

ELY MARQUES DA COSTA

**APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DUPLAS PARA O CÁLCULO DO VOLUME DE UM
SÓLIDO GEOMÉTRICO QUALQUER**

Trabalho de Conclusão de curso, apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano.

Aprovado em: 01/12/ 2021

BANCA EXAMINADORA

Profº Me. Gildon César de Oliveira (orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Profº Dr. Guilherme Luiz de Oliveira Neto
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Profº Me. Creyton Borges Rocha
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

**INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
DIRETORIA DE ENSINO
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA**

Ely Marques da Costa



**APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DUPLAS PARA O CÁLCULO DO
VOLUME DE UM SÓLIDO GEOMÉTRICO QUALQUER**

**Floriano – PI
2021**

Ely Marques da Costa

**APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DUPLAS PARA O CÁLCULO DO
VOLUME DE UM SÓLIDO GEOMÉTRICO QUALQUER**

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano.

Orientador: Prof Ms: Gildon César de Oliveira

**Floriano – PI
2021**

RESUMO

Este estudo tem como objetivo, analisar de que forma a aplicação de integrais duplas, auxilia no cálculo do volume de um sólido geométrico qualquer. Entretanto, este trabalho buscou apresentar um contexto histórico sobre integrais e tratou de conhecer os conceitos das integrais duplas, demonstrando problemas envolvendo o cálculo do volume de um sólido geométrico, e por fim verificou aplicações de integrais duplas no cálculo do volume. Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, através do estudo aprofundado em livros baseados no assunto de integrais duplas. A partir do levantamento de material, foi feito um referencial teórico mostrando algumas aplicações do cálculo do volume através do conceito de integrais duplas e uma breve análise sobre cada uma delas. Enfim, o estudo realizado sobre o cálculo do volume através das aplicações de integrais duplas, foi observado e analisado nesta pesquisa.

Palavras chave: Integrais duplas; Volume; Aplicações de integrais.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	
2 UMA VISÃO HISTÓRICA SOBRE INTEGRAIS.....	
3 CONHECENDO CONCEITOS DE INTEGRAIS DUPLAS.....	
3.1 INTEGRAIS DUPLAS SOBRE RETÂNGULOS.....	
3.2 INTEGRAIS ITERADAS.....	
3.2.1 Teorema de Fubini.....	
3.3 INTEGRAIS DUPLAS SOBRE REGIÕES GERAIS.....	
4 METODOLOGIA.....	
5 REVISÃO DE LITERATURA.....	
6 CONCLUSÃO.....	
7 REFERÊNCIAS.....	

1 INTRODUÇÃO

Na matemática existem alguns procedimentos para calcular o volume de um sólido geométrico qualquer, dentre eles será destacado no presente trabalho o conceito de integração dupla, visto no assunto de integrais. Com estudo deste conteúdo, este trabalho tem o intuito de verificar questões envolvendo o volume de sólidos geométricos, mostrando como são feitas as soluções desses problemas.

Como bem nos assegura Leithold (1994), pode-se dizer que as integrais duplas tem como uma de suas funções calcular o volume de uma figura qualquer, sendo essa uma região considerada no espaço R^2 . Neste contexto, fica claro que o uso das integrais através deste método, possibilita o cálculo do volume de um sólido geométrico. Não é exagero afirmar que este procedimento é muito eficaz para este cálculo, pois não é possível ser calculado através de uma fórmula pronta, tendo em conta que esse processo pode resolver o problema do volume de um sólido com uma curva bem acentuada.

Desta forma, este estudo verificou por meio de livros, informações sobre de que forma a aplicação de integrais duplas auxilia calcular o volume de um sólido geométrico qualquer. Sendo a sua principal referência o estudo sobre os conceitos de integração dupla para o cálculo do volume. Esse trabalho tem como objetivo principal, verificar problemas relacionados ao cálculo do volume, feito a partir dos conceitos de integração dupla.

Na matemática básica em geometria, é ensinado resolver problemas relacionados com volume, através de fórmulas que são demonstradas e comprovadas algebricamente. Com intuito de resolver questões semelhantes, foi utilizado os conceitos de integração dupla neste estudo.

Portanto, verificou-se dados e informações com o propósito de responder ao seguinte problema de pesquisa: de que forma a aplicação de integrais duplas auxilia para o cálculo do volume de um sólido geométrico qualquer?

Conforme Ávila (2006), as integrais duplas são uma versão aprofundada do conteúdo de integrais simples. Trata-se inegavelmente de um procedimento feito em um plano bidimensional, ou seja, depende de uma função composta por duas variáveis.

