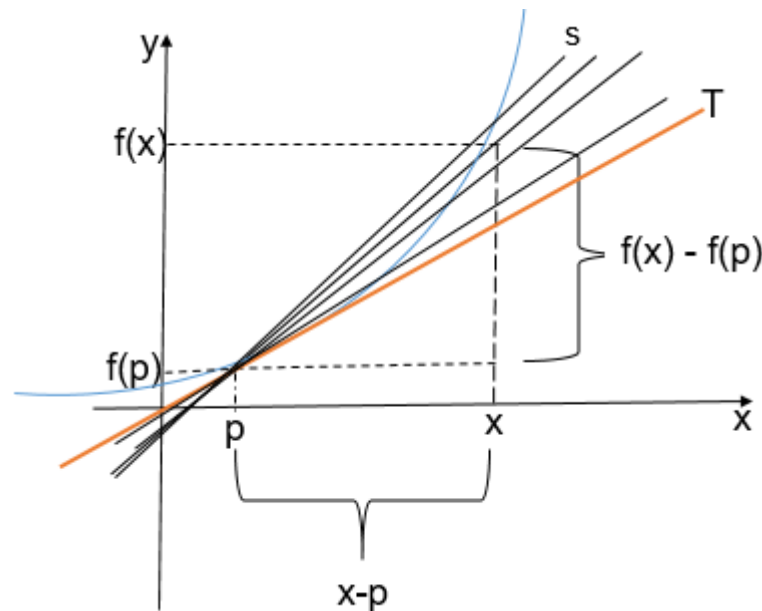


Figura 7: Reta tangente T

A equação, $y - f(p) = f'(p) \times (x - p)$ passa, segundo Guidorizzi [3], pelo ponto p e possui coeficiente angular $f'(p)$ que é a inclinação da reta ou a derivada no ponto p .

5.2 Derivada de uma função

Formalmente, segundo Guidorizzi [3], o entendimento de Derivada está escrito na Definição 3.

Definição 3. *Sejam f uma função e p um ponto do seu domínio. O limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ quando existe é denominado derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de*

p). Assim $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right]$. Se f admite derivada em p , então diremos que f é derivável ou diferenciável em p .

Portanto, pode-se perceber que uma função f é derivável ou diferenciável, quando um conjunto de pontos que pertence ao domínio da função for derivável em cada ponto do domínio, segundo Guidorizzi [3]. Em outras palavras, f é uma função derivável caso o seja em todos os pontos do seu domínio.

Note que tomando $\mathbf{x}=\mathbf{p}+\mathbf{h}$ e fazendo $\mathbf{h}$ tender a zero, a derivada fica reescrita como abaixo

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

Um exemplo de processo em cálculos de derivadas e que os produtos notáveis auxiliam, novamente, em seu desenvolvimento pode ser visto em seguida.

- Seja $f(x) = x^3$, Calcular $f'(1)$ e $f'(x)$:

1. $f'(1) =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \times (x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)$$

A derivada na abcissa 1 é igual calcular o limite $\lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 + x + 1)] = 3$.

2. $f'(x) =$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \times (3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

Para calcular a derivada de $f(x) = x^3$ para todo x real. Basta obter o resultado do $\lim_{h \rightarrow 0} [(3x^2 + 3xh + h^2)] = 3x^2$.

5.3 Derivadas de x^n e $\sqrt[n]{x}$

Teorema. Seja $n \neq 0$ um natural. São validas as formulas de derivação, Segundo Guidorizzi [3].

- $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \times x^{n-1}$

Demonstração. Pela definição de derivada tem-se $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$ (#).

Fazendo $x+h=t$ ou $h=t-x$ implica que quando $h \rightarrow 0$ os valores de $t \rightarrow x$. Agora, substituindo $x+h$ por t e h por $t-x$ em (#) tem-se $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x}$. Escrevendo o denominador em forma de produto segue que

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t - x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})}{t - x}$$

ou seja

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} (t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})$$

calculando o limite resulta em $f'(x) = x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}$, finalmente, repedindo a base x e somando os expoentes em cada parcela depois adicionando os termos semelhantes chega-se em $f'(x) = nx^{n-1}$

□

- $f(x) = x^{-n} \rightarrow f'(x) = -n \times x^{-n-1}, x \neq 0$

Demonstração. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-f(x+h)^n + x^n}{h} \right] \times \frac{1}{(x+h)^n x^n}$
 (##), mas acaba-se de concluir que $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)^n - x^n}{h} \right] = nx^{n-1}$, além disso tem-se, também, $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(x+h)^n \times x^n} \right] = \frac{1}{x^{2n}}$. Substituindo estes dois últimos resultados em (##) tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} - \left[\frac{f(x+h)^n - x^n}{h} \right] \times \frac{1}{(x+h)^n x^n} = -nx^{n-1} \times \frac{1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Portanto, $f(x) = x^{-n} \rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$.

□

- $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$ para $x \neq 0$ e $n > 1$

Demonstração. De fato, escrevendo $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ e aplicando a definição de derivada tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x}}{t - x}$$

Fazendo $u = \sqrt[n]{t}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ ($t \rightarrow x \Rightarrow u \rightarrow v$) acarreta que

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \lim_{u \rightarrow v} \left[\frac{1}{\frac{u^n - v^n}{u - v}} \right] = \frac{1}{n \times v^{n-1}}. \text{ O que implica } f'(x) = \frac{1}{n \times \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$$

□

5.4 Derivadas de e^x e $\ln x$

São válidas as fórmulas de derivação abaixo, segundo Guidorizzi [3].

- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Demonstração. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{e^{x+h} - e^x}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[e^x \times \frac{e^h - 1}{h} \right] = e^x$

Pois $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{e^h - 1}{h} \right] = 1$ □

- $g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$

Demonstração. $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \times \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

Fazendo $(u = \frac{h}{x})$ temos que:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u) \frac{1}{xu} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times \ln(1+u) \frac{1}{u} = \frac{1}{x}$$

Pois, $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$. Logo $g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$ □

5.5 Derivadas das Funções Trigonômicas

São válidas as fórmulas de derivação, segundo Guidorizzi [3].

1. $\text{sen}'x = \cos x$

Demonstração. $\text{sen}'x = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2 \times \text{sen} \frac{h}{2} \times \cos \frac{2x+h}{2}}{h} \right]$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right] \times \cos \frac{2x+h}{2} = \cos x$$
 □

2. $\cos'x = -\text{sen}x$

Demonstração. $\cos'x = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-2 \times \text{sen} \frac{h}{2} \text{sen} \frac{2x+h}{2}}{h} \right]$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right] \times \text{sen} \frac{2x+h}{2} = -\text{sen}x$$
 □

3. $\text{tg}'x = \sec^2 x$

Demonstração. $tg'x = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{tg(x+h) - tgx}{h} \right]$.

Fazendo $t = x + h$, ($t \rightarrow x$ quando $x \rightarrow 0$).

$$tg'x = \lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{tgt - tgx}{t - x} \right] = \lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{\frac{sent}{cost} - \frac{sex}{cosx}}{t - x} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{sent \times cosx - senx \times cost}{t - x} \right] \times \frac{1}{cost \times cosx}$$

Como $\lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{sent \times cosx - senx \times cost}{t - x} \right] = \lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{sen(t-x)}{t-x} \right] = 1$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{1}{cost \times cosx} \right] = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x.$$

Logo, $tg'x = sec^2 x$.

□

4. $sec'x = secx \times tgx$.

