



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
LICENCIATURA EM FÍSICA

MAXIMILIANO FREITAS DE SÁ

**O ENSINO DE FÍSICA EM CONTEXTOS: COMPREENDENDO O FENÔMENO DA
RESSONÂNCIA A PARTIR DE UM MODELO PARA O OSCILADOR AMORTECIDO
E FORÇADO.**

TERESINA
2023

MAXIMILIANO FREITAS DE SÁ

O ENSINO DE FÍSICA EM CONTEXTOS: COMPREENDENDO O FENÔMENO DA
RESSONÂNCIA A PARTIR DE UM MODELO PARA O OSCILADOR AMORTECIDO E
FORÇADO.

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura em Física do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Piauí, *Campus* Teresina Central.

Orientador(a): Prof. Dr. José Ricardo Rodrigues Duarte.

Coorientador(a): Prof. Dr. José da Silva Rodrigues.

TERESINA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Sá, Maximiliano Freitas de
S111e O ensino de Física em contextos : compreendendo o fenômeno da
ressonância a partir de um modelo para o oscilador amortecido e forçado /
Maximiliano Freitas de Sá. - 2023.
114 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina
Central, 2023.

Orientador : Prof Dr. José Ricardo Rodrigues Duarte.

1. Modelo mecânico. 2. Equações diferenciais . 3. Ensino de Física. 4.
Métodos numéricos. I.Título.

CDD - 530

Elaborado por Maria Rosismar Farias CRB 3/631

MAXIMILIANO FREITAS DE SÁ

O ENSINO DE FÍSICA EM CONTEXTOS: COMPREENDENDO O FENÔMENO DA
RESSONÂNCIA A PARTIR DE UM MODELO PARA O OSCILADOR AMORTECIDO E
FORÇADO.

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para ob-
tenção do diploma do curso de Licenciatura em
Física do Instituto Federal de Educação, Ciên-
cia e Tecnologia do Piauí - *Campus* Teresina Central.

Aprovada em: ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ricardo Rodrigues Duarte
(Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Domingos dos Santos
Ponciano
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Fábio Nascimento de Sousa
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

TERESINA, PIAUÍ
2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu Deus, o engenheiro e arquiteto do universo, dono de tudo, pelas oportunidades concedidas. Expresso minha profunda gratidão aos meus pais, Jeani Maria, por seu constante apoio e crença em meu potencial e por seu cuidado durante minha vida, e ao meu pai, Étilo Sá, por acreditar nos meus objetivos. Recordo e agradeço ao meu saudoso avô materno, Raimundo José, que ajudou e cuidou de mim durante muito tempo.

Quero reconhecer e agradecer ao meu irmão, Lucas, pelo apoio. À minha esposa, Maria da Conceição, expresso minha gratidão pela paciência, apoio e afeto e o cuidado que teve, especialmente durante as longas noites dedicadas aos estudos. Agradeço também à minha filha, Yohanna Hadassah, por seu otimismo e seu cuidado constante, especialmente pela curiosidade acerca dos fenômenos naturais e pelas especialidades médicas.

Em especial, expresso minha gratidão ao professor Dr. José Ricardo, pelas respostas inteligentes e interessantes, por sua paciência e disponibilidade foram fundamentais para o desenvolvimento do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Sua dedicação em fornecer excelentes aulas e esclarecer minhas dúvidas em qualquer momento foi notável.

Agradeço também ao professor Dr. José Rodrigues, do IFPI - Campus Floriano, que desde 2020 colabora comigo em estudos sobre métodos numéricos. Sua prontidão e boa vontade em me auxiliar com ajustes computacionais e esclarecimentos relacionados ao livro-base da Física, do autor Moysés Nussenzveig, não passam despercebidos. E aos professores Fábio do Nascimento, Ayrton Vasconcelos e Maria Genilda pelos seus apoios.

À instituição, expresso minha gratidão pelas oportunidades proporcionadas ao longo do curso de Física e durante minha pós-graduação em Astronomia. O suporte oferecido quando necessário foi fundamental para minha jornada acadêmica.

RESUMO

O trabalho investigou o fenômeno da ressonância, que é um fenômeno dentre vários fenômenos naturais. Descrevendo por um modelo para o oscilador amortecido e forçado que reproduza dentro dos limites aceitáveis as características essenciais em razão destes fenômenos que surgem com certa frequência no ensino de Física, o fenômeno da ressonância pode ser estudado a partir de contextos no ensino de Física, por exemplo, ao fazer uma taça de vidro vibrar intensamente, podendo quebrar, quando submetida a uma onda sonora de frequência específica, ou quando um aparelho de microondas funciona, fornecendo energia para o aumento da vibração das moléculas de um alimento. Neste trabalho, investigamos o fenômeno da ressonância em contextos para o ensino de Física através do modelo mecânico para o oscilador amortecido e forçado em seu regime de subamortecimento que é o único que possui os parâmetros ligados à ressonância. Para tanto, abordamos a resolução da equação diferencial que rege a dinâmica do modelo tanto de forma analítica quanto numérica, a fim de bem caracterizarmos o fenômeno através de seu aumento de amplitude ou através de seu fator de amplificação ou fator de qualidade Q . Assim, o fenômeno da ressonância surge em vários outros contextos no ensino de Física, justificando-se sua importância e sua abordagem didática. Com este modelo básico podemos caracterizar e compreender a ressonância contribuindo para o ensino-aprendizagem, por meio do incentivo à analogia entre as grandezas mecânicas do modelo e as grandezas de interesse nas demais situações.

Palavras-chave: modelo mecânico; equações diferenciais; ensino de física; métodos numéricos.

ABSTRACT

The work investigated the phenomenon of resonance, which is one phenomenon among several natural phenomena. Describing a model for the damped and forced oscillator that reproduces, within acceptable limits, the essential characteristics due to these phenomena that arise with certain frequency in Physics teaching, the phenomenon of resonance can be studied from contexts in Physics teaching, for example. For example, when making a glass cup vibrate intensely, which can break, when subjected to a sound wave of a specific frequency, or when a microwave device works, providing energy to increase the vibration of food molecules. In this work, we investigate the phenomenon of resonance in contexts for teaching Physics through the mechanical model for the damped and forced oscillator in its underdamping regime, which is the only one that has the parameters linked to resonance. To this end, we approach the resolution of the differential equation that governs the dynamics of the model both analytically and numerically, in order to better characterize the phenomenon through its increase in amplitude or through its amplification factor or quality factor Q . Thus, the phenomenon of resonance appears in several other contexts in Physics teaching, justifying its importance and its didactic approach. With this basic model we can characterize and understand resonance, contributing to teaching-learning, by encouraging analogies between the mechanical quantities of the model and the quantities of interest in other situations.

Keywords: mechanical model; differential equations; physics teaching; numerical methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sistema massa-mola vertical. Fonte: < https://tikz.net/dynamics_spring/ >	11
Figura 2 – Sistema massa-mola horizontal Fonte:< https://tikz.net/wp-content/uploads/2022/02/dynamics_spring-003.png >	12
Figura 3 – Vibração em um átomo de H_2O Fonte:< https://latex.org/forum/viewtopic.php?t=31355 >	13
Figura 4 – Oscilador hamônico simples com mudança de fase ϕ . Fonte: < https://tikz.net/dynamics_oscillator/ >	40
Figura 5 – Representação gráfica que definem as envoltórias no caso de amortecimento fraco. Fonte:(THOHNTON; MARION, 2011)	45
Figura 6 – Gráfico a energia total acumulada em um oscilador. Fonte: própria .	49
Figura 7 – Largura completa na metade do máximo (LCMM). Fonte:(THOHNTON; MARION, 2011)	52
Figura 8 – O quadrado da amplitude A^2 em função da frequência natural ω_0 . Fonte: (THOHNTON; MARION, 2011)	54
Figura 9 – Padrão de vórtice sobre a seção giratória do deck. Fonte: (BILLAH; SCANLAN, 1991, p.121)	59
Figura 10 – Os três modos vibracionais da molécula de água e suas frequências fundamentais na água líquida: alongamento simétrico (v1), flexão (v2) e alongamento assimétrico (v3). Os átomos se movem nas direções indicadas pelas setas. Fonte: (STOMP et al., 2007, p.3)	60
Figura 11 – Solução numérica pelo método de Euler. Fonte: < https://www.freecodecamp.org/news/eulers-method-explained-with-examples/ >	73
Figura 12 – Gráfico representando a extrapolação pelo método de Runge-Kutta de 2ª ordem. Fonte:(PRESS et al., 2007)	75
Figura 13 – Gráfico representando aproximações pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Fonte: (PRESS et al., 2007)	76
Figura 14 – Amplitude de um oscilador harmônico acionado para ilustrar a ressonância com uma frequência natural ω_0 . Fonte: Própria	83
Figura 15 – Oscilações amortecidas para os três casos $\gamma = \omega_0$, $\gamma < \omega_0$ e $\gamma > \omega_0$. Fonte: Própria	84

