



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

RENILTON DE BRITO COÊLHO

**CÁLCULO DE VOLUME POR FATIAMENTO COM O USO DE MATERIAIS
DIDÁTICOS DE MANIPULAÇÃO NO LABORATÓRIO DE ENSINO DE
MATEMÁTICA**

**SÃO RAIMUNDO NONATO - PI
2023**

RENILTON DE BRITO COELHO

**CÁLCULO DE VOLUME POR FATIAMENTO COM O USO DE MATERIAIS
DIDÁTICOS DE MANIPULAÇÃO NO LABORATÓRIO DE ENSINO DE
MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico)
apresentado como exigência parcial para obtenção do
diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí, Campus São Raimundo Nonato.

Orientadora: Profa. Ma. Renata Batista e Silva Rabelo.
Coorientador: Prof. Esp. Valdeci Nunes Costa.

SÃO RAIMUNDO NONATO – PI

2023

CÁLCULO DE VOLUME POR FATIAMENTO COM O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS DE MANIPULAÇÃO NO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Renilton de Brito Coêlho ¹
Renata Batista e Silva Rabelo ²

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo utilizar o cálculo de volume por fatiamento para calcular o volume de alguns materiais didáticos de manipulação que se encontram no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, Campus São Raimundo Nonato, e comparar o volume obtido com os volumes encontrados pela fórmula geométrica e pela inserção de líquido no interior destes sólidos. A metodologia utilizada nesta pesquisa caracteriza-se como um estudo de caso, de abordagem qualitativa e natureza exploratória, na qual utilizamos, como instrumentos de pesquisa, sólidos geométricos, livros, dissertações e artigos científicos dentre outros. A fundamentação baseia-se nos estudos de vários autores, dentre eles: Eves (2004), Stewart (2013), Guidorizzi (2013), Dolce e Pompeo (2013). Inicialmente, abordamos algumas considerações sobre o Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis e um breve histórico do Cálculo Diferencial e Integral, destacando algumas personalidades matemáticas que foram de grande relevância para o desenvolvimento do Cálculo. Em seguida, abordamos o método de volume por fatiamento, as fórmulas geométricas para calcular o volume e como obter o volume pela inserção de líquido no interior destes sólidos. Por fim, aferimos as medidas dos sólidos e calculamos os volumes pelos três métodos e realizamos as comparações. O que nos possibilitou observarmos que os valores obtidos são muito próximos, de modo que podemos utilizar quaisquer dos métodos e que, dentro das limitações dos instrumentos de medição, é possível chegar a valores cada vez mais refinados.

Palavras-chave: matérias didáticos; sólidos geométricos; volume; método de fatiamento; comparação.

ABSTRACT

The main objective of this work is to use the calculation of volume by slicing to calculate the volume of Manipulation Didactic Materials, among them, some geometric solids that are found in the Mathematics Teaching Laboratory and to compare the volume obtained with the volumes found by the formula geometry and by the insertion of liquid inside these solids. The methodology used in this research is characterized as a case study, with a qualitative approach and exploratory nature, in which we use as research instruments, geometric solids, books, dissertations and scientific articles, among others. The rationale is based on the studies of several authors, including: Eves (2004), Stewart (2013), Guidorizzi (2013), Dolce and Pompeo

1 Licenciatura em Matemática, IFPI – Campus São Raimundo Nonato. E-mail: rc212327@gmail.com

2 Mestre em Matemática (UFPI). Graduada em Bacharelado em Matemática (UFPI) e em Licenciatura em Matemática (USFC). Docente do Instituto Federal do Piauí, Campus São Raimundo Nonato (IFPI/CASRN). E-mail: renata.rabelo@ifpi.edu.br

(2013). Initially, we address some considerations about the Mathematics Teaching Laboratory and Manipulable Didactic Materials and a brief history of Differential and Integral Calculus, highlighting some mathematical personalities that were of great relevance for the development of Calculus. Then, we discuss the volume method by slicing, the geometric formulas to calculate the volume, and how to obtain the volume by inserting liquid inside these solids. Finally, we checked the measurements of the solids and calculated the volumes by the three methods and performed the comparisons. This allowed us to observe that the values obtained are very close, so that we can use any of the methods and that, within the limitations of the measuring instruments, it is possible to reach increasingly refined values.

Keywords: teaching materials; geometric solids; volume; slicing method; comparison.

Data de aprovação: 03/03/2023.

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral, conhecido também como Cálculo Infinitesimal, ou simplesmente Cálculo, surgiu entre os séculos XVII e XVIII com os trabalhos de Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Leibniz (1646–1716), principais personalidades científicas que se destacaram entre os vários matemáticos que colaboraram para a formalização do Cálculo na época. Embora, ambos tenham partido do estudo da integração do cálculo infinitesimal, Newton desenvolveu o conceito de derivada, enquanto Leibniz desenvolveu a integral. Mesmo desenvolvendo seus trabalhos de maneiras e em anos diferentes, ambos chegaram ao mesmo resultado, que foi a fórmula para usar o Cálculo de maneira funcional. Segundo Eves (2004, p. 417):

A ideia de integração teve origem em processos de somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

De acordo com Eves, o desenvolvimento dos conceitos de Cálculo ocorreu na ordem inversa daquela que os livros didáticos abordam e que as disciplinas de cálculo apresentam.

Apesar de Newton e Leibniz serem os maiores percursos do Cálculo, existem outros matemáticos que deram suas contribuições para que se chegasse no Cálculo Diferencial e Integral. Antes deles, desde a antiguidade até o século XVII, podemos mencionar grandes nomes, como Eudoxo, Arquimedes, Kepler e Fermat, que haviam desenvolvido trabalhos relevantes que abordavam a ideia de infinito, base para os trabalhos de Newton e Leibniz, e, conseqüentemente, do Cálculo Diferencial e Integral. Depois deles, diversas outras personalidades matemáticas trabalharam para lapidar os conceitos, como os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass, Riemann e Agnesi.

O Cálculo Diferencial e Integral, atualmente, é considerado uma das ferramentas da matemática com maior aplicabilidade nas mais diversas áreas do conhecimento. O principal fundamento do Cálculo, de modo geral, é o estudo sobre os conceitos e propriedades dos limites, derivadas e integrais de funções de uma ou de várias variáveis.

