

MARISTELA FERREIRA NOGUEIRA

CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES COM O USO DO
TEOREMA DE PICK

Trabalho de Conclusão de curso,
apresentado como exigência parcial
para obtenção do diploma do Curso
de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí,
Campus Floriano.

Aprovada em: 18/ 08/ 2021

BANCA EXAMINADORA

Profº Me. Nilmar Fonseca de Almeida Filho (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Profº Me. Creyton Borges Rocha
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Profº Me. Fábio Pinheiro Luz
Instituto Federal do Piauí (IFPI)



**INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
DIRETORIA DE ENSINO
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA
MARISTELA FERREIRA NOGUEIRA**

**CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES COM O USO DO
TEOREMA DE PICK**

FLORIANO-PI

2021

MARISTELA FERREIRA NOGUEIRA

**CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES COM O USO DO
TEOREMA DE PICK**

Artigo de Conclusão do Curso (TCC) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, IFPI / Campus Floriano-PI, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof^o Me. Nilmar Fonseca de Almeida Filho

.

FLORIANO-PI

2021

RESUMO

A matemática é uma ciência que nos apresenta um imensurável mundo riquíssimo de números, fórmulas, axiomas, teoremas, formas, medidas, etc. Diante disso, vos apresento um teorema pouco conhecido, mas de uma dimensão que merece destaque, é o chamado Teorema de Pick. O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar um processo para determinar a área de polígonos simples por meio da Fórmula de Pick, trazendo ainda conceitos importantes e sua demonstração, para que assim haja uma melhor compreensão. Para tanto, o trabalho tem como metodologia um estudo exploratório e bibliográfico. Ao fim, mesmo sendo um estudo limitado foi possível uma abordagem de fácil compreensão atendendo ao propósito.

Palavras chave: Polígono simples, Área, Teorema de Pick.

ABSTRACT

Mathematics is a science that presents us with an immeasurably rich world of numbers, formulas, axioms, theorems, forms, measures, etc. Therefore, I present to you a little-known theorem, but of a dimension that deserves to be highlighted, it is called Pick's Theorem. The main objective of this work is to present a process to determine the area of simple polygons through Pick's Formula, bringing important concepts and their demonstration, so that there is a better understanding. Therefore, the work has as methodology an exploratory and bibliographic study. In the end, even though it was a limited study, an easy-to-understand approach was possible for the purpose.

Keywords: Simple Polygon, Area, Pick's Theorem.

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO

2.BJETIVOS

3.DISSCUSSÃO TEÓRICA

4.TEOREMA DE PICK

5. CALCULANDO ÁREAS COM A FÓRMULA DE PICK

6.METODOLOGIA

7.CONSIDERAÇÕES

8.REFERÊNCIAS

1. INTRODUÇÃO

É de grande importância para o aluno e para o processo de ensino-aprendizagem, a explanação dos conteúdos de formas diferenciadas, inovadoras e simples. Como afirma Sforni e Galuch (2006, p.5):

Aprender, portanto, não significa recitar um número cada vez maior de conceituações formais, mas elaborar modelos, articular conceitos de vários ramos da ciência, de modo a cada conhecimento apropriado pelo sujeito ampliar-lhe a rede de informações e lhe possibilitar tanto a atribuição de significados como o uso dos conceitos como instrumentos de pensamento.

Na área da matemática, especialmente, há um gigantesco leque de informações que muita das vezes conteúdos interessantes passam a ser menos utilizados ou até mesmo despercebidos.

Desde o Ensino Fundamental I, os alunos se deparam com o conteúdo de polígonos e conforme vão avançando os anos escolares os conhecimentos sobre o assunto vão se aprofundando. Ao se depararem com o cálculo de área desses polígonos, principalmente os polígonos não simples, a didática utilizada acaba sendo limitada pelos livros, que por sua vez, ensinam apenas pela composição ou decomposição dos mesmos utilizando fórmulas específicas para cada parte dividida.

Remete-nos então o questionamento: Teria algum método simples, que o professor possa está levando para a sala de aula, que possa auxiliar o cálculo de área desses polígonos sem precisar fazer a fragmentação da figura?

