



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANTONIO DYENITON DE SOUZA RODRIGUES

**UMA DISCUSSÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PARA
OBTENÇÃO DE PROJEÇÕES ESTATÍSTICAS EM PANDEMIAS: EXEMPLOS DE
MODELOS APLICÁVEIS AO COVID-19**

SÃO RAIMUNDO NONATO - PI

2022

ANTONIO DYENITON DE SOUZA RODRIGUES

**UMA DISCUSSÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PARA
OBTENÇÃO DE PROJEÇÕES ESTATÍSTICAS EM PANDEMIAS: EXEMPLOS DE
MODELOS APLICÁVEIS AO COVID-19**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de
Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí, Campus São
Raimundo Nonato.

Orientador: Prof. Dr. Francisco
Nogueira Lima

SÃO RAIMUNDO NONATO - PI

2022

R696d Rodrigues, Antonio Dyeniton de Souza
 Uma discussão de modelos matemáticos utilizados para obtenção de
 projeções estatísticas em pandemias: exemplos de modelos aplicáveis ao Covid
 - 19 / Antonio Dyeniton de Souza Rodrigues. – 2022.

51 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -
Instituto Federal do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Nogueira Lima.

1. Modelagem matemática. 2. Covid-19. 3. MSEIRS. I. Título

CDD – 519.5

ANTONIO DYENITON DE SOUZA RODRIGUES

**UMA DISCUSSÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PARA
OBTENÇÃO DE PROJEÇÕES ESTATÍSTICAS EM PANDEMIAS: EXEMPLOS DE
MODELOS APLICÁVEIS AO COVID-19.**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de
Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí, Campus São
Raimundo Nonato.

Aprovada em: 13/07/2022.

BANCA EXAMINADORA:

PROF. Drº FRANCISCO NOGUEIRA LIMA (ORIENTADOR)

Instituto Federal do Piauí - IFPI

PROF. VALDEMI NUNES COSTA (MEMBRO)

Instituto Federal do Piauí - IFPI

PROF. AMAYA DE OLIVEIRA SANTOS (MEMBRO) - IFPI

Instituto Federal do Piauí - IFPI

SÃO RAIMUNDO NONATO - PI

2022

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Valma Laine de Souza Lima, amigos e família e professores.

Agradeço a minha mãe por todo o apoio emocional e financeiro, as palavras de conforto, e puxões de orelha, e também todos os professores e servidores do IFPI do Campus São Raimundo Nonato, pois todos me receberam e contribuíram para essa jornada. Em especial ao meu Orientador, o Prof. Drº Francisco Nogueira Lima pela a atenção e cuidado durante esse processo de apresentação e formação.

Em especial aos professores que durante toda essa jornada contibuíram substancialmente para o desenvolvimento e aprendizado em minha formação, a todos que deram todo o apoio necessário para que eu chegasse até aqui. Agradeço ao meu Deus, que me deu força e paciência quando mais precisava.

Dedico toda minha caminhada a minha família por ter apoiado e a quem desacreditou, todo carinho e desafios enfrentados me transformaram no que sou hoje.

Hoje é um bom dia para começar novos desafios. Onde você quer chegar?

Ir alto.

Sonhe alto,

queira o melhor do melhor,

queira coisas boas para a vida.

pensamentos assim trazem para nós

aquilo que desejamos.

Paulo Roberto Gaefke

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo discutir alguns modelos matemáticos com potenciais usos nas projeções estáticas de algumas pandemias. Analisando os comportamentos desses modelos e comparando-os com algumas características no comportamento da *covid-19*. Neste trabalho abordaremos algumas características dos modelos epidemiológicos tais como: o modelo **SIS** (suscetível, infectado) o comportamento das suas equações e as características das suas transferências de classes: o modelo **SIR** (suscetível, infectado, recuperado), que tem como objetivo analisar a classe dos recuperados, indivíduos que adquiriram imunidade após o contato com o vírus: **SEIR** (suscetível, exposto, infectado, recuperado) que analisa o comportamento da classe onde os indivíduos tiveram contato com o vírus, porém não são considerados infectados, por não apresentar carga viral: e por fim o modelo **MSEIR** (imune, suscetível, exposto, infectado, recuperado) modelo que tem como característica pressupor imunidade passiva, imunidade derivada do contato da progenitora com o vírus, passada para o recém-nascido.

Palavras chave: modelagem matemática; Covid-19; MSEIRS.

ABSTRACT

This work aims to discuss some mathematical models with potential uses in the static projections of some pandemics. Analyzing the behaviors of these models and comparing them with some characteristics in the behavior of covid-19. In this work we will address some characteristics of epidemiological models such as: the SIS model (susceptible, infected) the behavior of its equations and the characteristics of its class transfers: the SIR model (susceptible, infected, recovered), which aims to analyze the class of recovered individuals, individuals who acquired immunity after contact with the virus: SEIR (susceptible, exposed, infected, recovered) that analyzes the behavior of the class where individuals had contact with the virus, but are not considered infected, as they do not present a face viral: and finally, the MSEIR model (immune, susceptible, exposed, infected, recovered) model whose characteristic is to assume passive immunity, immunity derived from the contact of the mother with the virus, passed on to the newborn.

Keywords: mathematical modeling; Covid-19; MSEIRS.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	09
2	MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS	12
2.1	MODELO SIS	12
2.2	MODELO SIR	14
2.2.1	Aplicando o modelo SIR no comportamento da covid-19 sem controle de circulação através do código SIMCOVID 2.1	19
2.2.2	Aplicando o modelo SIR no comportamento da covid-19 com controle de circulação da população (medidas de restrição/quarentena) através do código SIMCOVID2.1	24
2.3	MODELO SEIR	28
2.4	MODELO MSEIRS	34
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	37
	REFERÊNCIAS	39
	ANEXO A - INTRODUÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	41
	ANEXO B - DECRETO PRESIDENCIAL	48

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios a sociedade tem se deparado com inúmeras crises epidemiológicas capazes de devastar a humanidade, desde que não adotadas medidas sanitárias por parte das autoridades competentes. As teorias matemáticas têm evoluído no decorrer de nossa história, objetivando contemplar as diferentes necessidades da sociedade, surgindo modelos cada vez mais elaborados para obtenção e projeção de dados [1-2]. Tais projeções estatísticas são comumente utilizadas para fornecer parâmetros através dos quais podemos fazer comparações entre informações, bem como para antecipar possíveis causas e/ou danos associados à determinado fenômeno.

No ano de 2020 a humanidade se deparou com uma das maiores calamidades sanitárias, a pandemia do novo coronavírus (covid-19), tendo chegado ao Brasil em meados de março do mesmo ano. Na ocasião, as autoridades sanitárias tiveram conhecimento do primeiro caso, muito embora já tenha sido reconhecida como pandemia pela OMS (Organização Mundial da Saúde) desde dezembro de 2019, quando surgiram os primeiros casos na cidade de Wuhan na china [3]. Para os brasileiros, o estado de calamidade pública foi decretado através do Mensagem oficial do Presidente da República, “MENSAGEM Nº 93” (anexo II) destinada ao Congresso Nacional. Assim, uma série de medidas e decisões estratégicas para o combate da pandemia passariam a ser tomadas.

A importância da adoção de medidas e de estratégias para auxiliar na minimização dos danos causados pela epidemia da covid-19, partem do princípio que: auxiliam na minimização dos danos sociais e econômicos, visto que, esse fenômeno específico não possui impacto apenas sanitário, mas econômicos e sociais [4]. As medidas de isolamento social, por exemplo, associam-se à diminuição da propagação do vírus e a consequente parada total de serviços não essenciais. Muito embora, a paralisação parcial ocorrida no Brasil e também no mundo, tenha levado a fortes impactos no setor econômico, com falta de mão de obra e aumento significativo nos valores de mercadorias e de mercado [5]. Importante destacar que até mesmo serviços essenciais poderiam colapsar sem a adoção daquelas medidas.

No contexto econômico, o Brasil vivenciou diversos danos causados pela pandemia, tendo contribuído para o aumento significativo da perda de empregos e para o fechamento de pequenas e até mesmo grandes empresas [5].

Em um cenário pandêmico de grande complexidade, inclusive do ponto de vista socioeconômico e com iminentes riscos de colapso do sistema de saúde, fazer previsões e estimativas concretas das ações que poderiam ser tomadas para minimizar os efeitos da pandemia se mostra essencial do ponto de vista preventivo. É neste contexto que se destaca a importância da utilização de teorias e modelos matemáticos. Em diversas situações históricas tais teorias e modelos foram bastante requisitados, a exemplo dos modelos:

- **SIS** (Suscetível, Infectado), na obtenção de parâmetros e dados sobre a doença de Chagas Aguda [6];
- **SIR** (Suscetível, Infectado, Recuperado), na análise de dados referentes aos infectados pela Influenza H1N1 [7].
- **SEIR** (Suscetível, Exposto, Infectado, Recuperado) na obtenção de informações sobre o comportamento da dengue [8], dentre outros.

A modelagem matemática, em breve resumo, consiste na criação de um modelo matemático, um padrão ou fórmula, com o intuito de explicar ou compreender determinado fenômeno natural, que pode ser de qualquer área do conhecimento [9]. No contexto epidemiológico, os modelos matemáticos são utilizados como parâmetros importantes, a fim de obter dados e projeções que visam compreender aspectos relacionados à propagação e ao desenvolvimento de determinadas doenças. Os modelos matemáticos são parâmetros quantitativos que podem ser definidos a partir de estudos baseados na construção de equações de valores conhecidos que se assemelham a um modelo real [8]. Portanto, são capazes de definir ou estipular previamente uma síntese quantitativa sobre determinado fenômeno, em específico, uma construção de parâmetros que podem ser usados no combate/controle de epidemias.