A grande quantidade de aplicações do cálculo diferencial e integral nas mais diversas áreas do conhecimento nos mostram a importância de se trabalhar com este tema. E, diante de

um tema que possibilita tantas aplicações, optamos por utilizar a Integral Definida para o cálculo de volume de sólidos geométricos, mais especificamente, o método de volume por fatiamento, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Com isso, o objetivo principal deste trabalho é utilizar o cálculo de volume por fatiamento para calcular o volume de alguns materiais didáticos de manipulação que se encontram no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, Campus São Raimundo Nonato, e comparar o volume obtido com os volumes encontrados pela fórmula geométrica e pela inserção de líquido no interior destes sólidos.

Durante o curso de Licenciatura em Matemática do IFPI - Campus de São Raimundo Nonato, foram ofertadas as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II. Foi nestas disciplinas que se iniciou o interesse em desenvolver um estudo sobre o tema, pois, no transcorrer destas, foram apresentados conteúdos que traziam várias aplicações do Cálculo Diferencial e Integral na matemática e em outras áreas da Ciência. E, ainda, pela grande admiração por geometria, principalmente, geometria espacial, que descreve o formato dos sólidos geométricos bem como as fórmulas que determinam seus volumes.

Diante de tais situações, surgiu o seguinte questionamento: Será que o volume de um sólido geométrico obtido através da aplicação de integral definida, ou seja, pelo cálculo de volume por fatiamento, é igual ao volume obtido pela fórmula geométrica e pela inserção de líquido no interior destes sólidos geométricos?

Para o desenvolvimento deste trabalho, tivemos como objetivos específicos: discutir a concepção do LEM como ambiente para o ensino de matemática; debater sobre materiais didáticos (MDs); explicar o método de volume por fatiamento; calcular o volume dos MDs escolhidos (que se encontram no LEM) utilizando o método de volume por fatiamento; comparar o volume obtido com o volume encontrado pela fórmula geométrica e pela inserção de líquido no interior destes sólidos.

2 LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA (LEM), MATERIAIS DIDÁTICOS (MDs) E CÁLCULOS DE VOLUMES

O laboratório de ensino de matemática é de suma importância para o ensino de matemática, pois nele encontramos diversas ferramentas didáticas que auxiliam na aprendizagem da matemática. Dentre estas ferramentas, mencionamos os sólidos geométricos que são materiais concretos manipuláveis estáticos que nos possibilita a verificação de volumes.

2.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA (LEM) E MATERIAIS DIDÁTICOS (MDs)

Devido esta pesquisa ser realizada em um Laboratório de Ensino de Matemática e com Materiais Didáticos Manipuláveis, apresentamos a seguir algumas considerações a respeito.

2.1.1 Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

De acordo com Medeiros e Lacerda (2021), “o Laboratório de Ensino de Matemática se caracteriza por ser um espaço físico que dispõe de várias ferramentas para a aprendizagem matemática, desde materiais concretos, como sólidos geométricos, teodolito, ábacos, blocos lógicos, geoplanos, algeplans, etc.; jogos matemáticos, como dominós matemáticos, torre de

Hanói, tangram, etc.; além de vários outros materiais, como livros de divulgação, didáticos e paradidáticos e filmes.”

Sabe-se que existem diferentes concepções de Laboratório de Ensino de Matemática e, a seguir, abordaremos uma destas concepções.

2.1.2 O Laboratório como ambiente para ensino de matemática

Conforme Rodrigues (2011, p. 68), “esse tipo de laboratório tem como meta central a realização de atividades de ensino com ênfase na vivência de processos que auxiliam a construção do conhecimento matemático”.

Neste sentido, Lorenzato (2012, p. 7) define o Laboratório de Ensino de Matemática como “uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender”.

A partir dessas descrições, percebe-se que o LEM possibilita o ensino de matemática, onde o mesmo acontece devido encontrarmos situações motivadoras em relação a Matemática. Pois o mesmo pode ser entendido como um espaço ambientado, com recursos adaptados a uma aprendizagem efetiva e que está a disposição do professor e da escola.

2.1.3 Material Didático (MD)

É qualquer instrumento utilizado no processo de ensino-aprendizagem. Como, por exemplo: uma folha de papel, um livro, um giz, um computador, um projetor, um filme, um jogo, um sólido geométrico, entre outros. Como afirma Lorenzato (2012, p. 18), “material didático (MD) é qualquer instrumento útil no processo de ensino-aprendizagem”.

Conforme Fonseca Filho (2015, p. 7), o “Material Didático cria uma referência dentro do conteúdo estudado e assim seu uso deve permitir ou facilitar a recordação, pois sua utilização propicia significado ao conteúdo tratado, dando a oportunidade de compreendê-lo de maneira significativa”.

A escolha por utilizar MDs neste trabalho deu-se, principalmente, pelas suas funções: motivadora, auxiliadora, fixadora e verificadora. Pois o uso destes materiais aumenta e/ou desperta a curiosidade de entendermos como a matemática está inserida naquele objeto, auxilia nas explicações, media a passagem do concreto ao abstrato e busca fixar o que está sendo proposto no momento, podemos até encontrar respostas e justificativas para alguns porquês matemáticos ou origem de alguns procedimentos (fórmulas, algoritmos).

Existem diversos tipos de MD, no entanto, aqui abordaremos somente sobre o MD manipulável concreto.

2.1.4 Material Didático Manipulável

Fonseca Filho (2015, p. 9-10) destaca que “existem diversos Materiais Didáticos: alguns são estáticos em suas formas, é o caso dos sólidos geométricos em acrílico ou madeira, por exemplo, que, por não possibilitarem modificações, permitem apenas a observação; outros já possibilitam uma interação maior do discente, por exemplo, jogos de tabuleiros, cubos mágicos e ábaco”.

Existem também, os Materiais Didáticos dinâmicos que, de acordo com Lorenzato (2012, p. 19), são “aqueles que permitem transformações por continuidade, facilitando ao aluno

a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem, por exemplo, o geoplano”.

Diante do exposto, percebe-se que o uso de Materiais Didáticos de Manipulação permite uma maior interação entre os envolvidos, contribui com descobertas e redescobertas, proporciona a estes indivíduos uma motivação para compreender o que está sendo exposto e facilita no processo de ensino-aprendizagem.