O estudo tem seus objetivos muito bem estabelecidos, desde início busca apresentar um contexto histórico de integrais e conseqüentemente procura-se conhecer os conceitos de integração dupla e o seu desenvolvimento na resolução de problemas envolvendo volume. Portanto, o estudo tem como objetivo geral analisar de que forma a aplicação de integrais duplas, auxilia calcular o volume de um sólido geométrico qualquer, como uma forma de solução para o cálculo do volume, com a finalidade de verificar a utilidade de encontrar volumes, a partir dos conceitos de integração dupla.

Diante de um cenário da matemática dentro da geometria, onde seria muito dificultoso calcular certos sólidos geométricos, o estudo apresentado busca suprir esses percalços. Visto isso, essa pesquisa se justifica na análise da aplicação dos conceitos de integração dupla, como uma alternativa de contribuição para o público acadêmico, para encontrar o volume de um sólido geométrico qualquer.

Para a realização desse trabalho foi feita uma pesquisa bibliográfica baseada em livros, que foram resumidos nas partes do assunto estudado. Esse tipo de estudo busca através de livros, um desenvolvimento de um conteúdo mais difícil, de forma que o mesmo fique mais claro para leitor. A pesquisa que estuda os conceitos de integração dupla tem o caráter de classificação exploratória descritiva.

O estudo foi desenvolvido com livros antigos e mais recentes, fazendo uma junção do conteúdo, e principalmente da sua origem e da sua aplicabilidade. De certa forma, houve uma busca por um material que suprisse as necessidades da pesquisa.

O trabalho de conclusão de curso está estruturado em três capítulos, sendo que o primeiro tem a função de falar sobre o contexto histórico de integrais, como surgiram e por quem foram criadas, etc. No segundo buscou-se conhecer o assunto de integrais duplas, mostrando as formas de resolução, conceitos de aplicabilidade e teoremas que validam a fórmula de integração dupla. Por fim, o terceiro e último capítulo, foi feito um referencial teórico com base em livros, mostrando aplicações de integrais duplas, para o cálculo do volume de uma região limitada ou sólido geométrico, em que foram destacados alguns problemas dessa magnitude.

2 UMA VISÃO HISTÓRICA SOBRE INTEGRAIS

A origem do cálculo diferencial vem dos problemas de quadraturas realizados por matemáticos da antiguidade. Não restam dúvidas de que durante décadas houve vários estudos para a solução do cálculo de áreas e volumes, o que resultou, hoje, em um conceito de cálculo já bem estabelecido que conseguem resolver esses problemas. Cabe apontar que, com o passar do tempo os métodos foram sendo aperfeiçoados e a realidade hoje mostra um quadro bem diferente.

Na década 1680 Leibniz realizou seus primeiros trabalhos com o cálculo diferencial. Em um dos seus estudos publicados sobre integrais ele mostrou que as quadraturas são uma espécie de casos especiais do método inverso das tangentes, enfatizando a relação inversa entre o cálculo diferencial e integral no teorema fundamental do cálculo (BOYER,1974).

No século XVII ocorreram vários estudos que ocasionaram avanços do conhecimento na área da matemática. Mas, o principal deles foi a invenção do cálculo, feita por Newton e Leibniz, um dos acontecimentos mais relevantes da história para o desenvolvimento da matemática. A partir dessa descoberta essa disciplina eleva seu patamar a um estágio superior (EVES, 2011).

Segundo o autor Eves (2011, p. 443) "Leibniz deduziu muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem logo no início de um curso de cálculo. A fórmula da derivada enésima do produto de duas funções é conhecida em geral por regra de Leibniz". Portanto, podemos destacar o grande feito de Leibniz, observando que ele estava muito à frente da sua época, ao demonstrar conteúdos importantes que são estudados até hoje.

A escrita simbólica de uma integral nos dias atuais deve-se muito aos trabalhos de Leibniz, pois ele diferentemente de Newton, publicou as notações do cálculo integral que são utilizadas até hoje, enquanto seu rival pela descoberta do cálculo diferencial, não utilizou sequer nenhuma notação, em que ele apenas usou o plano cartesiano para fazer suas demonstrações (GAYO, 2012).

De acordo com Eves (2011), o cálculo integral surgiu primeiro do que o cálculo diferencial, contrariando a disposição feita desses assuntos atualmente em livros, em que primeiramente é visto o conteúdo de derivadas e posteriormente o de

integrais. Este mesmo cálculo surge com intuito de resolver problemas a partir de um procedimento somatório, no cálculo de áreas, volumes e comprimentos.

É importante destacar na história do cálculo, que o processo integração foi propulsor nessa disciplina, para que houvesse um estudo mais aprofundado, e que resultaria em novos temas muito relevantes para ela, como o assunto de derivadas e entre outros.

