



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI
Campus São Raimundo Nonato
Licenciatura em Matemática

WALBER RODRIGUES DE ASSIS

SEGMENTO ÁUREO: UM DIÁLOGO COM AUXÍLIO DE RÉGUA E COMPASSO

SÃO RAIMUNDO NONATO
2021

WALBER RODRIGUES DE ASSIS

SEGMENTO ÁUREO: UM DIÁLOGO COM AUXÍLIO DE RÉGUA E COMPASSO

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, Campus São Raimundo Nonato.

Orientador: Me. Luan da Silva Santos

SÃO RAIMUNDO NONATO

2021

WALBER RODRIGUES DE ASSIS

SEGMENTO ÁUREO: UM DIÁLOGO COM AUXÍLIO DE RÉGUA E COMPASSO

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, Campus São Raimundo Nonato.

Orientador: Me. Luan da Silva Santos

Aprovado em: 21/ 01/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Luan da Silva Santos
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Gilmar Alves Brito
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Profa. Ana Paula Monteiro de Moura
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

SEGMENTO ÁUREO: UM DIÁLOGO COM AUXÍLIO DE RÉGUA E COMPASSO

AUREO SEGMENT: A DIALOGUE WITH RULING AND COMPASS AID

WALBER RODRIGUES DE ASSIS¹

LUAN DA SILVA SANTOS²

RESUMO

O trabalho vigente origina-se de uma pesquisa bibliográfica, cujo estudo foi baseado na análise do segmento áureo de um segmento dado, em termos de construção geométrica, seguido de um exame analítico da razão entre as medidas de tais segmentos. Para tal, o objetivo principal constituiu-se de compreender as peculiaridades do número resultante da razão entre os comprimentos das porções de um segmento dividido em média e extrema razão. A metodologia empregada deu-se mediante processo dedutivo, o qual, contou com auxílio de construções com régua sem marcações e compasso. Nesse contexto, os resultados são constituídos de um conjunto de definições, axiomas e teoremas que são tomados como base para comprovar a veracidade das afirmações de maior relevância presentes ao longo do texto. Com isso, culminou-se na identificação de um ponto que divide um segmento genérico na razão pretendida, bem como, na análise das implicações algébricas decorrentes desta divisão.

Palavras-chave: construções geometrias; razão áurea; segmento áureo.

ABSTRACT

The current work originates from a bibliographic research, whose study was based on the analysis of the golden segment of a given segment, in terms of geometric construction, followed by an analytical examination of the ratio between the measures of such segments. To this end, the main objective was to understand the peculiarities of the number resulting from the ratio between the lengths of the portions of a segment divided into average and extreme ratio. The methodology used was done through a deductive process, which had the aid of constructions with a ruler without markings and a compass. In this context, the results are made up of a set of definitions, axioms and theorems that are taken as a basis to prove the veracity of the most relevant statements present throughout the text. With this, it culminated in the identification of a point that divides a generic segment in the intended reason, as well as, in the analysis of the algebraic implications resulting from this division.

Keywords: constructions geometries; golden ratio; golden segment.

¹ Acadêmico de Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal do Piauí – IFPI, *Campus* São Raimundo Nonato.

² Mestre em Matemática pelo PROFMAT polo do Instituto Federal do Piauí – IFPI, *Campus* Floriano e professor do Instituto Federal do Piauí – IFPI, *Campus* São Raimundo Nonato.

1 INTRODUÇÃO

O presente texto, apresenta os resultados de uma pesquisa bibliográfica dentro do campo da geometria euclidiana plana, a qual, se destinou ao estudo do número resultante da divisão entre as medidas de um segmento dividido em média e extrema razão. Isso provocou, inevitavelmente, em uma breve análise do encadeamento das ideias necessárias para se determinar e entender as características do valor numérico de um segmento comumente adjetivado como áureo.

Como era de se esperar, este estudo adveio, obviamente, pelo fascínio em conhecer com mais detalhes, a construção dos segmentos áureos. Além é claro, da curiosidade pela relevância histórica agregada, bem como, na construção de um conhecimento pautado, o mais próximo possível, no processo dedutivo.

Para isso, o principal objetivo constituiu-se de compreender as singularidades do número resultante da razão entre os comprimentos das partes de um segmento dividido em média e extrema razão. Os objetivos pontuais foram: fornecer embasamento lógico para o encadeamento de ideias que atestem as informações apresentadas; identificar um ponto em um segmento que o divide, em média e extrema razão; determinar o valor numérico da razão entre as medidas dos segmentos resultantes desta divisão; distinguir, o tipo de número encontrado quanto ao conjunto numérico a que pertence.

Desse modo, a estruturação do texto deu-se com a exposição de algumas definições que caracterizam os principais elementos, seguido de axiomas e teoremas que confirmem a veracidade das construções geométricas e afirmações subsequentes. Ainda assim, aparecerão ocasionalmente, algumas afirmações algébricas e geométricas sem as devidas discursões, isso se deve, com intuito de não desviar a atenção para pontos pouco interessantes aos objetivos.

Por esse motivo, serão exigidos em alguns momentos, conhecimentos prévios sobre polinômios, congruências de triângulos e das operações elementares adição, multiplicação e suas respectivas inversas, subtração e divisão. Assim, esperamos conhecer com mais apreço, as singularidades que tornam o segmento áureo tão especial, de modo, a maravilhar-se com seus encantos.