Na presente pesquisa foram utilizados Materiais Didáticos Manipuláveis estáticos: sólidos geométricos construídos em acrílico com orifício para inserção de líquido, utilizados para medições, observações e comparações entre volumes.

2.2 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Como já dissemos, o Cálculo Diferencial e Integral é de extrema importância, visto que este integra-se harmoniosamente com muitas das ciências conhecidas.

Conforme Brito (2013, p. 1 - 2),

Em Física, o cálculo é aplicado no estudo do movimento, pressão, densidade e outras aplicações. Pode ser usado em cálculo numérico, para encontrar a reta que melhor representa um conjunto de pontos em um domínio. Na esfera da medicina, o cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação, e até mesmo determinar o tamanho máximo de moléculas que são capazes de atravessar a membrana plasmática em uma determinada situação, normal ou induzida, em células. Na geometria analítica, no estudo dos gráficos de funções, o cálculo é usado para encontrar pontos máximos e mínimos, a inclinação, concavidade e pontos de inflexão. Na economia, o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal. Ele também ajuda a encontrar soluções aproximadas de equações, utilizando métodos como o método de Newton, iteração de ponto fixo e aproximação linear.

Diante do exposto por Brito (2013) podemos encontrar aplicações do cálculo diferencial e integral em algumas áreas das Ciências, como por exemplo em Física, Matemática e Medicina. Mas, suas aplicabilidades vão muito além destas por ele mencionadas. Como por exemplo, Astronomia, Economia, entre outros.

2.2.1 Algumas constatações sobre o cálculo diferencial e integral

Através dos estudos realizados durante esta pesquisa, podemos constatar que, embora, temos hoje o cálculo diferencial e integral, digamos formalizado com todo esse rigor matemático sustentado na base da Análise, foram vários os estudos realizados sobre o assunto. Desde suas primeiras evidências, ainda na antiguidade na Grécia Antiga até os dias atuais transcorreram mais de 3800 anos, ou melhor, pouco mais que 38 séculos, onde houve a contribuição de vários matemáticos para tal formalização do cálculo. E mesmo assim não podemos afirmar que já se sabe tudo sobre ele, e tão pouco, sobre o número exato de áreas de suas aplicabilidades. Pois, o cálculo segue em constante desenvolvimento e, de quando em quando, são feitos novos aprimoramentos e novas aplicabilidades são descobertas. O que torna o cálculo diferencial e integral na ferramenta matemática mais poderosa, com aplicabilidades nas mais diversas áreas das Ciências. Podemos encontrar suas aplicações na Matemática, na Física, na Astronomia, na Engenharia, na Biologia, na Química, na Medicina, na Economia, e até mesmos em algumas Ciências Sociais, entre tantos outros.

2.2.2 Breve histórico do Cálculo

A construção dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral se deu graças às várias contribuições de diversos matemáticos em diferentes períodos históricos. Cada matemático, ao seu tempo, desenvolveu novos métodos e aperfeiçoou as ideias para o estudo e a aplicação do Cálculo em diferentes áreas do conhecimento. (FULINI, 2017, p. 10).

De acordo com Fulini (2017), a construção do cálculo não se deu somente pelos estudos de Newton e Leibniz, pois embora sejam seus maiores precursores, tivemos também a contribuição de várias outras personalidades matemáticas para a formalização dessa ferramenta matemática tão poderosa que é o cálculo diferencial e integral.

Neste breve histórico sobre o Cálculo, iniciaremos com as contribuições de alguns matemáticos da Grécia Antiga para seu desenvolvimento. Em seguida, abordaremos um pouco sobre as contribuições de Newton e Leibniz. E por fim, as contribuições de outros matemáticos que após os trabalhos dos precursores do cálculo, trabalharam em cima desses conceitos de uma maneira mais rigorosa aperfeiçoando ainda mais essa ferramenta matemática.

Antes de Newton e Leibniz, ainda na antiguidade, alguns matemáticos já haviam realizado estudos sobre a ideia de infinito, como: o método de exaustão de Eudoxo (307 a.c.); o método de equilíbrio de Arquimedes (287 – 212 a.c.); dentre outros. Trabalhos esses, que serviram de base para que Newton e Leibniz formalizassem seus trabalhos.

Conforme Eves (2004), o método de exaustão consiste basicamente na determinação do comprimento de arcos, áreas e volumes de figuras irregulares. Por exemplo, para determinar a área de uma figura que tem formato circular, basta que inscreva polígonos regulares em seu interior formando sequências infinitas de polígonos regulares inscritos.

Dentre os vários estudos feitos por Arquimedes em física, astronomia, engenharia e matemática, ele desenvolveu o método de equilíbrio que é utilizado para determinar área de regiões limitadas pelos mais diversos tipos de curvas; por exemplo, as espirais.

Para determinar a área ou volume desses tipos de formas, precisamos fazer os seguintes procedimentos:

[...] corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (EVES, 2004, p. 424).

Outro matemático que foi de suma importância para o desenvolvimento do cálculo foi Cavalieri (1598 – 1647), contribuindo com uma de suas obras, a mais importante, o tratado *Geometria Indivisibilibus* em que ele apresenta o método dos indivisíveis. Segundo Eves (2004) esse método é semelhante ao método de equilíbrio de Arquimedes para o cálculo de áreas e volumes que, posteriormente, viria a contribuir para a descoberta da integração.

Quando John Wallis (1616 – 1703) substituiu o modelo geométrico de Cavalieri pela aritmética, contribuiu significativamente para a construção do cálculo, pois vários matemáticos despertaram o interesse pelo o estudo das séries como um meio de integração.

Foi a partir do trabalho de Wallis, intitulado *Arithimética Infinitorun*, que Newton (1643 - 1727) dando continuidade a estas pesquisas conseguiu um dos seus primeiros sucessos, que foi a resolução da quadratura do círculo na forma de uma série infinita (EVES, 2004). Posteriormente, Newton descobriu o método dos fluxos, conhecido hoje como cálculo diferencial.

