



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS CORRENTE
CURSO: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAIKON JOSE SANTANA DA SILVA

INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES FUNCIONAIS COM ABORDAGEM NO ENSINO
MÉDIO

CORRENTE - PI
2022

MAIKON JOSE SANTANA DA SILVA

INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES FUNCIONAIS COM ABORDAGEM NO ENSINO
MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de
Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Piauí. Campus Corrente.

Orientador: Prof. Me. Marcio Luiz Duarte da
Silva Coorientador. Prof. Me. Francisco de
Paula Santos de Araújo Junior

CORRENTE – PI

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Silva, Maikon José Santana da
S586c Introdução as equações funcionais com abordagem no ensino médio / Maikon José Santana da Silva. - 2023.
38 p.: il.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente, 2023.
Orientadora : Profa Ma. Marcio Luiz Duarte da Silva
Coorientadora : Profa Esp. Francisco de Paula Santosde Araújo Junior
1. Matemática - estudo e ensino. 2. Formação de professores. 3. Equações funcionais. 4. Equações. I. Título.

CDD - 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB 3/1251

MAIKON JOSE SANTANA DA SILVA

INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES FUNCIONAIS COM ABORDAGEM NO ENSINO
MÉDIO

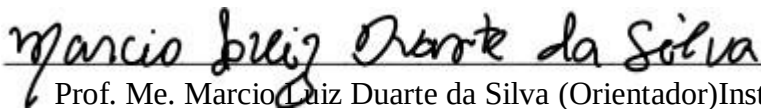
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus Corrente.

Aprovada em: 07/12/2022.

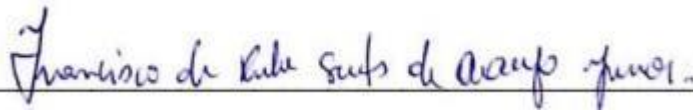
BANCA EXAMINADORA



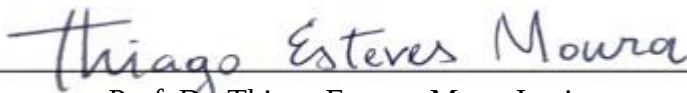
Prof.^a. Ma. Anna Karla Barros da Trindade Instituto
Federal do Piauí (IFPI)



Prof. Me. Marcio Luiz Duarte da Silva (Orientador) Instituto
Federal do Piauí (IFPI)



Prof. Me. Francisco de Paula Santos de Araujo Junior (Coorientador) Secretaria da
Educação (SEDUC - PI)



Prof. Dr. Thiago Esteves Moura Instituto
Federal do Piauí (IFPI)

AGRADECIMENTOS

“Pois todas as coisas vêm dele, existem por causa dele e são para ele. A ele seja toda glória para sempre”. Agradeço a Deus pela oportunidade que ele me conce-deu para terminar esse curso, dando sabedoria, desafios, novas oportunidades e força para cumprir toda essa jornada.

Agradeço aos meus familiares que estiveram apoiando e dando suporte, em especial minha mãe, meu tio Marlos e meus avôs.

Agradeço aqueles que foram meus professores durante a graduação, onde to-dos eles tiveram uma grande contribuição para minha vida acadêmica. Alguns profes-sores tiveram uma contribuição além do que era proposto, o professor Alencar no iní-cio do curso sempre estava me incentivando a estudar, as vezes ele dava aula em contraturno para que conseguíssemos revisar conceitos básicos.

Os professores Carlos Adriano e Marcio Duarte sempre estava à disposição para tirar as dúvidas que apresentássemos a eles. A professora Cleonice foi muito importante para conclusão desse curso sempre disposta a ajuda, teve uma grande importância nas disciplinas de estágio, onde alguns foram realizados durante a pan- demia, mesmo com essas dificuldades ela se propôs a ajuda para que conseguísse- mos terminar o curso.

Agradeço aos meus amigos e colegas Wanderson, Lucas, Gutierry e Gênys que me ajudaram bastante durante esse curso, e demais colegas.

Por fim quero agradecer aos meus orientadores que tem grande contribuições nesse trabalho, o professor Marcio que me ajudou a modela esse tema, o professor Paulo que mesmo não sendo da instituição decidiu contribuir com a construção desse trabalho.

“As equações são mais importantes para min,
Porque a politica é para o presente, mas uma Equação é
algo para eternidade.” (Albert Einstein)

RESUMO

O presente estudo tem por tema as equações funcionais, onde iremos apresentar a solução de alguns problemas, maneiras de resolver esses problemas e relações com outros assuntos. No qual o objetivo do estudo é analisar as equações funcionais de uma e duas variáveis fazendo uma relação com conceitos visto na educação básica. Para construção desse trabalho foi feita a reunião de alguns matérias em artigos e livros que auxiliaram na elaboração desse projeto, dessa forma sendo uma pesquisa de cunho bibliográfico. Para uma melhor compressão do assunto é muito importante saber alguns conceitos preliminares, por isso foi apresentado algumas propriedades e relações de equações e funções. A apresentação do assunto é feita analisando alguns aspectos do contexto histórico, onde foi apresentado os principais matemáticos dessa área e seus respectivos trabalhos que deram início aos estudos das equações funcionais. Com o intuito de ter uma melhor compressão do assunto apresentamos alguns exemplos com suas soluções, relações com conteúdo do ensino médio e relações com outros assuntos tais como equações diofantina e funções multiplicativas. Por fim podemos perceber que esse conteúdo pode ser aplicado no ensino básico.

Palavras-chaves: Equações funcionais; Assuntos; Equações; Funções.

ABSTRACT

The present study has as its theme the functional equations, where we will present the solution of some problems, ways to solve these problems and relations with other subjects. In which the objective of the study is to analyze the functional equations of one and two variables making a relationship with concepts seen in basic education. For the construction of this work, some materials were gathered in articles and books that helped in the elaboration of this project, thus being a bibliographical research. For a better understanding of the subject it is very important to know some preliminary concepts, for this reason some properties and relations of equations and functions were presented. The subject is presented by analyzing some aspects of the historical context, where the main mathematicians in this area and their respective works that started the study of functional equations were presented. In order to have a better understanding of the subject, we present some examples with their solutions, relationships with high school content and relationships with other subjects such as Diophantine equations and multiplicative functions. Finally, we can see that this content can be applied in basic education.