Neste trabalho, objetivamos discutir especificamente alguns dos modelos matemáticos utilizados para obter parâmetros e projeções estatísticas sobre doenças, comparando eventual utilização dos mesmos para o caso da covid-19. Os modelos que trataremos aqui são:

- SIS (Suscetível, Infectado);
- SIR (Suscetível, Infectado, Recuperado);
- SEIR (Suscetível, Exposto, Infectado, Recuperado); além de um modelo mais abrangente, e que mais se aproxima da realidade da covid-19, denominado:
- MSEIRS (Imune, Suscetível, Exposto, Infectado, Recuperado).

Pretendemos, por fim, tornar a compreensão dos referidos modelos mais acessível para um público com formação menos técnica do ponto de vista matemático, aplicando em um estudo hipotético algum dos referidos modelos, mais especificamente no modelo SIR.

Neste capítulo, discutiremos alguns dos modelos matemáticos epidemiológicos e suas contribuições para o combate de crises sanitárias. Além disso, trataremos da importância de se estudar e comparar esses modelos para obtenção de dados que se aproximam da realidade, o que é determinante para escolha do modelo a ser empregado. Discutiremos, ainda, a importância do estudo em sala de aula de modelos que proporcionem e objetivem uma melhor compreensão das projeções fornecidas pelas entidades de controle sanitário e dos veículos de informação. Por fim, analisaremos os resultados obtidos pelas comparações e os impactos para o controle pandêmico a partir do conhecimento das medidas sanitárias.

2 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS.

2.1 MODELO SIS

O modelo SIS Endêmico é um modelo matemático que abrange fenômenos demográficos (natalidade e mortalidade natural) e morte pela doença. A incidência e prevalência de um fenômeno determinam as taxas a serem abordadas. Neste caso, discute a taxa populacional que se encontra em risco, como pode ser visto em mais detalhes na [8].

Muito embora seja um modelo com certa simplicidade, o mesmo se mostra útil do ponto de vista pedagógico, para introduzir alguns dos conceitos epidemiológicos que contribuem para a compreensão de ideias, definições e conceitos na teoria de estabilidade de equações diferenciais. Com isso, é possível introduzir o diagrama de transferência entre as classes S (indivíduos suscetíveis) e I (infecciosos), onde estão representadas também as taxas de transferência entre as classes consideradas [7-8], que serão melhor compreendidas adiante.

O modelo SIS endêmico poder ser descrito pelo sistema de equações diferenciais acopladas abaixo:

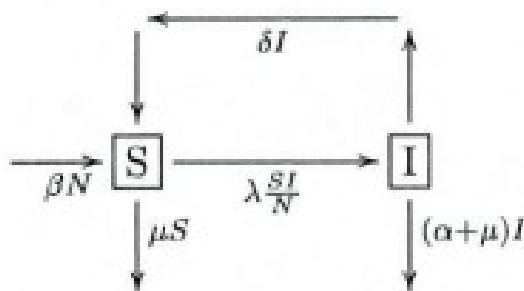
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda \frac{SI}{N} + \delta I - \mu S + \beta N \\ \frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - (\alpha + \delta + \mu) I \end{cases},$$

(1) suscetíveis em função do tempo

(2) Infectados em função do tempo

Como pode ser vista no sistema da Eq. (1), a derivada do número de indivíduos suscetíveis em função do tempo é representada pela diferença entre a soma dos números de possíveis suscetíveis que se recuperaram com o número de natalidade da população pesquisada, pela soma de casos suscetíveis expostos à doença (mas não infecciosos) com a mortalidade natural dos suscetíveis. Na Eq. (2), a derivada do número de infecciosos em função do tempo é representada pela diferença do número de novos indivíduos que se tornam suscetíveis a novo contato, pelo produto da taxa de infectados pela soma da taxa de mortalidade dos infecciosos, com a taxa de mortalidade natural, com a taxa de indivíduos recuperados que voltam a se tornar suscetíveis.

Figura 1: Diagrama de transferência entre classes S (suscetíveis) e I (infectados). Com esse modelo é possível entender o processo de infecção, recuperação e reinfecção de uma população de indivíduos por uma doença arbitrária.



Fonte: [8]

- β - taxa de natalidade, per capita, por unidade de tempo, $\beta > 0$;
- μ - taxa de mortalidade (natural) per capita, por unidade de tempo, $\mu \geq 0$
- δ - taxa em que indivíduos recuperados voltam a tornar-se suscetíveis per capita, por unidade de tempo, $\delta > 0$;
- $\lambda SI/N$ - número de novos casos de indivíduos que se tornam suscetíveis a um novo contato ou ao número de novos casos de infecciosos;
- α - taxa de mortalidade dos infecciosos devida à doença per capita, por unidade de tempo, $\alpha > 0$.

Para compreender o modelo endêmico são usados dados e parâmetros iniciais que determinam que as variáveis de suscetíveis e infectados iniciais são maiores do que zero e, desse modo, já há taxa de contaminação não nula na população estudada. Neste modo, determinamos, ainda, que as variáveis natalidade, mortalidade natural ou pela doença, e o números de suscetíveis que não se contaminaram e os recuperados que se tornam novamente suscetíveis serão consideradas maiores ou iguais a zero.

Assim, a taxa de indivíduos em determinado tempo é dada pela função

$$N(t) = S(t) + I(t) \quad (3).$$

Além disso, a partir dessa condição é possível obter

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt},$$

(4)

Da Eq. (4), é possível concluir que a quantidade de indivíduos da população em função do tempo pode ser determinada pela soma das **Eqs.** (1) e (2).

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu)N - \alpha I, \quad (5)$$

Derivando a taxa de indivíduos da população em função do tempo, o crescimento da população é dado pela expressão abaixo:

$$r = \beta - \mu \quad (6)$$

Utilizando uma linguagem matemática menos técnica, temos que, os fundamentos desse modelo baseiam-se na estimativa de dados que se aproximam da realidade, mas não necessariamente a representa. Esse modelo teve grande relevância para projeção da doença de *CHAGAS AGUDA*, onde seus parâmetros foram considerados significativamente relevantes juntamente com os dados de progressão da doença, isto é, as transferências de classes (S e I) se aproximam do contexto vivenciado [6].

É importante mencionar que as variáveis utilizadas se distanciam do comportamento da covid-19, visto que, há alguns aspectos desconsiderados que partem do comportamento da doença, a exemplo do período de exposição que será discutido mais adiante.

2.2 MODELO SIR (SUSCETÍVEL, INFECTADO, RECUPERADO)

O modelo SIR é um modelo matemático que estuda um diagrama de transferência mais abrangente do que o anterior, além de essencialmente diferente, pois ele não considera os fenômenos de natalidade e mortalidade, tendo em vista que as proporções de natalidade e as mortes pela doença não implicam diretamente

na taxa populacional. Neste modelo, após a infecção pela doença, indivíduos adquirem imunidade permanente .

Figura 2: Diagrama de transferência do modelo SIR (Suscetível, Infectado, Recuperado).

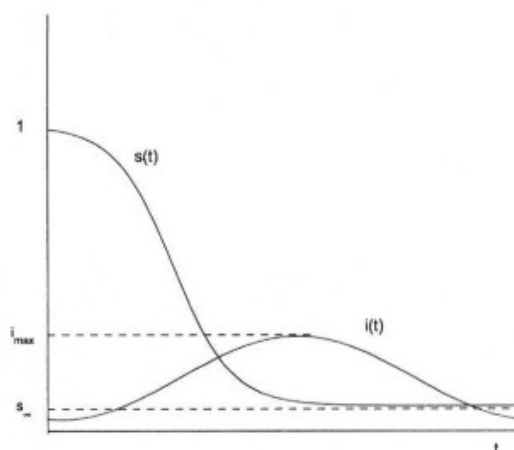


Fonte: [8]

As transformações e derivadas de acordo com o diagrama de transferência são bem complexas e podem ser observados em alguns dos trabalhos no qual esse se referência, como pode ser visto em detalhes nas [7-8].

Esse modelo aborda, estatisticamente, o estudo comportamental de uma doença, onde as taxas de transferência dos grupos podem ser vistas no gráfico da Fig. 3. Pedagogicamente é importante discuti-lo para um público menos técnico, a fim de alcançarmos os propósitos deste trabalho, muito embora uma abordagem mais abrangente possa ser encontrada em [8].

Figura 3: $s(t)$ é a variação da taxa de suscetíveis em função do tempo. $i(t)$ é a taxa de infectados em função do tempo. Note que no estágio inicial ($t=0$) a quantidade de suscetíveis, s , equivale ao número total da população, e o número de infectados, i , é zero. Observe que após a evolução do número de infectados e da intersecção das curvas ($s=i$) temos um pico (ponto de máximo) na quantidade de infectados.



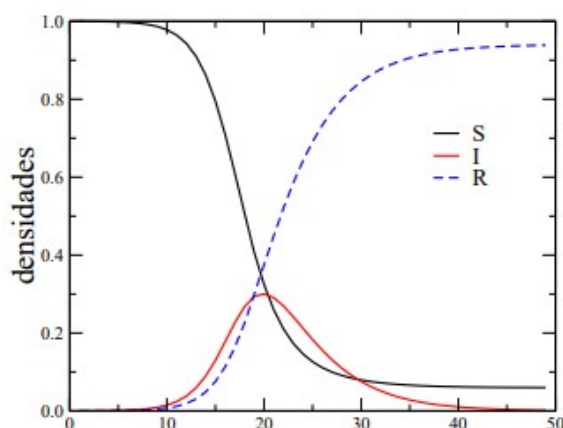
Fone:[8]

No gráfico da Fig. 3, é possível observar:

- A) considerando que há uma taxa de infecção, logo o número de suscetíveis tende a ser maior que o dos outros grupos;
- B) Aumentando o número de infectados, a taxa de indivíduos suscetíveis tende a zero, ocasião em que é possível constatar que o número de recuperados tende a aumentar (veja mais detalhes no gráfico da Fig. 4), já que neste modelo não há reinfeção pela doença;
- C) Temos, ainda, um ponto de máximo na infecção, visto que neste modelo as taxas de natalidade e mortes pela doença são desconsideradas.

