



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JUCIEL ALVES DE SOUSA

AS CONTRIBUIÇÕES DOS ALGORITMOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM
DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS

ASSUNÇÃO DO PIAUÍ
2023

JUCIEL ALVES DE SOUSA

**AS CONTRIBUIÇÕES DOS ALGORÍTMOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM
DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS**

Artigo apresentado ao Curso de Especialização
em Ensino de Matemática do Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí,
Campus Teresina Central como produto da
disciplina Tecnologia do Trabalho Científico.

Orientador: Profa. Ms. Louise Tatiana Mendes
Rodrigues

ASSUNÇÃO DO PIAUÍ
2023

JUCIEL ALVES DE SOUSA

**AS CONTRIBUIÇÕES DOS ALGORÍTMOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM
DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS**

Artigo apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, *Campus* Teresina Central como produto da disciplina Tecnologia do Trabalho Científico.

Orientador: Profa. Ms. Louise Tatiana Mendes Rodrigues

Aprovado em: 04/08/2023

BANCA EXAMINADORA

Profa. Ms. Louise Tatiana Mendes Rodrigues (orientador e Presidente)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)

Prof.. Ms Fernando Castelo Branco Santana (Avaliador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)

Prof. Ms. Ivan dos Santos Oliveira (Avaliador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

AS CONTRIBUIÇÕES DOS ALGORÍTMOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS

Autor: Juciel Alves de Sousa¹

Orientador: Louise Tatiana Mendes Rodrigues²

RESUMO

Este artigo apresenta o resultado de uma pesquisa sobre os algoritmos e as operações aritméticas fundamentais. Ao longo de 15 anos como professor do ensino de matemática, pude observar notoriamente as dificuldades dos alunos na compreensão de conteúdos que requeriam uma ou mais dentre as quatro operações aritméticas fundamentais. Isso corrobora para o surgimento de dificuldades na aprendizagem de conteúdos subsequentes. Diante disso, surgiu o interesse em buscar na literatura, trabalhos já produzidos, para investigar a importância dos algoritmos para o ensino e aprendizagem dessas operações. Motivo pelo qual a pesquisa buscará aprofundar estudos bibliográficos, afim de descrever, caracterizar e avaliar práticas exitosas no ensino dessas operações, o que gerou a seguinte indagação: Quais as contribuições dos algoritmos para o ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais? O presente estudo objetiva analisar as contribuições dos algoritmos para o ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais. Especificamente, o trabalho busca descrever as operações aritméticas fundamentais no contexto da matemática; caracterizar o uso dos algoritmos como método para a otimização do ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais e avaliar como o uso dos algoritmos contribui para o ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais. As análises foram feitas com a finalidade de obter informações sobre a forma que os algoritmos contribuem para a aprendizagem das operações aritméticas fundamentais em contexto educativo, tendo como hipótese que o ensino dessas operações através do uso dos algoritmos contribui para a aprendizagem significativa e conceitual dessas operações.

Palavras chave: Algoritmo; Operações; Aritméticas

ABSTRACT

This article presents the results of research into fundamental arithmetic algorithms and operations. Over the course of 15 years as a mathematics teacher, I was able to clearly observe students' difficulties in understanding content that required one or more of the four fundamental arithmetic operations. This corroborates the emergence of difficulties in learning subsequent content. Given this, there was an interest in searching the literature for works already produced to investigate the importance of algorithms for teaching and learning these operations. This is why the research will seek to deepen bibliographical studies, in order to describe, characterize and evaluate successful practices in teaching these operations, which generated the following question: What are the contributions of algorithms to the teaching and learning of fundamental arithmetic operations? The present study aims to analyze the contributions of algorithms to the

¹ Licenciado em matemática pela Universidade Federal do Piauí, Brasil (2014), Licenciatura em Informática pelo Instituto Federal do Piauí/Campus Teresina Zona Sul, Brasil (2018), aluno do curso de Pós Graduação em Ensino de Matemática do Instituto Federal do Piauí/Campus Teresina Central. Professor da Rede Pública Municipal de Ensino do Município de Assunção do Piauí-PI. e-mail: juciel2009@gmail.com

² Louise Tatiana Mendes Rodrigues, professora efetiva do Instituto Federal do Piauí/Campus Teresina Central. Mestrado Profissional em Saúde da Família pelo Centro Universitário UNINOVAFAPÍ, Brasil (2018) Coord. do Curso Agente Comunitário de Saúde do Instituto Federal do Piauí, Brasil. e-mail: louisetatiana@ifpi.edu.br

teaching and learning of fundamental arithmetic operations. Specifically, the work seeks to describe fundamental arithmetic operations in the context of mathematics; characterize the use of algorithms as a method for optimizing the teaching and learning of fundamental arithmetic operations and evaluate how the use of algorithms contributes to the teaching and learning of fundamental arithmetic operations. The analyzes were carried out with the purpose of obtaining information about the way in which algorithms contribute to the learning of fundamental arithmetic operations in an educational context, with the hypothesis that teaching these operations through the use of algorithms contributes to the meaningful and conceptual learning of these operations.

Keywords: Algorithm; Arithmetic; Operations.

INTRODUÇÃO

Desde o surgimento do homem, sentiu-se a necessidade da representação de objetos através de símbolos (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2018). Isso foi vital para o surgimento da matemática, de maneira que esta contribuiu para a sobrevivência humana uma vez que as relações matemáticas, possibilitaram a contagem e o cálculo, importantes para o elemento humano (BRASIL, 1998).

Essa ciência surgiu com “características próprias de compreender e atuar no mundo e, o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural” (BRASIL, 1998, p. 24). Neste sentido, ela tem um papel formativo fundamental na formação e evolução humana. Possuindo um papel relevante, pois forma a base de outras ciências (BRASIL, 1998).

A matemática no contexto escolar da educação básica no Brasil está disciplinada em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). As discussões no âmbito da educação matemática, segundo os PCNs, apontam para a necessidade de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade que cresce em diversos campos da atividade humana (BRASIL, 1998, p. 19). Sendo tarefa da escola sistematizar os conhecimentos relacionados a essa realidade (SMOLE e MUNIZ, 2013).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a matemática é fruto da criação e invenções humanas. A história mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas que surgiram na vida prática, na interação do homem com a natureza (BRASIL, 1998).

Para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) “a matemática não se restringe apenas a quantificação e aos fenômenos determinísticos [...], ela cria sistemas abstratos, que se relacionam a fenômenos do espaço, movimentos, formas e números.” (BRASIL, 2020, p. 265). Ambos visam trazer a matemática como ciência humana e científica, capaz de explicar e intervir no mundo concreto (BRASIL, 1998; 2018).