Demonstração. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{sec(x+h) - secx}{h} \right]$

Sabemos que $secx = \frac{1}{cosx}$. Logo temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{cos(x+h)} - \frac{1}{cosx}}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{cosx - cos(x+h)}{cos(x+h) \times cosx}}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{cosx - cos(x+h)}{h \times cos(x+h) \times cosx} \right]$$

A expressão $cosx - cos(x+h) = -2 \times sen(\frac{2x+h}{2}) \times sen(\frac{-h}{2})$. Por relações trigonométricas, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-2 \times sen(\frac{2x+h}{2}) \times sen(\frac{-h}{2})}{h \times cos(x+h) \times cosx} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2 \times sen(\frac{2x+h}{2}) \times sen(\frac{h}{2})}{h \times cos(x+h) \times cosx} \right]$$

Dividindo o numerador e denominador do limite por 2, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{sen(\frac{2x+h}{2}) \times sen(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2} \times cos(x+h) \times cosx} \right]$$

Pode-se reescrever esse limite como produto entre dois outros limites, logo temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{sen(\frac{2x+h}{2})}{\frac{h}{2}} \right] \times \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{sen(\frac{h}{2})}{cos(x+h) \times cosx} \right]$$

Sabe-se que $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{sen(\frac{2x+h}{2})}{\frac{h}{2}} \right] = 1$ então temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{sen(\frac{h}{2})}{cos(x+h) \times cosx} \right] = \frac{sen(\frac{2x}{2})}{cosx \times cosx} = \frac{sex}{cos^2 x} = tgx \times secx$$

Logo, $\sec'x = \sec x \times \operatorname{tg}x$.

□

5. $\cot g'x = -\operatorname{cosec}^2x$

$$\text{Demonstração. } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cot g(x+h) - \cot g x}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\cos(x+h)}{\operatorname{sen}(x+h)} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \times \cos(x+h) - \operatorname{sen}(x+h) \times \cos x}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$$

Pode-se perceber pela diferença de dois arcos que:

$\operatorname{sen} x \times \cos(x+h) - \operatorname{sen}(x+h) \times \cos x = \operatorname{sen}(x - (x+h))$, logo tem-se que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x - (x+h))}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(-h)}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right] = - \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(h)}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$$

O $- \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(h)}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$. Podemos rescrever como o produto de dois outros limites.

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right] \times - \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right] = - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

Logo, tem-se que $\cot g'x = -\operatorname{cosec}^2x$

□

6. $\operatorname{cosec}'x = -\operatorname{cosec}x \times \cot g x$

$$\text{Demonstração. } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}(x+h)} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x+h)}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$$

Podemos perceber que, $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x+h) = 2 \times \operatorname{sen}(\frac{-h}{2}) \times \cos(x + \frac{h}{2})$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2 \times \operatorname{sen}(\frac{-h}{2}) \times \cos(x + \frac{h}{2})}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right] = - \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2 \times \operatorname{sen}(\frac{h}{2}) \times \cos(x + \frac{h}{2})}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$$

Dividindo o numerador e denominador do $- \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2 \times \operatorname{sen}(\frac{h}{2}) \times \cos(x + \frac{h}{2})}{h \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$ por 2,

temos que: $f'(x) = - \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2}) \times \cos(x + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2} \times \operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right]$

$$f'(x) = - \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})} \right] \times \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(x + \frac{h}{2})}{\operatorname{sen}(x+h) \times \operatorname{sen} x} \right] = - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}x \times \cot g x$$

Logo, tem-se que $\operatorname{cosec}'x = -\operatorname{cosec}x \times \cot g x$.

□

5.6 Regras de derivação

Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f+g$, $k \times f$ e $f \times g$ são deriváveis em p e têm-se, conforme Guidorizzi [3], que

$$1. (f + g)'(p) = f'(p) + g'(p).$$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração. } (f + g)'(p) &= f'(p) + g'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{(f(x) + g(x)) - (f(p) + g(p))}{x - p} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) + \left(\frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) \right] = f'(p) + g'(p) \end{aligned}$$

Pode-se resumir esse processo de derivação, falando que a derivada da soma, e a soma das derivadas das funções $f(x)$ e $g(x)$, ou simplesmente a derivadas das parcelas.

□

$$2. (k \times f)'(p) = k \times f'(p)$$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração. } (k \times f)'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{k \times f(x) - k \times f(p)}{x - p} \right] = k \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right] = \\ &= k \times f'(p). \end{aligned}$$

Logo, tem-se que $(k \times f)' = k \times f'(p)$

Pode-se resumir esse processo de derivação como a derivada do produto de uma constante K por uma função f , é igual ao produto da constante k pela derivada da função f .

□

$$3. (f \times g)'(p) = f'(p) \times g(p) + f(p) \times g'(p)$$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração. } (f \times g)'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) \times g(x) - f(p) \times g(p)}{x - p} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) \times g(x) - f(p) \times g(x) + f(p) \times g(x) - f(p) \times g(p)}{x - p} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \times g(x) + f(p) \times \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right] = f'(p) \times g(p) + f(p) \times g'(p). \end{aligned}$$

Esse processo de derivação do produto de duas funções se resume em derivar a primeira função e multiplicar pela segunda função mais a primeira função vezes a derivada da segunda função.

□

4. Regra do quociente - Se f e g forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ será derivável em p e

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(p) = \frac{f'(p) \times g(p) - f(p) \times g'(p)}{(g(p))^2}$$

$$\text{Demonstração. } \left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x - p} \right] = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) \times g(p) - f(p) \times g(x)}{x - p} \right] \times \frac{1}{g(x) \times g(p)}$$

Somando e subtraindo $f(p) \times g(p)$ ao numerador resulta

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \times g(p) - f(p) \times \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right] \times \frac{1}{g(x) \times g(p)}.$$

$$\text{Portanto, temos que: } \left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p) \times g(p) - f(p) \times g'(p)}{(g(p))^2}$$

□

5.7 Velocidade instantânea

Essa seção aborda os conceitos de Movimento Uniformemente Variado (MUV), o qual servirá de base em estudos da velocidade instantânea de uma partícula através do cálculo diferencial. Por fim, expõe-se uma aplicação de derivada nesta parte da física mecânica.

5.7.1 Movimento Uniformemente Variado (MUV)

O Movimento Uniformemente Variado (MUV) depende de uma aceleração constante e diferente de zero, e que movimento esteja em linha reta. Isto garante a uniformidade de um corpo em movimento, ou seja, quando os intervalos de tempo iguais a variação da velocidade também ficará igual.

Em física, defini-se MUV, segundo Portal Sofísica [10], como:

Definição 4. (*Movimento Uniformemente Variado (MUV)*) é o movimento no qual a velocidade escalar varia uniformemente no decorrer do tempo. O movimento caracteriza-se por haver uma aceleração escalar constante e diferente de zero.

Uma das fórmulas mais usadas em problemas envolvendo MUV, conforme Portal Brasil Escola [8], é a função horária do espaço $S = S_0 + V_0 \times t + \frac{a \times t^2}{2}$.

Note que essa função é do 2º grau com variável t de tempo, S =posição final, S_0 =posição inicial e a = aceleração.

Mediante isso, a representação gráfica dessa equação em um plano Cartesiano é um arco de parábola.

Quando $t=0$, o gráfico de S é cortado em S_0 , caso $a > 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo e caso $a < 0$ para cima.

O ponto M, veja Figura 8, é momento onde a posição de um objeto em um determinado tempo é máxima ou mínima, dependendo, respectivamente, se a aceleração é positiva ou negativa.