Keywords: Functional equations; Matters; Equations; Functions.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Revista Eureka13

Tabela 2- Olimpíadas matemáticas23

LISTA DE SIGLAS

OBM Olimpíada Brasileira de matemática

IMO Olimpíada Internacional de matemática

IMPA Instituto de matemática Pura e Aplicada

PROLÍMPICO Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos

IBERO Olimpíada Ibero-Americana de matemática

Lista de Símbolos

$\forall$ Para todo

$\in$ Pertence

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números Reais

$\mathbb{R}^*$ Conjunto dos números Reais não nulos

Im Conjunto imagem

$\neq$ Diferente

$<$ Menor que

$\exists$ Existe

$:$ Tal que

$f^{-1}(x)$ Função inversa de $f(x)$

$>$ Maior que

$\Rightarrow$ Implicação

$\sim$ Equivalência

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos números Inteiros

$|$ Divide

$\#$ Cardinalidade

$\mathbb{N}$ Conjunto dos números Naturais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	METODOLOGIA	12
3	CONCEITOS PRELIMINARES.....	14
3.1	Equação polinomial	14
3.1.1	Raiz de uma equação polinomial	14
3.1.2	Solução de uma equação polinomial	14
3.2	Funções	15
3.2.1	Operações básicas com função	15
3.2.2	Injetora, Sobrejetora e Bijetora.....	16
3.2.3	Função inversa.....	16
3.2.4	Paridade de função.....	16
3.3	Limite de funções	17
3.3.1	Propriedade dos limites.....	17
4	CONTEXTO HISTÓRICO.....	18
4.1	Nicole Oresme	19
4.2	Augustin Louis Cauchy.....	19
4.3	Gregory de Saint-Vincent.....	20
4.4	Jensen, D' Alembert Ramanujan.....	20
5	EQUAÇÕES FUNCIONAIS DE UMA E DUAS VARIÁVEIS E SUA RELAÇÃO COM OUTROS ASSUNTOS	22
5.1	Exemplo de equação funcional com duas variáveis	23
5.2	Exemplo de equação funcional com uma variável	26
5.3	Valor numérico de uma equação funcional.....	27
5.4	Relação da equação funcional com equação diofantina.....	28
5.5	Relação das equações multiplicativas e função de Möbius com equações funcionais.....	29
6	EQUAÇÕES FUNCIONAIS NO ENSINO MÉDIO.....	31
6.1	Função ímpar e equações funcionais.....	31
6.1.1	Solução de uma equação funcional ímpar	31
6.2	Função par e equações funcionais.....	32
6.2.1	Solução da equação funcional par.....	32
6.3	Função inversa e equações funcionais.....	33
6.3.1	Solução de uma função inversa.....	33
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	34
	REFERÊNCIAS.....	36

1 INTRODUÇÃO

A equação é um assunto muito estudado durante o ensino básico e podemos aprofundar ainda mais no seu estudo durante o curso de licenciatura em matemática. Com a possibilidade de estudar algumas equações onde a solução não serão números, dentro dessa ideia podemos analisar durante esse trabalho as equações funcionais.

Ao longo do curso de licenciatura em matemática não tivemos nenhuma disciplina que estudássemos a respeito de equações funcionais, visto que esse assunto é mais estudado nas olimpíadas de matemática, tais como OBM (Olimpíada Brasileira de matemática) e IMO (Olimpíada Internacional de matemática). O primeiro contato com o tema foi no evento realizado pelo IMPA (Instituto de matemática Pura e Aplicada) em janeiro de 2022 chamado Prolímpico (Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos).

Logo após tomar conhecimento a respeito do assunto observar-se o quanto o assunto é atrativo, pois de maneira informal podemos dizer que o problema de uma equação funcional na maioria das vezes será encontrar uma função que seja solução de uma equação, nos demais casos iremos calcular um valor específico para essa função. Outro ponto muito importante desse trabalho, que estabelece a nossa problemática, é como relacionar as equações funcionais com assuntos do ensino médio e fundamental.

O conteúdo de equações funcionais segundo Small (2007), mesmo não sendo muito conhecido acredita-se que já havia alguns estudos de forma indireta do assunto desde o século XIV com Nicole Oresme que concedeu a definição de função linear através de uma equação funcional.

O objetivo desse trabalho é analisar as equações funcionais de uma e duas variáveis, com o intuito de descrever como iremos encontrar as suas soluções, sua relação com conceitos básicos e sua relação com outros assuntos, com relação as equações funcionais com duas variáveis é importante citar alguns matemáticos que tiveram grande contribuições para seus estudos, tais como Cauchy, Jensen e d'Alembert.

No capítulo 2, apresentamos a metodologia desse trabalho, falando sobre a importância da revisão bibliográfica, ainda exibimos alguns materiais que auxiliaram na construção desse trabalho.

Para uma compreensão dos conceitos relacionados a equações funcionais, é necessário ter um conhecimento prévio de alguns assuntos, onde no capítulo 3 conceitos preliminares iremos abordá-los, pois os conceitos de equações e funções serão o alicerce para o entendimento do assunto de equação funcionais.

No capítulo 4 falamos sobre os principais autores matemáticos que tiveram contribuições no estudo das equações funcionais, os primeiros estudiosos desse assunto encontraram algumas relações entre temas que eles estavam estudando e equações funcionais de forma implícita. Com o auxílio desses conceitos conseguiremos resolver equações funcionais de uma e duas variáveis e fazer uma relação com outros assuntos visto no capítulo 5, tendo em vista que para resolver essas equações devemos seguir alguns passos que são apresentados nesse capítulo.

Podemos perceber que esse assunto nem é tão complexo, pois conseguimos fazer uma relação com conceitos básicos, que estudamos no ensino médio pois po-

demos observar esse fato no capítulo 6, por último como considerações finais capítulo 7, percebemos que por mais que esse assunto seja de certa forma desconhecido, é possível apresentar para os alunos.

Procurar-se com esse trabalho mostrar a relação entre dois conceitos muito utilizados na matemática que são as funções e equações, além de proporcionar para os demais discentes um novo conhecimento que dificilmente eles terão contanto como assunto durante o curso de licenciatura em matemática.

2 METODOLOGIA

O presente trabalho tem como base teórica e metodológica uma pesquisa de revisão bibliográfica, onde o objetivo é apresentar um assunto que venha trazer um novo conhecimento relacionado a equações funcionais. Sobre pesquisas de revisão bibliográfica temos a seguinte afirmação:

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todas os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Boa parte dos estudos exploratórios pode ser definida como pesquisas bibliográficas. (GIL, 2002, p. 44).

Para construção desse trabalho foi feita a leitura de alguns artigos e livros, em português e inglês, visto que há uma carência na quantidade de artigos escritos em português com relação a esse tema, as principais plataformas para pesquisa desses documentos foram o Google acadêmico, Profmat e revista Eureka.

Esse trabalho tem como fundamentação uma pesquisa qualitativa, onde seu objetivo é apresentar um conteúdo desconhecido no período da graduação e as relações entre equações e funções dentro desse assunto, além de apresentar uma interdisciplinaridade do conteúdo de equações funcionais com outros assuntos estudados na licenciatura.