Dentro desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo mostrar um método para calcular a área de polígonos utilizando a fórmula do Teorema de Pick.

Inicialmente será retratado um pouco sobre a história do matemático Pick, até então pouco conhecido, mas que contribuiu muito na área da matemática, logo após será apresentado seu teorema, o qual servirá de base para esse trabalho, abordando ainda conceitos importantes e sua aplicação. Por fim, uma descrição e análise dos dados, concluindo com algumas considerações.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

- Compreender e apresentar o Teorema de Pick, analisando o seu contexto e sua relação no estudo de áreas de polígonos simples.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conhecer e demonstrar o Teorema de Pick;
- Conceituar os principais elementos que envolvem a fórmula de Pick;
- Compreender a relação do Teorema de Pick para o cálculo de áreas de polígonos simples.

3. METODOLOGIA

A pesquisa baseou-se num estudo exploratório e bibliográfico, compreendido por GIL (p. 42, 2002) como uma “pesquisa com objetivo de proporcionar maior familiaridade com o problema, com vista a torná-lo mais explícito”.

Realizaram-se diversos levantamentos de dados, fontes, vídeos, sites, informações e pesquisas que colaboraram com o tema desse estudo. Buscou-se diversos estudos em livros, teses, dissertações, artigos e outras publicações, objetivando aprofundar nossos conceitos sobre esse assunto.

4. DISCUSSÃO TEÓRICA

4.1. Um breve histórico sobre Pick;

Segundo O'Connor (2005), George Alexander Pick foi um matemático judeu que nasceu em 1859 em Viena, até aos onze anos foi educado em casa e em 1875 entrou para a Universidade de Viena, onde quatro anos depois se gradua em matemática com qualificação para assumir tanto na área da matemática como física. Após seu doutorado ele pretendia se tornar um professor em Praga, para ter o direito de palestrar, sendo assim, teve que escrever uma tese de habilitação, fazendo-o ingressar na carreira e fazer suas palestras. Seus trabalhos sempre foram voltados para sua área: Álgebra Linear, Teoria Invariante, Cálculo Integral, Teoria do Potencial, Análise Funcional e Geometria. Foram de tamanha abrangência que até hoje ainda são utilizados, como Matrizes Pick, Interpolação Pick-Nevalinna e o Lema Schwarz-Pick, porém um de

seus trabalhos mais lembrado é o Teorema de Pick. Pick viveu no período da ditadura Nazista, o que o levou a ser enviado para o campo de concentração tcheco de Theresienstadt em Nordboehmen, local onde abrigava idosos, privilegiados e famosos judeus, Pick morreu duas semanas mais tarde aos 82 anos.

5. Teorema de Pick

O Teorema de Pick é um teorema que nos apresenta uma fórmula para calcular a área de um polígono simples por meio da contagem de pontos, é de simples aplicação e acaba facilitando na resolução de problemas. Lima (2012, p.104) traz o conceito da fórmula desse teorema:

Fórmula de Pick. *A área de um polígono cujos vértices são nós de uma malha quadriculada é dada pela fórmula:*

$$A = \frac{1}{2}B + I - 1$$

em que B é o número de nós da malha quadriculada, situados sobre o bordo do polígono e I é o número de nós da malha quadriculada existentes no interior do polígono.

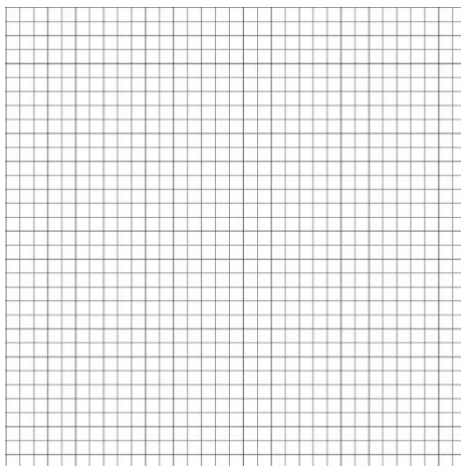
5.1 Conceitos iniciais importantes

Para melhor compreensão do Teorema de Pick, primeiramente precisamos de alguns conceitos que servem de embasamento:

5.1.1. Malha quadriculada

A malha quadriculada é um plano composto por quadradinhos de mesmo tamanho, que estão na mesma distância entre si.