2 METODOLOGIA

Partindo de uma pesquisa bibliográfica, foi possível reunir informações pertinentes sobre o tema em questão. Nisto, a metodologia aplicada embasa-se na abordagem dedutiva, o qual, Marconi e Lakatos (2011) dizem que nessa análise a tese (conclusão) deverá ser verdadeira, desde que, inicie com hipóteses verdadeiras.

Os argumentos lógico-dedutivos apresentados, como destaca Ávila (2006), são do tipo implicativo “*se P , então Q* ”, no qual, P e Q são frases afirmativas condicionais denominadas respectivamente como hipótese e tese. Neste caso, também diz que P é condição suficiente para Q , ou ainda, Q é condição necessária para P .

Para nossos propósitos, as argumentações ocorrerão na maior parte mediante demonstração direta dos teoremas apresentados ou no caso das construções, por justificativas sustentadas em axiomas e teoremas apresentados previamente. Em algumas situações, a demonstração dá-se por redução a um absurdo, isto é, a argumentação iniciará supondo temporariamente a falsidade da tese, até ocorrer uma contradição lógica, e assim, obrigando admitir a tese como verdadeira.

Nesse processo, a primeira metade deste texto terá o auxílio das ferramentas de construções geométricas, régua sem marcações e compasso. Essa opção, dá-se por concordamos com as opiniões de Wagner (2007), quando reconhece que as construções geométricas têm de conduzir qualquer exposição elementar sobre geometria euclidiana, uma vez que, no contexto do processo de ensino-aprendizagem, trazem um teor educativo ao motivarem a análise de uma situação que geralmente direciona, de modo sutil, à exploração de propriedades matemáticas.

3 CONSTRUÇÕES PRELIMINARES

Inicialmente, trataremos sobre as construções que permitem identificar o ponto médio de um segmento e uma reta perpendicular a um segmento dado. As justificativas para cada construção geométrica, dar-se-ão, com base na noção de segmento de reta e no conhecimento sobre congruência de triângulos.

Nesse contexto, Barbosa (2006) define como segmento $\overline{AB}$, no qual, A e B são pontos distintos ditos extremidades, ao conjunto formado por A , B e todos os pontos internos dispostos de forma colinear entre A e B . Consideraremos adiante que AB representará a medida do segmento $\overline{AB}$.

Diante disso, enuncia-se também que dois segmentos se denominaram congruentes, indicado por " $\equiv$ ", desde que tenham a mesma medida. Tal fato, também se aplica a dois ângulos. Com relação aos triângulos, é importante recordemos que dois triângulos são congruentes quando existe uma relação biunívoca entre seus vértices, tal que, lados e ângulos homólogos sejam congruentes.

3.1 PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

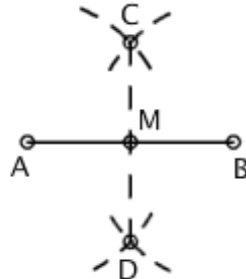
Fundamentado em Wagner (2007), identificaremos mediante construção 3.1.1, um ponto em um segmento que divida este, em dois segmentos congruentes. Para assegurar que o ponto encontrado atende aos requisitos, nos valem de dois casos de congruência de triângulo, cuja, as respectivas demonstrações e discussões com maiores detalhes, podem ser encontras em Barbosa (2006).

O primeiro critério de congruência entre dois triângulos que empregaremos, é relativo ao caso *ALA*, que nos diz que se dois triângulos possuem, respectivamente, um lado e os dois ângulos adjacentes a este lado também congruentes, então os triângulos em questão são congruentes. Enquanto isso, o critério *LLL* afirma que dois triângulos possuírem lados correspondentes congruentes, é condição suficiente para que os triângulos sejam congruentes.

Construção 3.1.1: Identificar o ponto médio de um segmento dado.

Descrição: Dado o segmento $\overline{AB}$, traça-se, dois círculos de raio iguais e medida maior que $\frac{AB}{2}$ com centros nos extremos A e B , encontrando assim, os pontos de interseção C e D . A reta $\overline{CD}$ intersecta o segmento $\overline{AB}$ em seu ponto médio M .

Figura 3.1.1 – Ponto médio do segmento $\overline{AB}$



Fonte: mongge, 2020

Justificativa: Por construção, os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BCD$ são congruentes pelo caso *LLL*, pois, $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{CD}$ é comum, implicando que $\angle C \equiv \angle D$. Como $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ e $\overline{AB}$ é comum, pelo mesmo critério de congruência, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$, assim, $\angle C \equiv \angle D$. Além do mais, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, isto garante, como indicado pela condição *ALA*, que os triângulos $\triangle ADM$ e $\triangle BCM$ também são congruentes. Logo, $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, ou seja, M é ponto médio de $\overline{AB}$ ■

Note que os instrumentos, régua sem marcações e compasso, como esperado, estão sendo utilizados respectivamente para construção de segmentos de reta e circunferência. Entretanto, para melhor apresentação das informações na figura antecedente e nas posteriores, será exibido apenas o trecho da construção que contém as informações pertinentes, estas, em sua forma tracejada.

