



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ –
CAMPUS CORRENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

RONALDO DIAS DE OLIVEIRA

ESTUDO DOS MECANISMOS DE ANCORAGEM DAS PAREDES DE DOMÍNIO
MAGNÉTICO EM MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS UTILIZANDO O MODELO
DE JILES-ATHERTON

CORRENTE – PI

2022

RONALDO DIAS DE OLIVEIRA

ESTUDO DOS MECANISMOS DE ANCORAGEM DAS PAREDES DE DOMÍNIO
MAGNÉTICO EM MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS UTILIZANDO O MODELO DE
JILES-ATHERTON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência para a obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - Campus Corrente.

Orientador: Prof. Dr. Kleyton Jânio Camelo

Co-orientador: Prof. Dr. Fabrício M. de Vasconcelos

CORRENTE - PI

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Oliveira, Ronaldo Dias de

O48e Eestudo dos mecanismos de ancoragem das paredes de domínio magnético em materiais ferromagnéticos utilizando o modelo de Jiles - Atherton / ATHERTON / Ronaldo Dias de Oliveira. - 2023. 31 p.: il. p&b.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente, 2023.

Orientador : Prof Dr. Kleyton Jânio Camelo.
Coorientador : Prof Dr. Fabrício M. de Vasconcelos.

1. Física - estudo e ensino. 2. Magnetismo. 3. Teoria de Jiles-Atherton. I. Título.

CDD - 530

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB 3/1251

RONALDO DIAS DE OLIVEIRA

ESTUDO DOS MECANISMOS DE ANCORAGEM DAS PAREDES DE DOMÍNIO
MAGNÉTICO EM MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS USANDO O MODELO DE
JILES-ATHERTON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência para a obtenção do diploma do
Curso de Licenciatura em Física do Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí - Campus Corrente.

Orientador: Prof. Dr. Kleyton Jânio Camelo

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício M. de
Vasconcelos

Aprovado em: ____ / ____ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Kleyton Jânio Camelo (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Adriano Braga Barreto
Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS)

Prof. Me. Fernando Alves Nunes
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

A minha mãe, irmãos, sobrinhos, tios, primos,
cunhados e amigos pelo carinho e amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por estar sempre presente na minha vida me dando forças quando mais precisava, e por me permitir concluir este curso;

Agradeço a minha mãe Maria Rosa e minha tia Ilza Dias, aos meus irmãos Rita de Cássia, Luiz Carlos e Priscila Dias e aos meus sobrinhos, por terem me dado todo apoio necessário para que eu chegasse até este momento e que sempre me apoiaram nos meus estudos;

Aos meus cunhados Moisés Balbinotte e Ademara Lima por sempre me apoiarem e me aconselhar para que eu chegasse até aqui;

Agradeço a todos os professores e servidores do IFPI do Campus Corrente que sempre me apoiaram nessa etapa de conclusão;

A coordenadora Karine dos Santos por todo esforço feito para que eu concluísse esse curso, e por sempre apoiar nos trabalhos científicos e esforço para que eu participasse dos eventos, pela cobrança e felicitações nos momentos oportunos;

Ao meu orientador Kleyton Jânio e ao meu Co-orientador Fabrício Vasconcelos pela oportunidade, generosidade e investimento em compartilhar seus conhecimentos comigo; por entender minhas dificuldades pela paciência, cobrança e felicitações nos momentos oportunos;

Agradeço a todos os meus colegas e amigos por estarem sempre me apoiando nesta etapa;

A meu amigo Rodolfo Rodrigues por sempre me auxiliar e pelos conselhos durante todo o período do curso, e por ter feito parte desta caminhada do começo ao fim;

As minhas primas Gabriela Castro e Nayara Batista por sempre apoiarem e me aconselhar e por estarem presente em toda a minha trajetória acadêmica;

Aos meus amigos Cinthya Jarline, Priscila Alves e Ronaldo Silva pelo carinho e companheirismo que tiveram comigo que fizeram parte desta caminhada do começo ao fim;

A todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado, meu eterno agradecimento.

“Não tenha medo de tentar, tenha medo de não tentar e ver que a vida passou e você não se arriscou como deveria.” Chorão

RESUMO

O estudo das propriedades magnéticas dos materiais tem se tornado cada vez mais importante para o desenvolvimento de novas tecnologias. Parte do crescimento das aplicações de diversos materiais se deu devido às crescentes pesquisas na área do magnetismo. É comum o emprego de diversos materiais magnéticos em muitas tecnologias do nosso dia a dia, por exemplo, nos telefones celulares, nos caixas eletrônicos dos bancos, novos computadores, bem como nos geradores e transformadores elétricos. Para as diversas aplicações, foi necessário uma série de pesquisas e estudos envolvendo as propriedades dos materiais associados ao magnetismo. O estudo do comportamento magnético dos materiais pode ser realizado a partir da aplicação de um campo magnético e a sua resposta a esse campo. Desta forma, é possível classificá-los em diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos. Em materiais ferromagnéticos, as orientações dos domínios magnéticos e a movimentação das paredes de domínio são os principais mecanismos associados ao processo de magnetização. Apresenta-se neste trabalho, a partir da Teoria de Jiles-Atherton e de resultados experimentais existentes na literatura científica que tratam do tema proposto, um estudo que trata dos mecanismos de ancoragem das paredes de domínio magnético durante processos de magnetização. Resultados mostram que o processo de magnetização de um material ferromagnético sofre forte influência das características, distribuição e propriedades dos defeitos microestruturais que atuam como sítios de ancoragem das paredes de domínio magnético. Sendo assim, foram analisados parâmetros associados aos sítios de ancoragem das paredes de domínio com base em resultados existentes na literatura científica.

Palavras-chaves: Teoria de Jiles-atherton, histerese magnética, magnetização, domínio magnético.

ABSTRACT

The study of the magnetic properties of materials has become increasingly important for the development of new technologies. Part of the growth in the applications of various materials was due to increasing research in the field of magnetism. It is common to use different magnetic materials in many technologies of our daily life, for example, in cell phones, in bank ATMs, modern computers, as well as in generators and electrical transformers. For the various applications, it was necessary a series of researches and studies involving the properties of materials associated with magnetism. The study of the magnetic behavior of materials can be carried out from the application of a magnetic field and its response to that field. Thus, it is possible to classify them as diamagnetic, paramagnetic and ferromagnetic. In ferromagnetic materials, the orientations of the magnetic domains and the movement of the domain walls are the main mechanisms associated with the magnetization process. Based on the Jiles-Atherton Theory and existing experimental results in the scientific literature that deal with the proposed theme, this work presents a study that deals with the pinning mechanisms of the magnetic domain walls during magnetization processes. Results show that the magnetization process of a ferromagnetic material is strongly influenced by the characteristics, distribution and properties of the microstructural defects that act as pinning sites for the magnetic domain walls. Therefore, parameters associated with domain wall pinning sites were analyzed based on existing results in the scientific literature.