Dessa forma podemos destacar, que nos dias atuais o cálculo de integrais tem contribuído em diversas áreas do trabalho, sendo a principal delas a engenharia, que tem sua estrutura baseada no cálculo. No entanto vale ressaltar também, a sua importância em pesquisas realizadas na matemática e no curso de formação de professores dessa disciplina

3 CONHECENDO CONCEITOS DE INTEGRAIS DUPLAS

As integrais duplas decorrem do conceito de integral definida, e esse método serve para calcular volumes, áreas sobre uma superfície, massas, centroides de regiões mais gerais, entre outros problemas (STEWART, 2013).

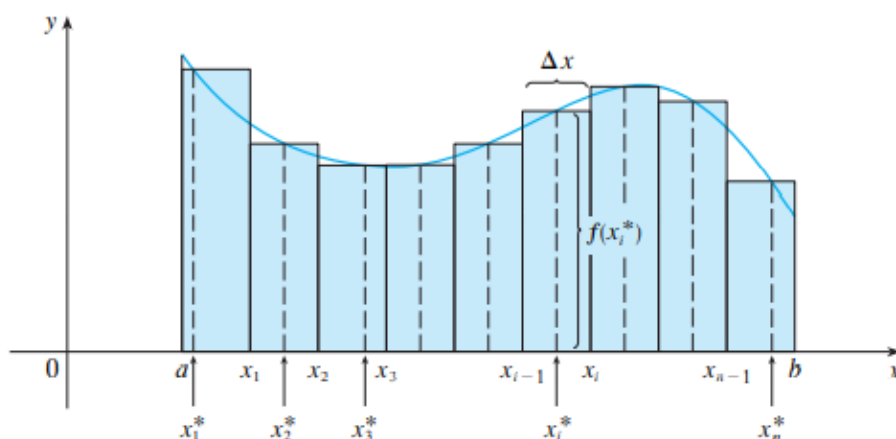
3.1 INTEGRAIS DUPLAS SOBRE RETÂNGULOS

De acordo Craizer e Tavares (2002, p. 59) “A integral dupla é a soma de infinitésimos, cada parcela sendo a multiplicação do valor da função de um ponto da região de integração pela área de uma região infinitesimal em torno desse ponto”. Portanto, a demonstração desse procedimento é realizada de uma forma bem detalhada como veremos a seguir.

Para compreendermos a interpretação geométrica das integrais duplas, relembremos o conceito de integral definida, em que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

A partir dessa ideia, podemos calcular a área de uma figura, desde que $f(x) \geq 0$. Através dessa equação que contém a soma de retângulos em vários subintervalos, podemos destacar a seguinte representação (STEWART, 2013).



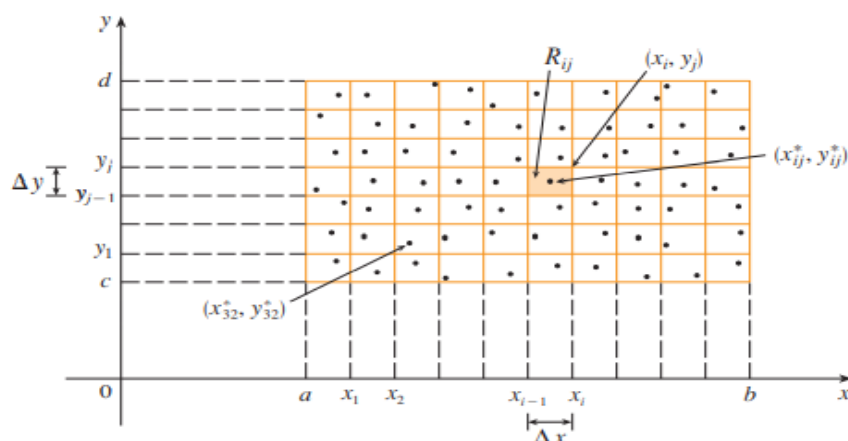
Fonte: Stewart (2013)

Ao analisar o conceito de integral definida, podemos deduzir de forma semelhante a interpretação geométrica de integrais duplas, mas agora calculando o volume de um sólido (STEWART, 2013).