Figura 16 – Visualização dos casos de amortecimento para o oscilador amortecido e forçado $\gamma = \omega_0$, $\gamma < \omega_0$ e $\gamma > \omega_0$. Fonte: Própria	85
Figura 17 – Amplitude máxima causada pelo efeito da ressonância em um oscilador acionado para ilustrar a aproximação da frequência externa ω e a frequência natural ω_0 . Fonte: Própria	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativo entre métodos analíticos e numéricos.	17
Tabela 2 – Casos de amortecimento e seus parâmetros. Fonte (THOHNTON; MARION, 2011) Adaptada	43
Tabela 3 – Tabela com o comparativo das características do oscilador mecânico e eletromagnético. Fonte: Nussenzveig (1997, p.198)	70
Tabela 4 – Tabela com os resultados numéricos para os efeitos da ressonância pelo método de Euler $\beta = 0,14$. Fonte: Própria	84
Tabela 5 – Tabela dos resultados numéricos da análise da energia acumulada para os 3 casos de amortecimentos $\rho = 0, 10 \frac{N}{kg \cdot m}$, $\rho = 1.0 \frac{N}{kg \cdot m}$ e $\rho = 3.5 \frac{N}{kg \cdot m}$ respectivamente. Fonte: Própria	86
Tabela 6 – Tabela com o comparativo da amplitude máxima com os resultados numéricos (RK4) quando $\omega = \omega_0$ para os efeitos da ressonância. Fonte: Própria	88
Tabela 7 – Tabela com os resultados numéricos para os efeitos da ressonância pelo método de (RK4) $\beta = 0,10$. Fonte: Própria	89
Tabela 8 – Tabela com o comparativo da amplitude máxima com os resultados numéricos (RK4) para os efeitos da ressonância. Fonte: Própria	89
Tabela 9 – Tabela com o comparativo da amplitude máxima com os resultados numéricos (RK4) para os efeitos da ressonância. Fonte: Própria	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

EDO - Equações Diferenciais Ordinárias

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
Q	Fator de qualidade
Ω	Plano em que contém uma família de funções
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
ϕ	Fase em relação de sincronização ou defasagem temporal entre a força externa aplicada ao sistema e a resposta do sistema a essa força.
ω	Frequência angular
β	Taxa de amortecimento
ρ	Razão de amortecimento
γ	É o fator de amortecimento, que está relacionado à razão de amortecimento $[\rho]$
A	é a amplitude da onda,

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1	O papel da contextualização no Ensino de Física	20
2.1.1	A interdisciplinaridade das equações diferenciais nas ciências	20
2.2	Equações diferenciais ordinárias	24
2.2.1	Teorema da existência e unicidade	26
2.3	Equações diferenciais de 2º ordem	27
2.3.1	Equações diferenciais de 2ª ordem com coeficientes constantes	30
2.3.2	Método de variação dos parâmetros	32
2.3.3	Método dos coeficientes indeterminados	33
2.4	Números complexos	37
2.5	Oscilador harmônico amortecido e forçado	40
2.5.1	Oscilações amortecidas	41
2.5.2	Oscilações forçadas	45
2.5.3	Energia do oscilador	47
2.5.4	Fator de qualidade	51
2.6	Ressonância	53
2.6.1	Contextos que envolvem o fenômeno da ressonância	58
2.6.2	Oscilações eletromagnéticas	63
2.7	Métodos numéricos	71
2.7.1	Método de Euler	72
2.7.2	Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem Clássico	74
3	METODOLOGIA	77
3.1	Modalidade de pesquisa	77
3.2	Instrumentos de coleta de dados	78
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	79
4.0.1	Discussão sobre a compreensão do fenômeno da ressonância via oscilador amortecido e forçado	79

4.0.2	Discussão sobre a solução analítica da oscilação mecânica amortecida e forçada	80
4.0.3	Discussão sobre a solução numérica e analítica da oscilação mecânica amortecida e forçada para a compreensão do fenômeno da ressonância.	82
4.0.4	Avaliação da influência do fator de mérito no modelo do oscilador amortecido e forçado	86
5	CONCLUSÃO	93
	REFERÊNCIAS	94
	APÊNDICES	96
	APÊNDICE A – SCRIPTS DO PROGRAMA EM PYTHON	97

1 INTRODUÇÃO

Diante de várias aplicações que envolvem os fenômenos naturais, o fenômeno da ressonância possui uma especial atenção quando se refere a problemas de engenharia, aplicações na biologia, química e outras ciências. A preocupação em adotar parâmetros que se ajustem a estas aplicações aos problemas das vibrações localizadas (NUSSENZVEIG, 2014) afirma que, para certos sistemas oscilatórios, quando estes são provocados por certas energias externas, faz-se necessário resolvê-la a partir de alguns métodos das equações diferenciais que facilitam na resolução e compreensão desse fenômeno. No intuito de apresentar o modelo para o oscilador amortecido e forçado, há a necessidade de abordar as competências elencadas em (BRASIL, 2002) na área das ciências naturais em busca da contextualização como versa os PCN+ no intuito de, observar, experimentar e investigar, também descrever as equações que regem a equação de movimento do oscilador e por fim a aplicação dos métodos numéricos de Runge-Kutta de 4ª ordem e de Euler.

Com isso, através desta tríade relativa às fases para compreensão dos modelos explicativos e representativos como versa os Parâmetros Nacional Curriculares no âmbito das Ciências da Natureza, elas constroem um melhor entendimento quando se trata de modelos físicos e tem por interesse aplicar estas bases conceituais no que concerne a observação e investigação do fenômeno (não se trará aqui bases experimentais) em situações com aspectos interessantes na natureza, como no caso do fenômeno da ressonância. Corroborando a estes modelos (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) aponta o oscilador amortecido como um modelo matemático que descreve uma trajetória retilínea de uma partícula oscilante quaisquer, que está sujeita a um determinado período e a uma força atrativa sempre apontando para o ponto de equilíbrio, assim o entendimento matemático do oscilador é explicado por meio de um modelo para o oscilador e resolvido por uma equação diferencial linear não-homogênea.

No que tange a concepção das EDO's, as equações diferenciais tiveram seu início pelo cálculo diferencial e integral, desde John Wallis(1616-1703), Isaac Barrow(1630-1677), Isaac Newton(1642-1727), Leibniz(1646-1716), Nicolaus Bernoulli(1695-1726) e diga-se de passagem Daniel Bernoulli(1700-1782), que foi o pioneiro no estudo das equações diferenciais parciais. Para esta concepção (EVES, 2011) contribui, afirmando que os matemáticos mencionados, muito fortemente Newton e Leibniz, utilizavam-se de

meios geométricos para uma compreensão visual e analítica no que tange o estudo de máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas e sobre as operações envolvendo as propriedades do cálculo diferencial e a partir destas concepções, demonstraram habilidades na resolução de algumas das equações diferenciais ordinárias lineares.