Keywords: Jiles-Atherton theory, magnetic hysteresis, magnetization, magnetic domain.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01	Linhas de campo magnético	13
Figura 02	Órbita eletrônica	14
Figura 03	Domínios magnéticos nos paramagnéticos	15
Figura 04	Representação gráfica do comportamento da suscetibilidade das substâncias paramagnéticas em função da Temperatura de Curie	16
Figura 05	Ilustração do alinhamento dos momentos magnéticos em um ferromagnético	17
Figura 06	Orientações dos domínios e dos momentos magnéticos de uma amostra quando submetida a um campo magnético externo	18
Figura 07	Curva ou ciclo de histerese	20
Figura 08	Domínio magnético em um cristal Si-Fe com magnetização espontânea	21
Figura 09	Rotação dos spin na parede de domínio	22
Figura 10	Variação do campo coercivo com o tempo de tratamento térmico em aço 5Cr-0,5Mo	27
Figura 11	Morfologias e distribuição dos carbonetos precipitados em aços 5Cr-0,5Mo	27
Figura 12	Curva típica de um material magnético bifásico	28
Figura 13	Comportamento dos parâmetros das ligas envelhecidas a um temperatura de 650 °C	29

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	102 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA
	112.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS
112.2 - PROPRIEDADES MAGNÉTICAS DOS MATERIAIS	122.2.1 - DIAMAGNETISMO
	122.2.2 - PARAMAGNETISMO
	132.2.3 - FERROMAGNETISMO
142.3 - CURVAS DE MAGNETIZAÇÃO E CICLOS DE HISTERESE MAGNÉTICA	162.4 - DOMÍNIOS MAGNÉTICOS
	182.5 - TEORIA DE JILES-ATHERTON
203 - METODOLOGIA E RESULTADOS ESPERADOS	224 - RESULTADOS E DISCUSSÕES
	235 - CONCLUSÕES
266 - SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	277 - REFERÊNCIAS
	27APÊNDICE
29APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MAGNETIZAÇÃO SEM HISTERESE	29

1 – INTRODUÇÃO

As propriedades associadas ao magnetismo dos materiais desempenharam um papel fundamental no avanço tecnológico com o passar dos anos e, ainda, exercem grande influência no desenvolvimento de novas tecnologias. Por exemplo, nos projetos de TVs, motores elétricos, alto-falantes, computadores, dentre outras aplicações [1].

Dentro da classe dos materiais magnéticos, estão os ferromagnéticos. Os materiais ferromagnéticos quando submetidos a um campo magnético externo tornam-se magnetizados. Neste processo, diversos parâmetros e propriedades associados aos mecanismos de magnetização podem ser analisados, dentre eles a histerese magnética que é um atributo inerente aos materiais ferromagnéticos e, com isso, importante para as diversas aplicações envolvendo esses materiais.

Dentre as aplicações dos materiais ferromagnéticos estão os ímãs permanentes que criam um campo magnético constante, caracterizado por atrair materiais não imantados como, por exemplo, ímãs utilizados nas portas das geladeiras [2]; o segundo são os ímãs permeáveis que são materiais capazes de se magnetizar e desmagnetizar facilmente [1]. Por último, temos os materiais utilizados para gravação magnética.

A fabricação de diversas ligas metálicas magnéticas, que se desenvolveram, principalmente, no século passado, se deu devido a uma melhor compreensão das propriedades fundamentais desses materiais. O que define o contexto das aplicações citadas no parágrafo anterior é o ciclo de histerese magnética, que é uma representação gráfica do resultado da magnetização em função da aplicação de um campo magnético a um material ferromagnético [1].

Um material é caracterizado como ferromagnético quando os seus momentos magnéticos se organizam espontaneamente [3]. Com isso, alguns materiais precisam apenas de um campo baixo para se magnetizar. Por exemplo, o ferro que mantém sua magnetização quando o campo externo é retirado. Outro exemplo são as ligas de samário-cobalto que necessitam de um campo intenso para ficarem magnetizadas, mas quando o campo é removido sua magnetização é perdida em grande parte [1].

Devido a necessidade de descrever as propriedades dos materiais ferromagnéticos a partir do fenômeno da histerese magnética, torna-se importante a elaboração de modelos que descrevem os mecanismos que influenciam no processo de magnetização dos materiais e dão origem à histerese magnética. Com isso, torna-se possível desenvolver materiais, como ligas metálicas e ímãs, para as mais diversas aplicações.

Um dos principais modelos utilizados na modelagem matemática dos fenômenos associados à histerese magnética é o que se baseia na Teoria de Jiles-Atherton (J-A) [4, 5]. Nesse modelo, a magnetização total resulta da soma entre os componentes reversíveis e irreversíveis da magnetização de uma amostra ferromagnética, bem como a influência de defeitos microestruturais que atuam como sítios de ancoragem das paredes de domínio magnético [4].

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar um estudo sobre os mecanismos de ancoragem das paredes de domínio magnético em materiais ferromagnéticos quando submetidos a processos de magnetização. Para isto, será utilizado como referência o *modelo de Jiles-Atherton* que leva em consideração a distribuição e características dos sítios de ancoragem presentes no material.

2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

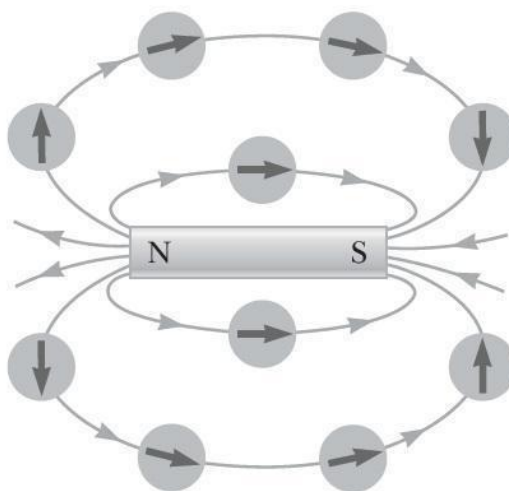
2.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As primeiras observações de fenômenos associados ao magnetismo datam do período da Grécia antiga, por volta do século VI a. C. A interação entre determinados minerais constituídos de ferro, como magnetita Fe_3O_4 , originou um ramo da física conhecido como magnetismo.

O magnetismo foi empregado em diversas áreas posteriormente. Uma das primeiras aplicações foi a invenção da bússola, creditada aos chineses. Neste instrumento, usado para orientações em navegações, uma agulha era formada de magnetita, material que foi encontrado na Grécia antiga e que tinha a propriedade de se orientar de acordo com o campo magnético terrestre [6].

Um conceito importante para um melhor entendimento do comportamento dos materiais é o de campo magnético. Pode-se afirmar, sucintamente, que um campo magnético é o local do espaço que compreende as cargas elétricas em movimento [6]. Campos magnéticos podem ser representados graficamente por meio de linhas de campo que ligam os polos de um ímã, por exemplo, como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Linhas de campo magnético



Fonte: Serway (2014) [6].

A classificação dos materiais quanto às suas propriedades magnéticas é feita com base na resposta do material à aplicação de um campo magnético. Nas próximas seções serão feitas abordagens conceituais das principais classes de materiais magnéticos, dando ênfase maior aos ferromagnéticos, por apresentarem a histerese magnética e por serem foco de estudo deste trabalho.

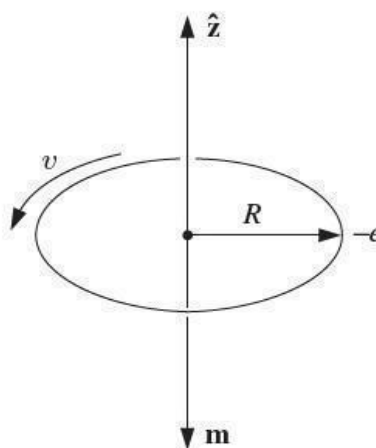
2.2 PROPRIEDADES MAGNÉTICAS DOS MATERIAIS

2.2.1 Diamagnetismo

Em geral, os materiais magnéticos são classificados em diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos. O físico francês Paul Langevin foi um dos primeiros cientistas que descreveu matematicamente o **diamagnetismo**. É considerado um material diamagnético, aquele que apresenta um resultado em que, ao ser aplicado um campo magnético, são repelidos por esse campo.

O comportamento diamagnético dos materiais pode ser entendido levando-se em conta a aplicação de um campo magnético em uma única órbita eletrônica (ver Figura 2). Com isso, uma magnetização é induzida, fazendo que o elétron adquira uma variação de magnetização (ou momento de dipolo) incremental antiparalela ao momento magnético inicial. Desta forma, o que se observa é a redução da corrente efetiva associada ao movimento orbital do elétron, dando origem a um campo magnético que se opõe ao campo aplicado [7].

Figura 2 - Órbita eletrônica



Fonte: Griffiths (2011) [7].