Considerando uma função f de duas variáveis, positiva, temos que para calcular o volume de um sólido S acima de um retângulo R , é necessário dividi-lo em vários intervalos, em que:

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) / x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

Mostrando esses intervalos sendo dividido em subintervalos graficamente temos:

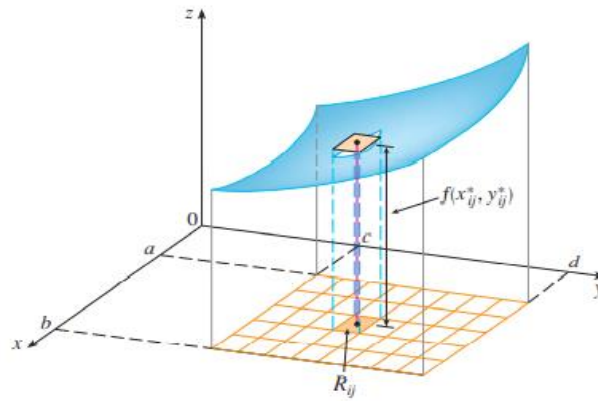


Fonte: Stewart (2013)

Escolhendo pontos arbitrários, podemos calcular a aproximação do volume do sólido S da seguinte maneira:

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Graficamente temos:



Fonte: Stewart (2013)

Logo, por definição: A integral dupla de f sobre um retângulo R , existindo um limite é,

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

De acordo com Ávila (2006), uma função f quando for positiva e negativa em alguns pontos, considerando a definição de integral dupla, teremos que a mesma será dividida em duas partes, em que haverá um valor do volume calculado da parte positiva e outro da negativa. Portanto, para calcular o volume V de um sólido por integral dupla, com $f(x) \geq 0$, temos:

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

Nas integrais duplas, são válidas as seguintes propriedades:

$$1. \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

$$2. \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA, \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então

$$3. \iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

3.2 INTEGRAIS ITERADAS

As integrais duplas apesar de serem consideradas um conceito de um nível de dificuldade maior, na realidade a sua resolução não é das mais complicadas, pois para calculá-las, basta resolver o cálculo de duas integrais simples consecutivas, estabelecendo assim o método de integral iterada (CRAIZER e TAVARES, 2002).

O método de integral iterada, consiste em integrar uma função $f(x, y)$, primeiramente em relação a uma das variáveis e depois pela outra, considerando uma constante a variável que não está sendo integrada no momento (STEWART, 2013).

Dessa forma podemos escrever uma integral iterada da função $f(x, y)$, da seguinte maneira:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

3.2.1 Teorema de Fubini

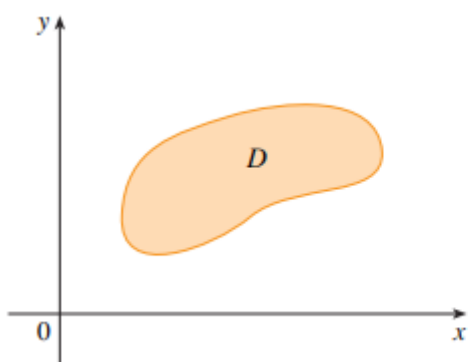
O teorema de Fubini, tem a finalidade de garantir a validade do processo de uma função $f(x, y)$, em que o método das integrais iteradas vai obter os mesmos resultados independentemente, de que seja feito primeiro a integração em relação a x ou y (STEWART, 2013)

3.3 INTEGRAIS DUPLAS SOBRE REGIÕES GERAIS

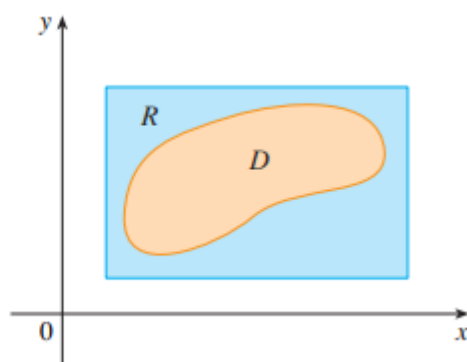
Até aqui vimos que para regiões retangulares é possível calcular o volume, mas também é factível encontrar volumes de sólidos em regiões não retangulares, ou seja, em regiões gerais do plano (CRAIZER e TAVARES, 2002).

As integrais duplas, além de integrar uma função f sobre retângulos, podem também de uma maneira generalizada, integrar uma região determinada em D , desde que D seja limitada, podemos obter uma região retangular R , em que é gerado uma nova função F , com domínio em R (STEWART, 2013).

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$



Fonte: Stewart (2013)



Fonte: Stewart (2013)

Portanto, se F for integrável em R , temos que integral dupla de f em D é dada por:

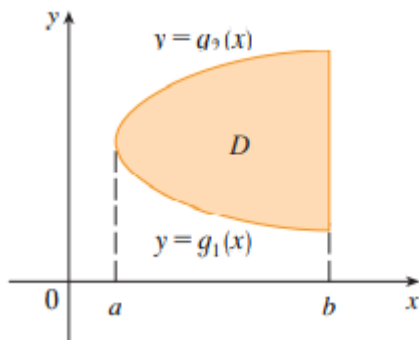
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA, \text{ onde } F \text{ é dada pela equação anterior.}$$