Originalmente “a palavra matemática vem do grego “*mathematike*”. Em sua origem estava ligada ao ato de aprender, [...], enquanto matemático, do grego *mathematikos*, era a palavra usada para designar alguém “disposto a aprender” (BIANCHINI, 2018, p. VI). Deste modo, o seu significado pode ser associado a sistema científico de aprendizagem e explicação de fenômenos humanos.

A matemática é uma ciência cujo demonstrações se apoiam sobre um sistema de teoremas, axiomas e postulados (BRASIL, 2020). Assim, é de fundamental importância ter o compromisso com o letramento matemático. E assim, desenvolver as “competências e habilidades de raciocinar e argumentar matematicamente” (BRASIL, 2020, p. 266).

O contato com números e operações acontece nos anos iniciais da educação básica. Sem dúvida essas operações estão presentes no cotidiano da vida humana, em situações que vão das simples às mais complexas (BRASIL, 1998). Evidenciando, portanto, que essas operações estão para a vida e que para ressignificá-las, necessita-se, serem assimiladas a fim de que otimizem os contextos sociais.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2020), elenca o uso do algoritmo como linguagem para resolução, síntese e conclusões. Porém, a aprendizagem não deve se limitar a ele (BRASIL, 2020). Para Moreno (2021), é importante o uso do algoritmo, mas, ressalta que mais importante é “descobrir ou redescobrir”, conectar as ideias intuitivas das operações com seus respectivos algoritmos e explicar um algoritmo argumentando sobre sua validade.” (MORENO, 2021, p. 5 e 18).

A revista Nova Escola traz o conceito de algoritmo como “sendo uma sequência finita e ordenada de passos (regras), que permite a realização de cálculos. Em matemática, ele é resultado da evolução de técnicas de cálculo que se desenvolveram ao longo da história”

(NOVA ESCOLA, 2023). Aperfeiçoando, portanto, a resolução das operações aritméticas fundamentais e o conhecimento construído a partir das mesmas.

Indicadores de rendimento em matemática como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), mostram como está a aprendizagem nesta área de conhecimento. Apesar dos esforços e mudanças no currículo, os resultados acerca da aprendizagem matemática têm sido insatisfatórios. Segundo o site QEdU (2023), a proficiência no ensino de matemática, em 2021, no 5º ano foi 37% de aprendizagem, 9º ano 15% e os da 3ª série do ensino médio apenas 5%.

Diante do exposto, apresenta-se ao Instituto Federal do Piauí o projeto de pesquisa intitulado: As contribuições dos algoritmos para o ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais. Que partiu do seguinte problema de pesquisa: Quais as contribuições dos algoritmos para o ensino e aprendizagem das operações fundamentais?

E como resposta hipotética: Parte-se da hipótese de que o ensino das operações aritméticas através do uso dos algoritmos contribui para a aprendizagem, facilita a compreensão, otimiza o interesse com foco na participação do aluno em seu próprio processo de construção e aquisição de conhecimento, tendo em vista que a aprendizagem dos algoritmos é importante para a compreensão significativa, conceitual e prática das operações fundamentais, uma vez que se constitui como base para a compreensão de conteúdos subsequentes e, importante dentro do currículo para a aquisição de novas habilidades que facilitem futuras aprendizagens de conteúdos que compõe o currículo da matemática em geral.

Para a consecução do estudo, elencou-se como objetivo geral: Analisar as contribuições dos algoritmos para o ensino e aprendizagem das operações fundamentais. E como objetivos específicos: Descrever as operações fundamentais no contexto da matemática do ensino fundamental; caracterizar o uso dos algoritmos como método para a otimização do ensino a aprendizagem das operações fundamentais e avaliar como o uso dos algoritmos contribuiu para o ensino e aprendizagem das operações fundamentais matemáticas em materiais bibliográficos.

Este trabalho enquanto projeto de pesquisa justifica-se a partir de dois parâmetros: pessoal e institucional. Em minha experiência como professor de matemática, do ensino fundamental e médio, pude observar notoriamente as dificuldades por partes dos alunos na compreensão de conteúdo, cujo conhecimentos prévios requeriam uma ou mais dentre as quatro operações fundamentais. A ocorrência dessas lacunas corroboram para um efeito “dominó” de dificuldades/deficiências na aprendizagem das operações fundamentais e de conteúdos subsequentes tão importantes para uma formação integral do ser humano.

Diante disso, surgiu o interesse em buscar na literatura, trabalhos já produzidos, para investigar as contribuições do uso dos algoritmos no ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais. Motivo pelo qual a presente proposta de pesquisa buscará aprofundar estudos bibliográficos, afim de avaliar práticas exitosas no ensino das operações matemáticas, partindo do uso dos algoritmos na matemática do ensino fundamental.

Para a instituição formadora, o Instituto Federal de Ciências e Tecnologia do Piauí-IFPI, o produto derivado deste trabalho, pretende contribuir para as discussões teórico-metodológicas da disciplina didática da matemática, assim como contribuir para que outros pesquisadores possam partir das considerações finais do estudo para aprofundar, refutar ou suscitar novos questionamentos sobre o estudo e o objeto de pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 As Operações Fundamentais: Pressupostos Teóricos Metodológicos

2.1.1 Contexto histórico

A história da matemática é primordial em qualquer discussão matemática e o seu ensino. O uso deste recurso é incentivado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

Sendo este, segundo os PCNs um “instrumento de resgate da própria identidade cultural” (BRASIL, 1998).

Registros históricos mostram que a matemática se inicia quando o homem primitivo necessita e expressa habilidades para quantificar (BIANCHINI, 2018). Segundo o autor, diversas civilizações desenvolveram suas próprias técnicas e regras para contagem, resultando num engenhoso sistema numérico, o Sistema de Numeração Decimal (SND).

2.1.2 O conjunto dos números naturais

“A história dos números está ligada à das necessidades e preocupações de povos que, ao buscar recensear seus membros, [...] e suas vitórias, construíram interessantes sistemas de numeração” (BRASIL, 1998, p. 96). Dentre eles, o Sistema de Numeração Decimal (SND), que possui base 10 e pode ser descrito na forma: $N = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$, (DOMINGUES e IEZZI, 2003).