No SIR é notável que as variações de suscetíveis, recuperados e infectados tendem a um ponto de equilíbrio, já que os indivíduos adquirem imunidade neste modelo e, em decorrência disto, o número de indivíduos da classe **S** (Suscetíveis) tende a zero. A partir dessa afirmativa, a tendência é que o número de indivíduos da classe **I** (infectados) diminua, já que a classe **I** depende diretamente da classe **S**. No SIR o comportamento das taxas também é representado por um conjunto de equações diferenciais acopladas, que podem ser observadas em mais detalhes na [10]. Já para a classe **R** (Recuperados), supõe-se que, inicialmente **R=0**, e que ao fim do processo, que é estipulado pelo modelo **SIR**, o valor de **R=N(t)**, como pode ser observado no gráfico da Fig. 4.

Fig. 4: S é a população suscetível; I o número da população que está infectada e R os indivíduos recuperados. É possível observar um ponto de pico de infectados, bem como as transferências de classes, ou seja, os instantes de tempo em que há mudança na condição da doença, de suscetível para infectado, *etc.* .

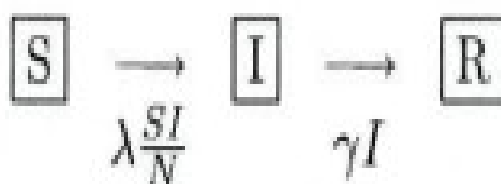


Fonte: [10]

Nesse modelo matemático suas variáveis e aplicações se limitam a definir um ponto de pico de contaminação por covid, isto é, ele não expõe todas as possibilidades, dentre as quais a taxa de natalidade, por exemplo. Segundo a [8,10]. um estudo detalhado sobre as taxas de contaminação utilizando o modelo SIR não define diretamente as situações reais, visto que, os parâmetros utilizados dependem de um ponto de partida, sendo assim, há hipóteses que devem ser consideradas para poder definir em que circunstâncias esse modelo pode ser empregado, já que os dados e as informações surgem fora do contexto da própria realidade. Neste caso, como pode ser observado, não há um controle sobre as formas de sucessão e de exposição ao vírus.

Exemplificando o diagrama de transferência do modelo SIR, temos:

Fig 5: Diagrama de transferência SIR, onde temos três classes. S - Suscetíveis, I - Infectados e R - Recuperados.



Fonte: [10]

Nesse diagrama podemos observar duas variações entre as classes, sendo elas:

- $\lambda SI/N$ - número de novos casos de indivíduos que se tornam suscetíveis a um novo contato ou ao número de novos casos de infecciosos; e
- γI - número de novos indivíduos infectados ou número de indivíduos recuperados.

Deste modo, temos o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas representativas da evolução do sistema:

Fig 6: sistema de equações diferenciais do diagrama de transferência SIR.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda \frac{SI}{N} & \text{eq.(7)} \\ \frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - \gamma I & \text{eq.(8)} \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I & \text{eq.(9)} \end{cases}$$

Fonte: [10]

- Eq. (7). dS/dt - derivada do número de indivíduos suscetíveis em função do tempo, que tende a zero neste modelo;
- Eq. (8). dI/dt - derivada dos números de casos infecciosos em função do tempo. Este é dado pela diferença entre o número de casos de indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados;
- Eq. (9). dR/dt - derivada do número de indivíduos recuperados em função do tempo. Representa a variação da taxa de indivíduos infectados.

Assim, temos que N (número de indivíduos de uma população) em função do tempo é dado por:

Fig 7: O número de indivíduos em função do tempo é dado pela soma das classes em função do tempo.

$$[N(t)=S(t) + i(T) + R(t)]$$

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Fonte: [10]

Em resumo, essa equação denota toda a população, isto é, representa diretamente o número total de indivíduos estudados ou projetados (veja que a população de uma cidade, na prática, pode ser maior do que aquela obtida via dados oficiais, do IBGE, por exemplo. Daí, $N(t)$ pode representar uma projeção da quantidade de indivíduos). A fim de entender o comportamento do vírus dentro de uma variável de tempo, tomemos nesse modelo o tamanho da população N como uma constante, dado que as taxas de mortes e natalidade são desconsideradas aqui e, neste caso, não mudam as projeções. É importante observar que, muito embora sejam desconsideradas as informações como natalidade, mortalidade e inclusive população externa, sendo esta última uma parte não definida, visto que não se tem o controle total de quem entra ou sai do local estudado, esses parâmetros poderão ser observados ou melhor compreendidos nos modelos complementares que discutiremos a seguir: esses, na prática, tratam-se de complementações que se originaram da necessidade de adaptação de novos casos de doenças observadas no decorrer da vida humana.

O modelo matemático SIR avalia alguns parâmetros, no entanto, não se aproxima fielmente do comportamento da covid-19, por exemplo. Mas há estudos que comprovam que mesmo com a sua simplicidade, este modelo matemático é relevante para compreender o comportamento de algumas outras doenças, tais como: Hepatite A, dengue, *etc.*

2.2.1 Aplicando o modelo SIR no comportamento da *covid-19* sem controle de circulação através do código SIMCOVID 2.1

A seguir, temos a representação de um estudo aleatório, simulando o desenvolvimento e propagação da covid-19 em São Raimundo Nonato,

exemplificando as taxas de transferência entre as classes pelo aplicativo da SIMCOVID 2.1¹.

Esse aplicativo foi criado com o intuito de verificar as taxas de transferência e migração entre as classes, ele pode ser baixado sem sua versão para computador em *sítio*². Para compreensão e análise do que acontece na população estudada, foi levado em conta informações aleatórias da população atual da cidade de São Raimundo Nonato, e dos dados da covid-19 no mês de março de 2022, sendo essa data referida a última atualização dos dados da evolução da doença na cidade no *sítio*³.

Assim ficou distribuído as informações.

- Número de habitantes $N(t)=35035$ sendo $t=0$.
- Número de casos ativos $I = 176$ (valor referente a última atualização sobre a covid-19 no município).
- Número de recuperados $R= 0$ (toma-se o valor de 0, para analisar o pico de contaminação)
- Taxa de circulação 100% (não houve na 1º análise um afastamento ou utilização de máscara).
- Tempo de infecção 7 dias. (media utilizada como parâmetro de vida do vírus no organismo, valor suposto, pode diferenciar dependendo da resposta imunológica do indivíduo).
- Reprodução basal 2,5. (velocidade de propagação do vírus, valor esse que pode mudar de população para população, valor escolhido pelo fato de ter ser identificado na evolução da pandemia no Brasil).
- Taxa de quarentena 5. (valor de 0 a 10, neste caso representa 50% das pessoas infectadas se mantem em quarentena por sintomas ou suspeita de infecção).
- Dias simulados 30 dias.

1 Aplicativo criado e desenvolvido em janeiro de 2021, por Carlos R. Rocha (IFRS – INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO E CIENCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL), Sebastião C. P. Gomes (FURG – UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE). Site para *download*

2 Endereço para *download* do aplicativo SIMCOVID (<https://exactum.furg.br/software-simcovid>).

3 <https://saoraimundononato.pi.gov.br/portal/painel-covid-19/>. Endereço eletrônico dos dados sobre a covid-19 na cidade de São Raimundo Nonato-Piauí. <acessado em 15 de maio de 2022>.

- Controle de circulação 0%. (valor igual a zero, não havendo controle de circulação).

Veremos as figuras a seguir:

Figura (13): gráfico dos casos do estudo aleatório de 30 dias com os parâmetros informados no início desse capítulo sem controle de circulação ou distanciamento.



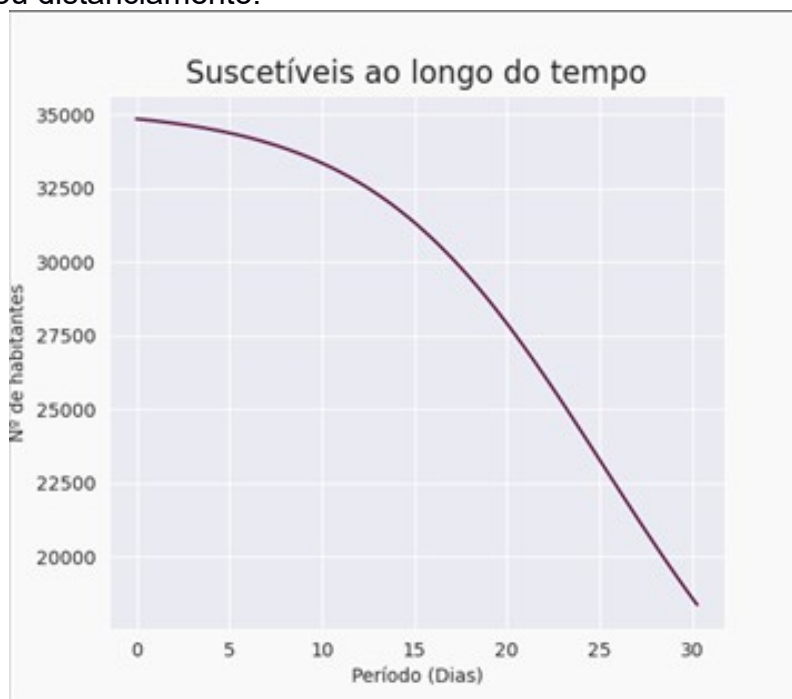
Fonte: Autor

Figura (14): gráfico do número de infectados em função do tempo do estudo aleatório de 30 dias com os parâmetros informados no início desse capítulo sem controle de circulação ou distanciamento.