Com $f(x, y) \geq 0$ temos que o valor dessa integral dupla é o volume do sólido abaixo da curva do gráfico de f . Portanto se $\iint_R F(x, y) dA$ existir, então a $\iint_D f(x, y) dA$ também existe. Para essa situação existem dois tipos de integrais

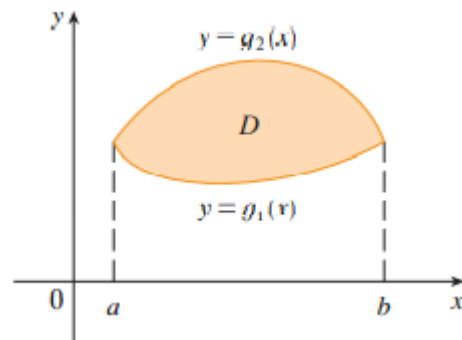
duplas, as do tipo I e tipo II (STEWART, 2013). As integrais do tipo I, é a região entre o gráfico de duas funções contínuas em x , em que:

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

em que g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$. Exemplos:



Fonte: Stewart (2013)



Fonte: Stewart (2013)

Para calcularmos as integrais duplas do tipo I, é utilizado a seguinte fórmula. Sendo f uma região contínua em D do tipo I, temos:

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

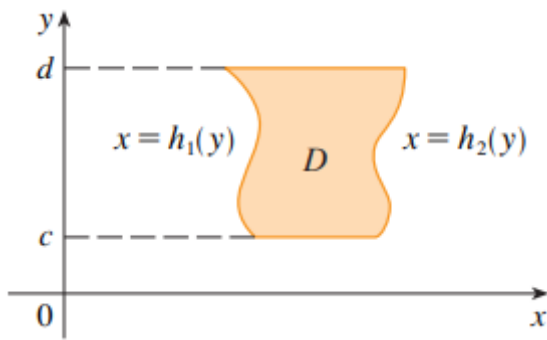
Logo,

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

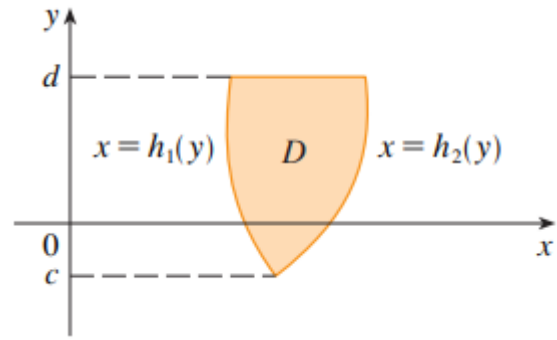
As integrais do tipo II, são consideradas também por regiões planas e podem expressas da seguinte forma.

$$D = \{(x, y) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

São exemplos de integrais do tipo II os seguintes gráficos:



Fonte: Stewart (2013)



Fonte: Stewart (2013)

Sabendo que h_1 e h_2 são contínuas, o método de calcular as integrais do tipo II é semelhante à do tipo I. Portanto,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

Outras propriedades das integrais duplas:

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_D f(x, y) \, dA + \iint_D g(x, y) \, dA$$

$$\iint_D cf(x, y) \, dA = c \iint_D f(x, y) \, dA$$

$$\iint_D f(x, y) \, dA \geq \iint_D g(x, y) \, dA$$

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_{D_1} f(x, y) \, dA + \iint_{D_2} f(x, y) \, dA$$

4 METODOLOGIA

Conforme Marconi e Lakatos (2003, p. 155) "A pesquisa, portanto, é um procedimento formal, com método de pensamento reflexivo, que requer um tratamento científico e se constitui no caminho para conhecer a realidade". De forma que fica evidente o conteúdo abordado e a maneira de como esse material venha ser útil para o leitor.

Ao verificar os tipos de pesquisa podemos destacar, a pesquisa qualitativa onde é feita uma análise que vai além dos números e busca compreender variáveis dentro de um contexto mais complexo, do que é estudado (GERHARDT e SILVEIRA apud GOLDENBERG, 2009). E a pesquisa quantitativa que analisa seus resultados mais rigorosamente, em que a base matemática é essência do estudo, com cálculos objetivos. (GERHARDT e SILVEIRA apud FONSECA, 2009).

Conforme citado acima, temos dois tipos de pesquisa, nesse estudo foi utilizado o método qualitativo, baseado em leituras de livros, ou seja, é uma pesquisa bibliográfica, onde é realizado uma revisão de literatura. A partir do problema a ser resolvido nesse estudo, foi utilizado o raciocínio hipotético-dedutivo para a solução dessa questão.

A pesquisa é feita de forma aplicada, em que busca resolver um problema através do estudo de livros e etc. Esse tipo de atividade "[...] objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos." (PRODANOV, 2013, p. 51).