A variação do momento magnético de um material diamagnético sob a aplicação de um campo externo $\vec{H}$, pode ser determinado através da seguinte equação:

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 \hbar^2}{4m_e} \vec{H} \quad (1)$$

Onde $\vec{m}$ é o momento magnético do elétron, R é o raio da órbita eletrônica, e e m_e são, respectivamente, a carga e a massa do elétron. [7]. Nesta equação podemos observar que a variação do momento magnético $\Delta \vec{m}$ é oposto ao campo externo $\vec{H}$. O diamagnetismo é um fenômeno universal presente em todos os materiais.

2.2.2 Paramagnetismo

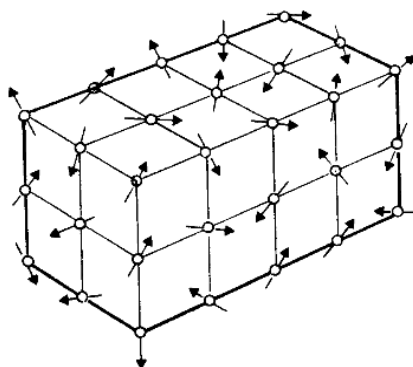
Os **materiais paramagnéticos** se caracterizam por apresentarem os momentos magnéticos desalinhados, ou seja, distribuídos de forma aleatória. A suscetibilidade magnética é um valor caracterizado pela resposta da amostra do material ao campo nele aplicado. Esses materiais apresentam susceptibilidade magnética positiva, ao contrário dos materiais diamagnéticos que apresentam suscetibilidade negativa quanta baixa [3].

O cientista francês Pierre Curie teve bastante contribuição na descrição do paramagnetismo. Para Curie a suscetibilidade (χ) é inversamente proporcional em comparação a temperatura (T). Em outras palavras, à medida que a temperatura aumenta, a suscetibilidade magnética do material é reduzida. Com isso, a suscetibilidade magnética de um material paramagnético pode ser obtida a partir da Equação 2, onde C é uma constante conhecida como a constante de Curie [8].

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (2)$$

A Figura 3 apresenta uma ilustração das orientações dos momentos magnéticos em um material paramagnético [9].

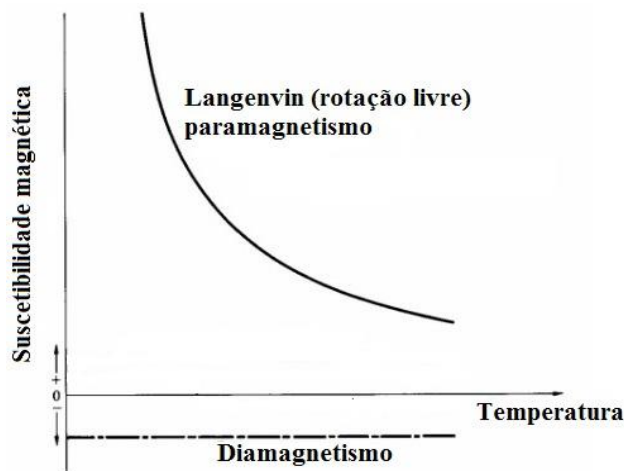
Figura 3 - Domínios magnéticos nos paramagnéticos



Fonte: Padilha (2000) [9].

A dependência da suscetibilidade dos materiais paramagnéticos com relação à Temperatura é apresentada na Figura 4. É possível, também, observar que a suscetibilidade dos materiais diamagnéticos independe da temperatura. A Figura 4 mostra que à medida em que a temperatura aumenta, ocorre a diminuição da susceptibilidade magnética em um material paramagnético, o que está de acordo com a Equação (2).

Figura 4 - Representação gráfica do comportamento da suscetibilidade das substâncias paramagnéticas em função da Temperatura de Curie



Fonte: Novak (2000) [10].

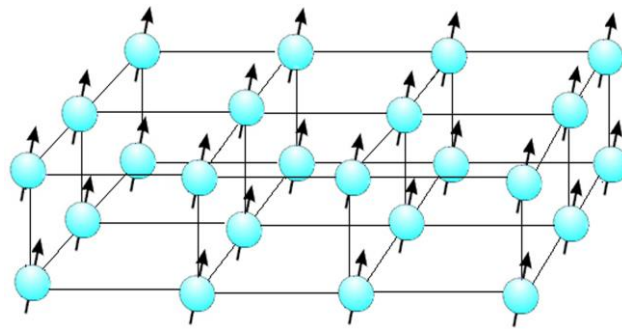
2.2.3 Ferromagnetismo

Os **materiais ferromagnéticos** são aqueles que possuem a capacidade de apresentar ordem magnética espontânea. Um material ferromagnético pode apresentar uma magnetização mesmo sem a presença de um campo magnético externo. Para se entender melhor a origem da magnetização espontânea deve-se levar em conta a interação entre os spins eletrônicos do material, na qual possuem a mesma orientação, como mostra a Figura 05, essa orientação se dá devido a interação de troca entre os spins [3, 11]. Essa interação entre os spins pode ser observada na equação 3.

$$H = -2J_{tr} \sum_{i \neq j} S_i \cdot S_j \quad (3)$$

Na Equação (3) J_{tr} é chamada constante de troca entre os spins e S_i e S_j são, respectivamente, os spins do i -ésimo e j -ésimo elétrons considerados. A Figura 5 mostra como os domínios magnéticos se comportam nos materiais ferromagnéticos. Como observado ao analisar, todos os momentos tendem a apontar para uma mesma direção, com isso, é possível afirmar que essas substâncias possuem regiões que apresentam uma magnetização espontânea [3, 11].

Figura 5: Ilustração do alinhamento dos momentos magnéticos em um ferromagnético



Fonte: Holanda et al. (2019) [11].

A interação entre os spins dá origem a um campo interno H_{int} , que pode ser tratado como um campo molecular, e calculado a partir da equação 4:

$$H_{int} = \lambda M \quad (4)$$

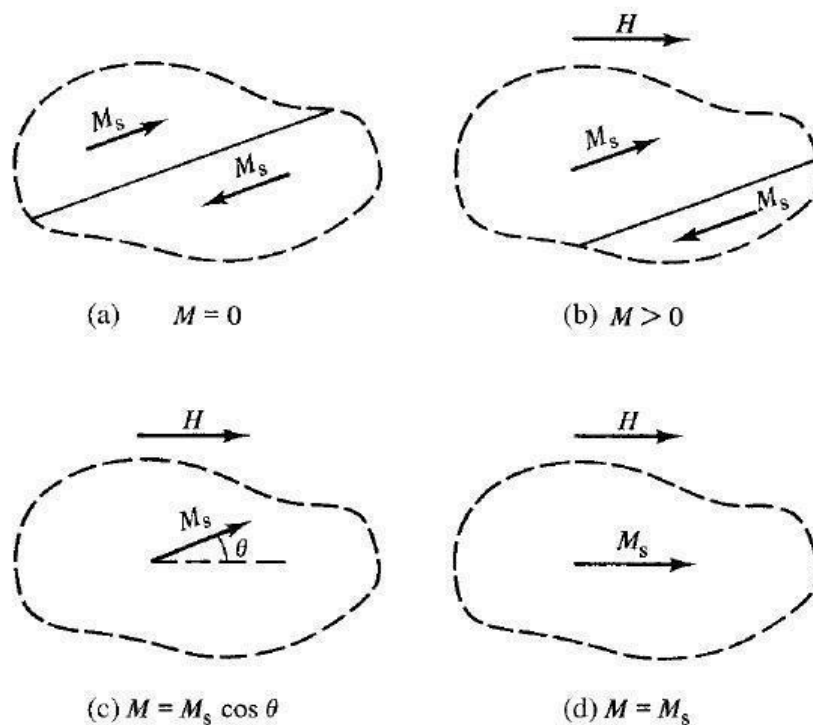
em que λ é a constante de Weiss, intitulado como o parâmetro de campo molecular [11].