Figura 1: Malha quadriculada.

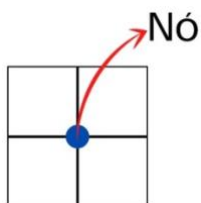


Fonte da imagem: Produção da autora.

5.1.2. Nó

Ao observarmos a malha quadriculada, vemos que há pontos em que as retas se cruzam, chamamos então esse cruzamento de nó.

Figura 2: Representação de um nó.

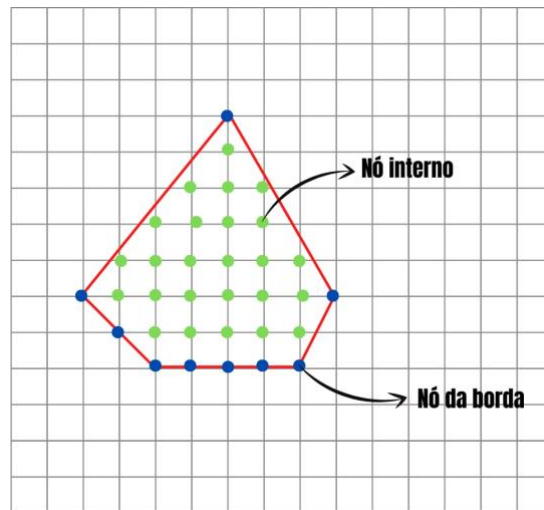


Fonte da imagem: Produção da autora.

Temos ainda que o nó pode ser:

- **Nó interno:** Quando o nó se encontra dentro da figura;
- **Nó da borda:** Quando o nó fica na extremidade (contorno) da figura.

Figura 3: Exemplos de nó interno e nó na borda.

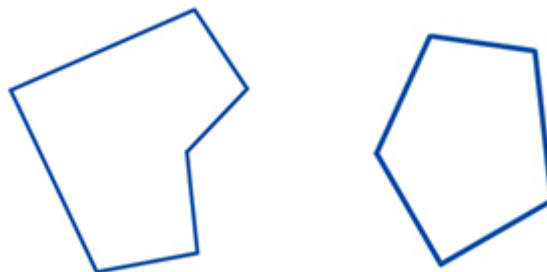


Fonte da imagem: Produção da autora.

5.1.3. Polígono simples e polígono não simples

Um polígono é simples quando é formado por segmentos de retas simples e fechados, em que não há a interseção de dois lados não consecutivos e não há buracos no seu interior.

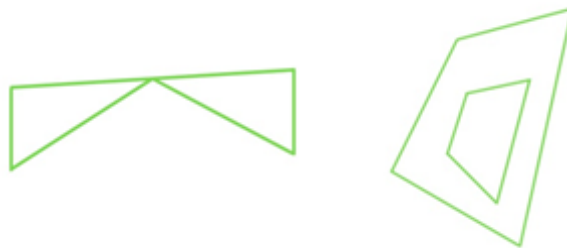
Figura 4: Representação de polígonos simples.



Fonte da imagem: Produção da autora.

Já um polígono não simples é quando há a interseção ou buracos, chamamos também de polígono complexo.

Figura 5: Representação de polígonos não simples.



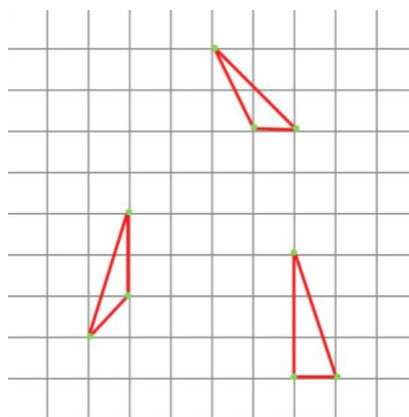
Fonte da imagem: Produção da autora.