O foco central da pesquisa bibliográfica, é a característica exploratória, levando em conta que ela foi baseada em livros relacionados ao assunto. "Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo" (GIL, 2008, p. 50).

A pesquisa é classificada como de forma exploratória, onde ela engloba o melhor aproveitamento dos conteúdos encontrados para sua construção, visto que este seria o método mais eficiente. Tratando-se de uma abordagem bibliográfica, este estudo foi direcionado no aprofundamento dos conteúdos encontrados em livros, afim de solucionar o problema proposto nele.

Inicialmente para a construção deste trabalho, foi feito um quadro relatando as possibilidades e maneiras de como poderia ser elaborado essa pesquisa. Logo em seguida realizou-se as primeiras buscas de materiais acessíveis e que fossem de acordo com tema abordado. E por fim com os materiais encontrados foi possível analisar e escolher o tipo de pesquisa a ser feita.

No entanto, o estudo apresentou uma revisão de aplicações de integrais duplas para a solução do volume de um sólido geométrico qualquer, onde as mesmas foram encontradas em livros, com intuito de mostrar essas aplicações e consequentemente analisa-las. Também, foi feito no primeiro momento todo um capítulo relatando sobre o contexto histórico de integrais e logo em seguida foi construído outro descrevendo como funciona os conceitos das integrais duplas.

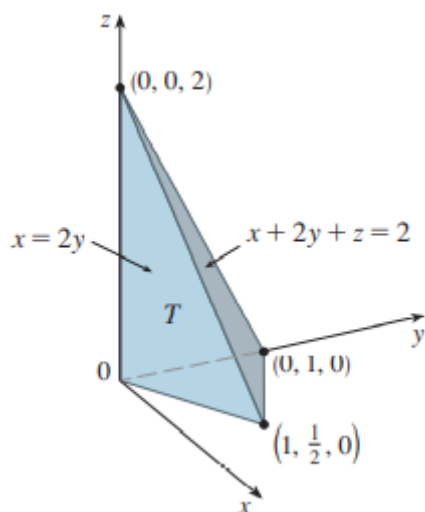
Entretanto, essa pesquisa foi feita com o objetivo apresentar, conhecer e verificar os conceitos de integração dupla desde a sua origem, e também mostrar a solução do volume de uma figura geométrica através deste mecanismo. Sendo que o objetivo geral deste estudo, visa analisar de que forma a aplicação de integrais duplas auxilia no cálculo do volume de um sólido geométrico qualquer.

5 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, será feita uma revisão de algumas aplicações de integrais duplas no cálculo do volume de uma região. Essas aplicações foram encontradas em livros de origem matemática, no entanto nesse estudo buscou mostrar as mesmas e fazer breves comentários sobre elas.

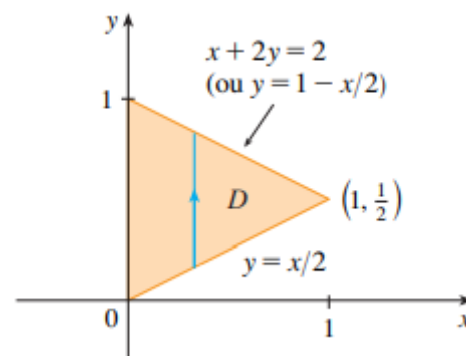
De acordo com Stewart (2013), é possível determinar o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$, da seguinte maneira: A Figura 1 mostra o tetraedro T limitado pelos planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, pelo plano vertical $x = 2y$ e pelo plano $x + 2y + z = 2$. Como o plano $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z = 0$) na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$. (Veja a Figura 2.)

Figura 1



Fonte: Stewart (2013)

Figura 2



Fonte: Stewart (2013)

O plano pode $x + 2y + z = 2$ ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

$$D = \left\{ (x, y) / 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2} \right\}$$

Portanto,

$$V = \iint_D (2 - x - 2y) dA = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y) dy dx$$

$$V = \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=\frac{x}{2}}^{y=1-\frac{x}{2}} dx$$

$$V = \int_0^1 \left[2 - x - x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] dx$$

$$V = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

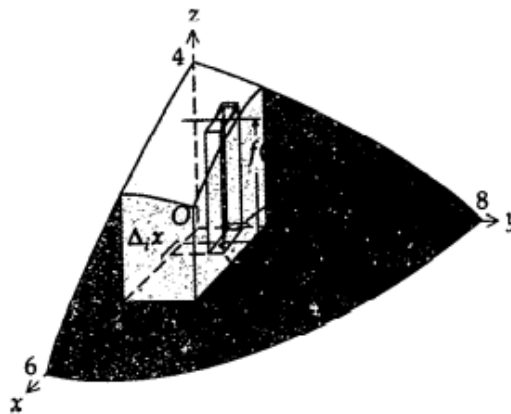
Logo, o volume desse tetraedro é igual a $\frac{1}{3}$.