Então percebe-se que as equações diferenciais tiveram como princípio para o seu desenvolvimento, o entendimento da taxa de variação do movimento de uma partícula ao longo do tempo em uma trajetória qualquer, esse era no caso uma relação muito estudada no século XVI porém ainda as equações diferenciais não tinham sido desenvolvida de fato. Assim (EVES, 2011) assegura que a fundamentação do cálculo teve por concepção geométrica e algébrica, para que a partir das equações algébricas resolvidas na época, outros matemáticos pudessem expressar uma dada equação diferencial que poderia servir como base para o entendimento de certas situações físicas ou fenômenos naturais. A equação algébrica (1.1) desenvolvida por Euler expressa a ordem da derivada e quando $x=e^t$ transforma-se em uma equação diferencial com coeficientes constantes:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_n x^{(0)} = f(x) \quad (1.1)$$

$$y^{(n)} e^{tn} + a_1 y^{(n-1)} e^{t(n-1)} + \dots + a_n e^{t(0)} = f(x)$$

A partir destas concepções analíticas as equações diferenciais, trazem em si informações importantes que tem por objetivo transmitir a identidade de uma dada função desconhecida, para que com a interpretação dela se chegue ao cerne de um certo fenômeno a ser compreendido, para isso usa-se métodos capazes de solucionar tais equações diferenciais que no caso a ser considerado, são as equações do tipo lineares não-homogêneas. Assim, diversos fenômenos naturais precisam ser explicados e nesse intuito as equações diferenciais foram desenvolvidas por matemáticos como uma chave para que esse entendimento e com isso pudesse ser extratificada a partir da equação de movimento.

O modelo a ser descrito apresenta pontos interessantes a se investigar, que no caso, os principais parâmetros que são utilizados para compreender o fenômeno

da ressonância descrito por diversas áreas desde as aplicações micrométricas, como as moléculas, à medidas macrométricas, que são feitas por estruturas maiores como, pontes e edifícios, que são estudadas na mecânica dos fluidos. A compreensão física desse fenômeno é apontada através da concepção do estudo das frequências inerentes em certos materiais que possuem determinadas faixas de frequências trazidas desde sua fabricação. Com isso o processo de compreensão do fenômeno dar-se pelo conhecimento matemático, físico e pode ser comprovada numericamente, onde precisa ser entendido que uma dada frequência externa produzida por uma fonte contínua ou não, combina ou se ajusta com a frequência natural do sistema, com isso obtém-se uma certa aproximação da frequência externa e natural, devido a frequência gerada por uma força motriz e por consequência, desencadeia uma série de efeitos benéficos ou maléficos, como por exemplo: a obtenção da imagem de tecidos, músculos e órgãos ou tumores em um ser humano reproduzidos através da ressonância magnética, ou a destruição de pontes e edifícios pelo fato de que a estrutura desses materiais possuem uma cadeia de átomos, e por terem uma configuração geométrica, pode haver o rompimento dessas ligações com a excitação desses átomos, tendo portanto a desestruturação deste material e também aplicações na eletrônica como os circuitos ressonantes RLC.

A figura abaixo pode representar muito bem, os casos supracitados em sistemas oscilantes, onde um sistema simples, massa-mola, apresenta oscilações periódicas e no caso abaixo estão desprezados o atrito e outras condições externas, configura-se então conforme figura (1), um sistema que segue oscilando indefinidamente ao longo do tempo.

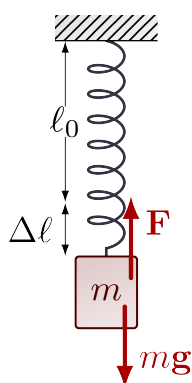


Figura 1 – Sistema massa-mola vertical. Fonte: <https://tikz.net/dynamics_spring/>

$$m\ddot{y} = mg - ky \quad (1.2)$$

As forças que agem no sistema massa-mola da figura (1) compõe um oscilador harmônico simples em que na medida que o sistema oscila se aproxima do ponto de origem, é necessário que haja uma força sempre oposta ao movimento unidimensional na direção vertical (y). A equação (1.2) é uma equação diferencial de 2ª ordem linear homogênea, onde os termos descrevem o comportamento do sistema oscilatório harmônico simples e nesse caso, este sistema não apresenta excitações externas.

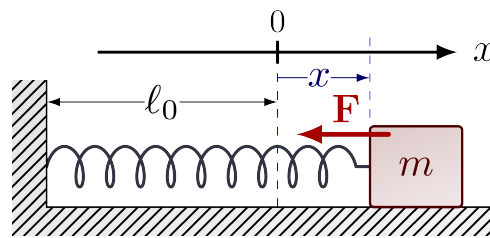


Figura 2 – Sistema massa-mola horizontal Fonte: <https://tikz.net/wp-content/uploads/2022/02/dynamics_spring-003.png>

Já no caso da figura (2) acima, o conjunto do sistema massa-mola está se movendo horizontalmente, desprezando o atrito e forças externas, a força **F** atua como uma força restauradora que faz o oscilador aproximar-se cada vez da origem, segue que:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x} \quad (1.3)$$

Para o caso de oscilações com amortecimento, o sistema é expresso matematicamente por uma equação diferencial de 2ª ordem linear homogênea, onde a expressão $m \frac{d^2x}{dt^2}$ exprime a 2ª lei de newton, a letra grega γ representa o fator de amortecimento que é adicionada ao sistema quando se tem atrito, e o fator k nos informa sobre a força de restituição do oscilador:

$$F_R = -\gamma \frac{dx}{dt} - kx \Rightarrow \boxed{m \frac{d^2x}{dt^2}} = -\gamma \frac{dx}{dt} - kx \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0} \quad (1.4)$$

Com a ideia matemática do oscilador harmônico amortecido (1.3), há muitas aplicações interessantes no que concerne o estudo desde o movimento de partículas

a corpos mais extensos. Com isso, as oscilações são de grande importância para o ensino de Física, engenharias e ciências afins. No que tange a compreensão vibracional das moléculas em sua estrutura (STOMP et al., 2007) investigam em seu trabalho, a relação entre o ganho de energia e os aspectos vibracionais por excitação de moléculas de água. Por meio desse trabalho, podendo representar fisicamente um tipo de oscilador. Os osciladores representam uma gama de aplicações, como por exemplo o entendimento das vibrações das moléculas de H_2O como mencionado, em que naturalmente apresentam três tipos de vibrações, as assimétricas, as simétricas e de reflexão. Quando uma certa quantidade de energia é fornecida a esta ligação fazendo vibrar como representado na figura (3) a molécula de água passa a vibrar com mais intensidade, assim (STOMP et al., 2007) asseguram que a vibração molecular apresenta os três tipos de estiramentos como citados acima, porém cita-se aqui os dois tipos de vibrações interessantes devido as suas características, pois estas apresentam vibrações que acumulam mais energia, conforme figura abaixo:



Figura 3 – Vibração em um átomo de H_2O Fonte:<<https://latex.org/forum/viewtopic.php?t=31355>>

Tendo como exemplo uma taça de cristal, os efeitos vibracionais da estrutura estão correlacionados à ressonância ou à chamada frequência natural da substância que compõe a taça de cristal. No exemplo investigado por (STOMP et al., 2007), os átomos que compõem a matéria vibram com uma frequência natural. Então, considerando este exemplo interessante, para que uma taça rompa suas estruturas, é necessário que uma determinada faixa de frequências atinja o mesmo nível da frequência do material, provocando vibrações que foram forçadas pela frequência externa. Isso significa que esses tipos de ondas demandam uma energia maior possível.

Considerando uma força externa em função do tempo, como no caso das ondas sonoras que são emitidas de uma fonte qualquer, podem provocar uma alta excitação nas ligações moleculares quando a intensidade do som for grande. Assim, a estrutura do material pode vir a quebrar devido à alta energia transferida. Outro exemplo são

as microondas emitidas pelo magnetron, que é um dispositivo que gera microondas, causando um forçamento ao sistema que inclui partículas, conforme citado acima no caso das vibrações das moléculas de água. Essas vibrações causam o aumento vibracional da molécula, fazendo com que oscile à medida que há transferência de energia da força externa para o oscilador, promovendo o acúmulo de energia a tal ponto que o oscilador atinja o máximo de energia, resultando no aumento da amplitude. Os osciladores constituem um importante campo de estudo na física, a partir da análise das vibrações em engenharias e em ciências afins, e podem ser representados pela seguinte equação matemática que inclui o forçamento externo:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.5)$$

A partir dessas ideias, aplicá-las no ensino de Física com um teor analítico e computacional requer contribuições de forma tricotômica. Isso envolve a contextualização no ensino de física, as aplicações das equações diferenciais e a utilização de métodos numéricos para compreender graficamente e numericamente o fenômeno da ressonância. O interesse principal é constituir a contextualização como metodologicamente aplicável no ensino de Física, apresentando assim um conjunto de competências específicas de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Esse processo deve ser realizado de maneira sistematizada, proporcionando uma visão integrada, sendo que essas competências ditas em (BRASIL, 2002) devem oferecer diretrizes capazes de orientar a aplicação de modelos para a compreensão dos fenômenos naturais e aspectos tecnológicos.