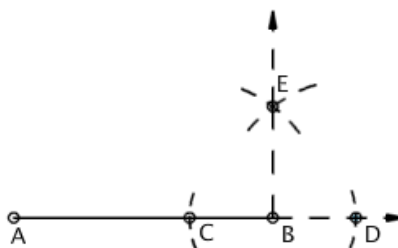
3.2 RETA PERPENDICULAR QUE PASSA PELA EXTREMIDADE DE UM SEGMENTO

Construiremos agora, uma reta (perpendicular) que forme um ângulo reto com um segmento, dado de tal modo que esta, contenha uma das extremidades do segmento. Os procedimentos seguiram de maneira similares aos da construção anterior, exeto que fará-se uso, inicialmente, de um ponto externo ao segmento dado, isso dará-se de tal modo, a construir triângulos congruentes pelo critério *LLL*.

Construção 3.2.1: Construir uma reta perpendicular a um segmento dado, de tal modo que contenha uma das extremidades deste segmento.

Descrição: Constrói-se uma circunferência de centro em uma das extremidade do segmento $\overline{AB}$, por exemplo B , marcando os pontos C e D de interseção entre a circunferência e a semirreta $\overrightarrow{AB}$. Traça-se, duas circunferências de mesmo raio e com centros respectivamente em C e D , no qual, os raios devem ser maiores que o raio da circunferência anterior, encontrando o ponto E de interseção entre as circunferências. A semirreta $\overrightarrow{BE}$, é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

Figura 3.2.1 – Perpendicular que passa por uma extremidade do segmento $\overline{AB}$



Fonte: mongge, 2020

Justificativa: Os triângulos $\triangle CBE$ e $\triangle DBE$ são congruentes segundo critério *LLL*, visto que $\overline{CB} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{CE} \equiv \overline{DE}$ por construção, e $\overline{BE}$ é comum a ambos. Daí, $\angle CBE \equiv \angle DBE$. Ora, $\angle CBE$ e $\angle DBE$, além de congruentes são suplementares adjacentes. Logo, $\angle CBE$ é um ângulo reto, ou seja, $\overline{BE}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ ■

Baseado nas construções 3.1.1 e 3.2.1, sabemos como identificar um ponto médio de um segmento, conforme visto na subseção anterior, bem como, construir uma reta perpendicular. Esse conhecimento, terá importância crucial no processo de identificar um ponto que irá dividir um segmento em média e extrema razão.

4 SEGMENTO ÁUREO

De posse das informações anteriores, podemos identificar um ponto que determine um segmento áureo interno ou externo a um segmento dado. Isto implica em determinarmos um ponto cujas medidas estão em média e extrema razão.

Segundo definição exposta em Ávila (2006), um ponto C divide um segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão, caso $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$. Nestas circunstâncias, diz-se também, que $\overline{AC}$ é segmento áureo de $\overline{AB}$. Assim, os substantivos, *segmento áureo* e *média e extrema razão*, a partir de agora, passarão a ser utilizados como sinônimos.

4.1 SEGMENTO ÁUREO DE UM SEGMENTO DADO

Inicialmente, enunciaremos o axioma 4.1.1 que nos permitira realizar operações de soma envolvendo as medidas dos segmentos. Este será útil para certificarmos que o ponto encontrado nas construções é, de fato, o ponto desejado.

Axioma 4.1.1: Dados três pontos colineares A , B e C , no qual, C encontra-se entre A e B , tem-se que, $AC + CB = AB$.

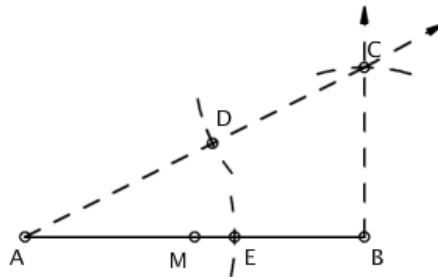
Uma informação adicional de relevância fundamental, diz respeito a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Sobre isso, o Teorema de Pitágoras, segundo Lima (2006), afirma que, sendo a , b e c os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, tal que c seja a medida da hipotenusa, é condição suficiente para que $c^2 = a^2 + b^2$. Embora não tenhamos dado maiores explicações com relação a esse teorema, pode-se, por curiosidade, verificar o autor citado, pois este apresenta um diálogo notável sobre o tema, no qual, expõe distintas perspectivas acerca da veracidade desse fato.

Posto isso, dado um segmento, identificaremos um ponto que o divida, internamente, em média e extrema razão. Por conseguinte, determinaremos um segmento áureo interno ao segmento dado. Isso ocorrerá com apoio das construções anteriores, além do mais, com auxílio do Teorema de Pitágoras e do axioma 4.1.1, será possível garantir que foi identificado o ponto almejado.

Construção 4.1.1: Seja $\overline{AB}$ um segmento dado, identificar um ponto interno a este segmento, de modo que o divida em média e extrema razão.