Nesse problema podemos identificar que utilizando uma integral dupla é possível calcular o volume desse tetraedro. Também, é observado que somente a

partir das intersecções de planos apresentado na questão é possível gerar uma região que pode ser calculada o volume.

Na matemática é muito comum resolver o cálculo do volume de um sólido geométrico, principalmente de um sólido platônico como é tetraedro. Essa região é configurada por uma pirâmide de base triangular, onde o cálculo do seu volume pode resolver problemas matemáticos e até mesmo na engenharia.

A partir de Leithold (1994), é visto o volume do sólido limitado pela superfície $f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados. Portanto para resolver esse problema temos a seguinte solução. A figura 3 mostra o gráfico da equação $z = f(x, y)$ no primeiro octante e o sólido dado.



Fonte: Leithold (1994)

Se V unidades for o volume do sólido, então, por Teorema temos:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A$$

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

$$V = \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 \right) dy \, dx$$

$$V = \int_0^3 \left[4y - \frac{1}{9}x^2y - \frac{1}{48}y^3 \right]_0^2 dx$$

$$V = \int_0^3 \left(\frac{47}{6} - \frac{2}{9}x^2 \right) dx$$

$$V = \left[\frac{47}{6}x - \frac{2}{27}x^3 \right]_0^3 = 21.5$$

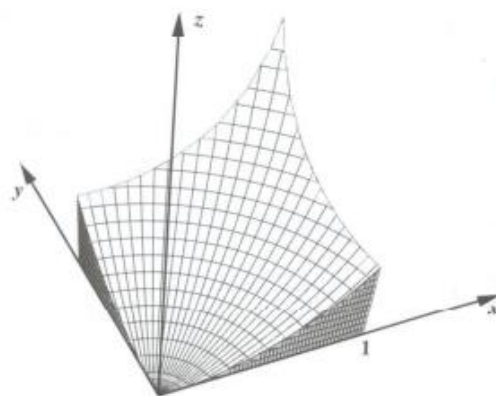
Portanto, 21.5 é o volume do sólido limitado pela superfície $f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Nessa aplicação, é possível novamente encontrar uma região com a intersecção de planos e com uma superfície sendo definida. Assim, de uma forma muito semelhante ao primeiro problema apresentado, a questão é resolvida pelo método de integração dupla.

Esse sólido observado no problema visto em Leithold (1994), pode ser considerado um formato de uma peça do ramo imobiliário, ou seja, o cálculo do volume dessa peça é de grande importância para esse setor.

Segundo Guidorizzi (2001), podemos verificar o cálculo do volume do conjunto de todos (x, y, z) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq x^2 + y^2$. Ao analisarmos a figura abaixo, podemos montar a integral dupla para resolver esse problema.

$$\iint_B (x^2 + y^2) dx dy$$



Fonte: Guidorizzi (2001)

Onde B é o retângulo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Temos:

$$\iint_B (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^2) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^1 dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y^2 \right] dy$$

Logo,

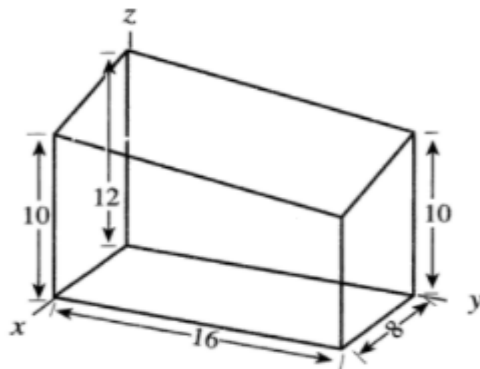
$$\int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y^2 \right] dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \iint_B (x^2 + y^2) dx dy = \frac{2}{3}$$

Portanto o volume do conjunto de todos (x, y, z) tais que $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ é igual a $\frac{2}{3}$.

Mais uma vez, podemos observar que aplicação é muito similar as duas primeiras, o que mostra uma certa uniformidade nos problemas encontrados nesses livros. O volume é encontrado ao fazer a integral dupla de uma região encontrada por uma intersecção de planos.

Desta vez, podemos comparar o sólido visto em Guidorizzi (2001), com uma peça ou construção utilizada em algum ramo da engenharia, apesar de ser um sólido que tem formato bem estranho, pode serem encontradas construções ou peças com um formato semelhante, logo, para isso é notório a importância do cálculo do volume.

Temos em McCallum, Hughes-Hallett, Gleason, et al (1997), um exemplo de aplicação de integral dupla em volume, em que é possível calcular o volume de um edifício, cujo a largura tem 8 unidades e o comprimento 16 e tem um teto plano com altura de 12 unidades num canto e 10 em cada canto adjacente. A figura mostra o edifício com o teto inclinado.