Revista Eureka é uma revista da OBM, já foram publicadas 42 edições onde suas publicações começaram desde maio de 1998, essa revista faz a publicação de assuntos matemáticos relacionados a problemas olímpicos de competições nacionais e internacionais. Para desenvolvimento dessa pesquisa foram utilizadas as seguintes revistas apresentadas na tabela 1:

Tabela 1 - Revista Eureka

Título da revista	Número da revista	Ano de publicação
-------------------	-------------------	-------------------

Aplicação dos números complexos a geometria	6	1999
Equações diofantinas	7	2000
Funções multiplicativas e função de Möbius	8	2000
Equações de funcionais	9	2000
Os números irracionais	10	2001
Soluções de problemas	36	2012
Equações funcionais para os mais jovens	37	2013
Soluções de problemas	38	2013

Fonte 1 - Produzido pelo autor com base nos dados da (Revista Eureka, 2022)

As principais revistas que iremos utilizar nesse trabalho será as revistas: 7, 8, 9 e 37 as demais revistas que iremos utilizar será para auxiliar na compreensão desse assunto, visto que as revistas anteriores e posteriores trazem uma breve reflexão sobre o assunto.

3 CONCEITOS PRELIMINARES

Para adentrarmos na resolução e identificação das equações funcionais precisamos ter como base alguns conceitos indispensáveis, relacionados a equações e funções. Onde as equações polinomiais tem o seguinte formato, $p(x) = a_0 + a_1x +$

$$a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

3.1 Equação polinomial

De maneira bem informal podemos dizer que uma equação é uma expressão com uma ou mais variáveis que será igual a algum valor numérico. Segundo o que está escrito no livro dos fundamentos da matemática elementar (2013) temos o seguinte:

Definição 3.1 Dadas duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença aberta $f(x) = g(x)$.

3.1.1 Raiz de uma equação polinomial

Uma raiz de equação polinomial será um número que iremos substituir na expressão dada e esse número será igual ao valor do outro membro. Segundo as definições de raiz do livro fundamentos da matemática elementar (2013) temos.

Definição 3.2 *Dada uma equação polinomial $f(x) = g(x)$, chama-se raiz da equação todo número que, substituído no lugar de x , torna a sentença verdadeira. Assim, o número r é raiz de $f(x) = g(x)$ se, e somente se, $f(r) = g(r)$ é sentença verdadeira.*

3.1.2 Solução de uma equação polinomial

Em uma equação polinomial quando encontramos todas as suas raízes com base na definição 3.2 definimos esses números como sendo o conjunto solução ou conjunto verdade da equação polinomial. Para encontramos o conjunto solução da equação devemos ter em mente as diferentes maneiras e métodos utilizados para resolver uma equação, pois algumas equações não tem uma maneira trivial de resolver.

Dessa maneira podemos ter como base os conceitos de equações polinomiais como ferramenta que irá proporcionar algumas compreensões básicas para o assunto de equações funcionais, onde iremos buscar maneiras de compreender esses temas básicos de equação polinomial como raiz e conjunto solução na equação funcional.

3.2 Funções

Uma função está bem definida quando existe a relação de correspondência entre os conjuntos A e o conjunto B.

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B : (x, y) \in f)$$

As primeiras representações da notação de uma função foram feitas por Leonard Euler (1707 - 1783), onde ele escreveu essa notação como sendo $y = f(x)$, ele começou a utilizar essa notação por volta de 1734.

3.2.1 Operações básicas com função

Com as operações básicas iremos definir algumas relações entre duas funções denominadas f e g assim teremos as seguintes igualdades.

- 1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- 2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- 3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- 4) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$

As funções com operações de soma, subtração, produto e quociente estão bem definidas para qualquer valor de $f(x)$ e $g(x)$, somente no caso 4) que $g(x)$ deve ser diferente de zero.

Existe uma definição muito importante para as funções, as relações entre domínio de uma ou mais funções, segundo o livro fundamentos da matemática elementar “chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções: domínio = conjunto de partida. Isto é $D = A$ ” (IEZZI E MARUKAMI, 2013, p. 88).

Após a definição de domínio podemos apresentar a definição de imagem de uma função, segundo o livro fundamentos da matemática elementar “chamamos de imagem o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto: imagem é subconjunto do contradomínio. Isto é $Im \subset B$.” (IEZZI E MARUKAMI, 2013, p. 88).

3.2.2 Injetora, Sobrejetora e Bijetora.

As definições de injetividade, sobrejetividade e bijetividade está relacionada com os conceitos de domínio e imagem, analisando esses conceitos como fundamentação para as definições seguinte, temos a seguinte relação entre as definições e conceitos.

Definição 3.3 Dizemos que a função $f: X \rightarrow Y$ são injetora se elementos distintos do domínio X tiverem imagens Y distintas, ou seja, dois elementos $x_1 \neq x_2$ não podem ter a mesma imagem $f(x_1) \neq f(x_2)$, quando essas condições acontece temos uma função injetora.

Definição 3.4 Dizemos que uma função $f: X \rightarrow Y$ é sobrejetora se, e somente se, o seu contradomínio é igual a imagem, isto é, se $Im = Y$.

Definição 3.5 Uma função é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.

3.2.3 Função inversa

Definição 3.6 Diz-se que uma função $f: X \rightarrow Y$ é invertível se a cada elemento y do contradomínio Y estiver associado um único elemento x do domínio X , tal que $y = f(x)$, onde utilizamos a seguinte notação $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$. Para todo x e y .

A notação de função inversa também apresenta um outro conceito de funções chamado composição de funções, além disso existe uma restrição sobre a função inversa, dado uma $f(x)$ iremos encontrar a $f^{-1}(x)$ somente quando a função for bijetora ou seja, obedecendo a definição 3.5 apresentada acima. Analisando a definição $f^{-1}(f(x)) = x$ podemos perceber que existe uma equação funcional nessa notação, pois podemos analisar essa representação como uma equação e o objetivo final desse problema é encontrar uma função que resolva essa notação, assim com base nesse conceito temos uma equação funcional.

3.2.4 Paridade de função

Quanto a paridade das funções podemos observar que existe duas definições de paridade as funções par e funções impar onde temos os seguintes enunciados para suas definições.

Definição 3.7 Dizemos que uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma função par, se para todos os pontos x do seu domínio, for satisfeita a seguinte igualdade.

$$f(x) = f(-x) \quad (1)$$

Definição 3.8 Dizemos que uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma função ímpar se, em todos os pontos do seu domínio a igualdade abaixo for satisfeita.

$$f(x) = -f(-x) \quad (2)$$

3.2.5 Paridade de função

Quanto a paridade das funções podemos observar que existe duas definições de paridade as funções par e funções impar onde temos os seguintes enunciados para suas definições.