Fonte: Autor.

Figura (15): gráfico do número de suscetíveis em função do tempo do estudo aleatório de 30 dias com os parâmetros iniciais 35.035 habitantes sem controle de circulação ou distanciamento.



Fonte: Autor

Figura (16): gráfico dos parâmetros de simulação, exemplificando as transferências entre as classes S – I – R referente aos números de casos de *covid-19* no decorrer dos 5 primeiros dias. sem controle de circulação ou distanciamento.

	Circulação(%)	Nº de casos	Suscetíveis	Infectados	Removidos
0.00	100.00	176	34859	176	0
0.25	100.00	192	34843	183	9
0.50	100.00	209	34826	191	18
0.76	100.00	226	34809	199	27
1.01	100.00	244	34791	207	37
1.26	100.00	263	34772	216	47
1.51	100.00	283	34752	225	58
1.76	100.00	304	34731	234	69
2.02	100.00	325	34710	244	81
2.27	100.00	347	34688	254	93
2.52	100.00	370	34665	264	106
2.77	100.00	394	34641	275	119
3.02	100.00	419	34616	287	132
3.28	100.00	445	34590	299	147

Fonte: Autor

Figura (17): gráfico dos parâmetros de simulação, exemplificando as transferências entre as classes S – I – R referente aos números de casos de *covid-19* ao final dos 30 dias. sem controle de circulação ou distanciamento.

	Circulação(%)	Nº de casos	Suscetíveis	Infectados	Removidos
26.97	100.00	13670	21365	4408	9262
27.22	100.00	13912	21123	4435	9477
27.48	100.00	14152	20883	4458	9693
27.73	100.00	14390	20645	4480	9911
27.98	100.00	14627	20408	4498	10129
28.23	100.00	14862	20173	4514	10348
28.49	100.00	15095	19940	4527	10568
28.74	100.00	15326	19709	4538	10788
28.99	100.00	15555	19480	4546	11009
29.24	100.00	15781	19254	4551	11230
29.49	100.00	16005	19030	4553	11451
29.75	100.00	16226	18809	4553	11673
30.00	100.00	16445	18590	4551	11894
30.25	100.00	16661	18374	4546	12115

Fonte: Autor

Logo sem o controle e livre circulação podemos observar:

Na figura (13) temos:

- $S(t)=S(0) = 30.035$
- $I(t)=I(0) = 176$ casos ativos
- $R(t)=R(0) = 0$ (nessa simulação **R** é denotado como removido, ou seja, considera-se recuperado).

Consideramos nesse estudo um tempo de infecção de 7 dias, período esse em que o vírus fica no organismo. Vemos que no decorrer da simulação a taxa de casos de infectados chegaram ao valor de aproximadamente 17.000 casos, que correspondem a 50% da população estudada.

Na figura (14) podemos observar que o gráfico possui um crescimento e após 29 dias do experimento, acontece o pico de contágio, ponto de máximo de contágio pela doença, isto é, considerando as características do modelo **SIR**, a classe **S**

tende a 0 como observado na figura (15), e como a classe I depende diretamente da classe **S**, a classe I também tende a zerar. A princípio não é considerado a taxa de reincidência, isto é, não a reinfecção pela doença, os recuperados obtêm imunidade permanente, entretanto não se assemelha diretamente com o comportamento real do vírus da *covid-19*.

Nas figuras (16) e (17) pode ser observado a variação dos valores ao decorrer dos dias estudados, além disso, é visível a velocidade de imigração de uma classe para outra, isto é, a forma de contágio segue um padrão que se assemelha ao vivenciado por algumas cidades na covid-19.

Além disso, não é possível caracterizar definitivamente o comportamento dessas taxas, visto que, nesse modelo são desconsideradas algumas taxas, tais como: natalidade, morte pela doença, morte natural e *etc.*

2.2.2 Aplicando o modelo SIR no comportamento da *covid-19* com controle de circulação da população (medidas de restrição/quarentena) através do código SIMCOVID 2.1

Utilizando os mesmos dados iniciais citados no capítulo anterior, levando em consideração apenas nessa nova simulação os referentes dados:

- Número de habitantes **N(t)**=35035 sendo **t**=0.
- Número de casos ativos **I** = 176 (valor referente a última atualização sobre a covid-19 no município).
- Número de recuperados **R**= 0 (toma-se o valor de 0, para analisar o pico de contaminação)
- Taxa de circulação 100% (houve um afastamento ou utilização de máscara).
- Tempo de infecção 7 dias. (media utilizada como parâmetro de vida do vírus no organismo, valor suposto, pode diferenciar dependendo da resposta imunológica do indivíduo).

- Reprodução basal 2,5. (velocidade de propagação do vírus, valor esse que pode mudar de população para população, valor escolhido pelo fato de ter sido identificado na evolução da pandemia no Brasil).
- Taxa de quarentena 10. (valor de 0 a 10, neste caso representa 100% das pessoas infectadas se mantêm em quarentena por sintomas ou suspeita de infecção).
- Dias simulados 30 dias.
- Controle de circulação 100%. (valor igual a 100%, havendo controle de circulação).

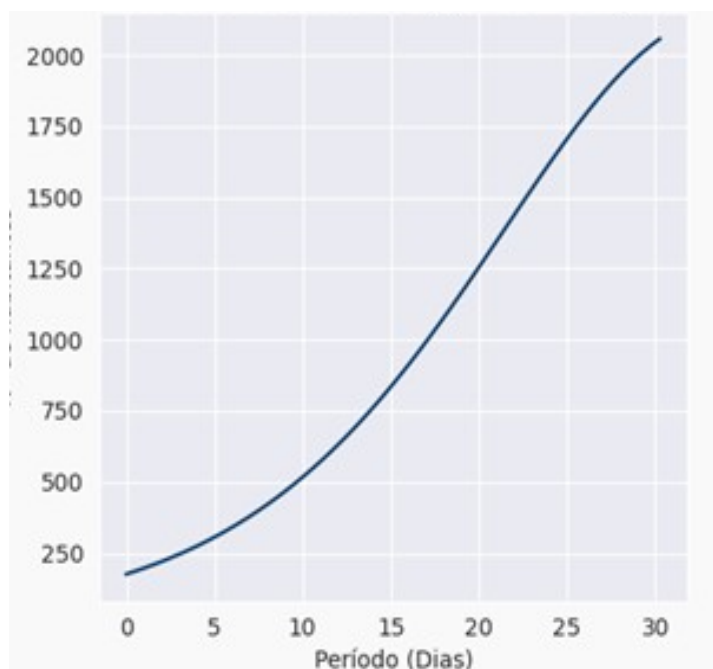
Observaremos as figuras a seguir:

Figura (18): gráfico dos casos do estudo aleatório de 30 dias com os parâmetros informados no início desse capítulo com controle de circulação ou distanciamento.



Fonte: Autor

Figura (19): gráfico do número de infectados em função do tempo do estudo aleatório de 30 dias com os parâmetros informados no início desse capítulo, com controle de circulação ou distanciamento, e os infectados em quarentena.



Fonte: Autor

Figura (20): gráfico do número de suscetíveis em função do tempo do estudo aleatório de 30 dias com os parâmetros iniciais 35.035 habitantes, com controle de circulação ou distanciamento.



Fonte: Autor

Figura (21): gráfico dos parâmetros de simulação, exemplificando as transferências entre as classes S – I – R referente aos números de casos de *covid-19* no decorrer dos 5 primeiros dias. com controle de circulação ou distanciamento, e com quarentena de indivíduos infectados.

	Nº de casos	Suscetíveis	Infectados	Removidos	
0.00	176	34859	176	0	
0.25	192	34843	181	11	
0.50	208	34827	186	22	
0.76	225	34810	192	34	
1.01	243	34792	197	46	
1.26	261	34774	203	58	
1.51	279	34756	208	70	
1.76	298	34737	214	83	
2.02	317	34718	221	97	
2.27	337	34698	227	110	
2.52	358	34677	233	124	
2.77	379	34656	240	139	

Fonte: Autor

Figura (22): gráfico dos parâmetros de simulação, exemplificando as transferências entre as classes S – I – R referente aos números de casos de *covid-19* ao final dos 30 dias. com controle de circulação ou distanciamento e quarentena dos infectados.

	Nº de casos	Suscetíveis	Infectados	Removidos	
27.48	7631	27404	1899	5733	
27.73	7765	27270	1916	5850	
27.98	7900	27135	1932	5967	
28.23	8035	27000	1949	6086	
28.49	8170	26865	1964	6206	
28.74	8306	26729	1979	6327	
28.99	8442	26593	1994	6448	
29.24	8579	26456	2008	6571	
29.49	8715	26320	2021	6694	
29.75	8852	26183	2034	6818	
30.00	8989	26046	2046	6943	
30.25	9126	25909	2057	7069	

Fonte: Autor

Podemos observar com o controle de circulação, e a efetivação da quarentena dos infectados o seguinte:

Na **figura (18)** apresenta uma diferença nas quantidades de casos de um modelo aleatório para outro. No modelo apresentado nesse capítulo, o controle e a quarentena dos indivíduos infectados, conteve o número de casos por infecção pelo vírus, isto é, diminuiu em 46% a taxa de casos por *covid-19* no estudo aleatório.

Na **figura (19)** o número de classe **I** infectados demoraria a atingir seu ponto de máximo, visto que, com o controle referente aos casos de infectados, a propagação do vírus tenderia a diminuir, mesmo considerando a taxa de transmissão de 2,5 vista no início da pandemia.