Descrição: Dado o segmento $\overline{AB}$, traça-se uma perpendicular por uma extremidade, por exemplo pelo ponto B , assim como na construção 3.2.1. Encontra-se o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, conforme construção 3.1.1. Trace uma circunferência de centro em B e raio BM , encontrando o ponto C de interseção entre a circunferência e a reta perpendicular. Construa a semirreta $\overline{AC}$. Risque uma circunferência de centro em C e raio $\overline{BC}$, encontrando o ponto D de interseção entre esta circunferência e o segmento $\overline{AC}$. Traça-se, uma circunferência de centro em A e raio AD , encontrando o ponto E de interseção entre a circunferência e o segmento $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AE}$ é áureo interno de $\overline{AB}$, isto é, o ponto E divide $\overline{AB}$ internamente em média e extrema razão.

Figura 4.1.1 – Segmento áureo interno de $\overline{AB}$



Fonte: mongge, 2020

Justificativa: Por construção $AE = AD$, $BC = DC = \frac{AB}{2}$, além disso, pelo axioma 4.1.1, $AC = AD + DC = AE + \frac{AB}{2}$. Como o triângulo ABC é retângulo em $\hat{A}BC$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos: $(AB)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(AE + \frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow (AB)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = (AE)^2 + AE \cdot AB + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow (AB)^2 - AE \cdot AB = (AE)^2 \Rightarrow AB \cdot (AB - AE) = (AE)^2 \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB - AE}{AE}$. Pelo axioma 4.1.1, $AB = AE + EB$, isto é, $AB - AE = EB$. Desse modo, a igualdade entre as razões torna-se $\frac{AE}{AB} = \frac{EB}{AE}$, significando que o ponto E divide o segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão, ou ainda, $\overline{AE}$ é segmento áureo de $\overline{AB}$ ■

Observe que poderíamos ter obtido o mesmo resultado, fixando AB como unidade de medida, isso nos levaria a concluir que os comprimentos EB , AE e AB formam, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente, no qual, a razão é precisamente o valor que será calculado no quinto tópico. Entretanto, o intuito aqui é

apenas garantir que o ponto E encontrado, é de fato, o ponto que divide o segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão.

Além disso, com base em Morgado, Wagner e Jorge (2002), é possível afirmar que o ponto E é único. Observe que a partir da igualdade $\frac{AE}{AB} = \frac{EB}{AE}$, temos que $\frac{AE}{EB} = \frac{AB}{AE}$, desse modo, se existe outro ponto em $\overline{AB}$ com as mesmas características de E , este atenderá a essa igualdade.

Teorema 4.1.1: O ponto E é único que destaca um segmento áureo em $\overline{AB}$.

Demonstração: Suponhamos que exista um ponto E' em $\overline{AB}$, tal que, $\frac{AE}{EB} = \frac{AE'}{E'B}$, ou seja, E' divide internamente o segmento $\overline{AB}$ na mesma razão que o ponto E . Assim teríamos $\frac{AE}{EB} = \frac{AE'}{E'B} \Rightarrow \frac{AE}{EB} + 1 = \frac{AE'}{E'B} + 1 \Rightarrow \frac{AE+EB}{EB} = \frac{AE'+E'B}{E'B} \Rightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{AB}{E'B} \Rightarrow EB = E'B \Rightarrow E \equiv E'$, isto é, os pontos E e E' coincidem. Logo, existe apenas um único ponto que divide $\overline{AB}$ na razão desejada ■

Note que as operações entre os segmentos, são asseguradas pelo axioma 4.1.1. Com isso, temos que o ponto E , encontrado na construção 4.1.1, é o único que divide o segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão.

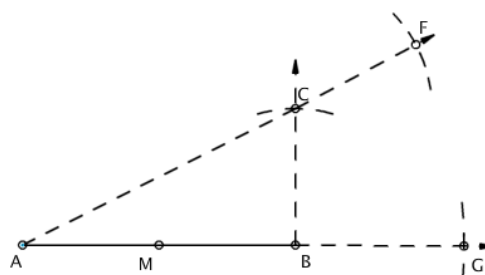
4.2 SEGMENTO ÁUREO A PARTIR DE UM PONTO EXTERNO

Por intermédio da construção 4.2.1, podemos obter um ponto externo a um segmento dado, tal que, o segmento fornecido seja áureo. Para isso, basta repetirmos todos os passos da construção 4.1.1, até termos a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Após isso, incrementaremos dois novos rabiscos.

Construção 4.2.1: Dado um segmento $\overline{AB}$, localizar um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que, $\overline{AB}$ torne-se um segmento áureo.

Descrição: Seguir os quatro primeiros passos da construção 4.1.1. Construa uma circunferência de centro em C e raio BC , interceptando a semirreta $\overrightarrow{AC}$ no ponto F externo ao segmento $\overline{AC}$. Traça-se a circunferência de centro em A e raio AF para identificar G de intersecção entre esta circunferência e a semirreta $\overrightarrow{AB}$, com G externo à $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AB}$ é áureo de $\overline{AG}$, ou seja, B divide $\overline{AG}$ em média e extrema razão.