Definição 3.7 Dizemos que uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma função par, se para todos os pontos x do seu domínio, for satisfeita a seguinte igualdade.

$$f(x) = f(-x) \quad (1)$$

Definição 3.8 Dizemos que uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma função ímpar se, em todos os pontos do seu domínio a igualdade abaixo for satisfeita.

$$f(x) = -f(-x) \quad (2)$$

As definições de função par e função ímpar também pode ser vista como sendo uma equação funcional, pois podemos olhar para essas expressões como sendo uma equação funcional. Nos próximos capítulos iremos analisar como resolver essas equações funcio-nais de paridade de funções, assim como a função inversa.

3.3 Limite de funções

Por fim podemos ressaltar a importância do conteúdo de limites, onde nesse conteúdo utilizamos as funções como seu objeto de estudo, com relação a esse assunto temos a seguinte definição segundo Guidorizzi (2013).

Definição 3.9 *Sejam $f(x)$ uma função e p um ponto de seu domínio definida em intervalo aberto contendo p , exceto o próprio p . dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a p é L e escrevemos.*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

Quando,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in D_f \ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

3.3.1 Propriedade dos limites

Proposição 3.1 *Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer*

temos:

1. $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow p} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow p} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)}$ com $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow p} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow p} f(x)]^n$ para qualquer inteiro n .
6. $\lim_{x \rightarrow p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}$, se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) > 0$ e n inteiro se, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) < 0$ n é inteiro positivo ímpar.
7. $\lim_{x \rightarrow p} \text{sen}[f(x)] = \text{sen}[\lim_{x \rightarrow p} f(x)]$

Com o auxílio dessas propriedades conseguimos calcular qualquer limite. Para observar a aplicação das propriedades veja a solução do exemplo 1.

Exemplo 1. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} [x^2 + x]$.

$$x \rightarrow 1$$

Para resolver esse problema vamos aplicar a 1. Propriedade assim teremos a seguinte expressão.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x$$

Como as funções são contínuas em seus domínios, podemos substituir o valor que x está se aproximando, assim teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x = 1^2 + 1 = 2$$

Esse processo para resolver um limite será um pouco mais trabalhoso quando as funções não forem contínuas, ou seja, quando tivermos uma indeterminação, nesse caso devemos fazer a utilização de alguns artifícios matemáticos para encontrar o valor do limite. Quando encontramos uma função que seja solução de uma equação funcional toda essa definição de limite será válida para essa função. Os demais conceitos matemáticos também podem ser aplicados a uma função que seja solução de alguma equação funcional.

Ainda que não estudamos as equações funcionais durante a graduação ou tivemos contato com as equações dentro de outros assuntos, podemos perceber através do seu estudo que não é uma matemática nova, de acordo com Freire (2021) já havia alguns estudos desde meados do século XIV e além disso grandes matemáticos concederam suas contribuições no estudo das equações funcionais, onde tais matemáticos foram homenageados com seus nomes na identificação de algumas equações. Nesse capítulo iremos falar sobre esses matemáticos e identificar as suas equações funcionais.

4.1 Nicole Oresme

De acordo com Small (2007) em 1352 foi publicado o trabalho *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*. Pelo matemático Nicole Oresme, acredita-se que ele tenha nascido por volta de 1323 e faleceu por volta de 1382. Nesse trabalho Nicole Oresme forneceu uma definição de funções lineares, de forma indireta essa definição utilizava equações funcionais. Além de matemático Nicole Oresme tinha outras formações tais como: físico, filósofo, astronauta, teólogo, biólogo e ainda tinha mais algumas formações. O trabalho *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* que ele publicou tinha como objetivo a análise de movimento uniforme, ou seja, estava relacionado com os conhecimentos de física, nesse caso, com base nas definições físicas que ele estava propondo no seu tratado foi apresentado a seguinte relação:

$$\frac{y - x}{z - y} = \frac{f(y) - f(x)}{f(z) - f(y)} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Apresentado as primeiras definições de equações funcionais, temos que a equação (3) definida por Nicole Oresme tem 3 variáveis com $z \neq y$ e a sua solução é uma função afim do tipo.

$$f(x) = ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

4.2 Augustin Louis Cauchy

O matemático francês Augustin Louis Cauchy teve sua vida dedicada basicamente os conhecimentos matemáticos, nasceu em 1789 em Paris e faleceu em 1857 após seus sessenta e sete anos de vida com muitas contribuições para a matemática, na sua infância teve bastante dificuldades pois nos seus 10 primeiros anos de vida a França estava passando por um momento conturbado conhecido como revolução Francesa. As principais contribuições de Cauchy na matemática foram no campo da análise matemática, teoria de grupos infinitos, cálculo diferencial e integral entre outras colaborações. Ao matemático Augustin Louis Cauchy foi atribuída a seguinte equação funcional.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Conhecida como equação funcional de Cauchy, ainda podendo ser chamada de equação aditiva de Cauchy. A respeito das equações aditivas alguns matemáticos tentaram encontrar uma solução da equação (5), mas não obtiveram êxito, somente em 1821 o matemático Augustin Louis Cauchy publicou em seu livro *Cauchy's Cours d'analyse* a solução da equação (5), a respeito dessa equação nos próximos capítulos iremos observar a sua solução, e algumas informações importantes que conseguimos obter fazendo algumas substituições, visto que ainda não discutimos como resolver uma equação funcional.

4.3 Gregory de Saint-Vincent

O trabalho de Cauchy foi muito importante para o desenvolvimento da teoria de equações funcionais, visto que ele já procurava solução de tais problemas. Segundo Small (2007) foi no século XVI que nasceu o matemático Gregory de Saint-Vincent que publicou o trabalho *Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum con.* Nesse trabalho ele buscava estudar a quadratura geométrica do círculo em seções do cone, Gregory de Saint-Vincent ainda foi muito importante para o desenvolvimento do conceito de logaritmos sendo um dos a estudar sobre o tema. O resultado da análise desse trabalho era calcular área de algumas figuras, ao fazer o cálculo da área onde a região era uma hipérbole assim como Nicole Oresme ele fez o uso implícito de uma equação funcional.

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Até o momento as soluções das equações funcionais que foram apresentadas são funções afim, no caso da equação funcional (6) a sua solução será outro grupo de funções os logaritmos.