Na **figura (20)** temos que o número de indivíduos da classe **S** diminui, porem numa forma mais lenta, taxa de propagação do vírus se mantém baixa devido ao controle de circulação dos infectados, diminuindo a taxa de contágio com o vírus.

Na **figura (21)** observa-se nos três primeiros dias, como as taxas de transferência se comportam, principalmente se observando, que o número de casos de infecção pelo vírus dobra durante esse período, no entanto, se comparar o período de dez (10) dias, temos que a taxa de casos diminuem em 50%, devido a

implementação da efetivação do controle de circulação imposto a população hipotética estudada

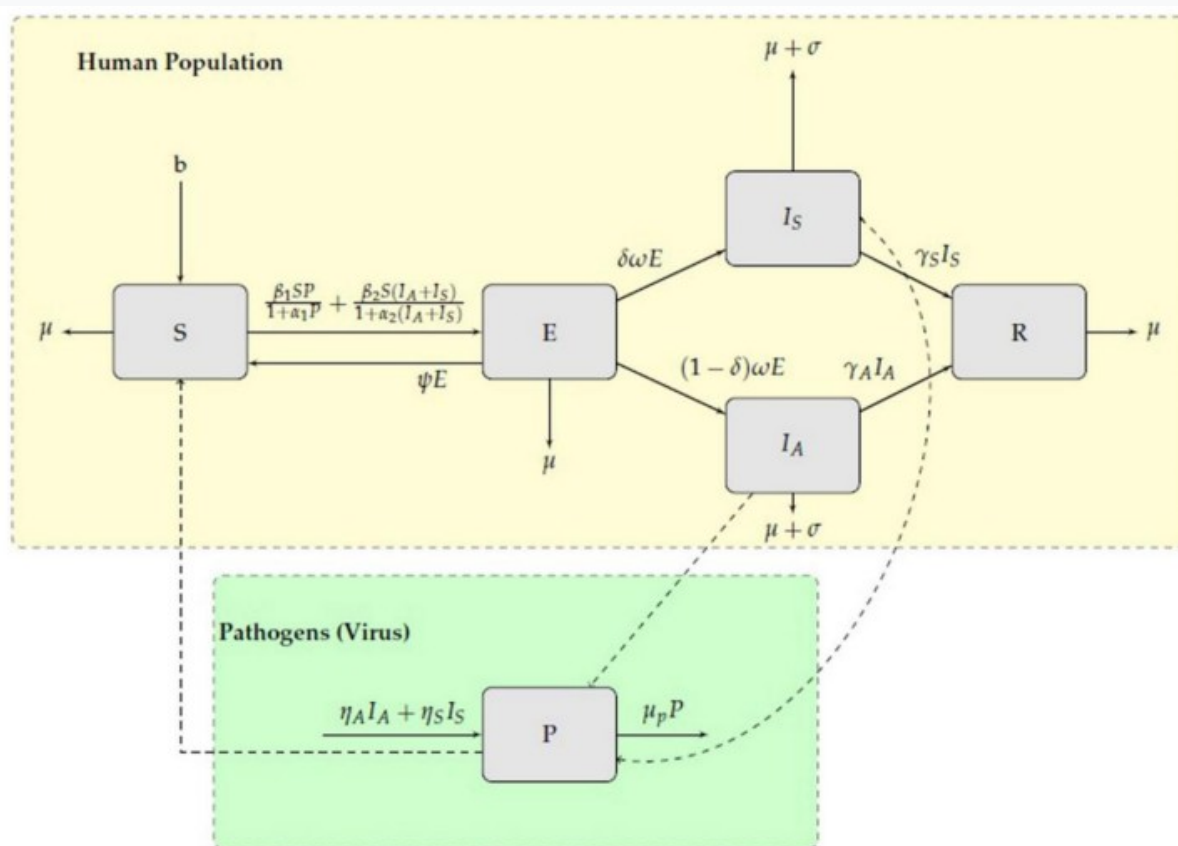
Na **figura (22)** é notável a diferença entre as imigrações das classes, isto é, propondo um controle sobre a circulação, a propagação do contágio tem sua velocidade reduzida. Isso não indica uma extinção total do vírus, mas pressupõe que evitaria um colapso na saúde pública, evitando uma taxa alta de contágio como a observada no capítulo anterior. Alguns resultados se aproximam com os dados destacados em veículos de informações e conforme alguns artigos citados para controle do avanço da pandemia **[14]**.

Esse experimento aleatório teve como objetivo destacar alguns pontos importantes do estudo dos modelos matemáticos, pois, compreender como são feitas as projeções e parâmetros que possibilitem definir estratégias para o controle de uma pandemia, no caso utilizando hipoteticamente a *covid-19* com alguns dados da realidade.

2.3 MODELO SEIR

O modelo SEIR (Suscetível, Expostos, Infectados, Recuperados) é um modelo matemático que complementa os parâmetros do modelo SIR. Além disso, é importante observar que o modelo SEIR engloba um período de exposição do grupo de indivíduos que são suscetíveis a doença e, neste caso, alguns desses indivíduos passam por uma etapa considerada de não transferência da doença, pois não se encaixa nem nos dados de possíveis suscetíveis, tampouco de infectados, pois os expostos ao vírus de determinada doença não transmite para outros indivíduos. Dessa forma, é considerado o período de incubação da doença. Consideramos, ainda, os índices demográficos como: natalidade, mortalidade natural e pela doença, e os indivíduos são conferidos com imunidade permanente após o contato com a doença. No diagrama abaixo está representando o modelo SEIR que pode ser encontrado na **[11]**.

Fig 23: Modelo SEIR-P (SEIR Patógeno) de transmissão de COVID-19, representando um modelo compartimental humano (SEIR, tom amarelo) e patógeno (P, tom verde). É possível verificar o diagrama de transferência de classes, onde constam outras denotações para identificação das mesmas, que serão expressas adiante.



Modelo SEIR-P de transmissão de COVID-19. Representando um modelo compartimental humano (SEIR, tom amarelo) e patógeno (P, tom verde)

Fonte: [11].

No diagrama da figura 23 observamos, a exemplo dos modelos anteriores, alguns aspectos já comentados durante esse trabalho, isto é, o modelo SEIR abrange as classes **S** - indivíduos que são suscetíveis, **E** - indivíduos expostos, representando o período de incubação, que é a classe fundamental vista nessa seção, pois permite relacionar características matemáticas desse modelo com a realidade vivenciada no período da covid-19.

A classe **E** (exposição) é o período em que o indivíduo da classe **S** teve contato com o vírus, porém, ainda não pode ser considerado infectado e, sendo assim, é importante observar uma característica relevante que aparece após o período de exposição, período esse que não se estabelece como suscetível e nem

como infectado (mas após o período de incubação do vírus), onde a classe de expostos subdivide a classe de infectados em duas novas classes, denominadas de **IS** (infectados sintomáticos) e **IA** (infectados assintomáticos).

Entende-se por infectados assintomáticos o estado onde a pessoa está infectada, porém, não possui características que permitem identificar a presença do vírus no organismo. Em muitos casos, isso pode ser um fator que determina em que termos o vírus se propaga, pois o indivíduo pode transmitir mesmo não possuindo sintomas, ainda que possa ocorrer do mesmo não transmitir, se a sua carga viral não for suficiente para tal.

Já para os indivíduos Infectados sintomáticos, os mesmos apresentam características da doença, ou seja, é possível identificar e fazer um distanciamento para evitar a propagação do vírus. Neste caso, é quase consenso entre os infectologistas um princípio de que os **IA** (infectados assintomáticos) têm menos probabilidade de propagação do vírus que os **IS** (infectados sintomáticos). Com isso, podemos destacar que determinada parte de uma população infectada, na maioria das vezes teve a doença, ou contato com o vírus, porém não apresentou sintomas [11]. Por outro lado, os IA podem ter contribuído ou não para propagação, mas esse dado se torna quase que irrelevante no estudo.

As equações diferenciais acopladas que expressam esse modelo (SEIR), muito embora não apresentamos aqui todos os detalhes referentes às mesmas [11], são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = b - \frac{\beta_1 SP}{1+\alpha_1 P} - \frac{\beta_2 S(I_A+I_S)}{1+\alpha_2(I_A+I_S)} + \psi E - \mu S, \quad \text{Eq. (10)} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta_1 SP}{1+\alpha_1 P} + \frac{\beta_2 S(I_A+I_S)}{1+\alpha_2(I_A+I_S)} - \psi E - \mu E - \omega E, \quad \text{Eq. (11)} \\ \frac{dI_A}{dt} = (1-\delta)\omega E - (\mu + \sigma)I_A - \gamma_A I_A, \quad \text{Eq. (12)} \\ \frac{dI_S}{dt} = \delta\omega E - (\mu + \sigma)I_S - \gamma_S I_S, \quad \text{Eq. (13)} \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_S I_S + \gamma_A I_A - \mu R, \quad \text{Eq. (14)} \\ \frac{dP}{dt} = \eta_A I_A + \eta_S I_S - \mu_P P. \quad \text{Eq. (15)} \end{array} \right.$$

Onde as variáveis constantes nas Eqs. 10-15 são definidas conforme segue no quadro da Fig. 24.