Figura 4.2.1 – Segmento áureo externo de $\overline{AB}$



Fonte: mongge, 2020

Justificativa: Por construção e pelo axioma 4.1.1, $CF = BC = \frac{AB}{2}$, $AB + BG = AG = AF = AC + CF = AC + \frac{AB}{2}$. Daí, $AC = BG + \frac{AB}{2}$. Assim ao aplicar o teorema de Pitágoras, temos,

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow \left(BG + \frac{AB}{2}\right)^2 = (AB)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow (BG)^2 + BG \cdot AB + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = (AB)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow (AB)^2 = (BG)^2 + BG \cdot AB \Rightarrow (AB)^2 = BG \cdot (BG + AB) \Rightarrow \frac{AB+BG}{AB} = \frac{AB}{BG}.$$

Devido ao axioma 4.1.1, $AB + BG = AG$, isso implica que $\frac{AG}{AB} = \frac{AB}{BG}$ ou $\frac{AB}{AG} = \frac{BG}{AB}$. Logo, $\overline{AB}$ é segmento áureo de $\overline{AG}$ ■

Assim como no caso do segmento áureo, quando o ponto encontrado é interno ao segmento dado, podemos assegurar com apoio dos autores supracitados que G é único, pois se existir um ponto G' sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que, $\frac{AB}{AG'} = \frac{BG'}{AB}$ este atenderá as mesmas condições que G , em especial, $\frac{AG}{BG} = \frac{AG'}{BG'}$. Como sabemos que G é o ponto torna $\overline{AB}$ um segmento áureo, então G' também será.

Teorema 4.2.1: G é único ponto externo que torna $\overline{AB}$ áureo de $\overline{AG}$.

Demonstração: Imaginemos que exista um ponto G' em $\overrightarrow{AB}$ e externo à $\overline{AB}$ com as mesmas características de G , isto é, $\frac{AG}{BG} = \frac{AG'}{BG'} \Rightarrow \frac{AG}{BG} - 1 = \frac{AG'}{BG'} - 1 \Rightarrow \frac{AG-BG}{BG} = \frac{AG'-BG'}{BG'} \Rightarrow \frac{AB}{BG} = \frac{AB}{BG'} \Rightarrow BG = BG' \Rightarrow G \equiv G'$, ou seja, G e G' coincidem. Portanto, existe um único ponto externo ao segmento $\overline{AB}$ que atende a divisão mencionada ■

Perceba que mediante construção dos segmentos áureos, podemos afirmar, com base em Morgado, Wagner e Jorge (2002), que a divisão em média e extrema razão é um caso especial de *divisão harmônica*, adjetivo este que por vezes também é utilizado para identificá-la. Para efeito de curiosidade, Garbi (2010) afirma-nos que esta construção é tema da decima primeira (11º) proposição do segundo livro da coleção *Os Elementos* de Euclides (300 a.C.), onde, o *segmento áureo* é elegantemente apresentado com a nomenclatura *divisão em média e extrema razão*.

5 DISPOSIÇÕES NUMÉRICAS

Encontrados os segmentos áureos, é pertinente examinarmos os resultados que se obtém, ao operar com as medidas dos segmentos após a divisão apresentada na seção anterior. Após encontrar os valores numéricos pertinentes, estudaremos também, algumas características relacionadas a qual conjunto numérico esses números pertencem.

5.1 RESULTADO DO SEGMENTO ÁUREO DE UM SEGMENTO DADO

A partir da identificação na subseção 4.1 do ponto E , que divide o segmento $\overline{AB}$ internamente em média e extrema razão, obtivemos dois segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EB}$. O objetivo agora, será determinar o valor numérico da razão entre os comprimentos

destes segmentos, com intuito de estabelecermos uma relação que envolva o segmento áureo e o segmento dado. Para este cálculo, será necessário encontrar as raízes de um polinômio de grau dois, o qual, ocorrerá mediante complemento de quadrados. Note também, que mesmos havendo duas soluções possíveis, consideraremos apenas a resposta positiva, uma vez que estamos tratando de comprimentos.

Valor numérico 5.1.1: Calcular o valor da razão $\frac{EB}{AE}$ e relacionar com a medida de $\overline{AB}$.

Solução: Dado, $\frac{EB}{AE} = \frac{AE}{AB}$ tem-se, $(AE)^2 = AB \cdot EB = (AE + EB) \cdot EB = AE \cdot EB + (EB)^2$
 $\Rightarrow \left(\frac{EB}{AE}\right)^2 + \frac{EB}{AE} = 1 \Rightarrow \left(\frac{EB}{AE}\right)^2 + \frac{EB}{AE} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{EB}{AE} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803 \dots$
 Dado que $\frac{AE}{AB} = \frac{EB}{AE}$, temos ainda que $AE = AB \cdot 0.61803 \dots$ ■

Observe que as reticências, aqui e adiante, descrevem uma dizima não periódica, ou seja, um número com infinitas casas decimais, no qual, os algarismos não seguem um padrão sequencial. Assim como destaca Ávila (2006), o resultado até então obtido, é comumente conhecido por *razão áurea*.

Para Ávila (1985), o termo *razão (ou divisão) áurea* é devido a Kepler (1571-1630), que para este, essa divisão é tida como um dos tesouros da matemática. Além do mais, esse conhecimento decorre desde a época dos pitagóricos (Séc. *Va. E. C.*), no qual, acredita-se que as primeiras evidências desta divisão provêm do estudo do pentágono regular.