Conforme Eves (2004), para criar o método dos fluxos, Newton considerou que uma curva era gerada a partir de um ponto. Para tal suposição, passou a chamar de variáveis as

coordenadas desse ponto. Nomeou a variável de fluente e a taxa de variação de fluxo. Fazendo fluentes e fluxos se relacionarem obteve o que nos dias atuais conhecemos por diferenciação.

Leibniz (1646 – 1716) ao estudar o cálculo infinitesimal de uma maneira diferente de Newton, realizando cálculos de áreas de figuras com aproximações por retângulos, obteve o cálculo integral. Enquanto Newton, com o estudo do cálculo infinitesimal chegou no cálculo diferencial, que hoje sabemos que são operações inversas uma da outra.

Segundo Eves (2004), Leibniz elaborou seus trabalhos sobre o cálculo por volta dos anos 1673 e 1676, neste, ele aborda sobre o teorema fundamental do cálculo e apresenta uma notação para as fórmulas elementares de diferenciação e também apresenta o símbolo $\int$ para a integral, que é derivado da palavra suma, que significa soma.

Após a formalização do cálculo por Newton e Leibniz, em anos posteriores, surgiram outros matemáticos que deram suas contribuições para que o cálculo chegasse no rigor matemático em que é apresentado atualmente.

No decorrer do tempo foram surgindo outras personalidades matemáticas que, com o que havia sido feito por Newton e Leibniz até então em mãos, trabalharam de maneira rigorosa aperfeiçoando ainda mais essa ferramenta matemática que, nos dias atuais, têm suas aplicações nas mais diversas áreas das Ciências. Dentre estas personalidades, podemos mencionar os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass, Riemann e Agnesi.

De acordo com Eves (2004), os irmãos Bernoulli, Jakob (1654 - 1705) e Johann (1667 – 1748), ao lerem alguns artigos publicados na *Acta eruditorum* encontraram artigos de Leibniz, que despertaram neles o interesse pela matemática, passando então a serem os primeiros estudiosos a perceberem a grande gama de aplicações do cálculo e utilizarem dessa ferramenta matemática para resolver vários problemas.

O cálculo integral como é conhecido hoje tem uma forte ligação com o Jakob, pois foi ele quem primeiro fez relação entre as palavras cálculo e integral, surgindo assim, o cálculo integral. Salientamos que Leibniz utilizava o termo cálculo de somatórios. Também se atribui a Jakob um tipo de equação usada em equações diferenciais, a equação de Bernoulli.

Lagrange (1736 – 1813), quando percebeu a necessidade dos fundamentos da análise no desenvolvimento do cálculo, resolveu desenvolver um estudo pautado na análise para dar um rigor matemático para a base do cálculo. Mesmo não obtendo êxito em seus trabalhos, estes ainda serviram para que outros matemáticos subsequentes desenvolvessem trabalhos de maneira rigorosa.

Conforme Eves (2004), essa tentativa de Lagrange foi de grande relevância para o desenvolvimento do cálculo, sendo o passo inicial para que os matemáticos construíssem um rigor necessário para o cálculo. Lagrange ainda contribuiu com a notação $f'(x)$ usada para representar a derivada de uma função, e com seus estudos sobre equações diferenciais parciais.

Além desses matemáticos mencionados, existem vários outros que de alguma maneira deram suas contribuições para a construção do cálculo.

Diante do que foi exposto, parece injusto atribuir somente a Newton e Leibniz à descoberta do cálculo. Eles estavam em um contexto intelectual que teve início na Grécia Antiga e que continuou se desenvolvendo pelos séculos. Inclusive, após seus próprios esforços.

2.3 CÁLCULO DE VOLUME POR FATIAMENTO

Para um melhor entendimento das partes a seguir, faz-se necessário o conhecimento prévio sobre alguns tópicos de Geometria Plana e Espacial. Para interessados em rever estes conceitos, sugerimos DOLCE e POMPEO (2013), volumes 9 e 10. Ressaltamos aqui, que o tópico de descrição dos sólidos geométricos escolhidos, baseiam-se nos conceitos destas obras.

2.3.1 Método de volume por fatiamento

O método de volume por fatiamento consiste, basicamente, em seccionar um sólido em n fatias finas e relacionar a área de cada secção transversal a uma variável independente, ou seja, multiplicar cada uma pela sua espessura. Para, assim, gerar uma soma de Riemann e fazer a espessura tender a zero, que é o limite, e obter o volume do sólido.

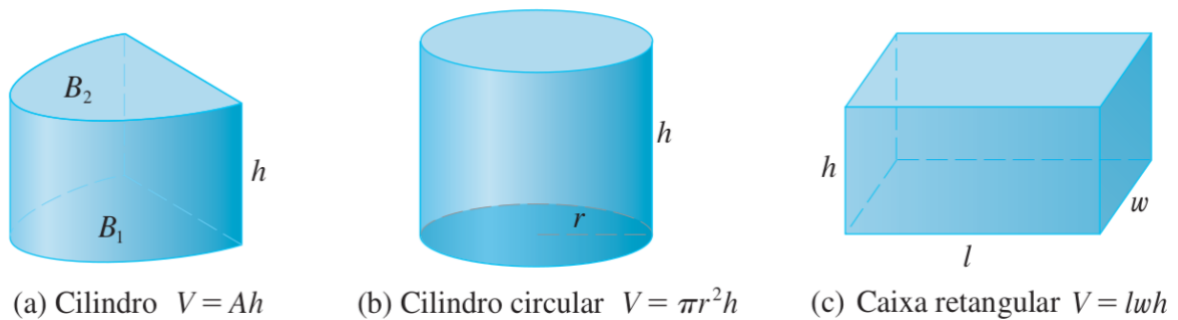
Para fazer a ilustração do método, utilizaremos um dos tipos de sólidos mais simples e conhecidos, o cilindro reto (ver a Figura 1(a)).

Um cilindro é delimitado por uma região plana B_1 denominada base, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 a B_2 . Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B_1 para B_2) é h , então o volume V do cilindro é definido como $V = A \cdot h$.