Para Lima (2020), a partir destes sistemas numéricos surge o Conjunto dos Números Naturais, um “modelo matemático com padrões que permite a contagem e operações” (LIMA, 2020). O que permitiu ao longo da história o desenvolvimento e evolução das operações fundamentais da aritmética. Fundamenta-se na ideia axiomática proposto por Giuseppe Peano (1858-1932).

2.1.3 O algoritmo

Como já citado na introdução, algoritmo é “uma sequência finita e ordenada de passos, que permite a realização de cálculos”. Em matemática, segundo a revista Nova Escola, o algoritmo “é resultado da evolução de técnicas de cálculo que se desenvolveram ao longo da história” (NOVA ESCOLA, 2023).

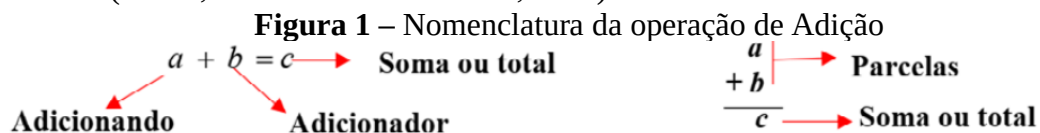
De acordo com Smole e Muniz (2013), todo algoritmo é uma técnica, mas, nem toda técnica pode se apresentar na forma de algoritmo. D’Ambrósio (1989) ressalta que, adquirir as habilidades no desenvolvimento do algoritmo das operações fundamentais, implica preparar o aluno para os conteúdos subsequentes (D’AMBRÓSIO, 1989).

2.1.4 As operações aritméticas fundamentais

Moreno classifica as operações aritméticas fundamentais em diretas e inversas. “Realizamos uma operação toda vez que agimos sobre os objetos e realizamos neles alguma transformação” (MORENO apud CENTURION, p. 5). Para Moreno (2021), “as operações diretas possuem propriedades de transformação de situação inicial em outras, e as inversas de desfazer as operações e voltar a situação inicial” (MORENO, 2021, p. 5).

2.1.5 A operação aritmética de Adição

“Dados dois números naturais a e b , quaisquer, podemos deslocar a de b , posições para a direita, obtendo um número que será denotado por $a + b$. Essa operação entre números naturais é chamada de *adição* e o número $a + b$ é chamado *soma* de a e b ” (HEFEZ, 2015, p. 5). A operação de *adição*, também conhecida como *soma*, tem relação com a ideia intuitiva de juntar ou acrescentar (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2018).

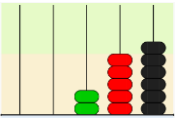
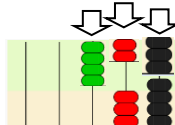
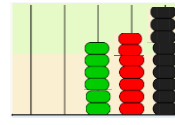


Fonte: (MORENO, 2021, p. 7)

Com a introdução do Sistema de Numeração Decimal (SND) “é preciso que o aluno tenha uma compreensão sobre a ordem que cada algarismo ocupa no número” (RODRIGUES, 2019, p. 25). Araújo (2021) afirma que é comum a utilização do algoritmo da adição, mas, sem o detalhamento do algoritmo. De acordo as autoras Rodrigues (2019) e Araújo (2021), o ensino e desenvolvimento do algoritmo desta operação exige conceitos sobre: ordem, classes, decomposição e trocas. O quadro 1 e a figura 1 traz um exemplo do algoritmo.

Técnica 1: Algoritmo da adição sem agrupamento (adição simples).

Quadro 1 – Ábaco: Vamos adicionar os números $256 + 423$.

Representamos 256 no ábaco.	Agora vamos acrescentar 423 ao número 256.	Temos como resultado o número.
		
C D U 2 5 6		C D U 6 7 9

Fonte: elaborado pelo autor

De acordo com Dante (2017), para desenvolver esse algoritmo da adição, deve-se iniciar a soma pela ordem das unidades, depois dezenas, centenas e assim sucessivamente. De acordo com o Programa Gestão da Aprendizagem Escolar: Gestar I (2007), quando os alunos já dominarem o processo de troca e agrupamento no Sistema de Numeração Decimal (SND) é importante trabalhar a adição no ábaco, adição simples e com (número reserva) simultaneamente. A seguir, a figura 2 aborda o algoritmo usual da adição sem agrupamento.

Figura 2 – Algoritmo usual: Vamos adicionar os números $23+26$.

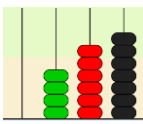
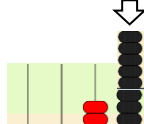
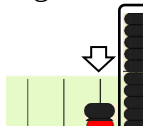
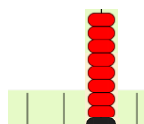
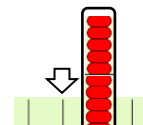
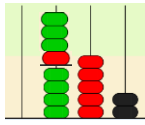
D	U		
2	3	23	3 unidades + 6 unidades = 9 unidades
+ 2	6	ou + 26	2 dezenas + 2 dezenas = 4 dezenas
4	9	49	

Fonte: (DANTE, p. 70)

Porém existe situação em que a soma dos algarismos de mesma ordem é um valor maior que 9, pelas regras do Sistema de Numeração Decimal (SND), nenhuma ordem pode conter um valor maior que nove. Assim, a técnica usada na figura 2 só pode ser usada enquanto a soma das ordens isoladas for menor ou igual a nove (MORENO, 2021). Moreno (2021) reforça que, quando a soma dos algarismos de mesma ordem for maior que 9, deve-se transportar o algarismo para ordem imediatamente superior fazendo a decomposição conhecido popularmente como “regra do vai um”. Veja o quadro 2

Técnica 2: Algoritmo da adição com reagrupamento (número reserva).

Quadro 2 – Ábaco: Vamos adicionar os números $467+385$.

Representarem os o número 467 no ábaco.	Acréscitam os 5 unidades.	10 unidades é igual a 1 dezena, substituímos por 1 dezena na ordem seguinte.	Acréscitam os 8 dezenas.	10 dezenas é igual a 1 centena, substituímos por 1 centena na ordem seguinte.	Acréscitam os as 3 centenas que restam.
					
4 6 7					C D U 8 5 2

Fonte: elaborado pelo autor

O quadro 2 aborda o algoritmo da adição quando a soma dos números de mesma ordem é maior que 9. Como o Sistema de Numeração Decimal (SND) possui base 10, a ordem menor equivale a 10 vezes a ordem seguinte, fundamentando portando a regra do “vai um”. Neste caso

2.1.6 A operação aritmética da Subtração

“Dados dois números naturais a e b tais que $a \leq b$, o número de deslocamentos para a direita partindo de a para atingir b será representado por $b - a$ e será chamado de *diferença* entre a e b ” (HEFEZ, 2015, p. 10). De acordo com Moreno (2021), a operação de subtração, conhecida como *diferença*, é entendida como a operação inversa da adição. Tem relação com a ideia intuitiva de tirar, diminuir, comparar e completar (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2018).