5.2. Aditividade do Teorema de Pick

Para entendermos a aditividade do Teorema, partimos de algumas definições citadas por LIMA (2012) e RODRIGUES (2014):

- I. Triângulo fundamental: É um triângulo em que ao ser colocado na malha, possui apenas os três vértices e nenhum nó interno.

Figura 6: Representação de triângulos fundamentais.



Fonte da imagem: Produção da autora.

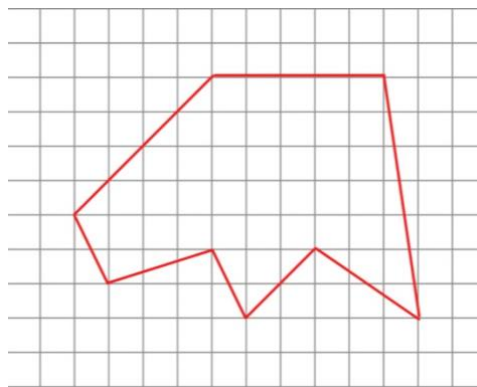
- II. A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.
- III. Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de $n - 2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.
- IV. A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n - 2)\pi$. Levando em consideração a definição anterior e que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π , daí $(n - 2)\pi$.

- V. Todo polígono cujos vértices pertencem a uma malha pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais, tomando como base a definição III

Conheceremos agora uma propriedade importante do Teorema de Pick, a aditividade. Basicamente se pegarmos um polígono e calcularmos sua área por meio da fórmula de Pick, ao justapor esse polígono em outros dois e aplicar a fórmula de Pick separadamente, ao somarmos essas duas áreas teremos o mesmo número que encontramos quando era apenas um polígono. Segue agora a demonstração:

Considere $\mathcal{P}$ um polígono e a sua área dada por $Pick(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}B + I - 1$, onde B são os nós da borda e I os nós internos.

Figura 7: Polígono para representar aditividade.

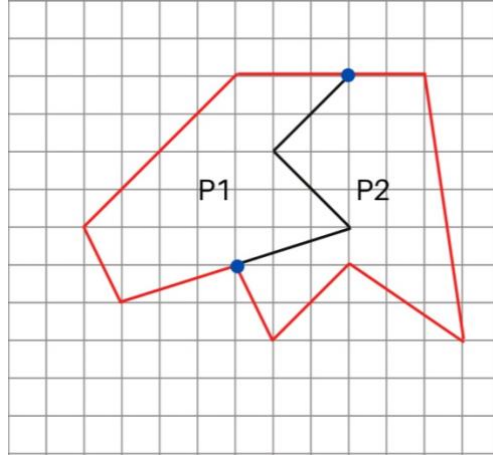


Fonte da imagem: Produção da autora.

Justapondo em dois polígonos P_1 e P_2 , onde se tem B_1 os nós da borda e I_1 os nós internos do polígono P_1 , assim como B_2 os nós da borda e I_2 nós internos de P_2 , aplicando a fórmula de Pick obtemos:

$$Pick(P_1) = \frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1 \quad \text{e} \quad Pick(P_2) = \frac{1}{2}B_2 + I_2 - 1$$

Figura 8: Aditividade do Teorema de Pick.



Fonte da imagem: Produção da autora.

Tomamos k como uma constante que representa os nós de interseção que seriam nós de borda dos polígonos, temos então:

$$I = I_1 + I_2 + k \quad (M_1)$$

Como a constante k virou nó interno, temos então a quantidade de nós da borda de P_1 igual a $B_1 - k$ e de P_2 igual a $B_2 - k$, repare também que na interseção ocorreu de dois nós da borda, A e B, serem contados duas vezes, pois pertenciam a borda de cada polígono sem a justaposição. Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 - 2 \\ B &= (B_1 - k) + (B_2 - k) - 2 \\ B &= B_1 + B_2 - 2k - 2 \end{aligned} \quad (M_2)$$

Substituindo M_1 e M_2 na fórmula de Pick, temos:

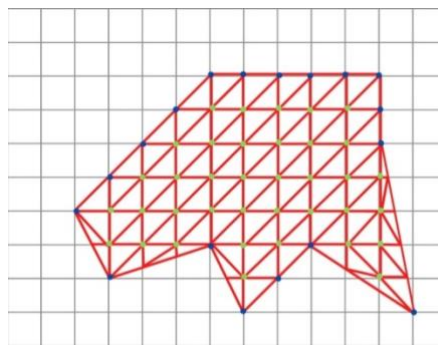
$$\begin{aligned} \text{Pick}(\mathcal{P}) &= \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2 - 2k - 2) + (I_1 + I_2 + k) - 1 \\ &= \frac{(B_1 + B_2 - 2k - 2)}{2} + (I_1 + I_2 + k) - 1 = \frac{(B_1 + B_2 - 2k - 2 + 2I_1 + 2I_2 + 2k - 2)}{2} \\ &= \frac{(B_1 + 2I_1 - 2 + B_2 + 2I_2 - 2)}{2} = \left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) \\ &= \text{Pick}(P_1) + \text{Pick}(P_2). \end{aligned}$$

5.3. Demonstração do Teorema de Pick

Agora, tendo as informações supracitadas, faremos a demonstração do Teorema de Pick conforme LIMA (2012):

Seja P um polígono cujos vértices pertencem a uma malha quadriculada, indicaremos então por B os nós da borda e por I os nós internos. Supomos então que esse polígono pode ser decomposto por T triângulos fundamentais que, como vimos anteriormente, a área de cada triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$, como temos T triângulos fundamentais, a área será $A(P) = \frac{1}{2} T$.

Figura 9: Representação do polígono P com seus nós internos e da borda.



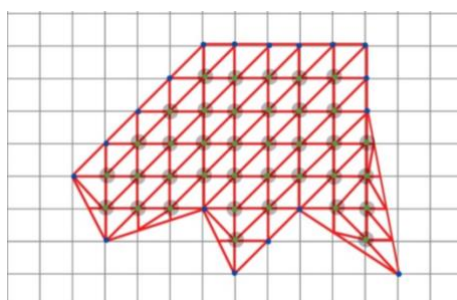
Fonte da imagem: Produção da autora

Calculando a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem o polígono, temos:

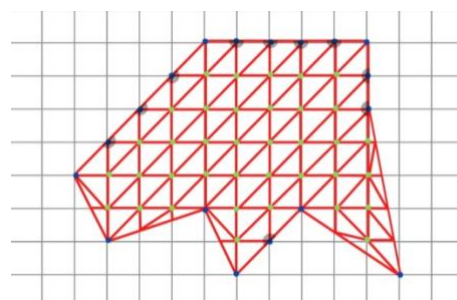
$$S_a = \pi \cdot T \quad (M_3)$$

uma vez que cada a soma dos ângulos internos de cada triângulo vale π radianos.

Figura 10: Representações do polígono P com seus ângulos.



Ângulos nos nós internos



Ângulos nos nós da borda

Fonte da imagem: Produção da autora

Note que ao redor de cada nó interno se formam ângulos de 2π radianos, dando um total de $2\pi I$ radianos. Considere agora B' sendo o número de nós que formam os vértices do polígono e B'' o número de nós que estão na borda mas que não são vértices do polígono, temos assim que $B = B' + B''$. Observe que os ângulos de B' são ângulos internos e de acordo com a definição IV (já citada), teremos a soma dos ângulos igual a $\pi(B' - 2)$, assim também será a soma dos ângulos de B'' igual a $\pi B''$, pois como o B'' não são vértices do polígono seus ângulos são rasos. Somamos agora os ângulos internos e os da borda, igualando-os a (M_3) temos que :

$$\pi.T = 2\pi I + \pi(B' - 2) + \pi B''$$

$$\pi.T = 2\pi I + \pi(B' + B'') - 2\pi$$

$$\pi.T = 2\pi I + \pi B - 2\pi$$

$$T = 2I + B - 2$$

Substituindo T em A(P):

$$A(P) = \frac{1}{2} T$$

$$A(P) = \frac{1}{2} (2I + B - 2)$$

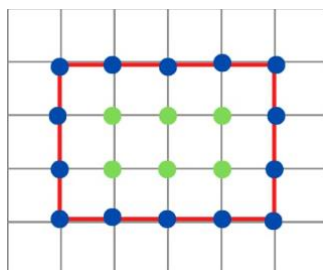
$$A(P) = \frac{1}{2} B + I - 1$$

Resultando assim na fórmula do Teorema de Pick.