4.4 Jensen, D' Alembert e Ramanujan

Conforme expor Buchaim (2021) Jensen é um matemático que não é muito conhecido, mas ele também estudou sobre equações funcionais e ainda existe uma equação com seu nome conhecida como equação funcional de Jensen:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (7)$$

O matemático Jean le Rond d'Alembert desenvolveu mais trabalhos ao longo da história, sendo bastante conhecido dentre os matemáticos com várias contribuições para a matemática, além de matemático ele tinha várias formações em outras áreas. Com seu nome temos a equação conhecida como equação funcional de d'Alembert onde ela tem a seguinte forma:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (8)$$

No século passado o matemático indiano Ramanujan tem muitas contribuições para o desenvolvimento da matemática sendo um dos seus matemáticos mais brilhantes do século passado, sobre os seus objetos de estudos a equação funcional não era o tema principal de seus estudos, mas em 1911 Ramanujan propôs um problema sobre o cálculo de radicais múltiplos:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{n+1 + \dots}}}}} \quad (9)$$

Esse problema proposto por Ramanujan de maneira alguma se parece com uma equação funcional, e tão pouco a sua solução envolve equação funcional, no entanto existe uma equação funcional subentendida na solução desse problema. Em 1966 esse problema estava presente na olimpíada da Putnam, a questão pedia para provar que o $\lim a_n = 3$, onde a_n é a expressão (9).

Temos $a_n < a_{n+1}$ ou seja sendo uma sequência crescente, para essa demonstração devemos colocar

$$f(x) = \lim \sqrt[1+x]{1+(x+1)\sqrt[1+(x+2)]{1+(x+n-1)\sqrt[1+n]{1+x \dots}}}$$

Assim podemos concluir que $f(x) = x + 1$ além disso podemos deduzir que $f(x)$ existe sendo no máximo $x + 1$ dessa expressão temos ainda que $f(x) = xf(x + 1) + 1$ e essa ultima expressão é a equação funcional subentendida do problema de Ramanujan.

5 EQUAÇÕES FUNCIONAIS DE UMA E DUAS VARIÁVEIS E SUA RELAÇÃO COM OUTROS ASSUNTOS.

Pensando em problemas de olimpíadas matemáticas podemos dizer que o assunto de equações funcionais é um dos mais recorrentes, pois, sempre é proposto um problema referente a esse assunto. Analisando as palavras desse assunto de forma separada podemos perceber que equações e funções têm conceitos bastantes distintos um do outro, enquanto que a equação funcional faz a união desses conceitos, onde teremos uma expressão inicial na qual a sua solução vai ser uma função.

As equações funcionais tem como componentes um número finito de funções e um número finito de variáveis. Quanto as funções que são soluções podem ser uma específica ou uma família de soluções.

Para resolver um problema de equação funcional será necessário a utilização de alguma substituição, ou seja, em quase todos casos iremos utilizar o método da substituição. Pois nenhuma teoria que envolva algum método de solução foi desenvolvida, assim é necessário fazer algumas substituições espertas para encontrar a função ou algum valor específico, dessa forma segue algumas sugestões apresentadas por Chaves (2022), onde temos as seguintes orientações:

- Substituir algumas das variáveis por -1, 0 ou 1
- Caso a equação tenha mais de uma variável fazer uma substituição de modo a transformar em uma equação de única variável, fazendo $x = z$ e $y = -z$.
- Outra maneira de fazer uma substituição será $y = -x$ para conseguir algum cancelamento.
- Podemos colocar uma expressão em função de novas variáveis, caso tenhamos a seguinte situação $2f(f(x))$ seria bastante interessante fazer $n = f(x)$, dessa forma teríamos a seguinte expressão $2f(n)$.

Por último outra substituição esperta é utilizar alguma função auxiliar fazendo uma $g(x)$ igual a alguma expressão

Com base nas sugestões acima podemos conseguir resolver as equações funcionais, onde as principais sugestões são a primeira e terceira, pois alguns exemplos de equações funcionais pedem somente um valor específico da função.

Além desse conhecimento é importante ressaltar que devemos ter uma base boa com a resolução de sistemas lineares pois ao fazermos uma substituição iremos encontrar uma equação e quando fizermos outra substituição iremos encontrar outra equação, dessa forma para encontrarmos a função devemos saber resolver os sistemas de equações.

As questões de equações funcionais aparecem com mais frequência em olimpíadas matemáticas, onde em cada país há presença de uma olimpíada de matemática. Dessa forma temos as principais olimpíadas nos seguintes países:

Tabela 2- Olimpíadas matemáticas

Olimpíada	Organização
Olimpíada brasileira de matemática	Brasil
Competição Elon Lages Lima de matemática	Brasil
Olimpíada Internacional de matemática	Cerca de 100 países
Olimpíada Ibero-Americana de matemática	Países da América Latina, Portugal e Espanha
Olimpíada de matemática do cone sul	América do sul
International Mathematical Competition for University Students	Estados Unidos
Romanian master of mathematics	Romênia
Asian Pacific Olympiad	Países asiáticos e América
Concurso universitário em matemática de Galois-Noether	Brasil
Olimpíada Iraniana de geometria	Irã

Fonte 2- Produzido pelo autor com base nos dados da (OBM, 2022)

Com o auxílio desse conhecimento prévio, e necessário já conseguimos resolver algumas questões relacionadas a esse tema, para tal fato iremos resolver um exemplo de equação funcional com uma e duas variáveis. Logo após veremos a relação desse conteúdo com outros dois conceitos.

5.1 Exemplo de equação funcional com duas variáveis

Exemplo 2. (OBM 2003) Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Solução:

Analisando esse problema podemos perceber que não faremos uma das variáveis igual a zero, pois o zero não pertence ao domínio e também não pertence ao contradomínio. Como essa equação tem multiplicações e divisões é interessante substituir essas variáveis pelo número 1. Assim teremos a seguinte situação.

Faça $x = 1$ e $y = 1$.

$$f(1) \cdot f(1) - f(1 \cdot 1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \Rightarrow$$

$$f(1)^2 - f(1) = 1 + 1 \Rightarrow$$

$$f(1)^2 - f(1) = 2 \Rightarrow$$

$$f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$$

Analisando essa expressão final podemos perceber que é uma equação do segundo grau, para melhorar essa visualização faça $z = f(1)$, assim teremos:

$$z^2 - z - 2 = 0$$

Calculando as raízes da equação do segundo grau, onde iremos utilizar a seguinte fórmula de Bhaskara:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (10)$$

Em que $a = 1, b = -1, c = -2$

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow$$

$$z = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Assim teremos a primeira raiz que será $z_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ a segunda raiz será dada

por $z_2 = \frac{1-3}{2} = -1$ dessa forma temos duas possibilidades para valores de $f(1)$, assim

iremos verificar dois casos.