Fig. 25: Quadro da representação dos significados das letras do diagrama de transferência de classes do modelo matemático SEIR

Taxa de natalidade da população humana	b
Taxa de mortalidade humana natural	μ
Expectativa de vida humana	$1/\mu$
Taxa de mortalidade natural de patógenos no meio ambiente	μ_P
Expectativa de vida de patógenos no ambiente	$1/\mu_P$
Proporção de interação com um ambiente infeccioso	α_1
Proporção de interação com um indivíduo infeccioso	α_2
Taxa de transmissão de S para E devido ao contato com P	β_1
Taxa de transmissão de S para E devido ao contato com IA e/ou IS	β_2
Proporção de pessoas infecciosas sintomáticas	δ
Taxa de progressão de E para S devido ao sistema imunológico robusto	ψ
Taxa de progressão de E para IA ou IS	ω
Taxa de mortalidade devido ao coronavírus	σ
Taxa de recuperação da população sintomática	γ_S
Taxa de recuperação da população humana assintomática	γ_A
Taxa de propagação do vírus para o ambiente por indivíduos infecciosos sintomáticos	η_S
Taxa de propagação do vírus para o ambiente por indivíduos infecciosos assintomáticos	η_A

Fonte: [11].

Observe que:

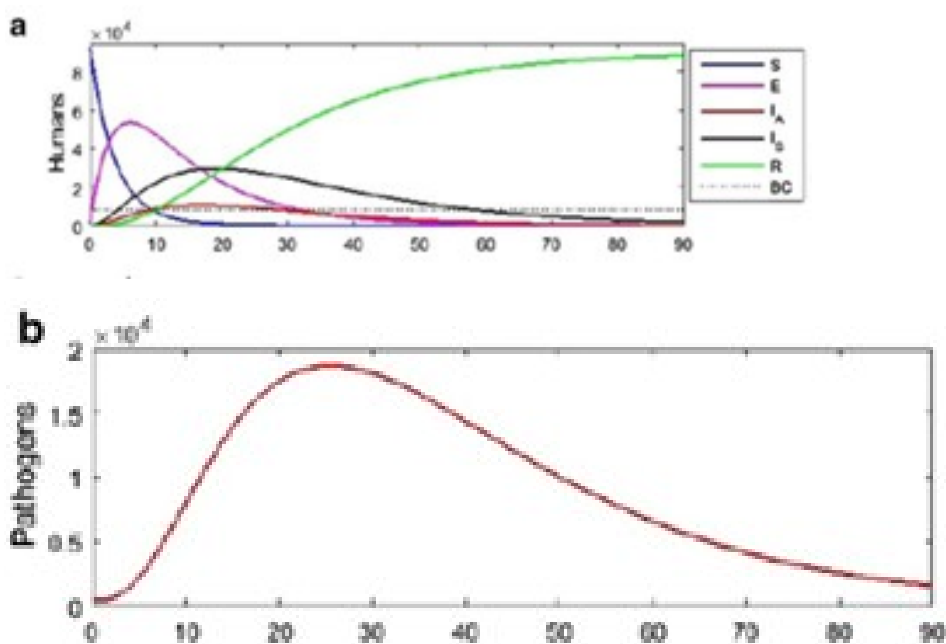
- **Eq. (10)** é a derivada da classe de suscetíveis em função do tempo: dado pela diferença entre a taxa de natalidade, acrescido do número de indivíduos da classe **E (exposto)** com resposta imunológica que voltaram a ser suscetíveis, pela soma das taxas de transmissão da classe **S** para **E** em contato com o vírus, sobre a taxa de variação do ambiente infeccioso pelo patógeno, acrescido da taxa de transmissão da classe **S** para **E** pelo contato com **IS** ou **IA** sobre a taxa de variação de indivíduos infecciosos, acrescido da taxa de mortalidade natural da classe **S**.
- **Eq. (11)** é a derivada da classe de Expostos em função do tempo: dado pela diferença entre, a soma da taxa de transmissão da classe **S** para **E** devido ao contato com o patógeno sobre a proporção do ambiente infeccioso com a taxa de transmissão da classe **S** para **E** devido ao contato com **IA** ou **IS** sobre a proporção de interação com indivíduo infeccioso, pela soma das taxas de progressão da classe **E** para **S** pela resposta do sistema imunológico, com

taxa de progressão da classe **E** para as classes **IA** ou **IS**, com a taxa de mortalidade natural da classe **E**.

- **Eq. (12)** é a derivada dos números de infectados assintomáticos em função do tempo: que é dada, pela diferença entre o produto do número da taxa de progressão da classe **E** para **IA**, com a taxa de proporção de pessoas infecciosas, pela soma do produto dos indivíduos assintomáticos com a soma das taxas de mortalidade natural, com a taxa de mortalidade por conta da corona vírus, acrescido da taxa de indivíduos assintomáticos recuperados.
- **Eq. (13)** é a derivada dos números de infectados sintomáticos em função do tempo: que é dado pela diferença entre o produto entre a proporção de indivíduos infecciosos sintomáticos com a taxa de progressão da classe **E** para classe **IS**, pela soma entre natalidade natural acrescido da mortalidade natural da classe **IS** com a taxa de recuperação da população da classe **IS**.
- **Eq. (14)** é a derivada dos números de recuperados em função do tempo: é dado pela diferença entre a soma das taxas de recuperação da população assintomática com a sintomática, pela taxa de mortalidade natural da classe **R**.
- **Eq. (15)** é a derivada da progressão do patógeno em função do tempo: é dado pela diferença entre a soma da taxa de propagação do vírus para o ambiente por indivíduos assintomáticos com a taxa de propagação do vírus para o ambiente por indivíduos sintomáticos, pela taxa de mortalidade natural do patógeno do vírus.

É possível compreender melhor o crescimento da taxa de patógenos no meio em relação à taxa de indivíduos por meio dos gráficos à seguir.

Fig. 11: gráfico referente às populações de humanos **a**, e patógenos **b** referente ao crescimento das populações.



fonte: [11]

No gráfico podemos analisar algumas informações: as classes dependem diretamente uma da outra, tomando como base os modelos matemáticos citados anteriormente, onde a classe **S** em fase inicial do estudo é sempre igual ao número total da população estudada. Além disso, para que haja progressão da doença deve existir, necessariamente, contato com o patógeno.

Neste modelo, considerar a influência do patógeno tanto no ambiente quanto no indivíduo, se faz importante para compreender as imigrações de uma classe para outra. Isto é, considera-se que já há um ponto de início de contato com o vírus, que nesse diagrama podemos pensar na covid-19, muito embora o estudo de que trata o gráfico da *figura 11* tenham aplicado na prevenção da propagação, limitando-se, assim, a definir um pico de contaminação demonstrativo de um colapso. Entretanto, tal estudo não definiu completamente as características de propagação, visto que algumas características da doença não foram totalmente descobertas [11].

Esse modelo teve um impacto relevante no estudo da contenção da propagação do vírus, conforme que pode ser visto em [11]. O estudo revelou que durante o pico de contaminação com o distanciamento total “lockdown” as taxas de óbitos diminuiriam, uma vez que a propagação do vírus estava controlada entre os indivíduos estudados. Assim, foi observado na [12], que o distanciamento e a utilização de máscaras auxiliariam no controle da disseminação da doença.

Esse modelo, entretanto, não contempla a classe de indivíduos que nascem imune à doença, tópico que será melhor discutido na próxima seção.

2.4 MODELO MSEIRS

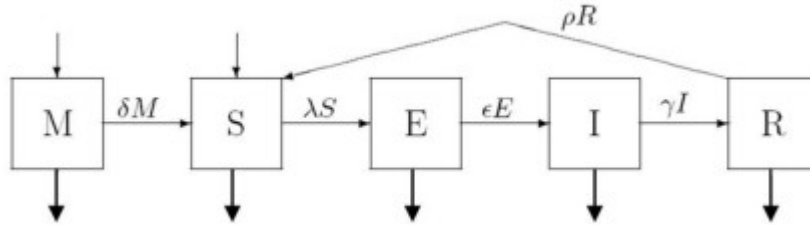
O modelo MSEIRS consiste basicamente na união dos modelos anteriores citados, no entanto, considera-se uma nova classe M (a classe dos recém nascidos em que as progenitoras lhes forneceram imunidade passiva, por já terem sido infectadas em algum momento anterior da sua vida). Sendo assim, supõe-se que os indivíduos que nascem nessa população possuem imunidade transmitida direto pela sua progenitora durante a gestação.

Exemplificando alguns aspectos sobre o modelo, na [8], para o MSEIRS temos o seguinte:

- **M** é a classe dos recém nascidos em que as progenitoras lhes forneceram imunidade passiva, por já terem sido infectadas em algum momento anterior da sua vida.
- **S** é a classe de todos os indivíduos susceptíveis de contrair a doença ou se tornam suscetíveis a novo contato.
- **E** é a classe dos indivíduos expostos, isto é, que já estão infectados, mas ainda não infecciosos, ou seja, não têm ainda a capacidade de transmitirem a doença; observemos que não se deve confundir período de latência com período de incubação, sendo este o intervalo de tempo que existe entre o instante em que ocorreu a infecção e o aparecimento de sintomas, período geralmente mais longo do que o período de latência.
- **I** é a classe dos indivíduos infecciosos, ou seja, daqueles que transmitem a doença a indivíduos susceptíveis, através de várias formas de contacto;
- **R** - Classe de indivíduos recuperados, ou seja, que após estarem infectados adquirem imunidade à doença, pode ser temporária ou permanente [8], podendo o MSEIRS ser aplicável a ambas as situações. No caso do covid-19, a experiência tem mostrado casos de reinfecção, indicando que pessoas que já tiveram a doença não adquiriram imunidade permanente.

A seguir, o diagrama de transferência do modelo MSEIRS pode ser visto.

Fig. (12). Diagrama de transferência do modelo MSEIRS. .