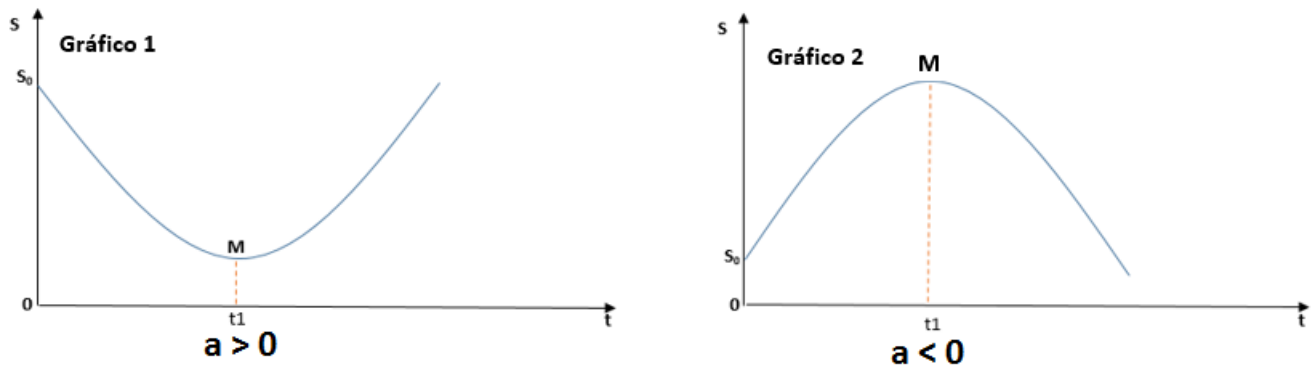


Figura 8: Parábola concavidade

5.7.2 Velocidade e aceleração instantânea

A velocidade e a aceleração instantânea está diretamente ligada ao cálculo diferencial. Tanto a velocidade como a aceleração instantâneas derivam da função de velocidade média, segundo Portal do engenheiro [7].

Conforme Guidorizzi [3], tem-se que supondo uma partícula que se desloca sobre o eixo x com função de posição $x = f(t)$, então a *velocidade média* da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$ é definida pelo quociente $\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, em que $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$ é o *deslocamento* da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$. A *velocidade* da partícula no instante t é definida como em que a derivada (caso exista) de f em t , isto é:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

Assim, pela definição de derivada,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

A *aceleração*, conforme Guidorizzi [3], no instante t é definida como em que a derivada em t da função $v=v(t)$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pela definição de derivada,

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

O quociente $\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ é a aceleração média entre os instantes t e $t + \Delta t$, segundo Guidorizzi [3].

A velocidade média, segundo Portal engenheiro [7], é dada pela razão da variação do espaço em relação ao tempo. Conforme mostra a Figura 9, pode-se perceber que essa é

dada pela inclinação da reta f secante ao gráfico S de uma função do espaço em relação ao tempo que passa pelo pontos A e B . E que a velocidade instantânea é a inclinação da reta tangente g ao gráfico da função do espaço em relação ao tempo no ponto B .

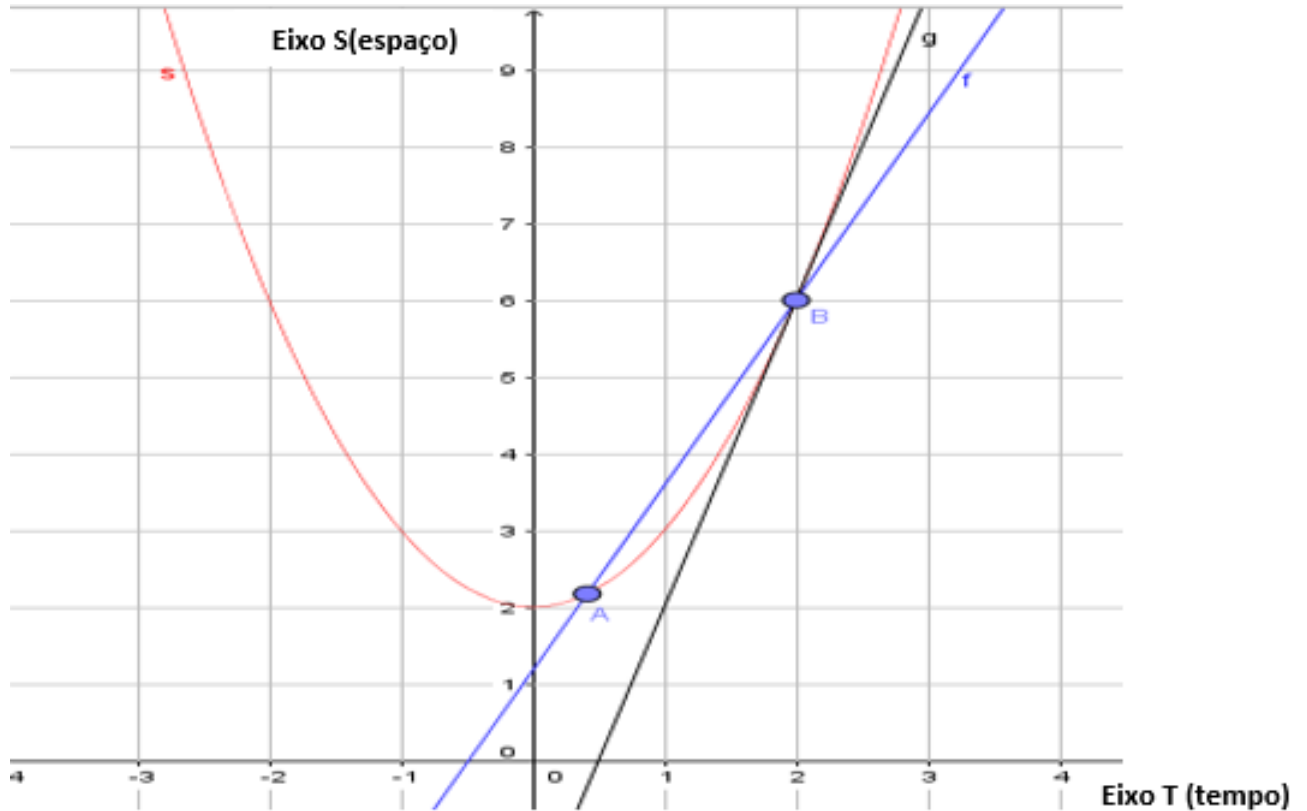


Figura 9: Função: espaço x tempo.

Observa-se na Figura 9 que a reta g tangente ao gráfico S é obtido à medida que diminuí-se a variação do tempo entre os pontos A e B ; isto faz com que a reta g se aproxime para coincidir com a reta f . Ou seja, a inclinação da reta secante se aproxima da inclinação da reta tangente em B , segundo [7].

Sabe-se que a Velocidade Média é dado por: $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Fazendo Δt tender a zero, encontra-se a velocidade instantânea dada por $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Tem-se também que a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto B é a velocidade instantânea.

6 Integral

Neste capítulo estuda-se os conceitos e definições de integrais, explora gráficos de áreas através de integrações e expõe aplicações em áreas de figuras planas.

6.1 Definições e propriedades

A noção de integral surgiu no momento em que o ser humano se preocupou em calcular áreas de figuras planas cujo alguns de seus lados fossem curvos, segundo Iezzi [4].

Para isso, Considera-se uma função $f : [a, b] \rightarrow R$, sendo $f(x) \geq 0$. Procura-se determinar a área A entre o gráfico da função e eixo da abscissa considerando o intervalo que pertence ao seu domínio da função. Como se observa-se na Figura 10.