Com base no que foi expresso acima, o amplo interesse deste trabalho é integrar o ensino de Física em articulação com outras disciplinas das ciências da Natureza (BRASIL, 2002), buscando promover uma aprendizagem significativa. Pretende-se abordar a ciência e a tecnologia por meio de modelos representativos e explicativos, visando uma aprendizagem com uma abordagem interessante. Diante dessas considerações, (BRASIL, 2017) destaca que o ensino de Física tem como objetivo propor metodologias significativas que evidenciem a relevância científica e tecnológica para fins educacionais. Partindo dessas premissas, o objetivo principal deste trabalho é compreender o fenômeno da ressonância. Para isso, propõe-se analisar o modelo mecânico da ressonância, baseado no oscilador harmônico amortecido e forçado. Foi

realizada a resolução analítica e numérica das equações diferenciais que descrevem a dinâmica desse modelo, buscando caracterizar bem o fenômeno por meio do aumento de amplitude, do fator de amplificação ou do fator de qualidade Q . A descrição do modelo do oscilador foi abordada por meio de dois métodos numéricos: o método de Euler e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Esses métodos visam resolver problemas reais por meio de simulações gráficas e numéricas, apresentando relevância científico-tecnológica ao integrarem-se à realidade do ser humano.

Nesse intuito, o ensino de Física traz abordagens interessantes que podem ser analisadas por equações diferenciais, e em se tratando do modelo físico para o oscilador como representativo e explicativo conforme citado nos PCN+, se pretende conhecer suas condições de aplicação no meio científico e tecnológico por meio destas equações. Assim, ocorreu-me ver em trabalhos já produzidos que é possível contextualizar o fenômeno da ressonância e resolver por meio das equações diferenciais, ao aplicar o modelo para o oscilador amortecido e forçado no regime de subamortecimento, sendo que a única solução da equação homogênea que aparece termos que oscilam é quando as raízes da equação característica são complexas, isto é, quando o 2β ou γ é menor do que o ω_0 , isto é, o único regime que no qual aparece termos de senos e cossenos na solução da homogênea, é o de subamortecimento pois conseqüentemente aparecem termos oscilatórios sendo a única chance de ter o fenômeno da ressonância quando se tem uma força externa oscilando produzindo uma frequência externa ω igual ao ω_0 do sistema.

Em consequência de tudo o que foi dito anteriormente em relação ao papel da contextualização no ensino de física foi feita uma abordagem das equações diferenciais via métodos numéricos para a aplicação no modelo físico para o oscilador amortecido e forçado, sendo que os métodos numéricos de Euler e de Runge-Kutta de 4ª ordem devem ser discutidos em vista a descrição da dinâmica do modelo do oscilador harmônico amortecido e forçado a fim de caracterizar bem o fenômeno. Motivo pelo qual a presente proposta de pesquisa buscará aprofundar os estudos teóricos e práticos computacionais e reconhecer as práticas eficazes de ensino ao modelo físico. Para a instituição formadora, o Instituto Federal do Piauí, o produto do trabalho pretende contribuir para as discussões teórico-metodológicos da disciplina de mecânica que envolve os fluidos, oscilações e ondas, do curso de Física.

A partir dos conteúdos expostos em sala de aula, podem ser melhor assimilados quando se utiliza um modelo explicativo específico da Física, isto é, quando há a promoção da construção das abstrações encontradas nos conteúdos de Física que são indispensáveis ao pensamento científico e à vida (BRASIL, 2002). Assim, o desenvolvimento científico em razão da investigação e compreensão, quando levado em consideração às competências específicas da Física, tem por finalidade sistematizar os elementos envolvidos entre, o ensino de Física, as equações diferenciais e os métodos numéricos em vista à compreensão dos fenômenos naturais.

No sentido de corroborar e comparar com as soluções analíticas, os métodos numéricos são técnicas matemáticas que tem por objetivo resolver problemas reais e simulados, com isso, Steven Chapra assevera que: "Os métodos numéricos são técnicas pelas quais os problemas matemáticos são formulados, onde possam ser resolvidos por operação aritmética."(CHAPRA, 2011) e para Amos Gilat assevera que: "Os métodos numéricos são técnicas matemáticas usadas na solução de problemas matemáticos que não podem ser resolvidos ou que são difíceis de serem resolvidos analiticamente."(GILAT, 2008).

Os métodos numéricos são possibilidades de resolução de problemas que apresentam dificuldades comuns de soluções matemáticas. Entre os conceitos apresentados por Chapra (2011) e Gilat (2008) são perceptíveis no sentido de que o primeiro considera os métodos numéricos como propulsores de resolução numérica, enquanto o segundo assevera no sentido de se utilizar estes métodos pela dificuldade de se resolver analiticamente certos problemas descritos como não-lineares. Concomitantemente a estas definições, os recursos computacionais permitem uma visualização da solução através das simulações computacionais e a partir disso, (ARAUJO; VEIT; MOREIRA, 2004) asseveram que:

"Dentre as várias possibilidades de uso da informática no ensino de física, optamos pela modelagem computacional, por acreditarmos que seja a que melhor possibilita a interação dos estudantes como processo e análise do conhecimento científico, permitindo que conheçam melhor os modelos físicos e discutam o contexto de validade dos mesmos". (ARAUJO; VEIT; MOREIRA, 2004, p.184)

Pensando nestas possibilidades os recursos computacionais ajustando no modelo do oscilador amortecido e forçado pode ser um excelente instrumento de estudo.

Tabela 1 – Comparativo entre métodos analíticos e numéricos.

Método	Vantagens	Desvantagens
Analítico	Contribuem no desenvolvimento e na manipulação algébrica *	Restrito para geometria simples e Física Usualmente restrita para problema linear
Numérico ou computacional	Não tem restrição para linearidade A física complicada pode ser clarificada A evolução temporal pode ser obtida **	Erros de truncamento Problema de condição inicial Tempo computacional custos de computadores

* Informações claras geralmente estão em forma de fórmula.

O quadro acima informa o comparativo entre os métodos analíticos e numéricos em que a modelagem computacional representa e configura-se como modelo de ensino no âmbito do ensino de Física, bem como a possibilidade de compreensão dos contextos vivenciados pelo entendimento da cientificidade dos modelos físicos apresentados. Assim estes recursos, abrem espaços largos para a resolução de fenômenos e problemas que influenciam no dia-a-dia, com isso a modelagem computacional faz com que as soluções a partir da concepção dos métodos numéricos, se tornem visuais através das simulações.

Por ser interdisciplinar, o presente trabalho trata o modelo do oscilador amortecido e forçado, como abordagem clássica. Então a partir daí, através da concepção dos parâmetros envolvidos, terá como ponto de partida, o oscilador amortecido e forçado, como funcional nos processos: analíticos e numéricos, com isso, teremos que responder o questionamento a seguir: "de que maneira o modelo para o oscilador amortecido e forçado contribui para a compreensão do fenômeno da ressonância?" A resposta a esta questão parte-se da hipótese de que o modelo escolhido seja efetivamente representativo e explicativo a partir da solução analítica e gráfica do modelo no regime subamortecido para compreensão de uma gama de fenômenos naturais abordados na física, uma vez que a dinâmica representada por tal modelo serve como base para a abordagem de fenômenos naturais.