Fonte: McCallum, Hughes-Hallett, Gleason, et al (1997).

Temos que, se colocarmos o canto mais alto sobre o eixo-z, o lado mais longo de eixo-y e o mais curto ao longo do eixo-x, como na figura acima, então o teto é um plano com z-intersecção 12, e inclinação-x $(-2)/8 = -1/4$, e inclinação-y $(-2)/16 = -1/8$. Portanto a equação do plano do teto é $z = 12 - x/4 - y/8$.

Para calcular o volume vamos integrar sobre o retângulo $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 16$. Escrevendo uma integral iterada temos:

$$Volume = \int_0^{16} \int_0^8 \left(12 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right) dx dy$$

então,

$$V = \int_0^8 \left(12 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right) dx = \left[12x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}xy\right]_0^8 = 88 - y$$

$$V = \int_0^{16} (88 - y) dy = \left[88y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{16} = 1280$$

Assim o volume do edifício é dado por 1280 unidades cúbicas.

O problema, apesar de ser semelhante aos outros, tem um pequeno aspecto na sua resolução que é diferente dos outros, em que a equação do plano z é encontrada a partir do cálculo das medidas do edifício.

Nessa aplicação, é nítida a sua relevância para engenharia civil, pois vários edifícios são construídos, sendo necessário ser feito o cálculo do volume dessa construção pelos engenheiros, no entanto esse procedimento é muito importante para esses profissionais montarem seus projetos.

Podemos ver em Craizer e Tavares (2002), mais um exemplo do cálculo do volume de uma região limitada. Onde é realizado o cálculo da seguinte região:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - 1 \leq z \leq 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Como é uma região limitada por dois gráficos de função, o seu volume pode ser calculado pela fórmula da integral dupla. Temos então que:

$$V(U) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 [(1 - x^2) - (x^2 - 1)] dy dx$$

$$V(U) = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{8}{3}$$

Portanto o volume gerado por esses dois gráficos é igual a $\frac{8}{3}$.

Nessa ocasião, o plano z está entre duas equações, logo para resolver essa questão de integral dupla é necessário fazer a diferença entre essas duas equações.

Como podemos ver, esse capítulo fez uma revisão de algumas aplicações de integral dupla para solução do volume de sólidos geométricos. Portanto, concluímos que as soluções feitas por estes conceitos de integral duplas são eficazes para esse cálculo.

6 CONCLUSÃO

O desenvolvimento desse estudo possibilitou uma análise sobre os conceitos de integração dupla e várias reflexões das suas utilidades no cálculo do volume de um sólido geométrico, além disso, também foi feito uma avaliação através da revisão de algumas aplicações, de como esse procedimento é importante para o cálculo do volume.

De um modo geral, o estudo buscou suprir algumas dificuldades encontradas assunto de integrais duplas, mas especificamente direcionado para o cálculo do volume. Nos cursos mais avançados de matemática é possível o uso dessa metodologia para calcular o volume de um sólido geométrico, em que seria bem mais complicado calcular por uma forma tradicional, então de uma maneira geral, os conceitos apresentados facilitam esse cálculo.

Dada a relevância do tema, o trabalho pode ser usado para outros projetos de pesquisa, em que se busque um maior aprofundamento sobre o assunto, e consequentemente sirva como base para outras pesquisa envolvendo este objeto de estudo.

Nesse sentido, esse estudo pode contribuir de uma forma muito significativa para a comunidade acadêmica, servindo de alicerce para próximas pesquisas e também como um conteúdo de conhecimento para esse meio.

7 REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Cálculo das Funções de Múltiplas Variáveis**. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. III, 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza Gomide. 1ª. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, v. I, 1974.

CRAIZER, M.; TAVARES, G. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. Loyola. ed. Rio de Janeiro: PUC RIO, 2002.

EVES, H. **Introdução á história da matemática**. 5ª. ed. São Paulo: Unicamp, v. I, 2011.

GARBELLINI, M. **Contribuições do projeto especial de ação para a formação de professores do ciclo de alfabetização**. São Paulo: Clube de autores (managed), 2017.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6ª. ed. São Paulo: Atlas S.A, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. III, 2001.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3ª. ed. São Paulo: Harbra Ltda, v. II, 1994.

MARCONI, M. D. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5ª. ed. São Paulo: Atlas S.A, v. Único, 2003.

MCCALLUM, W. G. et al. **Cálculo de várias variáveis**. 1ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, v. único, 1997.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2ª. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

ROGAWSKI, J.; ADAMS, C. **Cálculo**. Porto Alegre-Rs: Bookman, 2018.

STEWART, J. **Cálculo**. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. II, 2013.