1° caso: $f(1) = 2$

Faça $y = 1$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(1) - f(x \cdot 1) &= x + \frac{1}{x} \Rightarrow \\ 2f(x) - f(x) &= x + \frac{1}{x} \\ f(x) &= x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2° caso: $f(1) = -1$

Faça $y = 1$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(1) - f(x \cdot 1) &= x + \frac{1}{x} \Rightarrow \\ -1f(x) - f(x) &= x + \frac{1}{x} \Rightarrow \\ -2f(x) &= x + \frac{1}{x} \Rightarrow \\ -f(x) &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \\ f(x) &= -\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \\ f(x) &= -\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Para cada uma das possibilidades encontramos funções diferentes como solução, mas devemos lembrar que essas soluções na verdade são candidatos a solução da equação funcional, por isso devemos verificar se as duas são soluções ou somente uma.

1°. verificação do primeiro candidato a solução:

$$f(x)f(y) - f(xy) =$$

$$\begin{aligned}
 x + \frac{y}{x} & \Rightarrow \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \\
 (x + \frac{1}{x}) \cdot (y + \frac{1}{y}) - (xy + \frac{1}{xy}) &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \\
 xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - xy - \frac{1}{xy} &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \\
 \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x}
 \end{aligned}$$

Fazendo distributiva e alguns cancelamentos conseguimos perceber que a igualdade é verdadeira assim para $f(1) = 2$ a função $f(x) = x + \frac{1}{x}$ é solução da equação funcional.

2º. verificação do segundo candidato a solução:

$$\begin{aligned}
 f(x)f(y) - f(xy) &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \\
 -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{2})(y + \frac{1}{y}) - (-\frac{1}{2})(xy + \frac{1}{xy}) &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \\
 \frac{1}{4}(xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy}) + \frac{1}{2}(xy + \frac{1}{xy}) &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\frac{xy}{4} + \frac{x}{4y} + \frac{y}{4x} + \frac{1}{4xy} + \frac{xy}{2} + \frac{1}{2xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{2}{3} \left(xy + \frac{1}{xy} \right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow$$

Temos que $f(x) = -\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ não é solução pois a igualdade não é válida. As-

sim a única solução da equação funcional $f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ será a função $f(x) = x + \frac{1}{x}$ quando $f(1) = 2$.

5.2 Exemplo de equação funcional com uma variável

Exemplo 3. (Ibero) Ache todas as f tais que $(f(x))^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$ para todo x distinto de $-1, 0$ e 1 .

Solução:

Para alguns valores básicos a equação funcional não está bem definida, con-tudo iremos fazer a seguinte substituição:

$$\text{Faça } x = \frac{1-x}{1+x}$$

Ou seja, onde tem x iremos substituir por $\frac{1-x}{1+x}$, analisando separadamente

$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ temos:

$$f\left(\frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}}\right) = f\left(\frac{\frac{1+x - 1+x}{1+x}}{\frac{1+x + 1-x}{1+x}}\right) = f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x)$$

As operações realizadas acima envolveram o uso de frações, assim calculamos o MMC e depois fizemos a divisão de frações para obter o resultado final. Com base na equação do exemplo iremos fazer a seguinte mudança.

$$\begin{aligned} (f(x))^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= 64x & \Rightarrow \\ f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= \frac{64x}{(f(x))^2} & \text{I} \end{aligned}$$

Com base na substituição que realizamos e nessa operação da equação funcional escrevendo-a de outra maneira segue que:

$$\left(f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)^2 \cdot f\left(\frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}}\right) = 64 \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left(f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)^2 \cdot f(x) = 64 \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad \text{II}$$

Substituindo I em II temos o seguinte

$$\begin{aligned} \left(\frac{64x}{(f(x))^2}\right)^2 \cdot f(x) &= 64 \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \\ \frac{64^2 \cdot x^2}{(f(x))^4} \cdot f(x) &= 64 \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \\ \frac{64 \cdot x^2}{(f(x))^3} &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \\ (f(x))^3 \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= 64 \cdot x^2 \Rightarrow \\ (f(x))^3 &= \frac{64 \cdot x^2}{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow \\ f(x) &= \sqrt[3]{x^2 \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \end{aligned}$$

Como encontramos uma única função que seja candidata a solução, temos assim que a função $f(x)$ acima é solução da equação funcional $(f(x))^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$.

5.3 Valor numérico de uma equação funcional.

Alguns problemas de equações funcionais estão querendo encontrar um valor específico para aquela equação, nem é preciso encontrar a função que seja solução.

Exemplo 4. (OBM/2002 – 1ª Fase): Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição: $f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$ para $x > 0$. O valor de $f(2)$ é igual a quanto?

Solução:

Neste problema iremos fazer algumas substituições, de tal modo a encontrar o valor de $f(2)$ assim:

Faça $x = 2$

$$f(2) + 2f\left(\frac{2002}{2}\right) = 3 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$f(2) + 2f(1001) = 6 \quad \text{I}$$

A princípio nenhuma informação sobre o valor de $f(2)$ foi encontrada e ainda

temos que surgiu $f(1001)$ na última equação. Analisando a equação da questão podemos perceber que conseguimos outra substituição de modo a encontrar $f(2)$ dessa forma:

Faça $x = 1001$

$$f(1001) + 2f\left(\frac{2002}{1001}\right) = 3 \cdot 1001 \Rightarrow$$

$$f(1001) + 2f(2) = 3003 \quad \text{II}$$

Com duas equações e duas incógnitas conseguimos resolver esse problema por sistema de equações, fazendo $I - 2II$

$$f(2) + 2f(1001) = 6$$

$$\{ 2f(1001) + 4f(2) = 6006$$

$$f(2) + 2f(1001) - 2f(1001) - 4f(2) = 6 - 6006 \Rightarrow$$

$$-3f(2) = -6000 \Rightarrow$$

$$f(2) = 2000$$

Logo o valor de $f(2)$ é igual a 2000.

5.4 Relação da equação funcional com equação diofantina.

Existe uma relação entre esses dois modelos de equações a funcional e diofantina, pensando no problema de uma equação diofantina, temos que sua solução será dada por dois números inteiros, isso para a solução particular. Enquanto que a solução geral será representada por uma infinidade de números pertencentes ao conjunto dos inteiros.

Quanto as definições de equações diofantinas temos que:

Definição 5.1 Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. A equação $ax + by = c$ admite solução no conjunto dos inteiros $\iff \text{mdc}(a, b) \mid c$.