Existem outros tipos de sólidos cilíndricos, e um deles é o cilindro circular reto de raio r , onde todas as seções transversais são perpendiculares ao eixo central da região circular de raio r (ver Figura 1(b)). Deste modo, o volume V de um cilindro circular reto de raio r e altura h pode ser dado pela área da secção transversal e a altura h do sólido, ou seja, o volume será $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

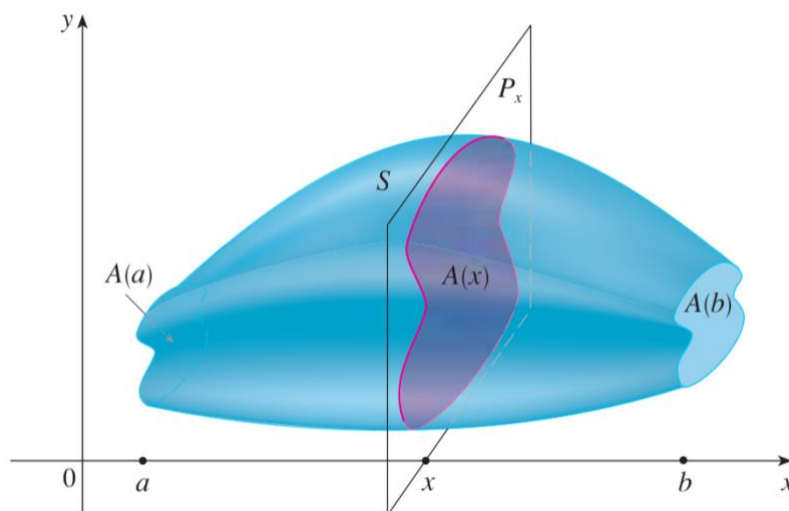
Quando a base do cilindro é um retângulo com comprimento l e largura w , o cilindro é uma caixa retangular, e é conhecido por paralelepípedo retangular, e seu volume é $V = l \cdot w \cdot h$ (ver a Figura 1 (c)).

Figura 1 – Tipos de cilindros e seus volumes



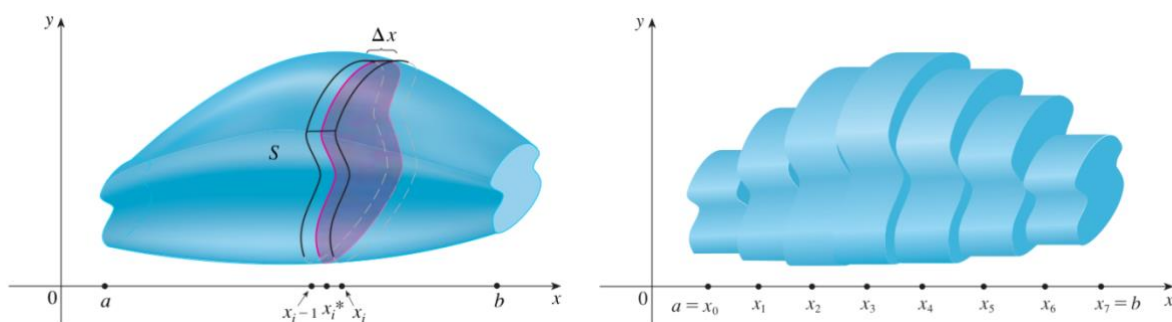
Fonte: (STEWART, 2013, P. 389).

Para obter o volume de um sólido S que difere de um cilindro (ver a Figura 2). Intercepta-se S com um plano P , a região obtida é chamada secção transversal S . Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano Px perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x , onde $a \leq x \leq b$. Fatiando S passando por x e calculando a área da fatia. A área da secção transversal $A(x)$ irá variar quando x aumenta de a para b .

Figura 2 – Interceptação do sólido S pelo plano P 

Fonte: (STEWART, 2013, p. 389).

Fazemos, então, partições do sólido em n fatias com comprimentos iguais e fatiamos o sólido por vários planos perpendiculares ao eixo x nos pontos da partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$. (ver Figura 3). Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhamos x_i^* pontos de amostragem, com i variando de 1 até n , de modo que podemos aproximar a i -ésima fatia de S_i por um cilindro cuja a área da base é A_i e altura Δx_i (ver Figura 3).

Figura 3 – Partições do sólido S em n fatias

Fonte: (STEWART, 2013, p. 390).

Assim, o volume V desse cilindro é $A_i \cdot \Delta x$, uma aproximação para o volume da i -ésima fatia S_i é $V_i = A_i \cdot \Delta x$. Somando os volumes de todas as n fatias, obtemos uma soma de Riemann que se aproxima do volume

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = A(x_1^*) \Delta x + A(x_2^*) \Delta x + \dots + A(x_n^*) \Delta x$$

Tomando as fatias cada vez mais finas, ou seja, fazendo n tender para o infinito, a aproximação parece ainda melhor. Com isso, o volume pode ser dado pelo limite dessas somas quanto n tende ao infinito. Assim, obtemos

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x$$

Consequentemente, temos a seguinte definição de volume.

Definição de volume 2.3.1: Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x , passando por x e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

2.4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS TÉCNICOS.

Esta pesquisa se classifica como qualitativa, quanto a forma de abordagem do problema. Pois teve como finalidade utilizar-se de Materiais Didáticos Manipuláveis que se encontram no Laboratório de Ensino de Matemática para fazer a aplicação do cálculo de volume por fatiamento, para obter seus volumes. Bem como, calcular seus volumes pelas fórmulas geométricas e pela inserção de líquido nos seus interiores. Os autores Prodanov e Freitas (2013, p. 70) afirmam que “na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo [...]”.

Quanto ao objetivo geral, a mesma é classificada como uma pesquisa exploratória por apresentar uma aplicação de integral definida para o cálculo de volume de sólidos geométricos, que é o cálculo de volume por fatiamento. De acordo com Gil (2002, p. 41) “estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições”. O autor complementa destacando que este tipo de pesquisa “tem como objetivo proporcionar familiaridade com o problema, com vista a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses”.

Quanto aos procedimentos técnicos esta pesquisa é classificada com um estudo de caso. Conforme Lüdke e André (1986, p.17), “o estudo de caso é o estudo de um caso” bem delimitado, ou seja, de contornos definidos. Destaca-se por ser construído em uma unidade inserida em um sistema mais amplo e é único por estar relacionado ao meio inserido.

O desenvolvimento desta pesquisa deu-se em quatro etapas.