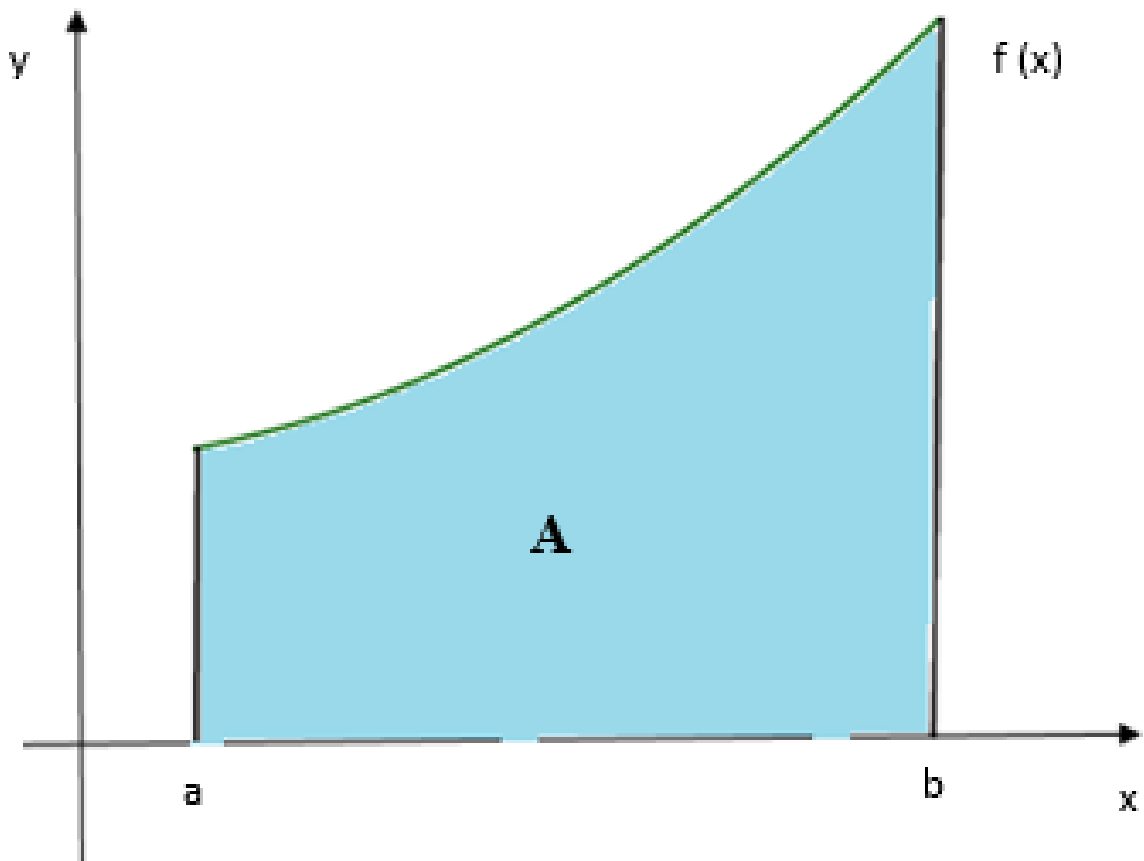


Figura 10: Região sob o gráfico.

Para determina essa área A , inicialmente precisa-se de um conhecimento prévio sobre áreas de figuras planas que os seu lados são segmentos, recorrendo à área de um retângulo de base b e altura h , sua área é dada pelo produto de $b \times h$, em seguida é possível descrever um processo para determinar esta área, segundo Iezzi [4].

Para isso, precisa-se considerar $f(x)$ constante e igual a K em $[a, b]$. Olhando pra Figura 11, pode-se concluir que a região A procurada é um retângulo, cuja sua altura é K e sua base é $b-a$. Logo, pode-se calcular área dessa retângulo por $A = K \times (b - a)$.

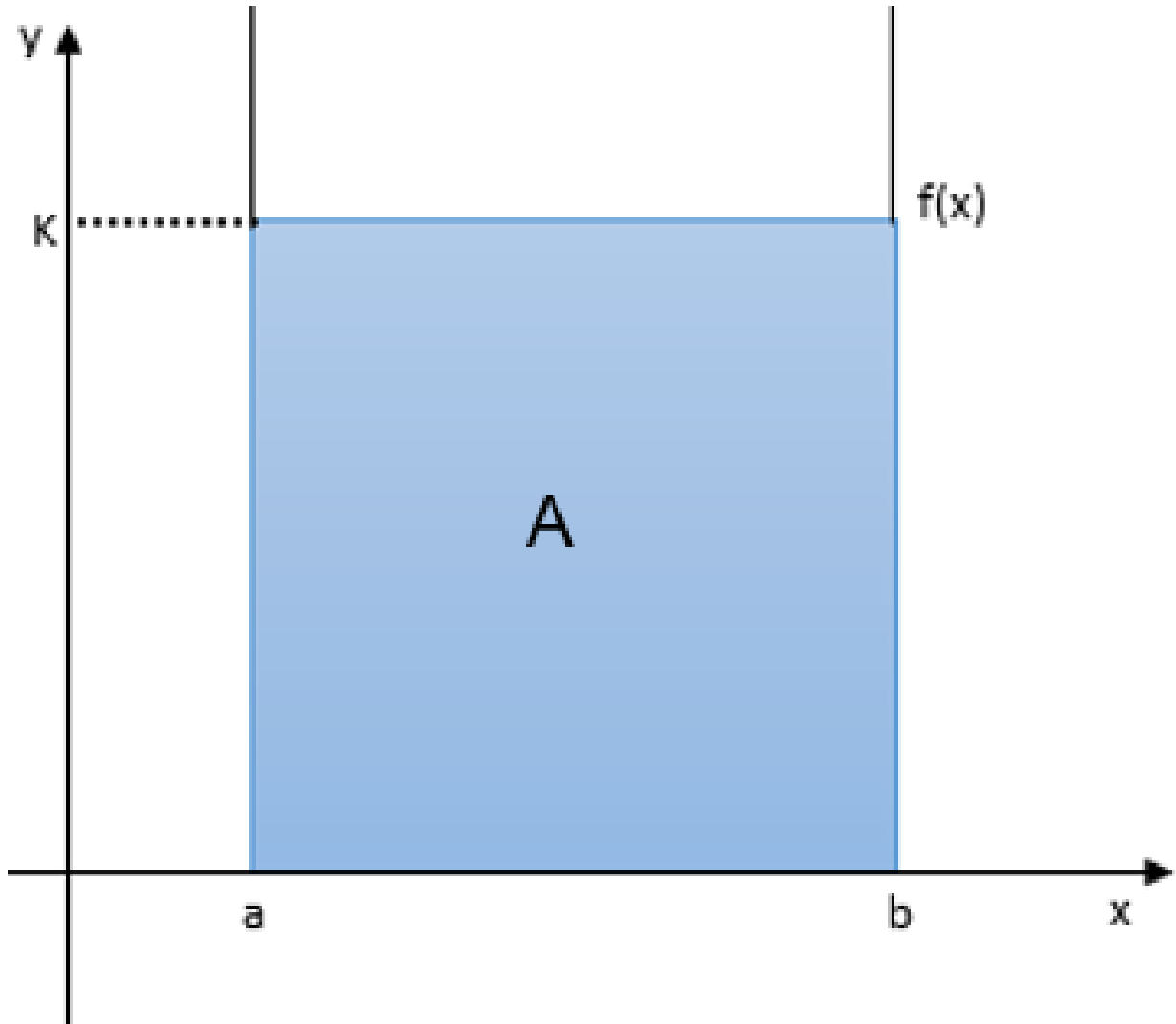


Figura 11: Função Constante

Por outro lado, considerando uma função não constante, divide-se o intervalo $[a, b]$ que pertence ao domínio da função em subintervalos extremamente pequenos para nesses intervalos a função seja vista como uma função constante e assim tendo uma boa aproximação para a área, segundo Iezzi [4]. Em outros termos, para cada subintervalos pode-se calcular área de pequenos retângulos, mediante isso chega-se uma aproximação da área sob o gráfico, obtendo a áreas de retângulos extremamente pequenos de cada subintervalos do domínio da função constante considerada. A área procurada será a soma das áreas destes retângulos, quanto mais pequenas as dimensões desses retângulo melhor será a precisão para a área da curva sob o gráfico, segundo Iezzi [4].