Definição 5.2 Seja (x_0, y_0) uma solução de $ax + by = c$, com $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Então as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ são:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

O conteúdo de equação diofantina já mais conhecido, onde o mesmo é trabalhado dentro de algumas disciplinas da graduação. Além disso algumas questões desse assunto já podem ser cobradas no ensino fundamental. Dado uma equação diofantina $ax + by = c$ temos que essa equação é linear, e

terá solução quando a definição 5.1 e definição 5.2 forem satisfeitas, analisando a solução para x de uma equação diofantina temos que é necessário ter um x_0 como solução particular, agora a solução geral podemos escrever como sendo uma função definida dos inteiros nos inteiros, onde teremos a seguinte lei de formação:

$$x(t) = x_0 + bt \quad (11)$$

Assim iremos olhar para o conjunto imagem dessa lei de formação para encontrar os números que serão solução da equação diofantina. Dessa forma temos uma função que é solução de uma equação, estabelecendo uma relação com equações funcionais, toda essa observação feita para x é válida para y , logo teremos o seguinte $Y(t) = y_0 - at$.

5.5 Relação das equações multiplicativas e função de Möbius com equações funcionais.

Uma das equações funcionais mais conhecidas são as chamadas equações funcionais multiplicativas, que são atribuídas ao matemático Augustin Louis Cauchy, onde essas são definidas pela seguinte relação:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad (12)$$

A sua solução são funções do tipo $f(x) = x^a \forall x \in \mathbb{R}^+$. Dessa forma conseguimos fazer uma relação entre as equações funcionais multiplicativas e função de Möbius, a função de Möbius tem a seguinte definições:

Definição 5.3 Para n inteiro positivo, definimos:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } p^2 | n \text{ para algum } p \text{ primo} \\ (-1)^r, & \text{se } n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \text{ onde } p_r \text{ são primos distintos} \end{cases}$$

Exemplo 5. Calcule o valor de $\mu(48)$, $\mu(8)$ e $\mu(6)$ para verificar se a função de Möbius é multiplicativa, nesses valores.

Solução:

Para resolver esse problema devemos escrever cada um desses números em fatores primos, para depois analisar em qual sentença iremos encontrar o valor da função, visto que a função de Möbius está definida através de sentenças.

$$\mu(48) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 0$$

Como um dos números primos está elevado ao quadrado, temos o resultado de $\mu(48) = 0$.

$$\mu(8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 = 0$$

Novamente um dos fatores está elevado ao quadrado, sendo assim $\mu(8) = 0$

$$\mu(6) = 2 \cdot 3 = 1$$

Para $\mu(6)$ conseguimos escrever o número 6 como a multiplicação de dois números primos, dessa forma iremos utilizar a última sentença da função de Möbius assim teremos $(-1)^2 = 1$.

Verificando se para esses valores a função é multiplicativa temos que fazer a seguinte análise.

$$\begin{aligned}\mu(48) &= \mu(8) \cdot \mu(6) &\Rightarrow \\ 0 &= 0 \cdot 1 &\Rightarrow \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Logo para os valores do exemplo temos que a função é multiplicativa, mas isso se verificar para toda a função de Möbius, ou seja ela sempre será multiplicativa. Outra função muito importante é a função tau $r(n)$ essa função faz o cálculo da quantidade de números positivos que são divisores n e essa propriedade é muito utilizada no ensino fundamental, quando queremos saber quantos divisores tem um número, a função $r(n)$ também é multiplicativa.

Definição 6.4 A função tau é definida por:

$$r(n) = \# \{d \in \mathbb{N} : d|n\}$$

Exemplo 6. Calcule $r(12)$, $r(4)$ e $r(3)$ e verifique se a função é multiplicativa para esses valores:

Solução: iremos encontrar os divisores de cada um desses números e depois verificar a quantidade de divisores:

$$D^+(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\text{Logo } r(12) = 6$$

$$D^+(4) = \{1, 2, 4\}$$

$$\text{Logo } r(4) = 3$$

$$D^+(3) = \{1, 3\}$$

$$\text{Logo } r(3) = 2$$

Verificando se essa função é multiplicativa temos que:

$$\begin{aligned}r(4 \cdot 3) &= r(4) \cdot r(3) &\Rightarrow \\ 6 &= 2 \cdot 3 &\Rightarrow \\ 6 &= 6\end{aligned}$$

Logo para esses valores a função é multiplicativa, mas isso não se verificar para todos os casos.

6 EQUAÇÕES FUNCIONAIS NO ENSINO MÉDIO.

Embora o conteúdo de equações funcionais esteja ausente do ensino básico, e tão pouco é estudado no ensino superior, ainda assim podemos perceber algumas equações funcionais em definições básicas a respeito de funções. Neste capítulo temos a oportunidade de expor essas equações, e verificar como que iremos encontrara sua solução, para que dessa forma possamos analisar a veracidade dessas afirmações.

6.1 Função ímpar e equações funcionais.

No capítulo 3 desse trabalho apresentamos algumas definições a respeito de paridade de função, nesse capítulo iremos olhar para essas definições como sendo uma equação funcional. Na definição 3.8 temos o conceito que estabelece a propriedade de função ímpar, no contexto do ensino médio podemos enxergar essa definição somente como uma propriedade, no entanto podemos observar como uma equação funcional

$$f(x) = -f(-x) \quad (2)$$

6.1.1 Solução de uma equação funcional ímpar.

Vamos fazer uso das definições básicas de como resolver uma equação funcional apresentadas no capítulo 5, para isso vamos substituir o valor de $x = 0$ na equação (8) assim teremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) && \Rightarrow \\ f(0) &= -f(-0) && \Rightarrow \\ f(0) + f(0) &= 0 && \Rightarrow \\ 2f(0) &= 0 && \Rightarrow \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Assim conseguimos uma informação muito importante de que $f(0) = 0$ logo iremos verificar essa propriedade para os polinômios, para resolver esse problema devemos analisar essa equação com muito cuidado, pois a maneira de resolver esse problema não é trivial.

Faça $f(x) = x^r$ com $r \in \mathbb{N}$ assim teremos:

$$x^r = -((-x)^r) \Rightarrow$$

$$x^r + (-x)^r = 0 \Rightarrow$$

$$x^r + (-1)^r \cdot x^r = 0 \Rightarrow$$

$$x^r(1 + (-1)^r) = 0$$

Temos que $x^r \neq 0$ pois essa expressão nunca será zero, assim para que essa igualdade seja verdadeira.

$$1 + (-1)^r = 0 \Rightarrow$$

$$(-1)^r = -1$$

Por fim, essa última expressão será solução somente quando r for um natural ímpar, assim as funções da forma $f(x) = x^r$ que serão solução será os polinômios de grau ímpar.