A primeira etapa consistiu em aferir as medidas das bases e alturas dos sólidos geométricos escolhidos para, posteriormente, utilizá-la no procedimento da obtenção de volume por fatiamento, e ainda foi feita a descrição destes sólidos geométricos.

A segunda etapa deu-se pela inserção de água no interior destes sólidos geométricos e, com auxílio do medidor milimetrado para líquido, foram feitas as verificações dos volumes de cada um destes sólidos geométricos. E, também, foi realizado o cálculo dos volumes destes sólidos pelas fórmulas geométricas.

A terceira etapa consistiu em utilizar uma das aplicações do cálculo diferencial e Integral, mais precisamente a integral definida, que é o cálculo de volume por fatiamento, para determinar os volumes dos sólidos geométricos em questão.

A quarta etapa resumiu-se a verificar se os volumes encontrados pelo método de volume por fatiamento é, de fato, igual aos volumes obtidos pelas fórmulas geométricas e pela inserção de líquido no interior destes sólidos.

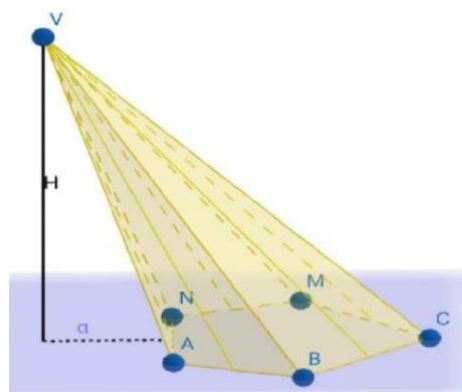
2.5 DESCRIÇÃO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM ESTUDO

Os sólidos geométricos são objetos tridimensionais que ocupam lugar no espaço, e este lugar por eles ocupado, é chamado de volume. Existem sólidos das mais diversas formas, quadrangulares, retangulares, circulares, dentre outras várias formas, e certamente todas possuem volume e capacidade.

2.5.1 Pirâmide

Definição 2.5.1: Consideramos um polígono convexo (região poligonal Convexa) $ABC...MN$ situado num plano α e um ponto V fora de α . Chama-se Pirâmide (ou pirâmide convexa) a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos vértices do polígono. V é o vértice e o polígono $ABC...MN$ é a base da pirâmide.

Figura 4 - Pirâmide



Fonte: autoria própria (2023).

2.5.1.1 Elementos

Uma pirâmide possui: $n + 1$ faces, sendo uma base (a seção citada) e n faces laterais (triângulos), n arestas laterais, $2n$ arestas, $2n$ diedros, $n + 1$ vértices, ângulos poliédricos e n triedros.

A altura de uma pirâmide é a distância H entre o vértice V e o plano da base. Para a pirâmide convexa é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = (n + 1) - 2n + (n + 1) = 2 = V - A + F = 2$$

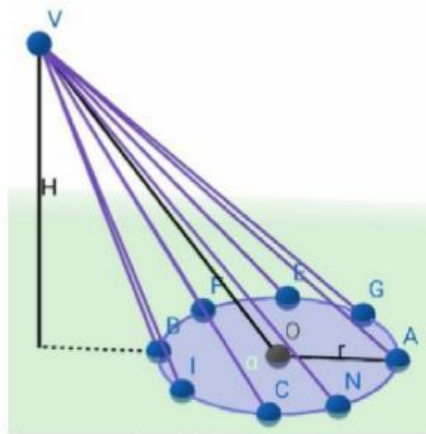
2.5.1.2 Natureza

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc, conforme a base for respectivamente um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, um hexágono, etc.

2.5.2 Cone

Definição 2.5.2: Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α . Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

Figura 5 - Cone



Fonte: autoria própria (2023)

2.5.2.1 Elementos

Um cone circular possui: uma base que é o círculo de centro O e raio r ; geratrizes que são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base; um vértice que é o ponto V . A altura de um cone é a distância entre o vértice e o plano da base.

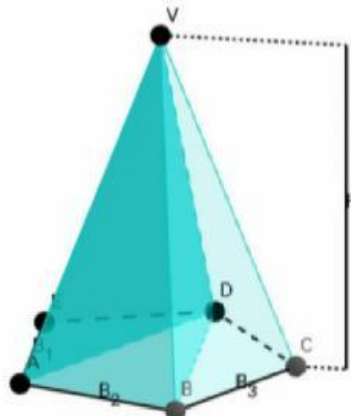
2.5.2.2 Classificação

Os cones podem ser classificados pela posição do segmento VO em relação ao plano da base: Se o segmento VO é oblíquo ao plano da base, temos um cone circular oblíquo; Se o segmento VO é perpendicular ao plano da base, temos um cone circular reto, também conhecido como cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

2.5.3 Fórmula geométrica do volume da pirâmide

Seja B a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Esta pirâmide é soma de $(n - 2)$ tetraedros.

Figura 6 - Pirâmide decomposta em tetraedro



Fonte: autoria própria (2023).

Assim, tem-se que o volume da pirâmide é $V = \frac{1}{3}B \cdot h$.

Portanto, para qualquer que seja a pirâmide, o volume é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

2.5.4 Fórmula geométrica do volume do cone

O volume de um cone é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, ou seja, é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

2.5.5 Cálculo de volume por meio da inserção de líquido nos sólidos geométricos

O volume mede o espaço ocupado por um objeto (em metro cúbico (m^3), decímetro cúbico (dm^3), centímetros cúbico (cm^3 , por exemplo) e a capacidade mede a quantidade de uma substância que um recipiente é capaz de comportar (em litro (l), mililitros (ml , por exemplo). Podemos fazer correspondência entre as medidas de volume com a capacidade de um sólido geométrico. Note: $1m^3$ corresponde a capacidade de 1000l; $1dm^3$ corresponde a capacidade de 1l; $1cm^3$ corresponde a capacidade de 1ml (mililitro).

Para verificar o volume dos sólidos geométricos (pirâmide oblíqua de base quadrada e cone reto), imagem 1, partimos da correspondência de $1cm^3$ corresponder a 1ml, em seguida fizemos a inserção de líquido (água) no interior deles, e com o auxílio de um medidor de volume (imagem 2) foi aferido os seguintes volumes: 430ml para o cone reto e 422ml para a pirâmide oblíqua de base quadrada.