Figura 4 – Nomenclatura da Operação de Subtração



Fonte: (MORENO, 2021, p. 7)

As ideias relacionadas às situações subtrativas, segundo Smole e Muniz (2013) são conceitos mais difíceis de serem assimilados, tornando-a mais difícil que a adição. É importante desenvolver o algoritmo da subtração simples, quando o aluno já tem os conceitos atribuídos a essa operação. “É conveniente, então, iniciar o ensino dos algoritmos da adição e da subtração quando os alunos já dominam os processos de agrupamentos e de trocas e a representação simbólica dos números no Sistema de Numeração Decimal (SND)” (TOLEDO e TOLEDO, 1997, p. 106). O quadro 4 traz o algoritmo da subtração sem reagrupamento.

Técnica 4: Algoritmo da subtração sem agrupamento (subtração simples)

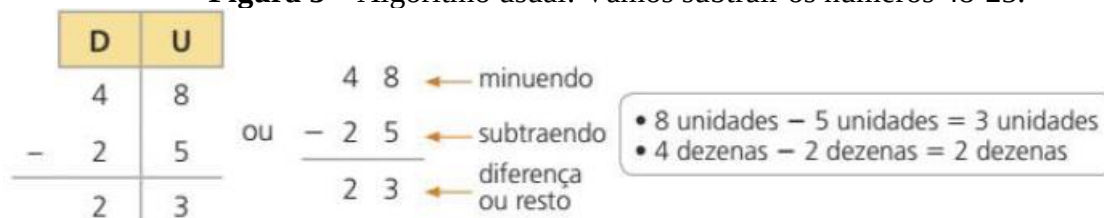
Quadro 4 - Ábaco: Vamos subtrair os números 431 de 574.

Representamos 574 no ábaco.	Subtraímos 431.	O resultado é o número 143.
C D U	C D U	C D U
		1 4 3

Fonte: elaborado pelo autor

A subtração sem reagrupamento deve ser realizada da direita para a esquerda, operando os algarismos de mesma ordem. Primeiro representamos no ábaco 574, em seguida retira-se 1 unidade de 4 unidades, 3 dezenas de 7 dezenas e 4 centenas de 5 centenas, resultando na diferença.

Figura 5 – Algoritmo usual: Vamos subtrair os números 48-25.



Fonte: (GIOVANNI JR., p. 104)

De acordo com Toledo e Toledo (1997), quando houver algarismos de mesma ordem no minuendo menor que no subtraendo aparecem discursões sobre o algoritmo mais apropriado para ser utilizado: recurso a ordem superior ou compensação!?

França (2020) afirma que quando houver pelo menos um algarismo no minuendo, menor que seu correspondente no subtraendo, se faz necessária adotar o processo de reagrupamentos entre as ordens dos algarismos, conhecido como processo de recurso a ordem superior, chamado pelos professores de “empresta um”. Para Smole e Muniz (2013) a “expressão “empresta um” é errônea, pois quando efetuamos a operação não há empréstimos e sim a decomposição de dezenas em unidades, centenas em dezenas e assim sucessivamente” (SMOLE e MUNIZ, 2013, p. 32). A seguir o quadro 5 traz o desenvolvimento do algoritmo.

Técnica 5: Algoritmo da subtração pelo processo de recurso à ordem superior (decomposição)

Quadro 5 – Ábaco: Vamos subtrair os números 283 de 457.

Representamos o número 457 no ábaco.	A seguir das 7 unidades retiramos 3, restando 4.	Na casa das dezenas tem 5 discos, não podemos retirar 8 de 5. Assim, desagrupamos a centena em dezenas.	Agora na casa das dezenas temos 15 discos.	Pode-se retirar 8 dezenas de 15.	Por fim, das 3 centenas podemos retirar 2. O resultado é 174.

Fonte: elaborado pelo autor

O desenvolvimento do algoritmo demonstrado no quadro 5, com a necessidade de reagrupamento, por meio do processo de recurso a ordem superior, permite a resolução da operação de subtração sempre que o minuendo for menor que o subtraendo, ambos de mesma ordem. “A existência de pelo menos um algarismo no minuendo, menor que seu correspondente no subtraendo, para a realização do cálculo, se faz necessário realizar o processo de reagrupamento” (FRANÇA, 2020, p. 25-26).

Figura 6 – Algoritmo usual: Vamos subtrair 38 de 62.

D	U	
6	2	• 12 unidades – 8 unidades = 4 unidades
– 3	8	
	4	• 5 dezenas – 3 dezenas = 2 dezenas

Fonte: (GIOVANNI JR., p. 111)

Em matemática, a variedade de métodos garante múltiplas formas de aprendizagem, permitindo. Toledo e Toledo (1997) trazem um algoritmo conhecido como processo de compensação. Se desenvolvimento exige conceitos sobre ordem que o algarismo ocupa.

Técnica 6: Algoritmo da subtração pelo processo de compensação

Quadro 6 - Vamos subtrair os números 35 de 82.

D	U	D	U	D	U	D	U
8	2	8	2 ⁺¹⁰	8	2 ⁺¹⁰	8	12
– 3	5	– 3 ⁺¹⁰	5	– 3 ⁺¹	5	– 4	5
						4	7

Fonte: elaborado pelo autor

Como não é possível subtrair 5 unidades de 2 unidades aplicamos então a propriedade da compensação, aumentando em 1 dezena, ou seja, 10 unidades os dois números. Para melhor compreensão, o algarismo da ordem menor aumenta em 10 vezes em relação ao da ordem maior. Após o processo de compensação subtrai 5 unidades de 12, 4 dezenas de 8, obtendo, portanto, o valor 17. Este algoritmo tira a necessidade de reagrupamento e evita erros cometidos no processo de recurso a ordem superior.

2.1.7 A operação aritmética da Multiplicação

A ideia de multiplicação segundo os autores Iezzi, Dolce e Machado (2018) está associada à de somar ou combinar parcelas iguais. Para Smole e Muniz (2013) “à ideia de adição de parcelas iguais associa-se também à multiplicação ao raciocínio combinatório, e que a exploração dessas ideias é fundamental para a compreensão da operação de multiplicação” (SMOLE e MUNIZ, 2013, p. 39). A seguir é apresentado a nomenclatura desta operação.