Fonte: [8]

Esse diagrama abrange uma especificidade, que é a nova classe M (imune). Sendo assim, podemos destacar as variações das mudanças de classes, que podem agora ser identificadas. Esse modelo é uma junção dos modelos vistos anteriormente, que surgem da necessidade de introduzir novas classes, abrangendo novas características (se o indivíduo adquire ou não ou imunidade, por exemplo) que se fazem importantes, pois elas que definem as possíveis comparações com características de novas doenças, a exemplo das causadas por vírus.

Assim, expressamos o modelo MSEIRS [7] pelo conjunto de equações acopladas abaixo.

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = \eta\beta N - (\mu + \tau)M & \text{eq. (16)} \\ \frac{dS}{dt} = A + \tau M + (1 - \eta)\beta N - \mu S - \zeta(S, I) + \delta R & \text{eq. (17)} \\ \frac{dE}{dt} = \zeta(S, I) - (\mu - \epsilon)E & \text{eq. (18)} \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\mu I + \alpha I) - \gamma I & \text{eq. (19)} \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu - \delta)R & \text{eq. (20)} \end{cases}$$

Assim podemos definir as variáveis das Eqs. 16-20 da seguinte forma:

- **Eq. (16)** é a derivada dos números de imunes (imunidade conferida através da progenitora) em função do tempo: que é dada pela diferença entre a taxa de nascimentos na classe **M** pela taxa de mortalidade natural da classe **M** acrescido da taxa de indivíduos que vão da classe **M** para classe **S**.
- **Eq. (17)** é a derivada do número de suscetíveis em função do tempo: que é dada pela diferença entre a soma das taxas migração para classe **S**, acrescido das taxas de imigração da classe **M** para **S**, das taxas da classe **R**

que passam para classe **S**, acrescido da taxa de natalidade dos indivíduos da classe **S**, pela soma do número de mortalidade natural da classe **S**, acrescido da taxa de imigração da classe **S** para classe **E**.

- **Eq. (18)** é a derivada do número de expostos em função do tempo: que é dada pela diferença entre o número de indivíduos que imigraram da classe **S** para classe **E**, pela taxa de mortalidade natural da classe **E** subtraído pelo número de indivíduos que imigram da classe **E** para **I**.
- **Eq. (19)** é a derivada dos números de indivíduos infectados em função do tempo: que é dada pela diferença entre a taxa de indivíduos imigrantes da classe **E** para **I**, pela soma da taxa de mortalidade natural dos indivíduos da classe **I** acrescido da mortalidade dos indivíduos da classe **I** pela doença, acrescido da taxa de indivíduos que imigraram da classe **I** para **R**.
- **Eq. (20)** é a derivada do número de indivíduos recuperados em função do tempo: que é dada pela diferença entre a taxa de indivíduos que imigraram da classe **I** para classe **R**, pela diferença das taxas de mortalidade natural dos indivíduos da classe **R** pela taxa de indivíduos que voltam para a classe **S**.

Essas equações são uma variação das classes anteriores, já que as novas classes são acrescentadas ao estudo. Assim, destaca-se a classe **M** (imunes), essa classe pressupõe que há indivíduos que são conferidos imunidade passiva, já que não tiveram contato com o vírus diretamente. Portanto, ressalta-se que, esse modelo não confere imunidade permanente, isto é, os indivíduos da classe **R** tornam -se suscetíveis a doença após um certo período de tempo.

As mudanças de classes são recorrentes em todos os modelos já estudados, logo, isso permite alocar/definir quais modelos se comportam com a realidade do comportamento de cada doença. As características de cada modelo epidemiológico determinam diretamente ou parcialmente a implicação que uma classe tem sobre a outra, assim, podemos determinar variações que se aproximem da realidade que se pretende estudar. Os detalhes sobre o sistema de equações diferenciais acopladas representativas desse modelo podem ser encontrados em [8].

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O estudo de alguns modelos estatísticos utilizados na obtenção de dados e projeções sobre doenças nos proporciona relacionar as equações e parâmetros matemáticos com as tomadas de decisão dentro das esferas municipais, estaduais e nacional, em particular, para controle da propagação. Assim os dados fornecidos pelas mídias acerca das projeções para a propagação de doenças e prevenção das mesmas, a exemplo do covid-19, podem ser compreendidas de maneira mais crítica.

Os modelos matemáticos abordados trazem consigo várias informações que partem dos princípios e características de determinadas doenças, expressas via formulações matemáticas apropriadas. Cada modelo matemático aborda hipóteses que podem ser comparadas com a realidade, ou fugir delas, ocasião em que determinado modelo pode se mostrar inapropriado. Um modelo aplicável à propagação de determinada doença é, muitas das vezes, complementar àquele associado à propagação de uma outra, com a introdução de novos parâmetros matemáticos, em cada caso, representativos da realidade em estudo.

Esses modelos tem um comportamento bastante amplo, porém, poucos deles se assemelham ou contemplam todas as características da covid-19, ainda que, em cada caso e dentro de determinados limites, permita-nos compreender determinado aspecto da doença. A covid-19 requer, entretanto, a inserção de novos parâmetros e termos nas equações, ditados pelas novas descobertas sobre as características da doença. Mas destacamos que cada modelo matemático abordado e suas características se fazem importantes, pois tratam-se de pontos de partida para novos estudos e comparações acerca do que já foi estudado, tendo em vista que, a maioria dos vírus que surgem são em grande parte uma mutação genética de vírus já existentes [13], e o sucesso de determinados modelos já compreendidos pode servir de ponto inicial.

Alguns desses modelos obtiveram sucesso em estudos de diversas doenças, como: a) *chagas aguda*, onde o comportamento dessa doença pode ser compreendido pelo modelo matemático **SIS**, onde ao indivíduo não é conferida a imunidade permanente, o que pode ser abordado de forma minuciosa na [8]; b)

influenza A (H1N1), onde o seu comportamento pode ser observado no modelo epidemiológico **SIR**, em que é considerada a imunidade permanente do indivíduo, o que pode ser observado detalhadamente na [8,10]; e, por fim, c) a *Dengue*, onde o comportamento dessa doença pode ser observado no modelo **SEIR**, que pode ser compreendida em detalhes na [12].

REFERÊNCIAS

- [1] RODRIGUES, Letícia. Conheça as 5 maiores pandemias da história. **Revista Galileu**. 2020 Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Saude/noticia/2020/03/conheca-5-maiores-pandemias-da-historia.html>>. Acesso em: 02 de janeiro de 2022
- [2] FLOQUET, S.; LEITE, T. N; CÂMARA, R. C. P.; MELO, A. M. V. D. L.; CARVALHO, P. G. S. S; PEREIRA, P. J.; AMARAL, T. M. ; NETO, J. P. S.A MATEMÁTICA NO COMBATE A EPIDEMIA: ESTUDO SOBRE A COVID-19 NA REGIÃO DO VALE DO SÃO FRANCISCO. **Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco**, [S. l.], v. 11, n. 24, p. 100–146, 2021. Disponível em: <https://www.periodicos.univasf.edu.br/index.php/revasf/article/view/1561>. Acesso em: 29 set. 2022.
- [3] Como surgiu o novo coronavírus? Conheça as teorias mais aceitas sobre sua origem. Instituto Butantan. Disponível em: <[Como surgiu o novo coronavírus? Conheça as teorias mais aceitas sobre sua origem - Instituto Butantan](#)>. Acesso em: 02 de janeiro de 2022.
- [4] GAMA NETO, R. B. Impactos da covid-19 sobre a economia mundial. Boletim de Conjuntura (**BOCA**), Boa Vista, v. 2, n. 5, p. 113–127, 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3786698. Disponível em: <<https://revista.ioles.com.br/boca/index.php/revista/article/view/134>>. Acesso em: 5 maio 2022.
- [5] CAROLINA M. R. Gulo: Economia na pandemia covid-19: algumas considerações. **Rosa dos Ventos**, vol. 12, núm. Esp.3, pp. 1-8, 2020.Universidade de Caxias do Sul.
- [6] FRANCIELLE S. P.; Barros, L.C. **Algumas abordagens para o modelo epidemiológico SIS fuzzy: doença de Chagas aguda**. Campinas: DMA, IMECC–UNICAMP, 13083-859, 2014.
- [7] SANTOS, L. M; SOUZA, F. S. **Uma Análise do Modelo SIR Aplicado ao Estudo da Influenza A (H1N1)**. Teófilo Otoni: Departamento de Ciências Exatas, FACSAB, UFVJM. 2012.
- [8] MESQUITA, Isabel O. **Modelos epidemiológicos SEIR**. Porto: Departamento de Matemática Pura/Universidade do Porto, Porto. 2008.

- [9] RIGONATTO, Marcelo: Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem. **Brasil escola**. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/modelagem-Matematica-no-processo-ensino-aprendizagem.htm>>. Acesso em: 03 de maio de 2022.
- [10] SOUZA, D. R. **Transições de fase em modelos estocásticos para descrever epidemias**. São Paulo: Instituto de Física, 2012.
- [11] MWALILI, S.; KIMATHI, M. ; OJIAMBO, V. et al. SEIR model for COVID-19 dynamics incorporating the environment and social distancing. **BMC Res Notes** **13**, 352 (2020). Disponível em: <https://doi.org/10.1186/s13104-020-05192-1>. Acesso em: 02 de junho de 2022.
- [12] SOUSA, N. G.; CARDOSO, A. de O.; CARDOSO, R. F.; UTSUMI, A. G. Analysis of the transmission dynamics of COVID-19 in Minas Gerais: Modeling and Simulation. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 9, n. 8, p. 2-5, e812986611, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i8.6611. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/6611>. Acesso em: 30 jun. 2022.
- [13] NOGUEIRA, T. ; PONCE, R. **O vírus da gripe**: desafios do sistema imunitário e da medicina à luz da evolução. 2019. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/6611>>. Acesso em: 26 de junho de 2022.
- [14] PAINEL EPIDEMIOLOGICO DA COVID-19 EM SÃO RAIMUNDO NONATO. Portal da cidade São Raimundo Nonato, 2022. Disponível em: <https://saoraimundononato.pi.gov.br/portal/painel-covid-19/>>. Acesso em: 03 de julho de 2022.
- [15] COSTA, É. G. C. M.; MEIRA, J. L.; DIAS, J.R. L. N. Aplicação do modelo sir à covid-19: distanciamento social e (des)evolução da pandemia no Tocantins. **Revista Observatório**, Palmas, v. 6, n. 3 (Especial 1), p. 1-27, maio 2020.