Imagem 1- sólidos geométricos escolhidos



Fonte: autoria própria (2023).

Imagem 2 - medidor de volume



Fonte: autoria própria (2023).

2.6 VOLUMES CALCULADOS PELOS TRÊS MÉTODOS DIFERENTES

De início, utilizando os sólidos disponíveis no laboratório de matemática, escolheu-se dois deles para que fossem aferidas as medidas de comprimento de lado ou diâmetro (a considerar a peça em questão), a altura da pirâmide oblíqua e a medição dos volumes de ambos os sólidos com auxílio de medidor de volume. Os dados aferidos estão dispostos na tabela 1.

Tabela 1 - Dados aferidos dos sólidos geométricos escolhidos

Sólido geométrico	Aresta da base ou raio	Área da base	Altura	Volume aferido
Cone	6,25cm	122,66cm ²	10,5cm	430ml
Pirâmide oblíqua	9,5cm	90,25cm ²	14cm	422ml

Fonte: autoria própria (2023).

2.6.1 Volume do cone reto

A seguir apresentaremos os volumes do cone reto, que foram obtidos pelos três métodos diferentes.

2.6.1.1 Volume obtido pela inserção de líquido (água) no interior deste sólido

O volume obtido foi de 430 ml.

2.6.1.2 Volume obtido pela fórmula geométrica

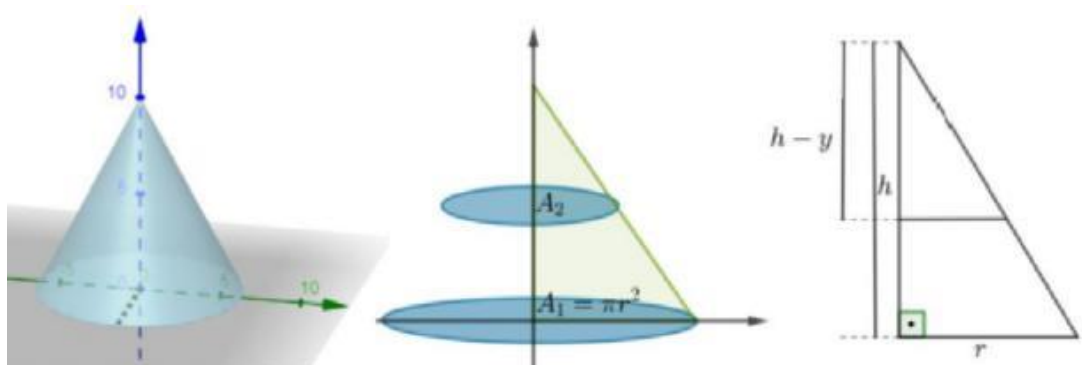
Como o volume do cone é dada por $V_c = \frac{1}{3}B \cdot h$, onde $B = \pi r^2$ é a base e h a altura. Pelos dados da tabela 1, segue que:

$$\begin{aligned}
 V_c &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
 &\approx \frac{1}{3}(122,66)(10,5) \\
 &\approx \frac{1287,93}{3} \\
 &\approx 429,31 \text{ ml}
 \end{aligned}$$

2.6.1.3 Volume obtido pelo método de fatiamento

Como apresenta Stewart (2013), podemos usar o fatiamento para calcular o volume de um sólido, como é o caso do cone e da pirâmide oblíqua de base quadrada que serão abordados neste trabalho.

Figura 8 - Cone reto



Fonte: autoria própria (2023).

Sabe-se que a razão entre o quadrado das alturas h do triângulo maior e a altura do triângulo menor $(h - y)$ dados na figura 8, é igual à altura entre as áreas A_1 e A_2 , ou seja,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h^2}{(h - y)^2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1(h - y)^2}{h^2} = \frac{\pi r^2(h - y)^2}{h^2}$$

Deve-se então calcular infinitesimalmente a soma das fatias que irão resultar no volume do cone V_c . Assim,

$$\begin{aligned} V_c &= \int_0^h A_2(y) dy \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hy + y^2) dy \end{aligned}$$

Tomando então os dados do cone que são apresentados na tabela 1, tem-se então que

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{\pi(6,25)^2}{(10,5)^2} \int_0^{10,5} (10,5^2 - 21y + y^2) dy \\ &= \frac{\pi(6,25)^2}{(10,5)^2} \cdot (10,5y - 10,5y^2 + y^3/3) \Big|_0^{10,5} \\ &= \frac{\pi(6,25)^2}{(10,5)^2} \cdot \left(\frac{10,5^2}{3} \right) \\ &\cong (122,66) \cdot (10,5/3) \\ &\cong 429,31 \text{ ml} \end{aligned}$$

2.6.2 Volume da pirâmide oblíqua de base quadrada

Apresentaremos, a seguir, os volumes da pirâmide oblíqua de base quadrada que foram obtidos através de três métodos distintos.

2.6.2.1 Volume obtido pela inserção de líquido (água) no interior deste sólido

O volume obtido foi de 422 ml.

2.6.2.2 Volume obtido pela fórmula geométrica

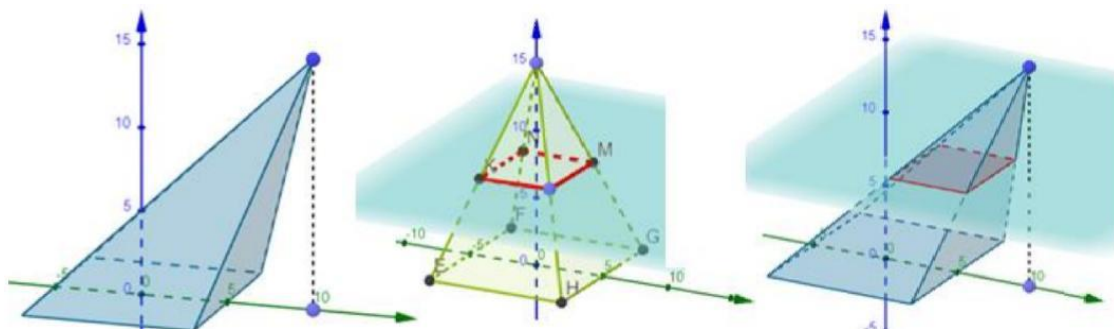
Visto que a fórmula geométrica para calcular o volume de uma pirâmide qualquer é dada por $V_p = \frac{1}{3}B \cdot h$, onde B é igual à área da base e h é igual à altura. Pelos dados obtidos, que podem ser vistos na tabela 1, o volume da pirâmide oblíqua de base quadrada é

$$\begin{aligned}
 V_p &= \frac{1}{3} B \cdot h \\
 &= \frac{1}{3} (9,5)^2 \cdot 14 \\
 &= \frac{1263,5}{3} \\
 &\approx 421,17 \text{ ml}
 \end{aligned}$$