Figura 7 – Nomenclatura da Multiplicação

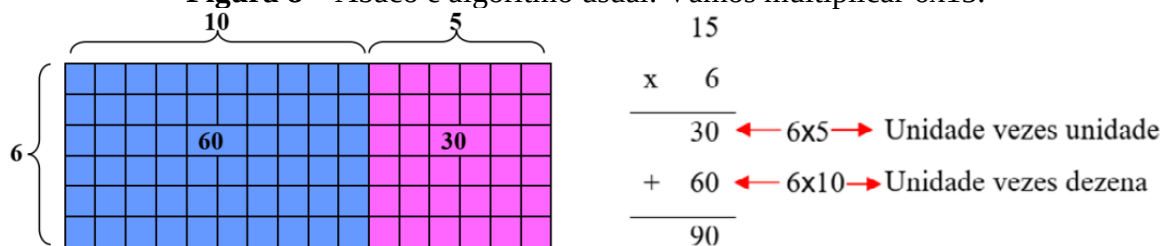


Fonte: (MORENO, 2021, p. 10)

De acordo com Araujo (2021), os alunos apresentam maiores dificuldades na operação de multiplicação e divisão. Para Rodrigues (2019) o algoritmo da multiplicação fundamenta a relação existente entre as propriedades da adição e multiplicação. Veja figura 8 e 9.

Técnica 7: Algoritmo da multiplicação com multiplicador na ordem das unidades simples

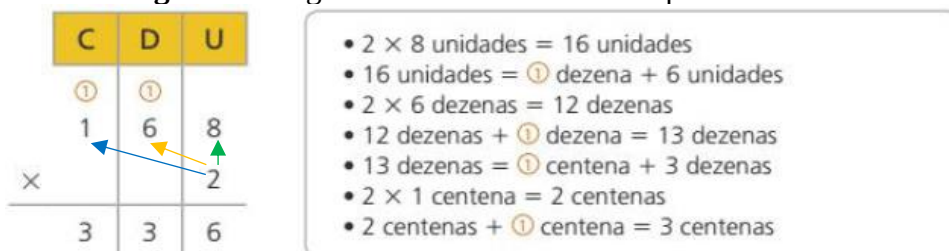
Figura 8 – Ábaco e algoritmo usual: Vamos multiplicar 6x15.



Fonte: (MORENO, 2021, p. 23)

Técnica 8: Algoritmo da multiplicação com multiplicador na ordem das unidades simples e com reagrupamento (“reserva”).

Figura 9 – Algoritmo usual: Vamos multiplicar 2 x 168.



Fonte: (GIOVANNI JR., p. 99)

Alguns professores, quando desenvolve o algoritmo com multiplicador na ordem das dezenas, acabam pedindo para seus alunos acrescentar um “traço” sem se preocupar com o significado, resultando em erros. Para desenvolver o algoritmo da multiplicação, com fatores maior ou igual a uma dezena, deve-se fazer o uso da propriedade distributiva (TOLEDO e TOLEDO, 1997).

Técnica 9: Algoritmo da multiplicação com multiplicador na ordem das centenas.

Quadro 7 – Algoritmo usual: Vamos multiplicar 13 x 25

	C	D	U	
		2	5	
x		1	3	
		7	5	→ 3 x 25
	2	5	0	→ 10 x 25
	3	2	5	

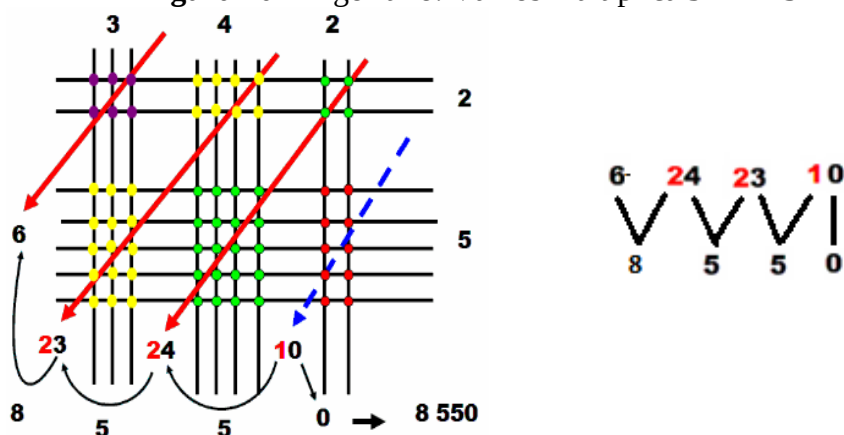
Fonte: adaptado de (MORENO, 2021, p. 23)

A técnica consiste em multiplicar da esquerda para a direita, iniciando pela ordem menor, os resultados da operação são reagrupados e depois adicionados. Ressalta-se a relevância de se colocar o zero sempre a partir do produto parcial da dezena, garantindo o produto final correto. Em sua pesquisa, Araújo (2021) afirma que alunos apresentam dificuldades, principalmente na multiplicação, não entendem o porquê de usar o zero no desenvolvimento do algoritmo com multiplicador maior ou igual a ordem das dezenas.

“Os Chineses também desenvolveram um sistema numérico, no qual em um predominava o princípio multiplicativo” (BOYER, 1974, p. 145). Isso permitiu a realização de técnicas de cálculo ao longo da história. A eficiência da técnica fundamenta-se pela multiplicação com reagrupamento, pois os valores obtidos após a multiplicação são reagrupados e depois adicionados. A seguir a figura 10 traz a demonstração deste algoritmo.

Técnica 10: Algoritmo da multiplicação com multiplicador na ordem das dezenas (método chinês).

Figura 10 - Algoritmo: Vamos multiplicar 342 x 25



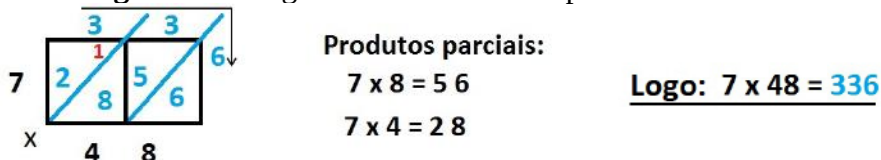
Fonte: (BLOGSPOT, 2010)

A técnica consiste em construir traços na vertical e horizontal para representar os fatores. Os pontos de intersecção representam o produto, para encontrar o resultado deve-se fazer a contagem de pontos de cada uma das diagonais. Se o número for igual ou maior que uma dezena, soma-se a dezena com a unidade da próxima diagonal, obtendo, portanto, o resultado da operação $342 \times 25 = 8.550$.