Com base nisso, o objetivo geral do trabalho será em: compreender o fenômeno

da ressonância e conseqüentemente, a de ser seguido os seguintes passos: analisar o modelo mecânico da ressonância baseado no oscilador harmônico amortecido e forçado, resolver analítica e numericamente as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do modelo do oscilador harmônico amortecido e forçado a fim de caracterizar bem o fenômeno através de seu aumento de amplitude ou através de seu fator de amplificação ou do fator de qualidade Q , fazer analogia entre as grandezas descritas no modelo mecânico e as grandezas descritas em outros modelos, como no modelo eletromagnético que utiliza um circuito RLC e por fim avaliar a influência do fator de qualidade para o modelo o oscilador amortecido e forçado.

Diante da proposta de pesquisa delineada neste trabalho, adotou-se a metodologia de pesquisa bibliográfica, conforme preconizado por (GIL, 2002). Essa escolha foi motivada pela natureza qualitativa da pesquisa. A pesquisa bibliográfica oferece a vantagem de ampliar a abrangência do objeto de estudo, permitindo ao pesquisador uma manipulação mais abrangente dos fenômenos de pesquisa do que seria possível ao investigar diretamente. Assim, para alcançar os objetivos estabelecidos neste trabalho, foi necessário realizar uma busca criteriosa de materiais que corroborassem e abordassem a temática em questão. Em consonância com as diretrizes propostas por (BARDIN, 2011), também foi empregada a análise de conteúdo como ferramenta metodológica. Este método proporciona uma compreensão mais profunda dos materiais coletados, permitindo a extração de significados e insights relevantes para a pesquisa.

Com auxílio da linguagem computacional Python foi verificado que as equações diferenciais determinam de forma qualitativa a solução acoplada e por fim foi analisado o modelo mecânico. Assim as equações diferenciais, serão resolvidas a partir de problemas de valores iniciais e por conseqüência o entendimento das informações que cada derivada traz nessas equações, isto é, quando estas informações são extraídas a partir delas são reconhecidas seu valor físico, com isso teremos a concepção dos sistemas envolvidos.

Com isso, para se dar prosseguimento nessa pesquisa, será necessário ir em busca de artigos científicos, livros e dissertações que trazem uma abordagem que coadune ao tema da pesquisa. Em ordem, teremos que compreender e desenvolver a parte analítica e computacional relativo ao fenômeno da ressonância tendo como método computacional o de Runge-Kutta de 4ª ordem e de Euler, em vista ao fenômeno

da ressonância.

Consequentemente, serão feitas as considerações e discussões teóricas e computacionais em relação a compreensão do fenômeno da ressonância para cada método, em virtude do oscilador harmônico amortecido e forçado no regime de subamortecimento. Na sequência do trabalho, serão exploradas as grandezas relevantes para a ocorrência da ressonância, com isso contribuir de forma clara em relação aos fenômenos de natureza física aos professores e alunos do curso de Licenciatura em Física.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O PAPEL DA CONTEXTUALIZAÇÃO NO ENSINO DE FÍSICA

2.1.1 A interdisciplinaridade das equações diferenciais nas ciências

Segundo o autor (JAPIASSU, 1976) em sua obra sobre a interdisciplinaridade, afirma que se deve haver uma busca pela interação entre as disciplinas em seus conceitos, diretrizes, de suas metodologias e de seus procedimentos, assim ele enfatiza que considera o interdisciplinar no contexto das “Pesquisas orientadas” a convergência de várias disciplinas com a resolução de problemas, cujo o enfoque se dar em razão de uma ação ou uma decisão. Com isso o mesmo autor corrobora com o trabalho, afirmando que:

(...) a característica central da interdisciplinaridade consiste no fato de que ela incorpora os resultados de várias disciplinas, tomando-lhes de empréstimo esquemas conceituais de análise a fim de fazê-los integrar, depois de havê-los comparado e julgado. (JAPIASSU, 1976, p.32)

Nesse entendimento, a interdisciplinaridade se baseia no vínculo de conhecimentos com outras áreas, dessa maneira, quando tratamos sobre a interdisciplinaridade nas ciências busca-se a convergência do saber entre elas, com isso as equações diferenciais são um meio de entendimento de fenômenos naturais em que precisa matematizar a natureza. Estas equações se mostram como importantes aliadas por sua capacidade de investigar problemas físicos, biológicos e de engenharias assim (BOYCE; RICHARD, 2014) asseguram que em razão destas aplicações de serem usadas para estes fins tendo como interessados também os não-matemáticos, as equações diferenciais permitem muitas das vezes solucionar problemas sobre fenômenos e processos naturais. Dependendo dos parâmetros a serem utilizados, em um dado modelo matemático, podem haver situações em que o processo resolução passe a ser muito longo e variem em intervalos muito grandes ou até mesmo impossíveis. Para a construção de um modelo matemático em razão de um problema físico, se faz uso da linguagem matemática, tendo modelos compatíveis ao teor do problema.

As equações diferenciais com parâmetros mais robustos e com termos não-lineares serão longas ou de difíceis resoluções. Por assim tratar (BOYCE; RICHARD, 2014), asseguram que há equações não-lineares que podem ser aproximadas por uma equação diferencial linear tendo como característica principal a construção de modelos

matemáticos em função de um dado problema físico e também equações diferenciais não-homogêneas lineares de segunda ordem que são resolvidas, e uma das soluções que no caso a EDO de 1ª ordem é utilizada para resolver alguns métodos numéricos dependendo das limitações que trazem estes métodos, sendo assim nesse caso se faz necessário resolver a equação diferencial e extrair soluções acopladas, que nesse caso há de ser usada uma equação não-homogênea dita linear não-homogênea.

O intuito da compreensão dos aspectos formativos no que tange aos modelos explicativos e representativos, nas orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias PCN+, terão questões relativas à compreensão da teoria das equações diferenciais, dos métodos numéricos e do ensino de Física com isso, há de ser capaz de intervir e participar da realidade da humanidade. A partir de (BRASIL, 2002), temos que através das leis, dos princípios e dos modelos, o relacionamento da Física com as outras disciplinas, terá por consequência uma articulação representativa, onde buscará entre elas resultados capazes de promover respostas aos fenômenos estudados, que no caso o fenômeno da ressonância.

Ao abordar os aspectos destacados desse fenômeno, que incluem os parâmetros envolvidos e suas possíveis implicações no cotidiano, torna-se possível gerar conhecimentos interdisciplinares entre as ciências da Natureza. Isso se reflete, por exemplo, na compreensão do grau de agitação das moléculas, nas interações subatômicas ou em problemas estruturais com diversas aplicações práticas. Utilizando o exemplo do modelo para o oscilador amortecido e forçado em regime de subamortecimento (NUSSENZVEIG, 2014), é garantido que esse modelo seja considerado representativo e explicativo, alinhando-se com as ideias apresentadas por (BRASIL, 2002). Este modelo contribui para a construção do conhecimento científico ao buscar identificar as causas por trás de certos fenômenos. Nesse contexto, as características do oscilador, como o fator de amortecimento, a equação diferencial que rege o movimento, a transiência, a solução particular e a frequência natural, são abordadas implicitamente nas competências específicas do ensino de Física conforme orientações dos PCN+. De acordo com (BRASIL, 2002), essas competências englobam a representação e comunicação, onde ocorre a análise e interpretação de textos. Por meio dessas habilidades, são elaboradas comunicações orais ou escritas, incluindo a explicação de

fenômenos naturais, promovendo uma compreensão mais ampla e integrada.

No que diz respeito à investigação e compreensão, conforme orientações de (BRASIL, 2002), é recomendado reconhecer a natureza dos fenômenos envolvidos, situando-os no contexto mais amplo da Física. Isso implica identificar as grandezas relevantes tanto nas oscilações mecânicas quanto nas eletromagnéticas, levando em consideração os parâmetros específicos em cada caso. No âmbito dos modelos explicativos e representativos no ensino de Física, é essencial reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para fenômenos ou sistemas naturais e tecnológicos. Através desses modelos, busca-se conhecer, interpretar e elaborar formas simplificadas que condensem a complexidade do fenômeno, proporcionando um entendimento mais acessível. Conforme (BRASIL, 2002), os modelos explicativos buscam elucidar fenômenos, como é o caso do fenômeno da ressonância, enquanto os modelos representativos têm o objetivo de descrever esses fenômenos, muitas vezes a partir da solução geral de equações diferenciais lineares não-homogêneas. Para alcançar a articulação, integração e sistematização dos fenômenos entre as ciências naturais, (BRASIL, 2002) destaca a necessidade de relacionar conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas. Isso implica construir uma visão sistematizada das diversas interações físicas e compreender os diferentes níveis de explicação na física. Essa abordagem pressupõe que as competências específicas se originam de um processo histórico de desenvolvimento, destacando a evolução contínua do entendimento científico.