Um parâmetro utilizado para caracterizar o comportamento magnético de um material é a sua permeabilidade magnética μ , definida como $\mu = \frac{B}{H}$, que é a razão entre a densidade de fluxo magnético B e o campo magnético aplicado H . Esse parâmetro é representado em todos os materiais magnéticos, nos ferromagnéticos a permeabilidade magnética é dependente do campo magnético aplicado [3].

Os materiais ferromagnéticos apresentam regiões microscópicas conhecidas como domínios magnéticos que são regiões de máxima magnetização. Nos domínios magnéticos os momentos magnéticos apresentam, aproximadamente, a mesma orientação. Domínios magnéticos com diferentes orientações são separados por linhas denominadas paredes de domínios. Quando os momentos magnéticos apresentam resultante igual a zero, afirma-se que os domínios das amostras estão com orientação distribuída de forma aleatória e encontram-se desmagnetizadas, como representado na Figura 6a.

No momento em que o material é submetido a um campo magnético externo, as dimensões dos domínios com os momentos magnéticos tornam-se magnetizados e se alteram em consequência dos alinhamentos dos momentos com campo externo. Em contrapartida, os domínios magnéticos ainda não estão alinhados com o campo magnético tornam-se pequenos, mostrado na Figura 6b. À medida em que os domínios se alinham ao campo, diz-se que o material se encontra magnetizado, como mostra a Figura 6c e 6d [6].

Figura 6: Orientações dos domínios e dos momentos magnéticos de uma amostra quando submetida a um campo magnético externo



Fonte: Cullity (2009) [8].

2.3 CURVAS DE MAGNETIZAÇÃO E CICLOS DE HISTERESE MAGNÉTICA

O comportamento magnético dos materiais pode ser descrito a partir das curvas de magnetização M em função do campo magnético aplicado H [10]. A magnetização em um material magnético se dá devido a aplicação de um campo magnético. À medida em que se aumenta a intensidade do campo magnético aplicado a magnetização de um material também aumenta podendo-se atingir um valor máximo conhecido como magnetização de saturação M_s . A nível microscópico, a magnetização de um material resulta no deslocamento das paredes de domínio, consequência da inversão e da rotação dos momentos magnéticos [12]. Diversos mecanismos podem influenciar o processo de magnetização de um material, dentre eles, defeitos e impurezas presentes no material.

As curvas ou ciclos de histerese magnética são representações gráficas nas quais é apresentado o comportamento de um material ferromagnético quando sujeito a um campo magnético variável. Inicialmente, os domínios magnéticos apresentam-se desalinhados, e a partir da movimentação das paredes de domínios, ocorrido durante o processo de magnetização, os momentos tendem a ficar orientados em uma mesma direção [1].

Os primeiros estudos sobre o fenômeno da histerese magnética levaram em consideração duas hipóteses: a primeira, considerava a existência de uma força de interação mútua entre os momentos magnéticos presente no material; e a segunda descreve que a histerese magnética tinha origem na interação entre as paredes de

domínio magnético, com isso, uma força de resistência caracterizada como força de atrito era responsável pelo fenômeno [13].

Weber foi o primeiro a sugerir que os momentos magnéticos eram submetidos a uma força restauradora, na qual tentava manter o material ferromagnético em seu estado inicial não magnetizado. Assim, determinaram a histerese magnética devido a interações mútuas dos momentos magnéticos individuais. Sendo uma boa explicação para a magnetização inicial, porém, não explica o processo de magnetização residual do material [13].

A segunda hipótese foi determinada por Weidemann que afirmou que existiria uma força que atuaria contrária a rotação dos domínios magnéticos, ideia que explica a origem da histerese magnética [13].

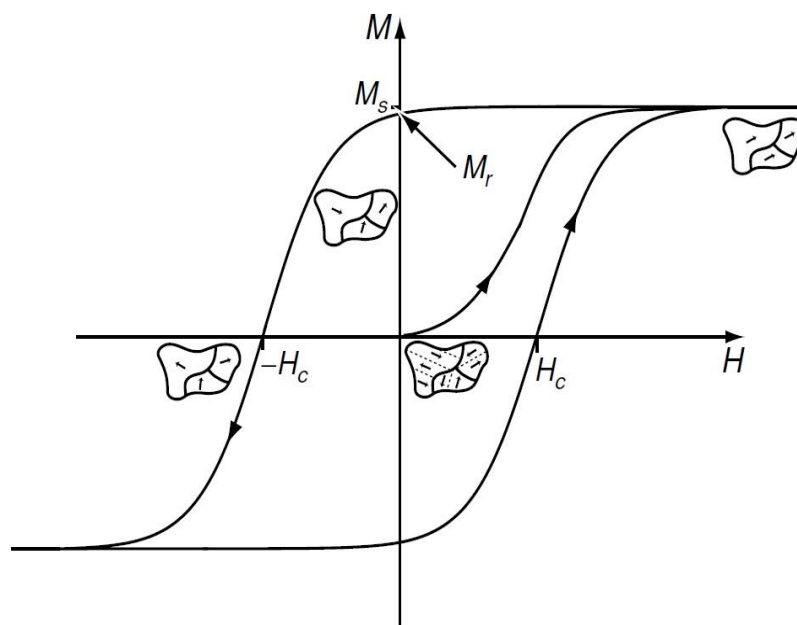
A ideia de Wiedemann determinava que os materiais magnéticos quando estão sob ação de um campo magnético aplicado possuíam uma energia responsável pela movimentação das paredes de domínio magnético. A resistência ao movimento das paredes era caracterizada por uma força de atrito originada pelos mecanismos de ancoragem das paredes de domínios durante a interação com defeitos no interior do material, caracterizando então uma força oposta que impedia o deslocamento das paredes de domínio [13].

A curva de histerese magnética, representada na Figura 7, mostra alguns parâmetros que são usados para a caracterização de um material ferromagnético. Quando o material, inicialmente desmagnetizado, é submetido a aplicação de um campo magnético H , o aumento do campo faz a curva de magnetização aumentar gradativamente. Após atingir um estado em que sua magnetização sofre mais variação, ou seja, quando os domínios magnéticos estão todos alinhados na mesma direção, considera-se que o material atingiu a saturação magnética ou magnetização de saturação M_s [3, 10].

Após a saturação, ao se reduzir o campo aplicado, chegando-se a um valor nulo novamente, em que se considera como magnetização residual M_r , porém será do campo aplicado. Em geral, o que se observa neste momento é a retenção de parte da magnetização, conhecida como magnetização remanente. Após chegar nesse resultado, o sentido do campo pode ser invertido, fazendo-se com que o material atinja uma magnetização nula.

O campo necessário para desmagnetizar o material, é conhecido como campo coercivo ou coercividade (H_c). Pode-se continuar aumentando o campo aplicado até que se chegue a uma nova saturação no sentido oposto à primeira. Logo após o campo é reduzido e em seguida torna-se invertido outra vez, até encerrar o ciclo [10].

Figura 7: Curva ou ciclo de histerese.



Fonte: Coey (2009) [14].

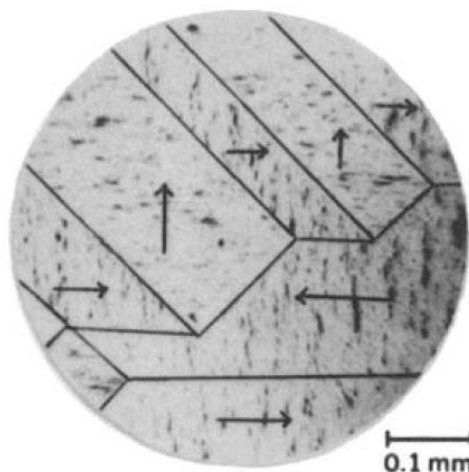
2.4 DOMÍNIOS MAGNÉTICOS

Os materiais ferromagnéticos apresentam-se em regiões de máxima de magnetização conhecidas como domínios magnéticos. Em geral, os domínios magnéticos apresentam orientações diferentes, fazendo com o que o material não manifeste uma magnetização espontânea [3, 15]. Alguns experimentos em magnetismo confirmam, de certa forma, a existência de domínios e a influência da microestrutura no processo de magnetização de um material. Um exemplo, é o ruído magnético de Barkhausen.