Pode-se verificar a soma superior e inferior desses retângulos em relação gráfico. Na soma superior considera-se o gráfico da Figura 12. Assim, tem-se:

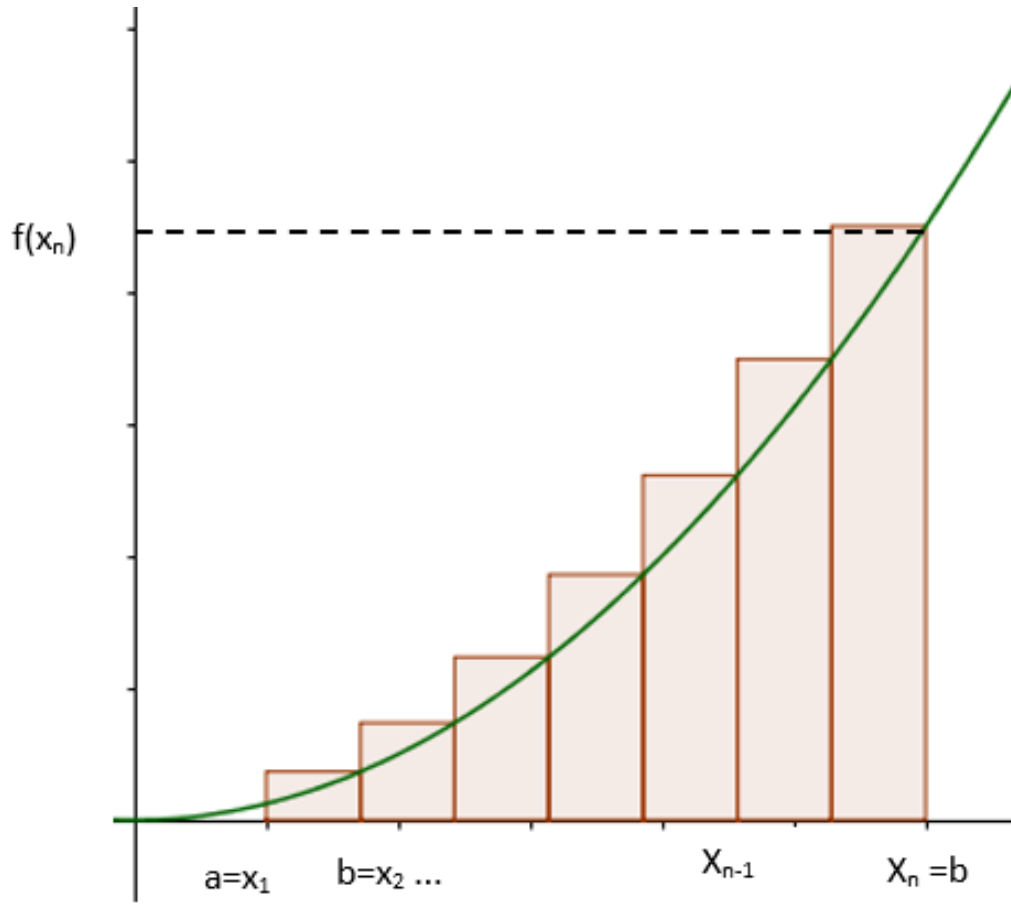


Figura 12: Soma superior

Considera que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, em seguida calculando a soma das áreas dos retângulos de base $x_n - x_{n-1}$ e altura $f(x_n)$ tem-se

$$S_n = (x_n - x_{n-1}) \times f(x_n) + (x_{n-1} - x_{n-2}) \times f(x_{n-1}) + \dots + (x_2 - x_1) \times f(x_2)$$

Chamando $(x_n - x_{n-1})$ de Δx_n , tem-se que

$$S_n = \Delta x_n \times f(x_n) + \Delta x_{n-1} \times f(x_{n-1}) + \dots + \Delta x_2 \times f(x_2)$$

Logo tem-se que:

$$S_n = \Delta x_n \times f(x_n) + \Delta x_{n-1} \times f(x_{n-1}) + \dots + \Delta x_2 \times f(x_2) = \sum_{i=2}^n \Delta x_i f(x_i)$$

Logo, $S_n = \sum_{i=2}^n \Delta x_i f(x_i)$

Fazendo o $n \rightarrow \infty$, tem-se.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=2}^n \Delta x_i f(x_i) \right] = \int_a^b f(x) dx.$$

Na soma inferior considera-se o gráfico da Figura 13. Assim, tem-se:

Considera que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, em seguida calcula-se a soma das áreas dos retângulos de base $x_n - x_{n-1}$ e altura $f(x_{n-1})$. tem-se

$$S_n = (x_2 - x_1) \times f(x_1) + (x_3 - x_2) \times f(x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \times f(x_{n-1})$$

Diante disso tem-se que

$$(x_2 - x_1) \times f(x_1) + (x_3 - x_2) \times f(x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \times f(x_{n-1}) = \sum (x_n - x_{n-1}) \times f(x_{n-1})$$

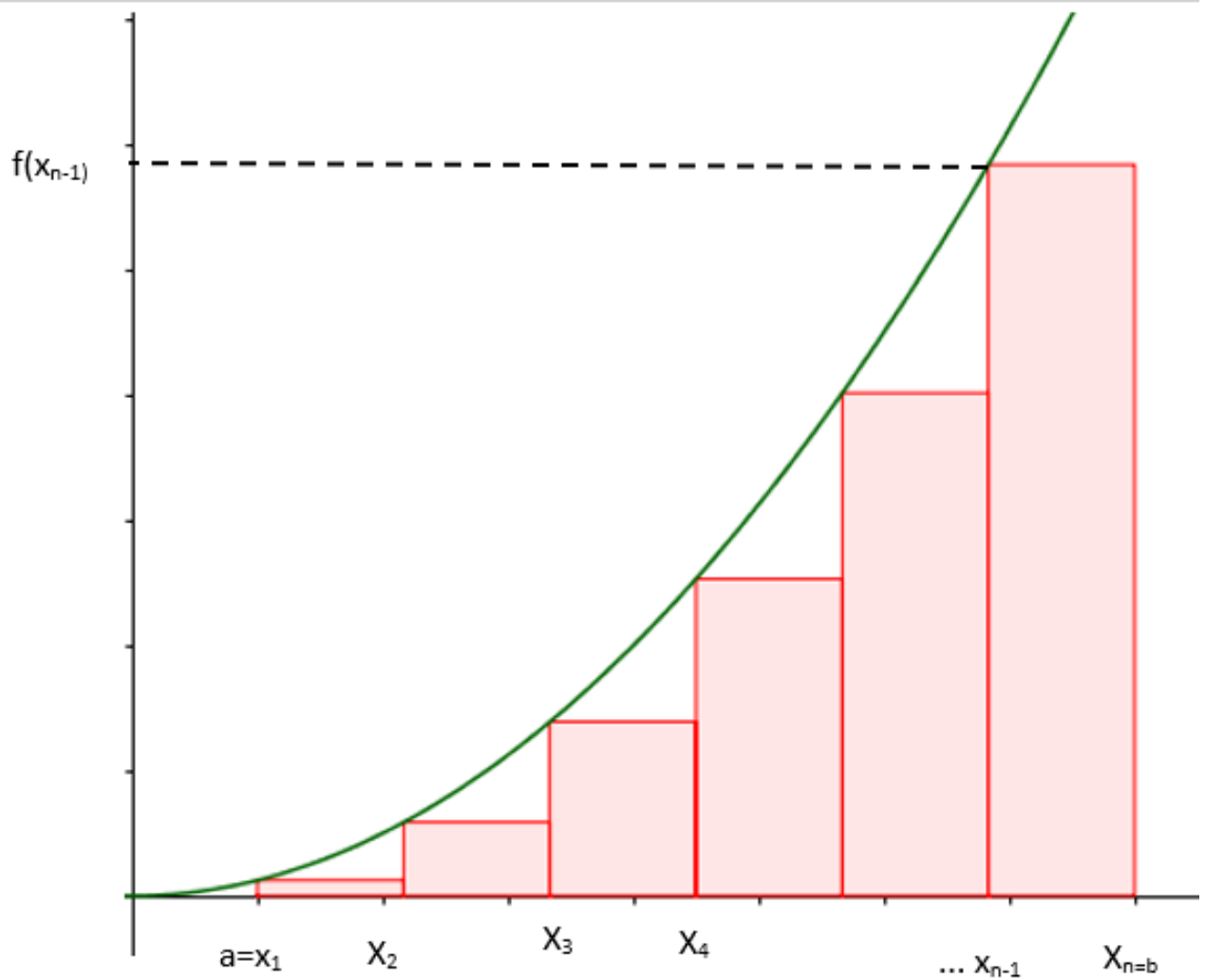


Figura 13: Soma inferior

chamando cada $x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$ e fazendo $n \rightarrow \infty$, tem-se.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \Delta x_{i-1} f(x_{i-1}) \right] = \int_a^b f(x) dx.$$

6.1.0.1 Integral definida

Um intervalo no conjunto dos números reais com mínimo e máximo, por exemplo o intervalo aberto $I=(a,b)$, é utilizado em integral para dizer que a mesma está definida em I .