Por meio destas concepções, a compreensão do fenômeno da ressonância se dar por meio da resolução da equação de movimento e com esta resolução encontra-se duas soluções que são acopladas, onde a partir da solução particular, usando a notação complexa, encontra-se a equação da amplitude em função da frequência, que no caso se dar através da investigação conforme modelo físico, cujas situações problemas se concentram em saber qual modelo matemático utilizar para um determinado sistema. Diante disso, os PCN+ agregam valores a partir de modelos físicos, e de fato há a abertura no processo de construção do saber quando se tem a teoria ligada aos métodos computacionais, então inicia-se o reconhecimento da forma de pensar tendo a maior possibilidade de assimilação nas situações teóricos-práticos nessa perspectiva possibilitam construir estratégias com finalidades físicas e tecnológicas (BRASIL, 2002).

Por assim dizer, para construir estratégias em vista ao entendimento sobre o fenômeno natural, deve-se interpretar e analisar as características físicas desse fenômeno, articulando com outras ciências Naturais, isto é, a relação da Física com as outras ciências, nesse intuito, Feynman, Leighton e Sands (2008, p.51) contribui afirmando que:

Para que a física seja útil às outras ciências de forma teórica, além de apenas na invenção de instrumentos, a ciência em questão deve fornecer aos físicos uma descrição do problema na linguagem do físico.

Diante do exposto, para que se possa emitir juízos próprios sobre questões que descrevem problemas físicos, Feynman assevera que é preciso que as ciências estejam ajustadas ou em consonância, e para que a Física seja útil em vista a convergência de outras ciências naturais (BRASIL, 2002), contribui que, é preciso que haja uma posição crítica sobre um determinado assunto e no caso a interdisciplinaridade faz constituir estratégias para o enfrentamento da constante fragmentação das disciplinas, pois com a identificação e o reconhecimento da natureza dos fenômenos envolvidos envolvendo as disciplinas das ciências naturais, promove uma visão sistematizada dos diversos tipos de interações físicas e das diferentes naturezas de fenômenos da natureza.

A partir destas concepções, para se entender e resolver situações-problemas que demandam conhecimento computacional a informática é uma importante aliada, dando uma gama de possibilidades no que se refere o ensino-aprendizagem. Conforme (BRASIL, 2017) o guia dos livros didáticos relacionado à Física, contribui sobre o papel da contextualização no ensino de Física, e aponta ser um diferencial considerar a utilização de recursos computacionais como importantes tarefas associadas a análise de dados de um dado problema, pois fornecem uma dimensão superior aos métodos tradicionais. O documento assegura que o aprendizado precisa de exemplos relevantes, com isso sendo uns dos métodos de ensino através dessa contextualização, a utilização de recursos computacionais que executam a operação de algoritmos através das linguagens computacionais, fornecem estratégias que propõe a inclusão de mídias em sala de aula, assim:

São diversas as estratégias de ensino de Física possibilitadas pelo avanço da informática. Há aquelas que tiveram sua utilização ampliada com o uso de recursos multimídia como documentários, filmes e/ou animações, seja na discussão de novos conceitos, na exemplificação

de conceitos já abordados ou na apresentação de situações-problema a serem analisadas. (BRASIL, 2018, p.15)

Por meio destas possibilidades estratificadas pela informática, a utilização de simulações computacionais a partir dos métodos numéricos no ensino de física, pode informar através da análise dos parâmetros dispostos, os problemas físicos pelos quais, muitos dos métodos analíticos são resolvidos e comparados aos métodos computacionais. No que concerne as simulações computacionais elas permitem visualizar resultados gráficos a partir dos problemas físicos, assim ao utilizar os devidos métodos, tornam-se conhecidas as correlações entre os parâmetros de entrada, as funções que envolvem o modelo físico e os parâmetros de saída e por fim os resultados compilados, assim a interação entre a ciência e a tecnologia, faz com que as simulações computacionais tornem-se possíveis muitos dos problemas que envolvem um modelo físico podem ser analisados, assim corroborando com o trabalho:

As simulações computacionais são elaboradas sempre a partir de um modelo físico para o qual se busca dar significado, e envolvem, em diferentes níveis, a interatividade entre o estudante e o simulador. (BRASIL, 2018, p.15)

Conforme supracitado, torna-se perceptível a aplicabilidade das simulações computacionais em razão dos modelos investigativos, no caso das soluções por meio dos recursos computacionais, e em consequência disso, pode trazer perspectivas diferentes e interessantes a partir de situações-problemas conhecidos. Os PCN+ esclarecem bem esta questão ao afirmar que em primeiro lugar, a Informática não deve ser considerada como disciplina, mas como ferramenta complementar às demais já utilizadas na escola, colocando-se disponível para todas as disciplinas, principalmente no benefício das ciências Naturais. Então diante disso, as potencialidades das ferramentas computacionais surgem como importantes aliadas à Física, permitindo assim a compreensão do uso dessas simulações.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Desde o final do século XVI para o século XVII, houveram transições no que tange aos formalismos matemáticos para obtenção de soluções através das derivações de pontos em curvas e suas respectivas tangentes. Nesse propósito (EVES, 2011)

contribuiu com a história da matemática onde inclui Isaac Barrow (1630-1677) como proeminente na matemática e este tinha o objetivo de calcular triângulos infinitesimais em uma curva quaisquer e conhecer as proporções dos seguimentos até encontrar a inclinação da reta tangente. Nesse sentido com o desenvolvimento do cálculo, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) foram os que mais contribuíram, pois faltava mais rigor e um simbolismo mais geral para o cálculo.

Entre 1687 a 1736 Isaac Newton publicou diversas obras, a de 1729 e de 1736 foram publicadas postumamente, em 1711 Newton publicou os *Fluxiones e os Methodus differentialis*, mas a ideia sobre os fluxos aconteceu em 1669 (EVES, 2011). A notação $\dot{y}$ é devido à Newton e sua origem se dar através da concepção do fluente, isto é, como a ordenada do ponto gerador é y (fluente) então o fluxo deste fluente é denominado por $\dot{y}$ ou $\ddot{y}$ e a notação moderna $\frac{dy}{dt}$ ou $\frac{d^2y}{dt^2}$ é devido a Leibniz. A ideia de Newton sobre os fluxões, surgiu com o intuito de entender a relação dos fluentes e seus fluxos, agora entender o problema inverso que é saber a relação desses fluentes era equivalente a resolver uma equação diferencial afirma (EVES, 2011). O método de Newton nasce em seu trabalho sobre os fluxos para os caso de aproximação de raízes de funções.

Isaac Barrow (1630) que lecionava geometria em Gresham College de Londres, tornou-se o primeiro ocupante da cátedra lucasiana de Cambridge, como ele aceitou o convite para ser capelão de Carlos II, em 1669 Sir Isaac Newton (1642-1727) foi indicado por ele para ocupar o seu lugar. É na obra de Barrow sobre óptica, *Lectioes opticae et geometricae* que aparece nuances da diferenciação, chamado de triângulo diferencial, assim considera-se ele o primeiro a perceber que a diferenciação e a integração são operações inversas. A partir do nascimento do cálculo diferencial Isaac Newton (1642 - 1727) considerou problemas relevantes para a Física, iniciando com a ideia dos fluentes até a concepção das equações diferenciais, com isso Newton

Demonstrou habilidade extraordinária na integração de algumas equações diferenciais. Seu trabalho inclui também um método (do qual uma variação é conhecida agora pelo nome de Newton) para aproximação dos valores das raízes reais de uma equação numérica, algébrica ou transcendente. (EVES, 2011, p.440)

A partir desses trabalhos, no século XVII o estudo das equações diferenciais teve por necessidade em promover ações no objetivo da fundamentação geométrica,

corroborando assim através da concepção do cálculo diferencial por Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no final do século XVII, então (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) corrobora que na época teve por preocupação em procurar meios de solucionar problemas físicos no objetivo de solucionar equações de forma explícita e por consequência procurar novos métodos para a solução das equações diferenciais lineares que surgiram no final do século XIX com a expectativa de obter resultados e extrair informações.