Além dos Chineses, outras civilizações também desenvolveram técnicas para multiplicar. De acordo com Bianchini (2018) os Hindu desenvolveram uma técnica de multiplicação para resolver problemas cotidianos, conhecida como “multiplicação em gelosia”, “em célula”, “em grade” ou “quadrilateral”.

Técnica 11: Algoritmo da multiplicação pelo processo de Gelosia.

Figura 11 – Algoritmo: Vamos multiplicar 7 x 48



Fonte: (FRANÇA, 2020, p. 28)

Em cada quadrado, que corresponde a um algarismo que se quer multiplicar, traça-se a diagonal da direita para a esquerda, multiplica, escrevendo produto na célula adequada e depois o das unidades e em seguida efetua-se a adição. De acordo com França (2020), a técnica funciona com qualquer número, independentemente da quantidade de algarismos. Portanto, é útil, e pode ser usada em situações em que o aluno ainda comete erros na multiplicação com multiplicador maior ou igual a ordem das dezenas.

2.1.7.1 Axiomas da multiplicação

“Assim como a adição, a multiplicação também permite algumas propriedades axiomáticas. A seguir listaremos alguns desses axiomas” (BEZERRA, 2018, p. 165).

(A1) A multiplicação é associativa, isto é: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ tem-se: $(ab)c = a(bc)$.

(A2) A multiplicação é comutativa, isto é: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ tem-se: $ab = ba$.

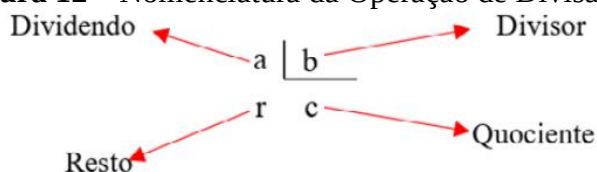
(A3) Existência do elemento neutro, isto é: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ tem-se: $a1 = a$.

(A4) A multiplicação é distributiva em relação a adição, isto é: $(a + b)c = ac + bc$.

2.1.8 A operação aritmética da Divisão

A operação de divisão tem relação com a ideia intuitiva de repartição em quantidades iguais (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2018). O seu algoritmo está fundamentado na ideia de divisão-repartição e a divisão-comparação ou medida. Euclides (c.300 a. C) em “Os elementos” propôs o algoritmo da divisão, cuja demonstração pode encontrada em (DOMINGUES e IEZZI, 2003). Dado dois números inteiros, a e b , com $a > 0$, sempre podemos encontrar dois inteiros q e r tais que: $b = aq + r$, em que $0 \leq r < a$.

Figura 12 – Nomenclatura da Operação de Divisão



Fonte: (MORENO, 2021, p. 11)

De acordo com França (2020), a divisão pelo processo americano ou por estimativas, foi o primeiro algoritmo a ser descrito. Para Smole e Muniz, ela é realizada informalmente pelos alunos no dia a dia. Discorre que, ao “deixar os alunos livre para escolherem o caminho a seguir, contribuirá para aquisição de sentido para o princípio fundamental da divisão” (SMOLE e MUNIZ, 2013, p. 45). A seguir a figura 13 traz o desenvolvimento deste algoritmo.

Técnica 12: Algoritmo da divisão pelo processo americano.

Figura 13. Algoritmo da divisão: Vamos dividir 62/6

$$\begin{array}{r}
 62 \overline{) 6} \\
 \underline{- 6} \quad 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 10 \\
 56 \\
 \underline{- 6} \\
 50 \\
 \underline{- 12} \\
 38 \\
 \underline{- 18} \\
 20 \\
 \underline{- 18} \\
 2
 \end{array}$$

Fonte: (SMOLE e MUNIZ, 2013, p. 45)

Observa-se que na divisão pelo processo americano, é dada ênfase na busca pelo múltiplo, ou seja, a operação é feita recorrendo-se aos múltiplos. Este processo, no entanto, para que seja efetuado com sucesso é necessário que o aluno tem domínio acerca dos múltiplos. Podendo ser utilizado também pode ser utilizado com divisor na ordem das dezenas (TOLEDO e TOLEDO, 1997)

De acordo com Toledo e Toledo (1997), professores divergem sobre o método mais adequado a ser utilizado na divisão. Segundo os autores, o método não faz diferença, é importante que os alunos tentem resolver da maneira mais apropriada, a usarem um procedimento destituído de significado (TOLEDO e TOLEDO, 1997). Eles defendem que, pedagogicamente é mais apropriado inicialmente fazer uso do método longo. A figura 14, a seguir aborda o desenvolvimento do algoritmo.

Técnica 13: Algoritmo da divisão pelo processo euclidiano (modo curto).

Figura 14 – Algoritmo usual: Vamos dividir 900/12.

C	D	U		
9	0	0	1	2
	6	0	7	5
	0			
		D	U	

Fonte: (GIOVANNI JR., 2018, p. 141)

O algoritmo da divisão pode ser desenvolvido pelo processo curto ou processo longo (MORENO, 2021). Segundo (MORENO, 2021) o “método curto” nada mais é do que a omissão ou intercalação da subtração. Para alunos que ainda estão no processo inicial de conceituação é importante trabalhar o “modo longo”, já que o modo curto omite números intercalados, o que dificulta o processo de aprendizagem.

Técnica 14: Algoritmo da divisão pelo processo euclidiano (modo longo).

Figura 15 – Algoritmo usual: Vamos dividir 8544/142.

UM	C	D	U		
8	5	4	4	6	
– 6				1	4 2
	2	5			
– 2	4				
		1	4		
	– 1	2			
			2		

Fonte: (GIOVANNI JR., 2018, p. 132)

Rodrigues (2019) define como método longo, aquele em que o processo é realizado de maneira sucessivas sem a existência de valores intercalados. A figura 15 aborda um exemplo de divisão euclidiana não exata, sem omitir nenhum ponto do desenvolvimento do algoritmo. Este processo para desenvolvimento do algoritmo é importante, pois o aluno visualiza todo o processo e vai construindo o algoritmo passo a passo, o que facilita a aprendizagem.