6.2 Função par e equações funcionais.

Função par também está relacionado ao conceito de paridade, que foi apresentado no capítulo 3, onde na definição 3.7 observamos o conceito relacionado a essa propriedade. Dessa forma temos a seguinte equação:

$$f(x) = f(-x) \tag{1}$$

6.2.1 Solução da equação funcional par.

Para as funções par, iremos analisar a sua veracidade para os polinômios, em que faremos a mesma substituição feita na solução da equação funcional ímpar. Novamente essa propriedade é vista no ensino médio somente como uma definição, mas analisando como uma equação funcional temos:

Faça $f(x) = x^r$ com $r \in \mathbb{N}$ assim teremos:

$$x^r = (-x)^r \Rightarrow$$

$$x^r - (-x)^r = 0 \Rightarrow$$

$$x^r - (-1)^r \cdot x^r = 0 \Rightarrow$$

$$x^r(1 - (-1)^r) = 0 \Rightarrow$$

Novamente $x^r \neq 0$ pois essa expressão nunca será zero, assim para que essa

igualdade seja verdadeira.

$$\begin{aligned} 1 - (-1)^r &= 0 \Rightarrow \\ 1 &= (-1)^r \end{aligned}$$

Dessa maneira, a última equação será verdadeira somente quando r for um número par, dessa maneira as funções da forma $f(x) = x^r$ que será solução desse problema são os polinômios de grau par.

6.3 Função inversa e equações funcionais.

Agora iremos trabalhar um caso particular de equação funcional no ensino médio, onde esse problema é mais conhecido como função inversa, podemos perceber essa relação entre as funções inversas e equações funcionais na definição 3.6 apresentada no capítulo 3. Os problemas de função inversa que os materiais propõem para solução, envolve alguns passos apresentados no capítulo 5 a respeito da solução de uma equação funcional.

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ ou } f^{-1}(f(x)) = x$$

Fazendo uma leitura do que essa propriedade diz, temos que a composição da função com sua inversa é igual a função identidade. Para compreensão dessa relação vejamos a solução de um exemplo.

6.3.1 Solução de uma função inversa.

Exemplo 7. Encontre a função inversa de $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ analisando como uma equação funcional.

Solução:

A primeira atitude nossa para resolver o problema será substituir na definição 3.6 assim teremos.

$$f^{-1}\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = x \Rightarrow$$

Faça $y = \frac{x-3}{x+1}$ agora iremos organizar essa expressão para encontrar o valor de

x .

$$y(x + 1) = x - 3 \quad \Rightarrow$$

$$xy - x = -y - 3 \quad \Rightarrow$$

$$x(y - 1) = -y - 3 \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{-y - 3}{y - 1}$$

Fazendo as substituições temos que:

$$f^{-1}(y) = \frac{-y - 3}{y - 1}$$

A função que encontramos está na variável y mas pode ser facilmente transformada para variável x fazendo $x = y$. Os problemas de função inversa seguem as definições básicas de equações funcionais pois podemos observar a equação (9) da definição de função inversa como sendo uma equação, onde a solução desse problema será uma função. Logo podemos dizer que a definição de função inversa é uma equação funcional.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, com base no desenvolvimento desse trabalho acerca das equações funcionais, podemos perceber o quanto esse assunto é importante, pois a resolução dos problemas que envolve equações funcionais é um pouco complexa. Mesmo sendo desafiador a resolução desses problemas percebe-se o quão interessante eles são, pois nos obriga a pensar um pouco mais e desenvolver estratégias afim de encontrar a solução, dessa forma aprimorando o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Dentro da graduação pouco se percebe o estudo desse conteúdo, as vezes que observamos algumas equações funcionais principalmente a aditiva, estava relacionada a outros conceitos matemáticos, visto que esse assunto está presente em olimpíadas matemáticas. Contudo conseguimos mostrar através desse trabalho a interdisciplinaridade desse conteúdo com assuntos como equações e funções que estão presente na educação básica, pois a introdução desse assunto no ensino fundamental emédio além de trazer novos conhecimentos e desafios, pode proporcionar há alguns alunos a inserção na matemática olímpica, trazendo novas oportunidades para os estudantes.

Quanto aos objetivos, conseguimos mostrar as principais ferramentas para encontrar a solução das equações funcionais, sua relação com outros conceitos tais como equação diofantina onde, podemos analisar sua solução como funções, e funções multiplicativas que tem uma relação com equações funcionais multiplicativas.

A respeito desse trabalho podemos verificar algumas contribuições na relação desses conteúdos, visto que fizemos a análise do conceito de paridade das funções par e ímpar, logo após analisamos essa definição de tal maneira que fosse possível observar uma equação funcional, dessa forma apresentado uma solução para essa equação funcional.

Sobre esse tema podemos perceber uma carência das pesquisas relacionadas as equações funcionais em português. Como esse trabalho apresentou o assunto, maneiras de resolver, exemplos e relação com outros conteúdos, ainda assim podemos ter algumas indagações sobre as aplicações das equações funcionais, e isso pode ser problemática para pesquisas posteriores.

Dessa forma, conseguimos fazer a apresentação desse conteúdo, que de certa forma é desconhecido até na graduação. Contudo, fizemos algumas apresentações e relações desse assunto com conceitos básicos.

BUCHAIM, V. K. **TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO E EMBASAMENTO TEÓRICO DE EQUAÇÕES FUNCIONAIS**, 2021.

CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAÚJO MOREIRA, E. L. R. M. **Olimpíada Brasileira de matemática**. Disponível em: <https://www.obm.org.br/competicoes/internacionais/>. Acesso em: 18 Outubro 2022.

CARLOS GUSTAVO. T. DE A. MOREIRA, N. S. **FUNÇÕES MULTIPLICATIVAS E A FUNÇÃO DE MÖBIUS**. Eureka, n. 8, 2000.

CHAVES, A. P. **Equações Funcionais: uma primeira abordagem**, 2022.

FREIRE, A. S. **Princípios Sobre a Teoria das Equações Funcionais via Aplicações e uma Proposta de Intervenção no Ensino Básico**, SÃO CRISTÓVÃO, 2021.

GELSON IEZZI, C. M. **Fundamentos da matemática elementar Conjuntos e Funções**. 9ª.ed. SÃO PAULO: Atual, 2013.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4ª. ed. SÃO PAULO: Atlas S.A., 2002.

GOMES, R. C. D. S. **EQUAÇÕES FUNCIONAIS PARA OS MAIS JOVENS**. Eureka, n.37, 2013.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5ª. ed. SÃO PAULO: GEN, v. I, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar Complexos Polinômios equações**. 8ª.ed. SÃO PAULO: Atual, 2013.

NETO, A. C. M. **EQUAÇÕES DIOFANTINAS**. Eureka, n. 7, 2000.

SMALL, C. G. **Functional Equations and How to Solve Them. Problem Books in Mathematics**, 2007.

TENGAN, E. **EQUAÇÕES FUNCIONAIS**. Eureka, n. 09, 2000.