Ao que diz respeito a representação simbólica da razão áurea, esta é frequentemente denotada pela letra grega φ (fi - minúsculo), o qual, nos permite escrever esse resultado como, $\frac{AE}{AB} = \varphi$, ou ainda, $AE = AB \cdot \varphi$. Além do mais, segundo Huntley (1985), esse número é assim representado desde o início do século XX em homenagem a Fídias, escultor grego que construiu o famoso templo Parternon (Séc. *Va. E. C.*) na Acrópole de Atenas na Grécia Antiga, onde as proporções aplicadas aproximam-se da razão áurea.

5.2 RESULTADO DO SEGMENTO ÁUREO QUANDO O PONTO ESTA EXTERNO AO SEGMENTO DADO

Por meio da construção 4.2.1, encontramos G externo ao segmento $\overline{AB}$, neste caso a extremidade B do segmento dado inicialmente divide o segmento $\overline{AG}$ em média e extrema razão. Agora seguimos o processo similar ao da subseção 5.1, cujo objetivo, assim como foi no tópico anterior, será estabelecer uma relação entre os comprimentos do segmento áureo e o segmento dado.

Valor numérico 5.2.1: Calcule o valor da razão $\frac{AB}{BG}$ e relacione a medida de $\overline{AG}$ à $\overline{AB}$.

Solução: Como, $\frac{AB}{AG} = \frac{BG}{AB}$ temos, $AB^2 = AG \cdot BG = (AB + BG) \cdot BG = AB \cdot BG + BG^2$
 $\Rightarrow \left(\frac{AB}{BG}\right)^2 - \frac{AB}{BG} = 1 \Rightarrow \left(\frac{AB}{BG}\right)^2 - \frac{AB}{BG} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{AB}{BG} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AB}{BG} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803 \dots$
 Uma vez que $\frac{AG}{AB} = \frac{AB}{BG}$, temos que, $\frac{AG}{AB} = 1.61803 \dots$, ou seja, $AG = AB \cdot 1.61803 \dots$ ■

Conforme aponta Ávila (2006), o resultado aqui obtido é habitualmente conhecido como *número áureo*. Semelhante ao caso anterior, a representação desse número é dada pela letra grega Φ (Fi - maiúsculo), isto é, $\Phi = \frac{AG}{AB} = 1.6180339887 \dots$, ou melhor, $AG = AB \cdot \Phi$.

Ao apreciarmos com atenção o desenvolvimento dos cálculos quando resolvemos a razão do segmento áureo interno na subseção 5.1, notemos, durante os cálculos no ponto em que $AE^2 = AE \cdot EB + EB^2$, se tivéssemos dividido por EB^2 , obteríamos a equação $\left(\frac{AE}{EB}\right)^2 + \left(\frac{AE}{EB}\right) - 1 = 0$. Essa última equação nos dá como solução, $\frac{AE}{EB} = 1.6180339887 \dots$

Analogamente, a equação $AB^2 = AB \cdot BG + BG^2$, analisada nesta subseção, quando dividida por AB^2 , resulta em $\left(\frac{BG}{AB}\right)^2 - \frac{BG}{AB} - 1 = 0$ que tem como solução $\frac{BG}{AB} = 0.6180339887 \dots$. Daí, temos que a *razão áurea* (φ) e o *número áureo* (Φ) são simétricos em relação a multiplicação habitual, isto é, $\Phi \cdot \varphi = 1$. Isso ratifica o fato dos pontos E e G estabelecem com $\overline{AB}$ uma divisão com as mesmas características, ou seja, $\frac{EB}{AE} = \frac{BG}{AB} = \varphi$ ou ainda, $\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{AB} = \Phi$. Aliás, uma outra característica perceptível, reside no fato destes números diferirem-se por uma unidade, isto é, $\Phi - \varphi = 1$.

5.3 PARECER SOBRE OS NÚMEROS ENCONTRADOS

Neste momento, podemos estudar a qual conjunto numérico pertence os números obtidos nas subseções anteriores. Para isso, serão discutidos aspectos relacionados a irracionalidade e suas consequências.

5.3.1 Irracionalidade

Antes de discutirmos sobre a irracionalidade de φ e Φ , será preciso obter um resultado auxiliar referente a $\sqrt{5}$ mediante lema 5.3.1.1. Para isso, o Princípio da Boa Ordenação – P.B.O., enunciado em Marques (2013), tem papel essencial para as argumentações expostas na demonstração.

Axioma 5.3.1.1 (P.B.O.): Seja qual for o subconjunto não vazio de números naturais, este possui um menor elemento.

Para aplicarmos o P.B.O., teremos que considerar um subconjunto não vazio de números naturais, e por isso, este terá um elemento mínimo. A intenção, é mostrar que independente do elemento considerado, sempre existe um elemento ainda menor, fato inadmissível dado as condições inicialmente impostas.

Lema 5.3.1.1: O número $\sqrt{5}$ é irracional.