Segundo Stewart [11], a melhor ideia de Integral definida está de acordo com a Definição 5.

Definição 5. Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b-a)/n$. Sejam $x_0(=a), x_1, x_2, \dots, x_n(=b)$ as extremidades desses subintervalos, e seja $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ **pontos**

amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -enésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a a b é,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \right]$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Essa definição para uma integral definida, pode-se ser interpretada como a soma de Riemann, essa leva o nome do matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Sabe-se que a soma de Riemann, considera-se uma função f positiva e pode ser vista como as somas das áreas de retângulos. A integral definida $\int_a^b f(x) dx$ pode ser analisada como a área sob a curva $y=f(x)$ de a até b . Pode-se vista essas noções na Figura 14, logo em seguida.

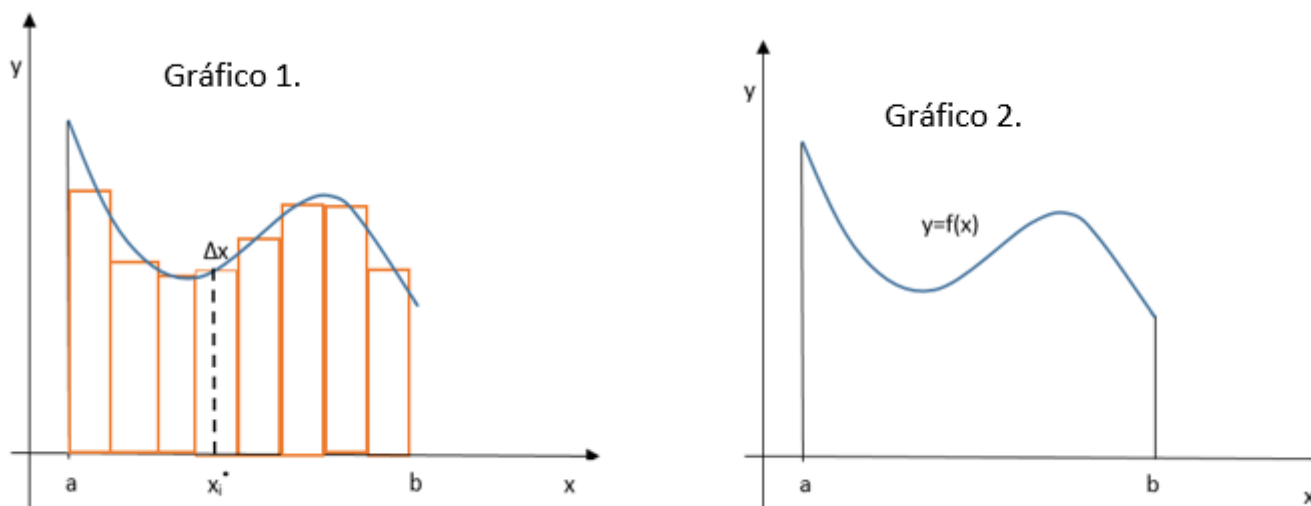


Figura 14: Integral definida

Na Figura 14 pode-se observar que a soma de Riemann está no gráfico 1, tem-se uma função em que $f(x) \geq 0$, soma de Riemann $\sum f(x_i^*) \Delta x$ é a soma dos retângulos. No gráfico 2 pode ser visto a área sob a curva $y=f(x)$, com $f(x) \geq 0$, de a até b . Pode-se interpretada como a integral definida $\int_a^b f(x) dx$, segundo Stewart [11].

A função pode assumir valores negativos e positivos, como mostra a Figura 15. Neste caso, a soma de Riemann pode ser vista como a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x mais o oposto das áreas dos que estão embaixo do eixo x , segundo Stewart [11].

Quanto toma-se o limite dessas somas de Riemann obtem-se a situação ilustrada no gráfico B da Figura 15. Diante disso, a integral definida pode ser vista a área resultante, ou seja, a diferença das áreas:

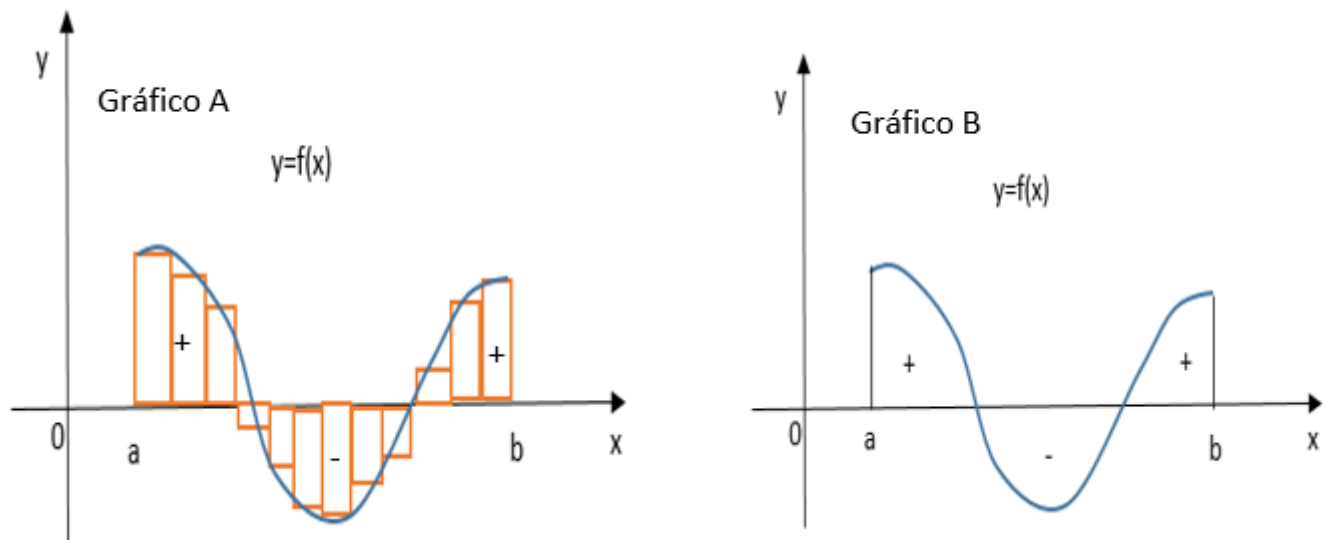


Figura 15: áreas

$$\int_a^b f(x) dx = A1 - A2$$

Considerando $A1$ como a área acima do eixo x e abaixo ao gráfico da função f e $A2$ a área abaixo do eixo x e acima ao gráfico da função f , segundo Stewart [11].

A área resultante do gráfico B da Figura 15, segundo Stewart [11], pode ser vista como $\sum f(x_i^*) \Delta x$ que é uma aproximação para a área resultante do gráfico A. Por outro lado a área do gráfico B pode ser dada, também, pela integral definida $\int_a^b f(x) dx = A1 - A2$.

6.1.1 Propriedades da integral

- $\int_a^b c dx = c(b - a)$, onde c é qualquer constante.
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ onde c é qualquer constante.
- $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$

6.1.2 Teorema Fundamental do Calculo

Um dos teoremas mais importantes da matemática, o Teorema Fundamental do Cálculo, é melhor entendido conforme Stewart [11], segundo a Definição 6.

Definição 6. Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

- Se $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, então $g'(x) = f(x)$.
- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

6.1.3 Integral indefinida

Ainda segundo Stewart [11], função indefinida é uma função F que satisfaz a condição $F'(x)=f(x)$, pode ser nomeada também como primitiva de f . Sabe-se que se F é primitiva de f , logo $F(x)+c$, em que c é denominada como uma constante. de maneira geral pode-se representar uma primitiva genérica de função f por $\int f(x)dx$. Um exemplo a ser visto é dada a função $f(x) = x^2$, logo são primitivas dessa função as funções $\frac{x^3}{3}, \frac{x^3}{3} + 5$ ou de uma maneira geral, $\frac{x^3}{3} + c$, aonde o valor de c é um constante qualquer.