Com o uso da experimentação, utilizando o acoplamento de um alto-falante a um circuito, um famoso engenheiro observou alguns ruídos da forma como as ondas da praia, assim determinou que os materiais ferromagnéticos se magnetizam em muitas pequenas fases descontínuas, conhecido como efeito de Barkhausen [12]. Esse efeito reforça a ideia de que durante a magnetização os domínios magnéticos não apresentam uma movimentação contínua e sim “aos saltos” à medida em que encontram obstáculos à sua movimentação.

A figura 8 apresenta a formação de domínios magnéticos de um cristal de ferro-silício (Fe-Si). Na imagem, os segmentos de retas são as paredes de domínios magnéticos e as setas indicam a orientação dos domínios presentes no material com magnetização espontânea [12].

Figura 8: Domínios magnéticos em um cristal de Si-Fe.

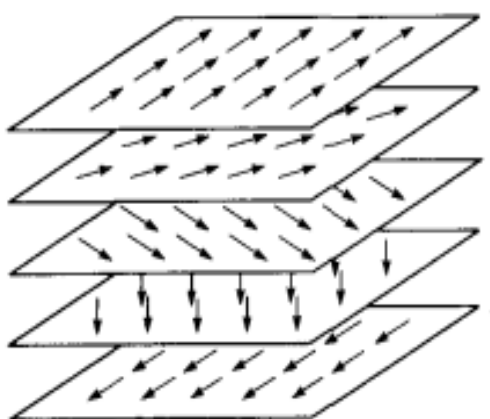


Fonte: Chikazumi (1964) [12].

Os domínios magnéticos, representados na Figura 9, são observados em locais onde os spins estão alinhados em uma mesma direção e tem relação em diminuir a energia magnética do material envolvido. Para que os momentos permaneçam na mesma direção é necessário rotacioná-los, essa rotação dá origem a uma movimentação das paredes de domínios magnéticos.

As paredes de domínios magnéticos são áreas compartilhadas que separam as orientações dos vetores de spins que apresentam magnetização espontânea de determinada substância ferromagnética [8]. Essas paredes sofrem uma movimentação à medida que a magnetização é aumentada [3]. O movimento das paredes de domínios ocorre quando um campo magnético é aplicado sobre a amostra [16], como pode ser observado a seguir:

Figura 9: Rotação dos spin na parede de domínio



Fonte: Chikazumi (1964) [12].

As paredes de domínios apresentam energia, na qual é caracterizada como o diferencial da energia dos momentos magnéticos quando são elementos das paredes e quando estão no interior das paredes. Desde que entendam que os ferromagnéticos são reais, ou seja, são ideias pois não apresentam nenhum defeito ou impureza microestrutural, afirma-se que a magnetização da amostra é independente da movimentação das paredes dos domínios [16, 17].

O deslocamento das paredes de domínio acontece quando um campo magnético é aplicado paralelo a magnetização de um dos domínios magnéticos. Ocorrendo no momento em que o volume do domínio magnetizado paralelo ao campo aplicado, caracterizando no decrescimento do volume do domínio contrário ao campo [12].

Durante o processo de orientação dos domínios magnéticos as paredes se movem com o objetivo de se alinharem na mesma direção do campo magnético aplicado. Durante a magnetização, sítios de ancoragens das paredes de domínios interferem no deslocamento das mesmas. Para superar as ancoragens a energia presente nas paredes de domínio dependerá da natureza particular e características do sítio de ancoragem e da orientação do domínio em relação ao campo externo [16, 18].

Alguns modelos foram desenvolvidos para descrever o movimento das paredes de domínios magnéticos, um deles é o modelo de Globus e Duplex [13]. O modelo afirma que as paredes são ancoradas nos contornos de grãos dando origem a uma força de atrito. Quando aplicado um campo magnético, as paredes de domínio sofrem dois tipos de movimentos, o primeiro é o movimento reversível, em razão do abaulamento dos domínios magnéticos, e o segundo sendo o movimento irreversível caracterizado pelo deslocamento das paredes [13].

O modelo de Jiles-Atherton afirma que a ancoragem das paredes de domínio é provocada, não só por contornos de grãos, mas, também, por heterogeneidades dentro do grão, bem como discordâncias e entre outros defeitos presentes no material [13]. Na próxima seção, será feita uma abordagem detalhada do modelo de Jiles-Atherton.

2.5 TEORIA DE JILES-ATHERTON

Dentre os modelos macroscópicos existentes que procuram explicar o fenômeno da histerese magnética, o modelo de Jiles-Atherton é um dos mais utilizados. Desenvolvida pelo engenheiro David C. Jiles e pelo físico David L. Atherton, a teoria leva em consideração as movimentações das paredes de domínio magnético durante os processos de magnetização e as deformações das mesmas devido a presença de defeitos e impurezas no material [17, 18].

Durante o processo de magnetização de um material ferromagnético as paredes de domínios sofrem mudanças na sua magnetização, caracterizadas como reversível e irreversível, o efeito do campo magnético em materiais ferromagnéticos resulta em uma transição reversível da magnetização à medida em que ela retorna ao seu valor inicial no instante em que o campo é removido. A histerese é considerada quando os dois processos, reversível e irreversível, ocorrem juntos, pois, com a retirada do campo a magnetização não volta ao seu estado original [17].

Um mecanismo que caracteriza os processos de mudança da magnetização dos materiais é a movimentação das paredes dos domínios. Para que ocorra um deslocamento reversível das paredes é necessário que haja uma energia potencial que aumente com a magnetização do material, assim, se o potencial for constante não há alteração na energia da parede. No momento em que o movimento da parede de domínio é interrompido significa que a energia da magnetização encontra-se em equilíbrio com o trabalho que é realizado pelo campo aplicado na amostra [13].

Portanto podemos calcular o trabalho total por unidade de volume realizado por um campo magnético, para que haja a condição de equilíbrio, através da seguinte equação, nesta equação o segundo termo se refere ao trabalho desempenhado no material [13].

$$E = \int_{\square} \square H dB = \frac{1}{\mu_0} \int B dB - \int M dB \quad (5)$$

A ancoragem das paredes de domínios é descrita por alguns métodos, um deles é a ideia de tensão na qual à medida em que as paredes de domínios se movimentam, devido a influência de um campo magnético aplicado, esses deslocamentos são interrompidos por causa dos sítios de ancoragens existentes no material que são regiões de deformação ou de tensões não homogêneas [13], em que as paredes de domínios magnéticos interagem por meio da magnetostricção com os momentos magnéticos para dar barreiras de energia nas regiões que as paredes de domínios deviam passar [17]. Esses sítios de ancoragens caracterizam assim os movimentos irreversíveis das paredes de domínios.

Outro método que relaciona o processo de ancoragem das paredes de domínio é a ideia de inclusão, em que nos diz que as paredes de domínio ao serem impedidas de se movimentarem, logo seriam atraídas para as inclusões que podem ser vazio, poros, rachaduras em materiais insolúveis. As paredes de domínios planas e a energia presente nelas eram pequenas quando impedida pelas inclusões existentes na amostra [17].

Como comentado anteriormente, para um movimento irreversível das paredes de domínios a energia nela presente precisa superar a energia dos sítios de ancoragens. Com isso para uma magnetização irreversível é preciso considerar a seguinte equação:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{\frac{k\delta}{\mu_0} - \alpha[M_{an} - M_{irr}]} \quad (6)$$

onde o coeficiente $\square$ apresenta valor +1 no momento em que H cresce positivamente, ou seja, $\frac{\square\square}{\square\square} > 0$, e -1 à medida em que H cresce negativamente, $\frac{\square\square}{\square\square} < 0$ [13].