Demonstração: Suponhamos por um instante que $\sqrt{5}$ seja racional e caracterizemos um conjunto não vazio $S = \{n \in \mathbb{N}; n\sqrt{5} \in \mathbb{Z}\}$. Pelo P.B.O., existe um elemento $b \in S$, tal que, b é o menor elemento de S . Isto significa que $b\sqrt{5} = a \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$. Ao examinarmos a igualdade seguinte, e suas implicações com base na propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, temos: $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - 2) = 5 - 2\sqrt{5} \Rightarrow$

$\sqrt{5} = \frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{5-2\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-2} = \frac{5b-2a}{a-2b} \Rightarrow [\sqrt{5} \cdot (a-2b) = 5b-2a] \in \mathbb{Z} \therefore (a-2b) \in S$. No entanto, $2 < \sqrt{5} < 3$, por causa disso, $2 < \frac{a}{b} < 3$, assim, $0 < a-2b < b$. Este fato contradiz a hipótese de b ser o elemento mínimo de S . Logo, $\sqrt{5}$ é irracional ■

Esse lema assegura que a raiz quadrada de cinco ($\sqrt{5}$) trata-se de um número irracional. Este resultado será importante para atestarmos que os números φ e Φ são de fato irracionais, como veremos através do teorema 5.3.1.1.

Teorema 5.3.1.1: Os números $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ são irracionais.

Demonstração: Consideremos primeiro o número $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e suponhamos temporariamente que este seja racional. Isso significa que existem números $a, b \in \mathbb{Z}$ primos entre si e $b \neq 0$, tal que, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{a}{b}$, isto é, $\sqrt{5} = 2 \cdot \frac{a}{b} + 1 \in \mathbb{Q}$. O que é uma contradição, pois do lema anterior, $\sqrt{5}$ é irracional. Em vista disso, o número $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ é irracional. Com argumento análogo, conclui-se que $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ também é irracional ■

O teorema 5.3.1.1 nos garante que ambos os números φ e Φ são irracionais. Isso ocorreu pelo fato de $\varphi, \Phi \in \mathbb{R}$, acarreta na existência de apenas duas possibilidades para cada, ou é racional, ou irracional. Uma vez comprovado que é um absurdo supor que estes números sejam racionais, resta apenas a possibilidade de serem irracionais, tal como ocorreu com $\sqrt{5}$. Todavia, ainda não sabemos se os números φ e Φ , são constante algébricas ou transcendentais, o que será analisado a seguir.

5.3.2 Constante algébrica

Agora podemos nos valer da definição que caracteriza os números algébricos, a qual, Marques (2013), diz que um número é dito algébrico quando é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros não nulos. Caso contrário, denomina-se transcendente.

Tal exigência é atendida simplesmente observando as linhas de cálculos nas seções 5.1 e 5.2, nas quais, $\varphi = \frac{AE}{AB}$ e $\Phi = \frac{AG}{AB}$, implicando, respectivamente, em $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ e $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Este fato garante que φ e Φ são raízes positivas dos respectivos polinômios do tipo, $x^2 + x - 1 = 0$ e $x^2 - x - 1 = 0$. Portanto, φ e Φ tratam-se de constantes algébricas irracionais.

A partir dos polinômios mencionados, notemos que o quadrado de φ é igual à uma unidade subtraindo-se o próprio φ , isto é, $\varphi^2 = 1 - \varphi$. Semelhante a isso, o número Φ é igual a ele próprio acrescido de uma unidade, ou seja, $\Phi^2 = \Phi + 1$.

6 SINGULARIDADES EM VOLTA DE FI

Os números que estamos discutindo aparecem involuntariamente em diversas situações, por exemplo, na forma de abstrações matemáticas, na natureza, em

aplicações, etc. Aqui, destacaremos superficialmente um pequeno número dessas aparições notáveis apenas para fins de curiosidade.

6.1 REGISTROS ÁUREOS EM SEQUÊNCIAS CONTÍNUAS INFINITAS

Os valores decorrentes dos segmentos áureos, como abordam Lívio (2006) e Huntley (1985), também aparecem em sequências contínuas infinitas, quando a lei de formação é dada recursivamente, a partir do terceiro termo, por $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ao tomarmos a razão entre dois (2) termos sucessivos suficientemente grandes, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right) = \varphi \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) = \Phi.$$

Casos particulares dessas sequências são, a sequência de Lucas, na qual, $a_1 = 1, a_2 = 3$ e a sequência de Fibonacci, que tem $a_1 = a_2 = 1$. Para os termos da sequência de Fibonacci, a equação de Binet (Séc. XIX d. E. C.) fornece o termo geral através dos resultados áureos, a saber, $F_n = \frac{\Phi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$.

Com tal característica, a sequência áurea apresenta $a_1 = 1$ e $a_2 = \Phi$. Daí, seus primeiros termos são: $1, \Phi, 1 + \Phi, 1 + 2\Phi, 2 + 3\Phi, 3 + 5\Phi, \dots$ no qual, cada termo a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores. Como visto na subseção 5.3.2, $\Phi^2 = \Phi + 1$, assim, essa sequência pode ser escrita como uma sequência geométrica de razão Φ do seguinte modo: $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \dots$

O valor de Φ , também surge como uma raiz quadrada que continua indefinidamente, bem como, no valor da fração contínua, ambas destacadas a seguir:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

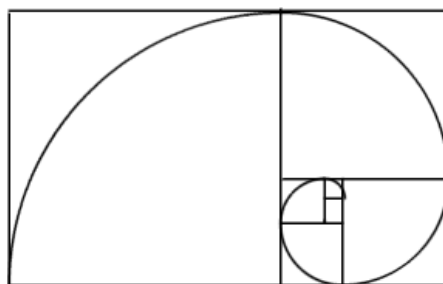
$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Veja que as reticências em ambas as situações, indicam que o aparente padrão segue continuamente. Posto isso, ainda que existem outras sequências com aspectos similares que possam ser construídas, essas, são suficientes para nos dá uma percepção razoável do vasto leque de maneiras formidáveis de se obter os valores discutidos.