6. CALCULANDO ÁREAS COM A FÓRMULA DE PICK

1. Calcule a área dos polígonos abaixo:

Polígono M



Nós da borda (B): 14

Nós internos (I): 6

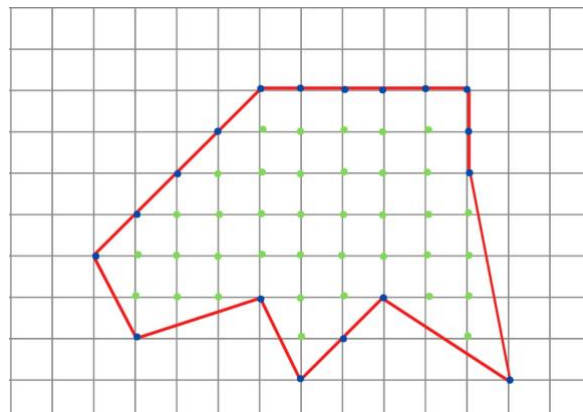
$$A(M) = \frac{1}{2}B + I - 1$$

$$A(M) = \frac{1}{2}(14) + (6) - 1$$

$$A(M) = 7 + 6 - 1$$

$$A(M) = 12 \text{ u. a.}$$

Polígono N



Nós da borda (B): 18

Nós internos (I): 37

$$A(N) = \frac{1}{2}B + I - 1$$

$$A(N) = \frac{1}{2}(18) + (37) - 1$$

$$A(N) = 9 + 37 - 1$$

$$A(N) = 45 \text{ u. a.}$$

7. CONSIDERAÇÕES

Durante a construção do nosso trabalho, encontramos muitos materiais e diferentes abordagens ao tema de estudo. Contudo, acreditamos que a nossa pesquisa, mesmo considerando um estudo limitado, apresentou de modo bem didático o Teorema de Pick e sua abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples.

Dentro desse contexto, acreditamos que os objetivos da pesquisa foram alcançados, pois a partir desse estudo conhecemos o Teorema de Pick, compreendermos seus elementos e sua abordagem para o cálculo de áreas de polígonos.

É importante ressaltar, que o estudo desenvolvido carece de mais profundidade a fim de detalhar com mais especificidades aspectos do Teorema de Pick. Diante disso, recomendamos um estudo mais detalhado e com maior profundidade para abordarmos com maior domínio as limitações do Teorema de Pick.

8. REFERÊNCIAS :

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **Georg Alexander Pick**. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews. Escócia, 2005. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick/>>. Acesso em: 20 jun. 2021.

COSTA, Dailson Evangelista; PEREIRA, Marcos José ; MAFRA, José Ricardo e Souza. **GEOPLANO NO ENSINO DE MATEMÁTICA**: alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula. *AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas* V.7 - n. 13 - jul. 2010/dez. 2010, V. 7 - n. 14 - jan 2011/dez. 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LIMA, E. L. Meu professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RODRIGUES, Ivana do Monte. **Área de Figuras Planas e Teorema de Pick**: Uma Abordagem Diferenciada para Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental. Dissertação

(Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Do Amazonas Instituto De Ciências Exatas Programa De Pós-Graduação Em Matemática Programa De Mestrado Profissional Em Matemática, p.33-35,Manaus,2014.

SFORNI, Marta Sueli de Faria; GALUCH, Maria Terezinha Bellanda . Aprendizagem conceitual nas séries iniciais do ensino fundamental. **Educar**, Curitiba, n. 28, p. 217-229,2006.