Outro fator importante é o tratamento do zero como outro algarismo qualquer, isso evitara erros no desenvolvimento do algoritmo. De acordo com o Programa de Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR I “alguns professores consideram o procedimento “uma perda de tempo”, mas é bom lembrar que por meio dele os alunos compreendem que, nesse caso, não há diferença nenhuma em relação do modo de raciocinar” (MECTP3, 2007, p. 63)

Técnica 15: Algoritmo da divisão pelo processo euclidiano (zero intercalado).

Figura 15 – Algoritmo usual: Vamos dividir 614/6.

C	D	U		
6	1	4	+	6
–6	–0	10		1 0 2
0	1	14		C D U
		–12		
		2		

FONTE: (MECTP3, 2007, p. 62)

O processo de indicar a ordem no quociente, segundo Toledo e Toledo (1997), é simples e eficiente, importante para evitar erros no desenvolvimento do algoritmo, principalmente em casos em que aparece o zero. A figura 15 aborda o algoritmo da divisão euclidiana pelo método longo. O zero é tratado como um algarismo qualquer em vez de intercalá-lo.

3 MÉTODO

Quanto a seleção dos trabalhos acadêmicos, inicialmente buscou-se trabalhos bibliográficos já produzidos, que contemplassem o objeto de estudo. As pesquisas foram feitas em dois repositórios acadêmicos “Google Acadêmico” e “Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD)”. A seleção dos trabalhos baseou-se em filtros nos quais selecionou-se somente dissertações apresentadas nos últimos cinco anos.

Ao fazer a busca na base de dados da plataforma do “Google Acadêmico” utilizou-se o booleano “algoritmo: quatro operações fundamentais”, no qual obteve-se diversos resultados, e selecionou-se apenas 1 trabalho com o título: PROFESSOR VIRTUAL:UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS USUAIS DAS OPERAÇÕES BÁSICAS e descartou-se os demais por não contemplarem o objeto de estudo em questão.

Já, ao fazer a busca na base de dados da “Biblioteca Digital de Teses e Dissertações BDTD”, utilizando o booleano “algoritmo: quatro operações fundamentais”, no qual o browser mostrou 2 resultados de 11, para a busca “algoritmo: quatro operações fundamentais”. Destes, selecionou-se dois trabalhos que contemplou o objeto de estudo, sendo eles: “AS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS: DAS DIFICULDADES AO PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM” e “AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS NA PERSPECTIVA DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS”.

Quanto a abordagem a pesquisa se caracteriza como qualitativa, de natureza básica, onde se faz suscitação ou refutação aos fatos apresentados (SILVEIRA e CÓRDOVA, 2009). Silveira e Córdova corroboram ao afirmarem que

as características da pesquisa qualitativa são: objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (SILVEIRA e CÓRDOVA, 2009, p. 32).

De modo que a pesquisa qualitativa possui pressupostos para explicar fenômenos subjetivos dos sujeitos.

Para as autoras Marconi e Lakatos (2003), a pesquisa bibliográfica não é a simples reprodução de ideias e conceitos já formulados. Tem como propósito, colocar o pesquisador em contato com trabalhos já elaborados. Portanto, o produto não deve ser uma cópia, mas sim desenvolver novos paradigmas e questionamentos acerca do tema estudado. De acordo com as autoras

A pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito. Tem por objetivo permitir ao cientista "o reforço paralelo na análise de suas pesquisas ou manipulação de suas informações, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras (MARCONI e LAKATOS, 2003, p. 83).

Assim, a pesquisa bibliográfica é importante suporte para novas discussões a partir de trabalhos já apresentados e possíveis de serem testados por outros pesquisadores, os quais podem refutar ou chegar as mesmas conclusões dos autores principais ou ainda, abrirem novos focos de discussão.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise do artigo de autoria da pesquisadora Rodrigues (2019), que desenvolveu o trabalho intitulado como “As operações matemáticas: das dificuldades ao processo de ensino e aprendizagem” com objetivo de avaliar e diagnosticar os processos e as dificuldades relacionadas ao ensino dos algoritmos das operações aritméticas fundamentais, fazendo uso do material dourado e o algoritmo usual como metodologias alternativas para melhorar o

desempenho dos alunos nos cálculos que envolvem as operações fundamentais. Demonstrou que o ensino do algoritmo junto com o material dourado pode ser essencial na construção dos significados e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais, pois enquanto o aluno desenvolve a contagem usando material concreto, é possível desenvolver também o algoritmo usual, isso cria mecanismos que favorecem a aprendizagem, uma vez que é possível partir da parte abstrata da matemática para a parte concreta.

Ao analisar a pesquisa de Araújo (2021), intitulado como “As operações aritméticas fundamentais na perspectiva da exploração, resolução e proposição de problemas”, que teve como objetivo promover a aprendizagem do algoritmo a partir da exploração, resolução e proposição de problemas referentes as operações fundamentais. Demonstrou que o aluno tem dificuldade em interagir e relacionar os conceitos, algoritmos e operações, isso cria dificuldades na escolha do algoritmo apropriado para solucionar o problema. Isto evidencia que os erros cometidos no desenvolvimento do algoritmo estão relacionados a interpretação, conceituação e consequentemente algoritmização. Quando propomos problemas relacionados ao algoritmo o aluno passa a ter uma certa autonomia e passam a refletir e constrói conceitos/ideias e significados relacionados ao algoritmo dessas operações aritméticas fundamentais. Portanto, a partir deste estudo é possível inferir que os mecanismos corretos que favorecem o desenvolvimento e aprendizagem do algoritmo o torna ferreamente que contribui para o ensino e aprendizagem das operações aritméticas.

Já ao analisar a pesquisa de França (2020), que propôs o ensino do algoritmo das operações por meio do “Professor Virtual: uma proposta para o desenvolvimento de algoritmos usuais das operações básicas”, demonstrou que é possível melhorar o ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais a partir do uso das tecnologias. Desenvolveu um objeto de estudo que visou, de modo geral, criar um suporte, para que alunos com dificuldades em desenvolver os algoritmos usuais aplicados nas resoluções das operações básicas fundamentais, pudessem desenvolvê-los com segurança e autonomia, podendo este ser utilizado tanto no ambiente escolar como fora dele. Conforme vai desenvolvimento o algoritmo o software demonstra a nomenclatura e as partes que compõem o algoritmo da operação escolhida. Ao finalizar o algoritmo, o software mostra os erros e acertos conforme desempenho do aluno. Assim o aluno vai construindo seu conhecimento de maneira autônoma e diversifica, inferindo mais uma vez que o ensino das operações fundamentais a partir do uso dos algoritmos contribui para a aprendizagem presente e futura.