ANEXO A – (Introdução a equações diferenciais)

É possível compreender um pouco que a aplicação mais importante do cálculo sejam as equações diferenciais. Quando os físicos ou cientistas sociais usam o cálculo em geral, o fazem para analisar uma equação diferencial surgida no processo de modelagem de algum fenómeno que eles estão estudando.

Definições e terminologia

Definição 1. As equações diferenciais são aquelas que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Exemplo 1.

1. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y$ onde: x e y são variáveis dependentes e t é variável independente.
2. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$ onde: u é a variável dependente e x e y são variáveis independentes

Definição 2. A ordem da derivada mais elevada que aparece na equação diferencial determina a ordem da equação.

Definição 3. O grau de uma equação diferencial que pode exprimir-se como um polinómio, na função incógnita e suas derivadas, é o maior expoente da derivada de mais alta ordem que aparece na equação.

Classificação das Equações Diferenciais —

As equações diferenciais são classificadas quanto ao **tipo**, **ordem** e **linearidade**.

- **Quanto ao tipo** as equações diferenciais são classificadas em: ordinárias e parciais.
- Equações diferenciais ordinárias (EDO) são aquelas que contém uma ou mais derivadas de variáveis dependentes em relação a uma variável independente.
- As equações diferenciais parciais (EDP) são aquelas que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

- **Quanto a ordem** uma equação diferencial pode ser de 1ª, 2ª, ... enésima ordem dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação ordinária de ordem n pode ser escrita na forma:

$$F(t, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

- **Quanto a linearidade** de uma equação diferencial ela pode ser linear e não linear. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear. Por exemplo uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação que pode ser escrita como:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser escritas nessa forma são não lineares.

Exemplo 2.

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0$ (EDO da 2ª ordem, 1º grau linear)
2. $(y''')^2 - y'' + y^2 = 0$ (EDO da 3ª ordem, 2º grau não linear)
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial t}$ (EDP da 2ª ordem, 1º grau linear)
4. $x^2 y'' + xy' + y = 0$ (EDO da 2ª ordem, 1º grau linear)
5. $\frac{\partial^4 x}{\partial t^4} = kx \left(\frac{\partial^2 m}{\partial n^2} \right)^2$ (EDP da 4ª ordem, 1º grau não linear)

6. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{3}{2}} + y' = \frac{1}{x}$ (EDO da 1ª ordem, não linear). **OBS:** Em virtude do expoente $\frac{3}{2}$, a equação diferencial não pode exprimir-se como um polinómio na 1ª derivada e por isso, não se pode falar em grau da equação diferencial.

7. $\sin y' + y = 0$ (EDO da 1ª ordem, não linear).

Solução de uma equação diferencial

Definição 4. Toda função f definida no intervalo I , que, quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade, é chamada **solução** para a equação no intervalo.

Queremos dizer que uma solução de uma equação diferencial ordinária de enésima ordem

$$F(t, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação; isto é,

$$F(x, f(x), f'(x), \dots f^{(n)}(x)) = 0$$

para todo x no intervalo I

Exemplo 3. Verifique que a função indicada é uma solução da equação diferencial dada num intervalo $(0, \infty)$

$$y'' - 2y' + y = 0; y = xe^x$$

Solução: a partir das derivadas $y' = xe^x + e^x$ e $y'' = xe^x + 2e^x$ teremos: $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$

Observe que a função constante $y=0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo x real. Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo I é em geral referida como **solução trivial**.

Definição 5.

Solução geral duma equação diferencial é toda função que verifica, identicamente, a equação diferencial e vem expressa em termos de n constantes arbitrárias. Se a equação é de 1ª ordem, aparece uma constante, se de 2ª ordem, duas constantes, etc. Geometricamente, a solução geral ou integral geral representa uma família de curvas (denominadas curvas integrais).

Definição 6.

Solução particular é toda solução da equação diferencial que se obtém da solução geral, atribuindo-se valores as constantes. Geometricamente, representa uma das curvas da família de curvas integrais, correspondentes a solução geral.

Exemplo 4. A solução geral da equação diferencial $y'' + y' = 0$ é

$$y = C_1 + C_2 e^{-x}$$

, visto que esta é uma função que depende de duas constantes arbitrárias e verifica identicamente a equação diferencial, pois $y' = -C_2 e^{-x}$, $y'' = C_2 e^{-x}$ e $C_2 e^{-x} - C_2 e^{-x} = 0$

Se fizermos $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$ e substituirmos na solução geral, obtemos a solução particular $y = 1 - e^{-x}$.

Exemplo 5. Dada a equação diferencial $y = \frac{2xy'}{1 + (y')^2}$, a solução geral é

$$y^2 = 4C(x - C)$$

, pois esta é uma função que verifica identicamente a equação diferencial e vem expressa em termos de uma constante arbitrária.

Uma solução particular é a função $y^2 = 4(x - 1)$, obtida da solução geral, fazendo $C=1$ e geometricamente, corresponde a curva integral (parábola) que passa no ponto (1,0).

A função $y = x$ também verifica a equação identicamente, não depende de constantes arbitrárias, mas não pode ser obtida da solução geral por particularização da constante. É um outro tipo de solução, designada por **solução singular**, e que representa geometricamente, a envolvente da família de curvas integrais correspondentes a solução geral.

As equações diferenciais de 1ª ordem e 1º grau nunca tem soluções singulares.

Definição 7. Uma solução em que a variável dependente é expressa em termos de variáveis e constantes independentes diz-se que é uma **solução explícita**.

Definição 8. Quando uma solução pode apenas ser escrita na forma $G(x, y) = 0$ trata-se de uma **solução implícita**.

Exemplo 6. Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

segue por derivação implícita, que

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} - \frac{d(4)}{dx} = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define duas funções diferenciais explícitas: $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $(-2; 2)$.

Problemas de valor inicial

Um problema de valor inicial (**PVI**) consiste em: Resolver $F(t, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$

Sujeito a $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

onde $x_0 \in I$ e $y_0, y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ são condições iniciais.

Se são conhecidas condições adicionais, podemos obter soluções particulares para a equação diferencial e se não são conhecidas condições adicionais poderemos obter a solução geral.

Exemplo 7. Mostre que $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ é uma família de soluções de

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Ache uma solução particular que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Solução: Para achar as constantes C_1 e C_2 calculamos y' para obter

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}.$$

Ao substituir as condições iniciais obtemos o sistema de equações $C_1 + C_2 = 1$

$$C_1 - 2C_2 = 2$$

Ao se resolver esta equação obtém-se $C_1 = \frac{4}{3}$ e $C_2 = -\frac{1}{3}$. Portanto a solução do PVI

$$\text{é } y = \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

1.2.3. Existência e Unicidade de solução de uma EDO

Três perguntas são importantes sobre soluções para uma EDO.

- Dada uma equação diferencial, será que ela tem solução?
- Se tiver solução, será que esta solução é única?
- Existe uma solução que satisfaz a alguma condição especial? Para responder a estas perguntas, existe o teorema de existência e Unicidade de solução que nos garante resposta para algumas das questões desde que a equação tenha algumas características. As condições suficientes para a existência de uma solução única de uma equação diferencial de primeira ordem são definidas pelo teorema de Picard:

Teorema 1 Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

$$y(x_0) = y_0$$

se a função f e a derivada parcial de f em função de y são contínuas numa vizinhança do ponto (x_0, y_0) , existe uma solução única $y = g(x)$ em certa vizinhança do ponto (x_0, y_0) que verifica a condição inicial $g(x_0) = y_0$.

O intervalo onde existe a solução única pode ser maior ou menor que o intervalo onde a função f e a sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas (o teorema não permite determinar o tamanho do intervalo).

OBS: As condições do teorema de Picard são condições suficiente, mas não necessárias para a existência de solução única. Quando f ou sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ não sejam contínuas, o teorema não nos permite concluir nada: Provavelmente existe solução única a pesar das duas condições não se verificarem.

Exemplo 8. O teorema 1 garante que existe um intervalo contendo $x = 0$ no qual $y = 3e^x$ é a única solução para o problema de valor inicial:

$$y' = y, y(0) = 3.$$

isso segue-se do fato de que $f(x, y) = y$ e $\partial f / \partial y = 1$ são continuas em todo plano xy . Pode ser mostrado ainda que esse intervalo seja $(-\infty, \infty)$.

ANEXO B - (Decreto Presidencial sobre o estado de calamidade saúde pública)

Ofício nº 98/2020/SG/PR Em atenção ao disposto no art. 65 da Lei Complementar nº 101, de 4 de maio de 2000, denominada de Lei de Responsabilidade Fiscal, solicito a Vossas Excelências o reconhecimento de estado de calamidade pública com efeitos até de 31 de dezembro de 2020, em decorrência da pandemia da COVID-19 declarada pela Organização Mundial da Saúde, com as consequentes dispensas do atingimento dos resultados fiscais previstos no art. 2º da Lei nº 13.898, de 11 de novembro de 2019, e da limitação de empenho de que trata o art. 9º da Lei de Responsabilidade Fiscal.

< https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra?codteor=1867428 >
acessado em 15 de fevereiro de 2022.