De acordo com a teoria, elementos microestruturais que se opõem à magnetização (e desmagnetização) de um material ferromagnético, atuam como sítios de ancoragem das paredes de domínio magnético e dão origem à chamada histerese magnética. Esse mecanismo leva em consideração o fato de que os sítios de ancoragem dão origem a uma força de resistência, similar à força de atrito, que

se opõe ao movimento das paredes de domínio. Torna-se conveniente ressaltar que, anterior à esta teoria, a hipótese devido a Wiedemann já considerava a existência de uma força de atrito que dificultava a rotação dos domínios magnéticos e, assim, originava o fenômeno da histerese magnética [16, 17].

Durante a aplicação de um campo magnético (H) em um material ferromagnético, a magnetização total (M) da amostra varia, fazendo com que se atinja um valor máximo, conhecida como magnetização de saturação. Após a retirada do campo aplicado, alguns materiais conseguem reter parte da magnetização, fenômeno este conhecido como histerese magnética. Como dito anteriormente, várias teorias podem explicar os mecanismos que dão origem à histerese magnética, e uma delas é a teoria do modelo de Jiles-Atherton [4, 17].

A magnetização total de uma amostra dos ferromagnéticos é composta por duas etapas, sendo uma reversível (M_{rev}), que ocorre no início da magnetização, e outra irreversível (M_{irr}), na qual o resultado para a componente da magnetização total é dada por [4]:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (7)$$

Na caracterização inicial da expressão temos que o termo integrante referente a magnetização irreversível está relacionada à ancoragem das paredes de domínios magnéticos e o termo integrante da magnetização reversível está ligada ao movimento das paredes de domínios magnéticos. Mais tarde, constatou-se que esses termos estão associados a rotação irreversível e a rotação reversível [4, 17].

3 – METODOLOGIA E RESULTADOS ESPERADOS

Este trabalho consiste na realização de uma pesquisa básica envolvendo a Teoria de Jiles-Atherton que trata, dentre outras coisas, dos mecanismos de ancoragem das paredes de domínio magnético durante processos de magnetização e que, de acordo com a teoria, dão origem ao fenômeno da histerese magnética.

Para compor a seção de resultados, bem como para a elaboração das discussões dos mesmos, foram feitas pesquisas envolvendo artigos e outros trabalhos, todos de cunho acadêmico-científico. Com isso, foram relacionados resultados experimentais existentes na literatura científica com a teoria de Jiles-Atherton a respeito da origem da histerese magnética e os mecanismos que a influenciam, principalmente, os que influenciam a movimentação das paredes de domínio magnético.

Parâmetros associados ao fenômeno da histerese magnética, como coercividade, remanência magnética e magnetização de saturação foram levados em consideração durante a análise. Características associadas aos sítios de ancoragem das paredes de domínio magnético, como distribuição, geometria, composição, nucleação e densidade foram estudados.

A partir desta pesquisa e coleta de dados, mais especificamente, coleta de resultados que possam ser relacionados à teoria de Jiles-Atherton referente à histerese magnética em materiais ferromagnéticos, pretende-se, desta forma, contribuir com uma análise crítica, fundamentada na teoria, com os estudos existentes que tratam do fenômeno da histerese magnética, um problema até hoje investigado cientificamente dentro do espectro dos fatores que dão origem à esse fenômeno característico dos materiais ferromagnéticos.

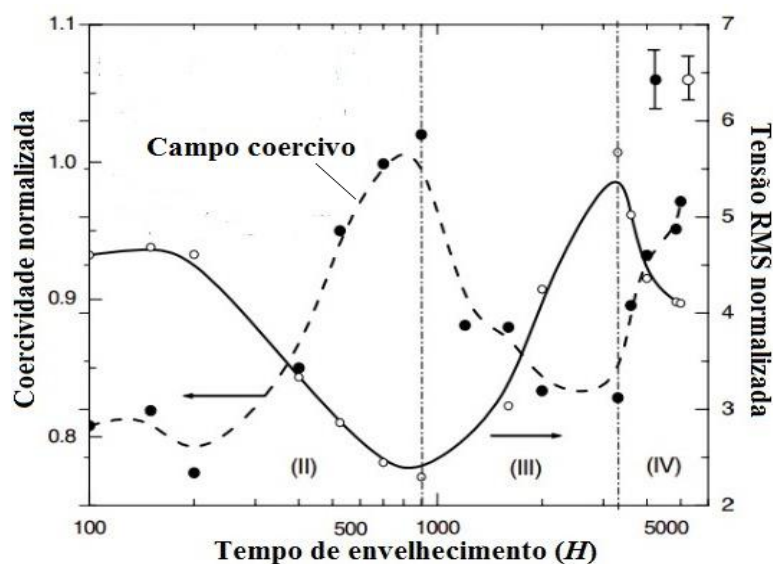
4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados resultados provenientes da literatura científica e que envolvem a temática deste trabalho. Serão apresentados dados experimentais obtidos por outros autores, e que mostram uma relação direta entre o mecanismo de ancoragem das paredes de domínio magnético e a influência na histerese magnética.

Resultados experimentais obtidos por Mohapatra *et al* [19] mostraram uma relação entre o processo de precipitação de fases na matriz ferrítica de aços 5Cr-0,5Mo e medidas magnéticas realizadas. Foram observados a influência da composição e morfologia das fases precipitadas nos mecanismos que dão origem à histerese magnética. Por exemplo, o crescimento de carbonetos foi responsável pela diminuição na densidade de sítios de ancoragem afetando, assim, o movimento das paredes de domínio magnético e, conseqüentemente, das propriedades magnéticas do aço estudado. [19].

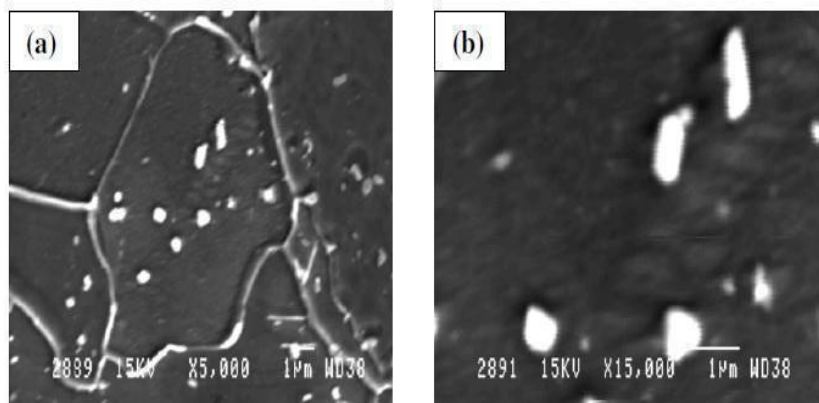
De acordo, com Mohapatra *et al* houve redução no campo coercivo ver Figura 10 quando o material passou por tratamentos térmicos que resultaram no aumento da distância dos carbonetos existentes e redução do número dessas partículas ocorrendo à temperatura de 600 °C após 2000 horas de tratamento térmico. Além disso, foram observadas diferentes geometrias dos carbonetos precipitados, alguns com morfologias globulares e outros alongados, como pode ser visto na Figura 11 [19].

Figura 10 - Variação do campo coercivo com o tempo de tratamento térmico em aço 5Cr-0,5Mo



Fonte: Mohapatra (2009) [19].