Entre os séculos XVII e XVIII as equações diferenciais levavam em consideração seu desenvolvimento na geometria e mecânica tendo por consequência a mecânica analítica, já no século XIX houve um avanço no que diz respeito às soluções gerais e particulares, assim elas são estudadas desde o século XVII com a intensão de solucionar problemas geométricos envolvendo o movimento de corpos e mecânicos onde estes movimentos era demonstrado através das equações de movimento que no caso hoje diz-se, função horária da velocidade e equação geral do espaço. As equações diferenciais eram usadas para solucionar problemas de dois corpos porém com mais de dois corpos havia a necessidade de aplicações computacionais pois a equação diferencial que rege o problema é de difícil solução. Com o passar dos séculos, vieram problemas mais complexos que passou a recorrer a métodos numéricos para eventos que cujos sistemas tinham propriedades não-lineares.

2.2.1 Teorema da existência e unicidade

Teorema 2.2.1. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω no plano (x,y) . Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para cada $(x_o, y_o) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_o e uma única função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x) \in \Omega)$, para todo $x \in I$ que é solução do problema de valor inicial (P.V.I).*

Conforme (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) o primeiro passo para a demonstração desse teorema é provar a existência e unicidade, a partir disso as condições suficientes de solução do (P.V.I) são:

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

$$y(x_o) = y_o \quad (2.2)$$

Lema 2.2.2. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num aberto Ω do plano (x,y) . Então, uma função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valor inicial (2.1) e (2.2) se e somente se for uma solução da equação integral.*

Para que uma equação diferencial valha suas propriedades conforme o (P.V.I) (2.1) e (2.2) ela deve possuir uma solução que deve ser única e que exista, provando assim o teorema de Picard-Lindelöf. Com isso (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) reitera que a hipótese da continuidade na função (ϕ) garante a existência dela mas não garante a unicidade de solução do (P.V.I) (2.1) e (2.2)

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^x f(s, y(s))ds \quad (2.3)$$

Demonstração. 1) Se ϕ é solução do problema de valor inicial (2.1) e (2.2) e através da equação integral (2.3) temos:

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^x f(s, y(s))ds \Rightarrow y(x) - y_o = \int_{x_o}^x f(s, y(s))ds$$

então pelo teorema fundamental do cálculo, ϕ é solução da equação integral (2.3). 2) Reciprocamente, se $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que é solução da equação integral (2.3), então pelo teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é diferenciável e é também solução do problema de valor inicial (2.1) e (2.2). $\square$

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2º ORDEM

Uma equação diferencial de 2ª ordem tem a seguinte característica:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (2.4)$$

Para isso (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) contribui afirmando que, sejam $p, q, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo aberto (a,b) , onde $t > 0$ ou $-\infty < t < +\infty$ assim a equação diferencial linear de 2ª ordem,

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Corroborando com os tópicos anteriores sobre a história e o desenvolvimento das equações diferenciais (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) identifica que conforme os problemas ficavam cada vez mais relevantes sobre a mecânica, era necessário criar métodos para problemas relevantes, e seus resultados não eram apenas fórmulas mais informações interessantes, assim

(...) a solução de um problema não é apenas uma fórmula ou uma função, mas antes, algo pleno de significado e de informações sobre o fenômeno que estamos considerando. (FIGUEIREDO; NEVES, 2018, p.93)

Nesse intuito em um problema dado, deseja-se não somente encontrar um resultado, mas sim compreender e interpretar a informação trazida pela equação diferencial.

Considerando aqui a equação homogênea tem-se:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \quad (2.7)$$

Teorema 2.3.1. *Se p , q e f são funções contínuas em (a,b) , então o problemas de valor inicial (PVI) (2.5) e (2.6) tem uma, e somente uma, solução definida em todo o intervalo (a,b) .*

Demonstração. A ideia é transformar a equação num sistema pela introdução das variáveis, assim $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$. Simplificando a equação (2.5) temos $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f \Rightarrow \ddot{x} = -p\dot{x} - qx + f \Rightarrow \dot{x}_2 = -px_2 - qx_1 + f$ obtendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = -qx_1 - px_2 + f \end{cases} \quad (2.8)$$

Com a condição inicial (2.6) o resultado cairá na condição de existência e unicidade, então

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = v_0 \end{cases}$$

□

Agora, um conceito importante para a teoria das equações diferenciais, chama-se Wronskiano, que nesse caso (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) trata de forma que as funções envolvidas são linearmente independentes, isso quer dizer que nenhum vetor pode ser expresso como combinação linear de outros.

Definição Dadas duas funções diferenciáveis $\Phi_1, \Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o determinante Wronskiano é dado da seguinte forma

$$W[\Phi_1, \Phi_2](t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) \\ \Phi_1'(t) & \Phi_2'(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Com esse formalismo, o conceito de Wronskiano está ligado ao teorema da existência e unicidade de uma equação diferencial, se o Wronskiano for diferente de zero em algum ponto, então existe uma única solução para o (PVI) e através da equação (2.9) tem-se o Wronskiano das funções Φ_1 e Φ_2 .

Diante disso tendo como efeito a independência linear e sendo o $[\Phi_1, \Phi_2](t) \neq 0$ tem-se a seguinte proposição;

Proposição 2.1 Sejam as funções $\Phi_1, \Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis cujo o Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in (a, b)$. Então, Φ_1 e Φ_2 são *l.i*

Demonstração. Supondo por contradição, que Φ_1 e Φ_2 sejam linearmente dependentes. Então, existem constantes α_1 e α_2 pelo menos uma delas diferentes de zero, tais que

$$\alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t) = 0, \forall t \in (a, b) \quad (2.10)$$

Em particular, para $t = t_0$ temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t) = 0 \\ \alpha_1 \Phi_1'(t) + \alpha_2 \Phi_2'(t) = 0 \end{cases}$$

cujo o determinante é precisamente $W[\Phi_1, \Phi_2](t_0)$ o qual é diferente de zero por hipótese, assim $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ o que contradiz a hipótese inicial. $\square$

2.3.1 Equações diferenciais de 2ª ordem com coeficientes constantes

Esse método tem por objetivo obter a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de forma que envolva a equação característica associada a solução homogênea, assim

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \quad (2.11)$$

Como informado anteriormente o método consiste em achar soluções de (2.11) na forma

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (2.12)$$

onde λ é um parâmetro a determinar. Levando (2.12) em (2.11) e considerando a primeira e segunda derivada como $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ e $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ sendo p e q constantes, dá

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0 \quad (2.13)$$

que dá

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é a equação característica da equação (2.11), assim há três casos a considerar, dependendo do sinal a ser considerado, conforme (FIGUEIREDO; NEVES, 2018), então

caso 1: $p^2 - 4q > 0$. Nesse caso a equação (2.11) tem duas raízes reais e diferentes:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \Rightarrow \Delta = p^2 - 4q \Rightarrow \lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{2q}{2}} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{2q}{2}} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

e

$$\lambda = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Consequentemente as soluções de $x(t)$ são $x_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $x_2 = e^{\lambda_2 t}$

caso 2: $p^2 - 4q = 0$, resolvendo a equação característica (2.14) encontra-se as seguintes raízes

$$\lambda = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Como $\Delta = 0$ então

$$\lambda = -\frac{p}{2} \pm 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{p}{2}$$

Consequentemente há somente uma solução

$$x_2(t) = e^{-\frac{p}{2}t} \quad (2.15)$$

caso 3: Seja $p^2 - 4q < 0$. Nesse caso a equação (2.14) tem duas raízes complexas conjugadas:

$$\lambda_1 = -\mu + iv \text{ e } \lambda_2 = -\mu - iv, \text{ onde } \mu = \frac{p}{2}, v = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$$