Assim, a partir dos trabalhos elencados, conclui-se, que a compreensão do Sistema de Numeração Decimal (SND) e sua composição, o trabalho com material concreto, os conceitos intuitivos relacionados a cada uma das operações aritméticas fundamentais e o seu algoritmo, o desenvolvimento do algoritmo a partir de problemas significativos assim como as propriedades destas operações e o uso das tecnologias para dinamizar o processo de ensino e aprendizagem, dentre outros, são fatores importantes para o desenvolvimento do algoritmo de maneira correta, isso o torna a peça fundamental que contribui para o ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais. A partir da compreensão do algoritmo é possível trabalhar a resolução de problemas relacionados as operações aritméticas básicas no conjunto dos números naturais, permitindo a evolução para outros conjuntos e consequentemente a aprendizagem de outros conteúdos que compõe o currículo da matemática em geral. Portanto é importante que os professores trabalhem os conceitos necessários, as múltiplas formas de desenvolvimento e variedade de aplicação em problemas significativos, fazendo uso de material concreto e também das tecnologias, para que assim seja possível o desenvolvimento das múltiplas habilidades e êxito no ensino e aprendizagem das operações aritméticas fundamentais e conteúdos subsequentes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que o ensino das operações aritméticas através do uso dos algoritmos contribui para a aprendizagem. Tendo em vista que a aprendizagem dos algoritmos é importante para a compreensão significativa, conceitual e prática dessas operações. Uma vez que se constitui como base para a compreensão de conteúdos subsequentes e, importante dentro do currículo para a aquisição de novas habilidades que facilitem futuras aprendizagens de conteúdos que compõem o currículo da matemática em geral.

Acredita-se que o objetivo deste trabalho foi alcançado e, a partir dos objetivos específicos – que descreveram as operações fundamentais no contexto da matemática do ensino fundamental; caracterizaram o uso dos algoritmos como método para a otimização do ensino a aprendizagem das operações fundamentais e avaliaram como o uso dos algoritmos contribui para o ensino e aprendizagem das operações fundamentais matemáticas em materiais bibliográficos – foi possível chegar ao objetivo geral, que era analisar as contribuições dos algoritmos para o ensino e aprendizagem das operações fundamentais.

Porém, para tanto, é necessário que as instituições de ensino promovam um trabalho colaborativo, visando à conscientização acerca da importância dessas operações. Uma vez que se constitui como base para a compreensão de conteúdos subsequentes e, importante dentro do currículo para a aquisição de novas habilidades que facilitem futuras aprendizagens de conteúdos que compõem o currículo da matemática em geral.

Nessa direção de pensamento, a partir dos resultados da pesquisa considera-se que o papel dos professores não deve ser apenas de apresentar os tipos de atividades utilizadas de forma teórica, mas principalmente que os mesmos promovam a aquisição de conhecimento por meio de técnicas no qual seus alunos demonstrem interesse e aprendam a utilizar, provendo condições para que os alunos utilizem o aprendizado na interação com a sua realidade de vida.

Neste sentido, o uso dos algoritmos como método de apoio pedagógico deve ser explorado, pois, as operações básicas são fundamentais no contexto da aprendizagem matemática. As análises apontam que essas dificuldades e deficiências surgem a partir de erros de conceituação e no desenvolvimento do algoritmo. Por meio do uso dos algoritmos institui-se um ambiente motivador à prática da investigação e na busca de soluções e construção do conhecimento.

Por fim, o produto derivado deste trabalho, pretende contribuir para as discussões teórico-metodológicas da matemática, assim como contribuir para que outros pesquisadores possam partir das considerações finais do estudo para aprofundar, refutar ou suscitar novos questionamentos sobre o estudo.

REFERENCIAS

ARAUJO, Jessica A. As Operações Aritméticas Fundamentais na Perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. **Biblioteca Digital de Teses e Dissertações**, Campina Grande - PB, 2021.

BEZERRA, Maria D. N. C. **Teoria dos Números**: Um curso introdutório.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**: Manual do professor. 9ª. ed.

BLOGSPOT, Professoraju. <http://professoraju-mat.blogspot.com/>. **Blog da Professora Ju**, 2010. Disponível em: <<http://professoraju-mat.blogspot.com/2010/08/jura-multiplicacao-chinesa.html>>. Acesso em: 15 Fevereiro 2023.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Tradução: Elza F. Gomide, 1974.

BRASIL, BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília, p. 595. 2020.

BRASIL, PCNs. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (5ª a 8ª séries)**. Ministério da Educação e Desporto. Brasília, p. 148. 1998.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Como Ensinar Matemática Hoje? Brasília: Temas e Debates. SBEM, 1989.

DANTE, Luiz R. **Ápis.B**

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4ª Edição reformulada. ed.

FRANÇA, Fernando S. Professor Virtual: Uma Proposta para o Desenvolvimento de Algoritmos Usuais das Operações Básicas. **Google Acadêmico**, Palmas-TO, 2020.

GIOVANNI JR., José R. **A conquista da Matemática: Manual do professor**.

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética**.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo ; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade: ensino fundamental anos finais. 9ª. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018.

LIMA, Elon L. O Princípio da Indução-Seminário de Resolução de Problemas (2020). **USP.br**, 2020. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~mat0829/A.Peano.htm>>. Acesso em: 25 Maio 2023.

MARCONI, Marina A.; LAKATOS, Eva M. Fundamento de Metodologia Científica. 5ª Ed. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MECTP3, Mec. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar: Gestar I. Brasília: [s.n.], 2007.

MORENO, Heliete M. C. **As Operações Aritméticas Fundamentais**.

NOVA ESCOLA. Nova Escola. **https://novaescola.org.br/**, 2023. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/2675/o-que-e-algoritmo>>. Acesso em: 03 Janeiro 2023.

QEDU, Brasil. <https://qedu.org.br/>. **QEDu**, 2023. Disponível em: <<https://qedu.org.br/brasil/aprendizado>>. Acesso em: 14 Dezembro 2023.

RODRIGUES, Andressa C. As quatro operações matemáticas. **Biblioteca Digital de Teses e Dissertações**, São José do Rio Preto, 2019.

SILVEIRA, Denise T.; CÓRDOVA, Fernanda P. **Métodos de Pesquisa**. 1ª Ed. ed.

SMOLE, Katia S.; MUNIZ, Cristiano A. **A matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental**.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **A Construção da Matemática**.