Figura 11 - Morfologias e distribuição dos carbonetos precipitados em aços 5Cr-0,5Mo

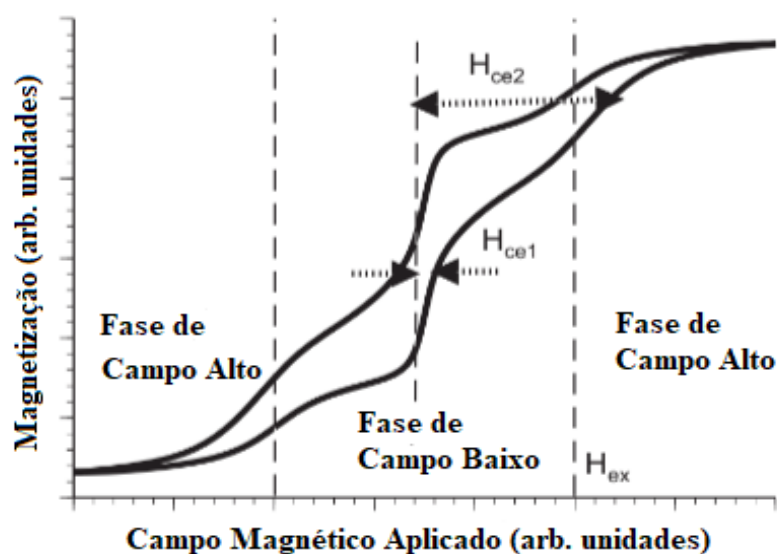


Fonte: Mohapatra (2009) [19].

Carbonetos são fases com propriedades paramagnéticas e que atuam como sítios de ancoragem das paredes de domínios. Esta evidência experimental está em acordo com a teoria de Jiles-Atherton, que prevê a influência das características dos sítios de ancoragem na movimentação das paredes de domínio.

Raghunathan *et al* utilizou a teoria de Jiles-Atherton para modelar materiais magnéticos bifásicos. O comportamento bifásico em materiais magnéticos pode ser induzido submetendo-os a processos de tratamento térmico adequados [4]. A Figura 12 exibe uma curva de histerese típica de um material magnético bifásico.

Figura 12 - Curva típica de um material magnético bifásico



Fonte: Raghunathan (2009) [4].

Nesses materiais, a passagem de uma fase (em campo magnético baixo) para outra fase (em campo magnético alto) na histerese magnética, diversos fatores foram levados em consideração, dentre eles, o fator de ancoragem, denotado por k na Equação 10 [4, 18,]. Além disso, densidade de domínios e acoplamento de domínios magnéticos foram levados em consideração na modelagem obtida pelos autores.

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_0 + \mu_0 \frac{\mu_{\text{eff}}^2}{\mu_0} \quad (8)$$

Resultados obtidos por Camelo *et al*, em ligas metálicas ferromagnéticas com diferentes teores de molibdênio (Mo), mostraram a influência da composição e distribuição de fases precipitadas no material. Essas fases atuam como mecanismos de ancoragens das paredes de domínio magnético influenciando no campo coercivo (H_c), magnetização remanescente (M_r) e magnetização de saturação (M_s). Os resultados obtidos (ver Figura 13) mostram o comportamento desses parâmetros com relação ao tempo de envelhecimento das ligas metálicas [20].

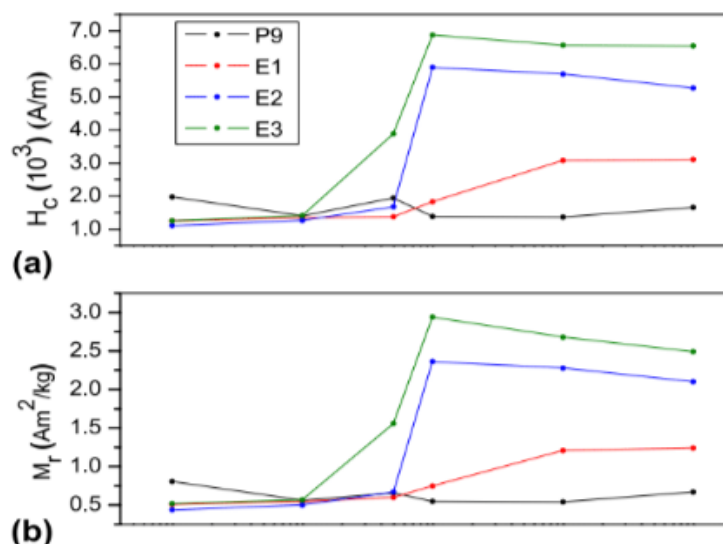
Associado à teoria de Jiles-Atherton, observa-se que a precipitação de fases nas ligas estudadas por Camelo *et al* influenciou de maneira significativa as propriedades magnéticas desses materiais metálicos. Essas fases precipitadas, apresentam propriedades paramagnéticas, pois são ricas em cromo e molibdênio que são elementos químicos classificados como paramagnéticos (ver Tabela 1). Com isso, atuam como sítios de ancoragem das paredes de domínio magnético.

Tabela 1 - Suscetibilidade magnética de algumas substâncias paramagnéticas

Alumínio	$2,07 * 10^{-5}$	Molibdênio	$1,19 * 10^{-4}$
Cromo	$3,13 * 10^{-4}$	Sódio	$8,48 * 10^{-6}$
Cloreto de cromo	$1,51 * 10^{-3}$	Titânio	$1,81 * 10^{-4}$
Sulfato de Mn	$3,70 * 10^{-3}$	Zircônio	$1,09 * 10^{-4}$

Fonte: Padilha [9].

Figura 13 – Parâmetros magnéticos de ligas ferromagnéticas submetidas a tratamentos térmicos



Fonte: Camelo (2017) [20].

5 – CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados resultados que ilustram a influência de características e elementos microestruturais no fenômeno da histerese magnética em materiais ferromagnéticos. Levando-se em conta o modelo de Jiles-Atherton para as curvas de histerese magnética, pode-se concluir que elementos que se diferenciam da fase ferromagnética do material atuam como sítios de ancoragem das paredes de domínios magnéticos. Com base na teoria sabe-se que as paredes de domínio apresentam dois movimentos, um reversível, causado pelo abaulamento das paredes de domínios magnéticos, e o outro irreversível, causado pela rotação dos domínios. É nesta última que se origina a histerese magnética.

Um material ferromagnético quando submetido a um campo magnético apresenta histerese que é causada pelos mecanismos de ancoragem. Os sítios de ancoragem podem ser defeitos, impurezas no material (como precipitados) dentre outros. A curva de histerese apresenta alguns parâmetros, como coercividade, magnetização remanescente e magnetização de saturação. Os resultados apresentados mostram que as alterações desses parâmetros estão intimamente relacionadas à presença de sítios de ancoragem das paredes de domínio, o que está de acordo com a teoria apresentada.

Com isso, conclui-se que os resultados aqui apresentados estão em concordância com a teoria de Jiles-Atherton no que diz respeito à origem da histerese e dos elementos que a influenciam.

Torna-se importante destacar que se pretendeu neste trabalho mostrar a importância da análise de teorias físicas que explicam fenômenos observados experimentalmente. Tal abordagem é crucial para a formação de qualquer cientista, bem como da atividade docente de áreas da ciência que foram desenvolvidas historicamente a partir das contribuições teóricas e experimentais de diversos cientistas no decorrer da história da humanidade.

6 – SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Segue alguns tópicos como sugestões de trabalhos futuros:

- Primeiro tópico: Estudos e aperfeiçoamento da equação que caracteriza a magnetização sem histerese;
- Segundo tópico: Estudos das características dos sítios de ancoragens que dão origem a histerese;
- Terceiro tópico: A influência causada pelo contorno dos grãos no movimento das paredes de domínio;
- Quarto tópico: Modelagem da equação da energia de ancoragem das paredes de domínio;
- Quinto tópico: Modelagem das morfologias que influenciam nas fases de ancoragem das paredes de domínio;
- Sexto tópico: Detalhamento dos processos para geração de ligas bifásicas;

REFERÊNCIAS

- [1] KNOBEL, M.; **Aplicações do magnetismo**, ciência hoje, vol. 36, nº 215, 2005.
- [2] YOUNG, H. D. **Física III: eletromagnetismo** / Young e Freedman; [Colaborador A. Lewis Ford]; tradução Sonia Midori Yamamoto; revisão técnica Adir Moysés Luiz. São Paulo, Addison Wesley, 2009.
- [3] CAMELO, K. J. **Caracterização Magnética de Aços Ferríticos FeCrMo Submetidos a Degradação Térmica**, 2013, 83 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- [4] RAGHUNATHAN, A.; MELIKHOV, Y.; SNYDER, J. E.; JILES, D.C.; **Modeling of two-phase magnetic materials based on Jiles–Atherton theory of hysteresis**, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 324, 20–22, 2012.
- [5] ZIRKA, S. E.; MOROZ, Y. I.; HARRISON, R. G. and CHWASTEK, K.; **On physical aspects of the Jiles-Atherton hysteresis models**, Journal of Applied Physics, 112, 043916, 2012.
- [6] SERWAY, R. A. **Princípios de física** / Raymon A. Serway, John W. Jewett Jr.; tradução Foco Traduções; revisão técnica Keli Seidel. 1ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- [7] GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica** / David J. Griffiths; tradução Heloisa Coimbra de Souza; revisão técnica Antonio Manoel Mansanares. - 3 ed. - São Paulo, Pearson Addison Wesley, 2011.