A Tabela 1 representa as Integrais Indefinidas básicas.

Funções	Integral
$\int cf(x)dx$	$c \int f(x)dx$
$\int kd(x)$	$kx + C$
$\int x^n d(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ com $(n \neq -1)$
$\int e^x d(x)$	$e^x + C$
$\int \sin x d(x)$	$-\cos x + C$
$\int \sec^2 x d(x)$	$\tan x + C$
$\int \sec x \times \tan x d(x)$	$\sec x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1} d(x)$	$\tan^{-1} x + C$
$\int \sinh x d(x)$	$\cosh x + C$
$\int [f(x) + g(x)] d(x)$	$\int f(x) d(x) + \int g(x) d(x)$
$\int \frac{1}{x} d(x)$	$\ln x + C$
$\int a^x d(x)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \cos x d(x)$	$\sin x + C$
$\int \csc^2 x d(x)$	$-\cot x + C$
$\int \csc x \times \cot x d(x)$	$-\csc x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(x)$	$\sin^{-1} x + C$
$\int \cosh x d(x)$	$\sinh x + C + C$

Tabela 1: Tabela Básica de Integral

6.2 Cálculo de Áreas

Nessa seção tem-se a utilização da noção de integral definida para calcular as áreas do Triângulo, quadrado e círculo. A fórmula para calcular a área do quadrado de lado **a** é $A = a \times a = a^2$, do triângulo é base (**B**) vezes altura (**H**) dividido por 2, isto é, $A = \frac{BH}{2}$. E a área do círculo é dada por $A = \pi \cdot R^2$, onde π é constante e R =raio do círculo.

6.2.1 Área de de figuras planas

Nesta subseção utiliza-se da noção de Integral definida para demonstrar as áreas das de algumas figuras planas. (Triângulo, Quadrado e Círculo).

6.2.1.1 Área do triângulo

Sabe-se que a área do triângulo é dada por $A = \frac{b \times h}{2}$, sendo **b** a base e **h** altura, respectivamente as medidas desse triângulo. Para esse demonstração será considerada a equação fundamental da reta que é dada pela expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$, essa equação tem-se que a distancia entre dois pontos $P(x,y)$ e $P_1(x_1,y_1)$ é dada por **m** que pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta ou simplesmente a inclinação da reta, a inclinação da reta pode-se ser dada pela tangente do angulo formado entre a reta e o eixo das abscissas. Considera-se a figura a seguir para demonstrar a área do Triângulo.

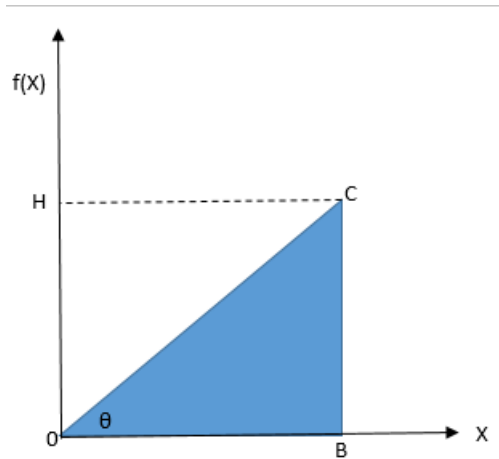


Figura 16: triângulo

Demonstração. Da Figura 16 pode-se obter as seguintes relações, considera-se o angulo θ pela hipotenusa do triângulo e o eixo das abscissas.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= \frac{H}{B}(x - 0) \\ y &= \frac{H}{B}X \end{aligned}$$

Portanto, basta aplicar a integral definida em um intervalo, que encontra-se a área procurada.

$$\begin{aligned} \int_0^B \frac{H}{B}X \, dx &= \frac{X^2}{2} \Big|_0^B = \frac{H \times B^2}{B \times 2} - \frac{H \times 0^2}{B \times 2} \\ A &= \frac{H \times B^2}{B \times 2} - \frac{H \times 0^2}{B \times 2} = \frac{B \times H}{2} \end{aligned}$$

logo, pode-se concluir via integral que a área de um triângulo é dada por $A = \frac{B \times H}{2}$ $\square$

6.2.1.2 Área do Quadrado

Para a demonstração da área do quadrado considera-se a figura 17. O processo é análogo a demonstração da área do triângulo que já foi demonstrado anteriormente. Então será considerado a equação fundamental da reta que é dada pela expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$ e tangente do angulo θ igual a zero

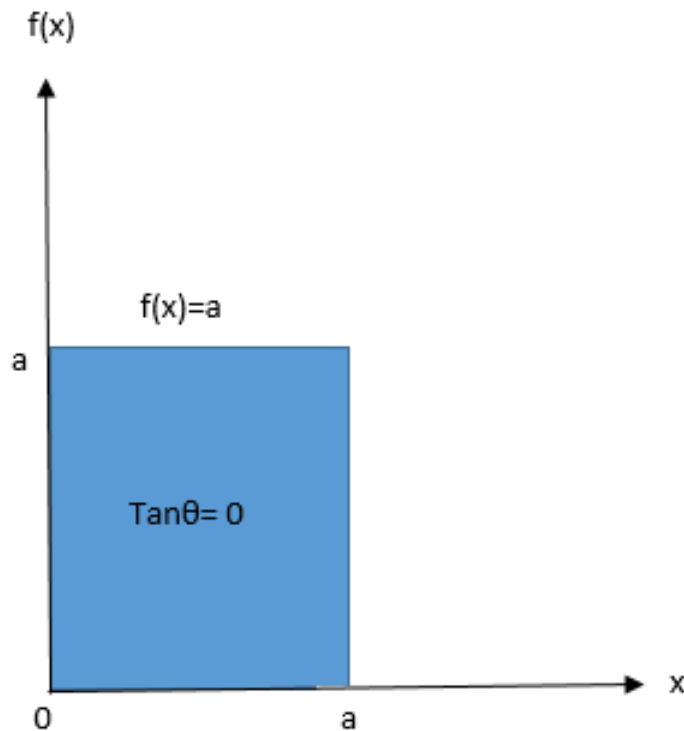


Figura 17: Quadrado

Da Figura 17 tem-se algumas relações extraídas da equação da reta.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 0 \times (x - 0) \quad y = a$$

Diante disso, conhecendo a função para encontra a área do quadrado pode-se calcular a integral definida da função encontrada, dada por $\int_0^a a dx = ax|_0^a = a \times a - a \times 0 = a^2$

6.2.1.3 Área do círculo

No Plano cartesiano tem-se a representação da circunferência. Para demonstrar a área do círculo, é necessário conhecer a equação cartesiana do círculo, dado por $x^2 + y^2 = r^2$. Precisa manipular essa expressão até que a transforme em uma função. Mas é importante ressaltar que a expressão que ao isolar o y da expressão $x^2 + y^2 = r^2$. Teremos um valor positivo e negativo para a área da circunferência. A metade da área localizada

acima do eixo x e a outra metade abaixo do eixo y . Logo para ser uma função é necessário separar a parte negativa da positiva. Por comodidade considera-se como função a expressão $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Logo para demonstrar a área do círculo basta calcular a integral $4 \times \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