2.6.2.3 Volume obtido pelo método de fatiamento

A generalização anterior para o caso do cone, permite uma generalização para qualquer superfície para a qual é possível estabelecer uma relação entre as áreas das fatias e a respectiva altura. Vejamos a seguir o segundo exemplo abordando uma^a pirâmide oblíqua de base quadrada.

Figura 9 - Pirâmides de base quadrada, oblíqua e reta



Fonte: autoria própria (2023).

A partir das medições, os valores obtidos foram apresentados na tabela 1, juntamente com os do cone. Lembrando conceitos básicos da geometria plana, sabe-se que triângulos de mesma medida da base e mesma medida de altura possuem mesma medida de área, de modo que este conceito pode ser estendido ao volume de uma pirâmide oblíqua que possui área de base e altura igual a uma pirâmide reta de mesma área, de base e mesma altura.

De modo geral, usando a integral, o volume da pirâmide é dado por:

$$V_p = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^h (h-y)^2 dy = \frac{a^2 h}{3}$$

Em que a é o comprimento da aresta da base e h é a altura da pirâmide. Assim, tem-se que o volume V_p da pirâmide é dado por:

$$\begin{aligned}
V_p &= \int_0^{14} \left(\frac{9,5}{14}\right)^2 \cdot (14 - y)^2 dy \\
&= \left(\frac{9,5}{14}\right)^2 \cdot \int_0^{14} (14^2 - 28y + y^2) dy \\
&= \left(\frac{9,5}{14}\right)^2 \cdot \left(14^2 y - 14y^2 + y^3/3\right) \Big|_0^{14} \\
&= \frac{(9,5)^2}{14^2} \cdot \frac{14^3}{3} \\
&= 90,25 \cdot \frac{14}{3} \\
&\approx 421,17 \text{ ml}
\end{aligned}$$

A seguir, tem-se uma tabela comparativa dos volumes obtidos pelos três métodos diferentes.

Tabela 2 - Volumes obtidos pelos três métodos diferentes

VOLUME OBTIDO PELOS TRÊS MÉTODOS DIFERENTES			
Sólidos geométricos	Inserção de líquido	Fórmula geométrica	Fatiamento
Cone reto	430ml	429,31ml	429,31ml
Pirâmide oblíqua	422ml	421,17ml	421,17ml

Fonte: autoria própria (2023).

3 CONCLUSÃO

A pesquisa realizada nos permitiu abordar sobre três métodos diferentes para determinar o volume dos sólidos geométricos, tendo como foco o método de volume por fatiamento, uma aplicação do Cálculo Integral, especificamente, da integral definida. O que nos possibilitou verificar se o volume de um sólido geométrico calculado pelo método de fatiamento é igual aos volumes obtidos pela fórmula geométrica e pela inserção de líquido no interior destes.

Os volumes obtidos pelos três métodos foram muito próximos, de modo que podemos utilizar quaisquer dos métodos, e que, dentro das limitações dos instrumentos de medição, é possível obter valores cada vez mais aproximados.

Diante disso, pudemos verificar na prática que o volume de um sólido geométrico calculado pelo método de fatiamento é igual tanto ao volume obtido pela fórmula geométrica, quanto ao volume obtido por inserção de líquido no interior deste sólido; ressaltando, neste último caso, a existência de um pequeno erro devido a dificuldade em se ter precisão em medições feitas de forma manual.

Acreditamos que nossos objetivos foram alcançados, uma vez que, abordamos sobre o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), debatemos sobre Materiais Didáticos (MDs) e MDs Manipuláveis, aferimos as medidas dos sólidos geométricos escolhidos, descrevemos os sólidos em estudo, calculamos os volumes pelos três métodos, e realizamos a comparação entre os volumes. Encontrando então, a resposta para o nosso questionamento.

Em um possível trabalho futuro, acreditamos que seria muito interessante escolher um sólido qualquer, que não possua forma regular e tão pouco fórmula geométrica convencional,

para o cálculo de seu volume utilizando, também, mais de um método para chegar ao resultado. O objeto poderia ser, por exemplo, uma rocha, uma concha de caracol, ou qualquer outro que seja de interesse.

REFERÊNCIAS

- BRITO, Janilson Claydson Silva. **O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Piauí, Teresina - PI, 2013. Disponível em: http://www.seduc.pi.gov.br/arquivos/80089229.janilson_claydson_silva_brito.pdf. (Acesso em 22 ago. de 2022).
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10
- EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas-SP: Unicamp, 2004.
- FONSECA FILHO, Nilmar Almeida da. **Laboratório de ensino de Matemática: algumas atividades para o ensino de geometria**. Rio de Janeiro: Publit, 2015.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 1
- FULINI, Márcio Antônio. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. 2017. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João Del-Rei, Minas Gerais, 2017.
- LORENZATO, Sérgio. (org.). **O Laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas – SP: Autores Associados, 2012.
- LUDKE, M.; ANDRÉ, Marli. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.
- MEDEIROS, Ana Carla Ventura Gomes; LACERDA, Hannah Dora de Garcia e. Laboratório de ensino de Matemática como recurso pedagógico: considerações de professores de Matemática. **Revista Educação Pública**, v. 21, n. 26, 13 de jul. 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/26/laboratorio-de-ensino-de-matematica-como-recurso-pedagogico-consideracoes-de-professores-de-matematica> .
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RODRIGUES, Fredy Coelho. **Laboratório de Educação Matemática:** descobrindo as potencialidades de seu uso em um curso de formação de professores. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

STEWART, James. **Cálculo.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1