6.2 OUTROS CASOS ÁUREOS

Dentre as situações em que os padrões áureos estão presentes em assuntos geométricos, um caso especial, conforme relata Ávila (1985), refere-se aos *retângulos áureos*, assim adjetivados, por possuírem as medidas satisfazendo as condições tratadas nas construções da seção 4. Uma característica singular desses retângulos, está no fato que após retirar-se um quadrado, o retângulo que resta é semelhante ao anterior. Aplicando recursivamente esse processo com o retângulo resultante, destaca-se, uma espiral com padrões áureos, como ilustra a figura 6.2.1.

Figura 6.2.1 – Retângulo áureo e espiral áurea



Fonte: mongge, 2020

No entanto, esse aspecto peculiar não está restrito às abstrações, a natureza possui padrões cuja interpretação matemática apresenta traços similares. Exemplo disso, Lívio (2006) indica as espirais de um girassol, a contagem das pétalas de certas flores, a simetria das pétalas de rosas. A propósito, espirais logarítmicas com ligação estreita com o retângulo áureo, são identificadas ainda em conchas do mar, redemoinhos, furacões, galáxias, no voo de um falcão, etc.

Não surpreende, o autor supracitado, aponta também que esses padrões são aplicados em situações práticas por artistas matemáticos, mais precisamente, pintores, como os renascentistas Pietro della Francesca (1412 - 1492), Leonardo da Vinci (1452 - 1519) dentre outros, que dedicaram atenção às qualidades áureas, embora, suas contribuições neste caso, tenha sido mais no campo científico. Dentre os artistas que empregaram atenção teórica e prática aos padrões áureos, temos o exemplo da obra *Sacramento da Última Ceia* de Salvador Dalí (1955), onde são identificadas aplicações desses padrões.

Essas são apenas algumas situações em que as características áureas estão presentes. Apesar de somente termos citados esses casos, existem uma extensa lista de trabalhos que fazem uma discussão aprofundada sobre esse tema, caso das obras que embasam esse sucinto texto, os quais, a leitura é recomendada.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para recapitular os fatos, vimos que a primeira metade deste breve texto nos oportunizou conhecer, de forma minuciosa, as peculiaridades do desenrolar das ideias que culminam na identificação de dois pontos, únicos, que destaca um segmento áureo a partir de um segmento fornecido previamente. Conforme exposto, esse processo deu-se apenas com a utilização de régua sem marcações e compasso, o qual, contou-se com o apoio de afirmações, até certo ponto familiar, decorrentes da geometria euclidiana plana.

A identificação dos pontos desejados, guiou nossa atenção aos comprimentos das partes do segmento após a divisão. Nisto, na segunda parte do texto constatamos que a razão entre as medidas dos segmentos, resulta em duas constantes algébricas irracionais. Neste cenário, o ponto interno ao segmento dado divide este em uma constante identificada como *razão áurea* (φ), enquanto o ponto externo, resulta no valor conhecido por *número de ouro* (Φ).

Isso nos levou, de forma natural, à análise de algumas relações pertinentes envolvendo as duas constantes. As relações identificadas constam das seguintes informações: os valores encontrados são inversos; a diferença entre eles é de uma unidade; o quadrado da *razão áurea* é igual à uma unidade menos seu próprio valor; o quadrado de *número de ouro* é o seu próprio valor adicionado uma unidade.

Além do mais, neste ensaio, a construção de uma das pérolas da matemática que é o segmento áureo, resultou no desenvolvimento de um conhecimento mediante processo lógico-dedutivo necessário para encontrar e analisar os resultados pertinentes, de tal modo, a conhecer as características notáveis dos valores numéricos estudados. Com isso, foi possível compreender a sucessão de ideias que levaram aos resultados pretendidos.

Fatos que favoreceram o entendimento de que estes resultados, que não se encontram restritos as abstrações matemáticas, podem ser identificados sem grandes dificuldades em diversos ambientes. Circunstâncias que provocaram o interesse de autores clássicos, como ainda motiva novos estudiosos ou aventureiros que se divertem com seus belos resultados. Elementos que ressaltam a significância histórica associada, bem como, no fato de serem valores reconhecidos por áureos.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2006.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, v. 6, 1985.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do professor de matemática)

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

HUTLEY, H. E. **A Divina Proporção**: um ensaio sobre a beleza na matemática. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do professor de matemática)

LIVIO, Mario. **Razão Áurea**: a história de Φ , um número surpreendente. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MARCONI, Maria de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia Científica**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MARQUES, Diogo. **Teoria dos Números Transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção textos universitários)

MONGGE. [Site Editor]. Disponível em: <<https://www.mongge.com/editor>>. Acesso em: 19 set. 2020.

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; JORGE, M. **Geometria II**: métrica plana. Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
(Coleção do professor de matemática)