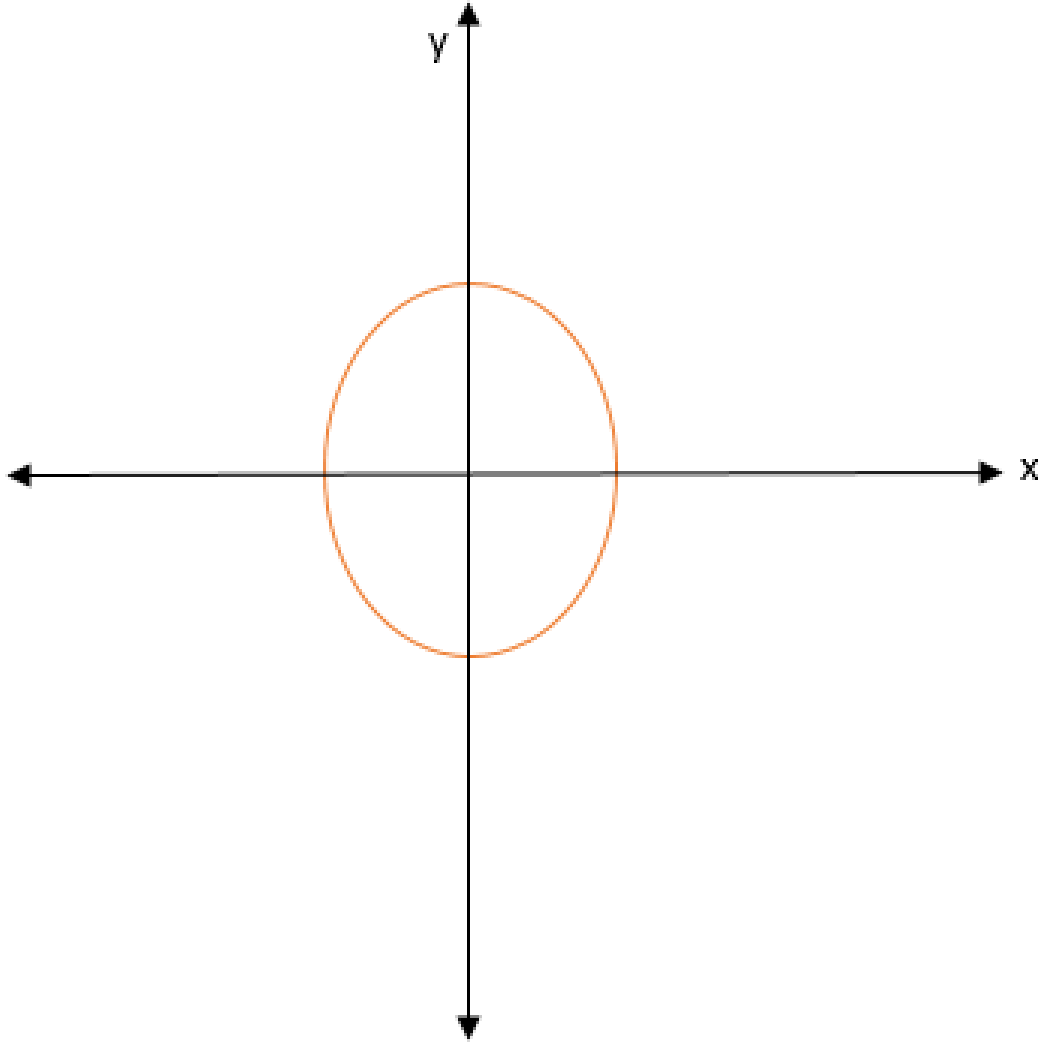


Figura 18: Circunferência

Fazendo o da área do círculo tem-se que:

$$4 \times \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Para o cálculo dessa integral utilizada para encontrar a área do círculo é necessário o uso de algumas substituições trigonométricas. Para saber a substituição adequada pode-se analisar o triângulo retângulo da Figura 18. Aplicando o teorema de Pitágoras. Pode-se encontrar uma relação igual ao radicando da função que pretende-se integrar.

Aplicando o Seno no triângulo retângulo da Figura 19. tem-se que:

$$\sin \theta = \frac{x}{r}$$

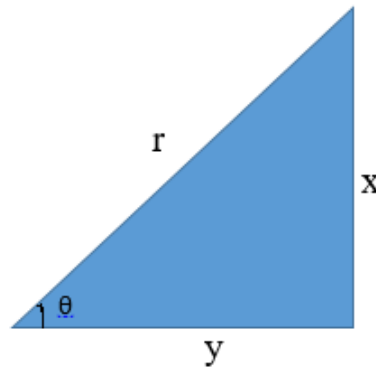


Figura 19: relações

$$x = r \times \sin \theta \text{ derivando, tem-se } dx = r \times \cos \theta$$

Substituindo $x = r \times \sin \theta$ e $dx = r \times \cos \theta$ na integral $4 \times \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$. Mas ao substituir os limites de integração muda para 0 até $\frac{\pi}{2}$ tem-se que.

$$A = 4 \times \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4r^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

A área do círculo é dada por $4r^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$. Mas para calcular essa integral é necessário recorrer uma substituição trigonométrica.

Partindo de duas relações trigonométricas, tem-se que.

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\cos(\theta + \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$
- Isola-se o seno na expressão $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$. tem-se que
 $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \cos(2\theta)$
- substitui-se $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \cos(2\theta)$ em $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. tem-se que

$$\cos^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos(2\theta) = 1$$

$$2 \cos^2 \theta - \cos(2\theta) = 1$$

$$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos(2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

Substituindo $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ em $4r^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$. Tem-se que a área do círculo é igual a:

$$A = 4r^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta.$$

$$A = 2r^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\theta)) d\theta$$

$$A = 2r^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 2r^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta$$

$$A = \pi r^2$$

Logo, tem-se a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$

7 Conclusão

Este Trabalho de Conclusão de Curso levanta uma rápida retrospectiva histórica do surgimento das ideias intuitivas do Cálculo até os dias atuais. Mostra como os pré requisitos de produtos notáveis e expressões algébricas são necessários para o desenvolvimento do mesmo. Expõe várias aplicações em física de limites, derivadas e integrais pelo estudo da velocidade e/ou aceleração média/instantânea. Faz-se um resumo das principais noções, conceitos e propriedades dos temas abordados. Além de um estudo sobre áreas das principais figuras planas pelas ideias intuitivas de integral.

A contribuição principal deste TCC é de revisão de conteúdos que vem desde a matemática básica até os conceitos de Limites, Derivadas e Integral. Procurando servir de material de apoio para alunos que visam ingressar em cursos superiores na área das ciências exatas e da natureza

Espera-se que discentes explorem este TCC ou partes do mesmo em outros trabalhos acadêmicos.

E, finalmente, que os processos matemáticos contidos nesta obra, apesar dos termos técnicos e rigorosidade em demonstrações matemáticas, seja compreensível a leitores de outras áreas do conhecimento.

Referências

- [1] BOYER, Carl B. "História da Matemática, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide."1996.
- [2] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Vol.1. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2010.
- [3] GUIDORIZZI, Hammilton Luiz. Um Curso de Cálculo. Vol.1. 5ª Ed. Rio de Janeiro : LTC, 2011.
- [4] IEZZI,Gelson; MACHADO,Nilson José; MURAKAMI,Carlos.FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTRAR Limites Derivadas Noções de integral. Vol.8-7.Ed.- São Paulo:Atual,2013.
- [5] Portal do elpais. Disponível em: https://brasil.elpais.com/brasil/2017/07/31/ciencia/1501499450_270522.html. Acessado em 10 de janeiro de 2018
- [6] Portal do wikipedia. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Limite>. Acessado em 10 de janeiro de 2018
- [7] Portal do engenhariae. Disponível em:<https://engenhariae.com.br/toda-a-matematica/taxa-de-variacao-instantanea-derivadas-aula-01-aula-gratis/>. Acessado em 10 de janeiro de 2018
- [8] Portal brasilescola uol. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/fisica/representacao-grafica-espaco-funcao-tempo.htm>. Acessado em 10 de janeiro de 2018
- [9] Portal efisica. Disponível em: <http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/cinematica/velocidade/>. Acessado em 10 de janeiro de 2018.
- [10] Portal sofisica. Disponível em: <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Cinematica/muv.php>. Acessado em 10 de janeiro de 2018.
- [11] STEWART, James. CÁLCULO tradução da 7ª edição norte-americana. Vol.1. 7ª Ed. São Paulo: Trilha, 2013.