- [8] CULLITY, B. D; C.D. GRAHAM. **Introduction to Magnetic Materials. Second edition edn.** A John Wiley & Sons, Inc. 2009.
- [9] PADILHA, A. F.; **Materiais de Engenharia. Microestrutura e Propriedades.** Hemus, Curitiba-PR, 2000.
- [10] NOVAK. M. A., **Introdução ao Magnetismo.** Instituto de Física. UFRJ, 2000.
- [11] HOLANDA, L. M., RAMOS, I. R. O., LIMA, A. P., BRAGA, J. P. M., SOUSA H. T. C. M. Comportamento magnético de materiais por meio da mecânica estatística, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Rio Grande do Norte, vol. 42, p. 02 - 09, dez. 2019.
- [12] CHIKAZUMI, S. 1922- **Physics of ferromagnetism** / Soshin Chikazumi; English ed. prepared with the assistance of C. D. Graham, Jr. — 2nd ed. English version of first ed. published under title: Physics of magnetism. New York: Wiley, 1964.
- [13] JILES, D. C. and ATHERTON, D. L.; **Theory of ferromagnetic hysteresis**, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 61, 48-60 North-Holland, Amsterdam 1986.
- [14] COEY, J. M. D.; **Magnetism and Magnetic Materials**, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, 2009.
- [15] DIAS, A. R. de P. **Avaliação de Transformações Microestruturais em um Aço Inoxidável Super dúplex UNS S32760 sob diferentes condições de resfriamentos e Uso da Técnica do Ruído Barkhausen como Ferramenta de Inspeção**, Porto Alegre, p. 15-17, 2011.
- [16] JILES, D. C. and ATHERTON, D. L.; **Theory of the magnetisation process in ferromagnets and its application to the magnetomechanical effect**, J. Phys. D: Appl. Phys., 17, 1265-1281. Printed in Great Britain, 1984.
- [17] JILES D. **Introduction to Magnetism and Magnetic Materials**, New York, CRC Press Taylor & Francis Group, 2016.
- [18] JILES, D. C. and ATHERTON, D. L.; **Theory of ferromagnetic hysteresis (invited)**, Journal of Applied Physics, 55, 2115, 1984.
- [19] MOHAPATRA, J. N. PANDA, A.K. and MITRA, A. **Magnetic properties evaluation of ageing behaviour in water-quenched 5Cr–0.5Mo steel**, J. Phys. D: Appl. Phys., 42, 095006, 2009.
- [20] CAMELO, K. J. ; OLIVEIRA JUNIOR, F. C.; SILVA, M. R. da ; VASCONCELOS, I. F.; **Influence of precipitates on the magnetic properties of Fe–Cr–Mo alloys studied by X-ray diffraction, Mössbauer spectroscopy and vibrating sample magnetometry**, Journal of materials research v.32 n°.7, p.1316 - 1323 , 2017.

$\frac{-\int_I^{-I} \square \square \square \square \square}{\int_I^{-I} \square \square \square \square \square}$, resolvendo as integrais separadas, temos que:

$$\begin{aligned}
 \bullet \Rightarrow \int_I^{-I} \square \square \square \square \square &= \left[\square \cdot \frac{I}{\square} \square \square \square \right] - \int_I^{-I} \left(\frac{I}{\square} \right) \square \square \square \square \square \\
 &= -\frac{I}{\square} \square^{-\square} - \frac{I}{\square} \square^{\square} - \left[\frac{I}{\square} \cdot \frac{I}{\square} \square^{\square \square} \right] \\
 &= -\frac{I}{\square} \square^{-\square} - \frac{I}{\square} \square^{\square} - \left[\frac{I}{\square^2} \square^{-\square \square} - \frac{I}{\square^2} \square^{\square \square} \right] \\
 &= -\frac{I}{\square} \square^{-\square} - \frac{I}{\square} \square^{\square} - \frac{I}{\square^2} \square^{-\square} + \frac{I}{\square^2} \square^{\square} \\
 &= -\frac{I}{\square} (\square^{-\square} + \square^{\square}) + \frac{I}{\square^2} (\square^{\square} - \square^{-\square}) \\
 \bullet \int_I^{-I} \square \square \square \square \square &= \left[\frac{I}{\square} \square \square \square \right] \\
 &= \frac{I}{\square} \square^{-\square} - \frac{I}{\square} \square^{\square}
 \end{aligned}$$

Substituindo os resultados das integrais na equação (I), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \square &= \frac{-\left[-\frac{I}{\square} (\square^{-\square} + \square^{\square}) + \frac{I}{\square^2} (\square^{\square} - \square^{-\square})\right]}{\frac{I}{\square} \square^{-\square} - \frac{I}{\square} \square^{\square}} \\
 &= \frac{-(\square^{-\square} + \square^{\square}) - \frac{(\square^{-\square} - \square^{\square})}{\square}}{(\square^{\square} - \square^{-\square})} \\
 &= \frac{(\square^{-\square} + \square^{\square})}{(\square^{\square} - \square^{-\square})} - \frac{(\square^{\square} - \square^{-\square})}{\square(\square^{\square} - \square^{-\square})}, \text{ simplificando:} \\
 &= \frac{(\square^{-\square} + \square^{\square})}{(\square^{\square} - \square^{-\square})} - \frac{I}{\square}
 \end{aligned}$$

Nesta equação, temos que:

$$\frac{(\square^{\square} + \square^{-\square})}{(\square^{\square} - \square^{-\square})} = \square \square h = \frac{(\square^{\square} - \square^{-\square})}{(\square^{\square} + \square^{-\square})} = \square \square \square \square h = \frac{I}{\square \square h} = \frac{(\square^{\square} + \square^{-\square})}{(\square^{\square} - \square^{-\square})}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\square^{-\square} + \square^{\square})}{(\square^{\square} - \square^{-\square})} - \frac{I}{\square} \\
 &\Rightarrow \square \square \square \square (\square) - \frac{I}{\square}
 \end{aligned}$$

Assim, a equação para a magnetização fica:

$$M = M_s \cdot \cos \theta \cdot \left(\coth \left(\frac{\mu_B g H}{k_B T} \right) - \frac{1}{\frac{\mu_B g H}{k_B T}} \right), \text{ em que } \cos \theta = M / M_s, \text{ assim:}$$

$$M = M_s \cdot \left(\coth \left(\frac{\mu_B g H}{k_B T} \right) - \frac{1}{\frac{\mu_B g H}{k_B T}} \right)$$

Para a magnetização sem histerese em termos de um campo efetivo H_e , basta usarmos a função de Langevin, onde M_s é a magnetização de saturação, assim:

$$\begin{aligned} M_{\text{eq}}(H_e) &= M_s \cdot L\left(\frac{\mu_B g H_e}{k_B T}\right) \\ M_{\text{eq}}(H_e) &= M_s \cdot \left(\coth \left(\frac{\mu_B g H_e}{k_B T} \right) - \frac{1}{\frac{\mu_B g H_e}{k_B T}} \right) \end{aligned}$$