Consequentemente as soluções de (2.11) abaixo, são linearmente independentes, assim

$$x_1(t) = e^{-\mu t} e^{ivt} \Rightarrow e^{-\mu t + ivt}$$

$$x_2(t) = e^{-\mu t} e^{-ivt} \Rightarrow e^{-\mu t - ivt}$$

A partir da equação (2.11) também são soluções

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = e^{-\mu t} \cos vt \quad (2.16)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = e^{-\mu t} \cos \nu t \quad (2.17)$$

Para termos as expressões (2.16) e (2.17) pode ser usado a relação de Euler, como segue:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

2.3.2 Método de variação dos parâmetros

Para obtermos soluções adequadas no caso das equações diferenciais de segunda ordem linear não-homogênea, a ideia é utilizar este método com o propósito de expressar o produto da solução particular e uma função desconhecida, assim (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) aponta esse método da seguinte forma

Supondo que se conheça um par , Ψ_1, Ψ_2 , de soluções *ℓ.i* de (2.7). O método consiste em encontrar funções $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ tais que a função

$$x(t) = \alpha_1(t)\Psi_1(t) + \alpha_2(t)\Psi_2(t) \quad (2.19)$$

onde a equação (2.19) é solução de (2.5). Fazendo a derivação do produto em (2.19), obtemos

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(\alpha_1(t)\Psi_1(t)) + \frac{d}{dt}(\alpha_2(t)\Psi_2(t))$$

$$\dot{x} = \alpha_1 \dot{\Psi}_1 + \alpha_2 \dot{\Psi}_2 + \dot{\alpha}_1 \Psi_1 + \dot{\alpha}_2 \Psi_2 \quad (2.20)$$

Como a equação (2.20) possui dois graus de liberdade, então nesse caso se impõe a condição abaixo

$$\dot{\alpha}_1 \Psi_1 + \dot{\alpha}_2 \Psi_2 = 0 \quad (2.21)$$

logo a equação (2.20) se torna

$$\dot{x} = \alpha_1 \dot{\Psi}_1 + \alpha_2 \dot{\Psi}_2 + 0$$

$$\dot{x} = \alpha_1 \dot{\Psi}_1 + \alpha_2 \dot{\Psi}_2 \quad (2.22)$$

Derivando então a equação (2.22) dará

$$\ddot{x} = \alpha_1 \ddot{\Psi}_1 + \alpha_2 \ddot{\Psi}_2 + \dot{\alpha}_1 \dot{\Psi}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{\Psi}_2 \quad (2.23)$$

Com estes resultados, precisa-se que $x(t)$ seja solução de (2.5) levando as equações (2.19), (2.22) e (2.23) à equação (2.5) assim

$$\dot{\alpha}_1 \dot{\Psi}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{\Psi}_2 = f \quad (2.24)$$

Montando um sistema em razão das equações (2.21) e (2.28) e resolvendo para obter $(\dot{\alpha}_1)$ e $(\dot{\alpha}_2)$, tem-se

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 \Psi_1 + \dot{\alpha}_2 \Psi_2 = 0 \\ \dot{\alpha}_1 \dot{\Psi}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{\Psi}_2 = f \end{cases}$$

$$\dot{\alpha}_1 \Psi_1 + \dot{\alpha}_1 \dot{\Psi}_1 + \dot{\alpha}_2 \Psi_2 + \dot{\alpha}_2 \dot{\Psi}_2 = f \quad (2.25)$$

Sabendo que o Wronskiano é dado por (2.9) então a solução da equação (2.25) é

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{f \Psi_2}{W[\Psi_2]}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{f \Psi_1}{W[\Psi_1]}$$

2.3.3 Método dos coeficientes indeterminados

Visto o método de variação de parâmetros por (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) este método surge com a necessidade de procurar a solução particular x_p das equações lineares de uma forma geral, a partir do tipo de função $f(t)$. Prosseguindo com a notação do autor (BOYCE; RICHARD, 2014), e exprimindo a equação diferencial não-homogênea simplificada a partir de uma função dada temos

Teorema 2.3.2. *A solução geral da equação não homogênea pode ser escrita na forma*

$$x(t) = \phi(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_p(t) \quad (2.26)$$

Este teorema nos informa como responder a equação diferencial não-homogênea, onde pode ser destacado três passos em que (BOYCE; RICHARD, 2014)

1. Encontrar a solução geral $x(t)$ ou $\phi(t)$ da equação homogênea associada
2. Encontrar uma única solução $x_p(t)$ da equação diferencial não homogênea
3. Somar as duas equações encontradas ($x_h + x_p$)

Para encontrar a solução homogênea ou complementar (x_c) é interessante resolver pelo método de coeficientes constantes e para ser encontrado a solução particular (x_p) parte-se-á do método de coeficientes indeterminados.

Segundo (BOYCE; RICHARD, 2014) este método consiste em possuir uma hipótese inicial sob a forma da solução particular $x_p(t)$ mas com os coeficientes ainda indeterminados, assim é substituído então a solução hipotética na equação homogênea conhecida $\ddot{x} + p(x)\dot{x} + q(x)x = 0$ com isso tentar encontrar os coeficientes não especificados, de modo que a equação esteja de acordo com o teorema da existência e unicidade. Caso não seja possível determinar tais coeficientes, significa que não há solução em relação a primeira hipótese levantada. Pensando nessas possibilidades de utilizar tal método, pois o mesmo está habilitado para resolver problemas que envolvem equações de coeficientes constantes e o termo não-homogêneo pertence a uma classe pequena de funções, como por exemplo o termo $(F_0 \cos \omega t)$.

Exemplo 1 encontre uma solução particular

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 4x = 3e^{2t} \quad (2.27)$$

Diante dessa equação, é necessário para que invoquemos o método, acharmos a solução particular x_p como o termo não homogêneo é uma função exponencial e que essa função é múltipla dela mesma, então uma maneira bem intuitiva é supor que x_p é algum múltiplo e^{2t} assim

$$x_p(t) = Ae^{2t}$$

O coeficiente (A) precisa ser determinado, assim derivando

$$\dot{x}_p(t) = 2Ae^{2t} \text{ e } \ddot{x}_p(t) = 4Ae^{2t}$$

Substituindo então na equação (2.27)

$$(4Ae^{2t} - 2A3e^{2t} - 4Ae^{2t}) = 3e^{2t} \Rightarrow (4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t} \Rightarrow -6Ae^{2t} = 3e^{2t} \Rightarrow -6Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$-6A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Com isso a solução particular é $x_p(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$

Diante do exposto, para ser provado um argumento mais geral em que considere-se casos e formas diferentes do termo não-homogêneo $f(t)$.

Demonstração. Seja um função $f(t)$ onde representa uma classe pequena e finita

$$f(t) = P_n(t) = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + a_n$$

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n \quad (2.28)$$

$$x_p(t) = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_{n-2}t^2 + A_{n-1}t + A_n \Rightarrow$$

Reduzindo os termos internos

$$a[n(n-1)A_0t^{n-1} + \dots + 2A_{n-2}] + b[nA_0t^n + \dots + A_{n-1}] + c[A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n] = a_0t^n + \dots + a_n$$

Se $c \neq 0$ a solução da primeira equação é $A_0 = \frac{a_0}{c}$ e as equações restantes determinam $A_1, \dots, A_n$, agora se $c = 0$ e $b \neq 0$ o termo à esquerda do sinal de igualdade, simplesmente tem grau $(n-1)$ para então garantir a forma da equação $a\ddot{x}_p(t) + b\dot{x}_p$

precisa-se escolher um polinômio de grau $(n + 1)$ isso quer dizer que, para satisfazer as condições anteriores deve-se supor a equação diferencial do tipo

$$x_p(t) = t(A_0 t^n + \dots + A_n)$$

O problema de determinar a solução particular de

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = e^{\alpha t} P_n(t) \quad (2.29)$$

Reduzindo como nos casos anteriores

$$x_p(t) = e^{\alpha t} u(t)$$

Então derivando pela regra do produto

$$\dot{x}_p(t) = e^{\alpha t} [\dot{u}(t) + \alpha u(t)]$$

$$A[e^{\alpha t}(\ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) + \alpha^2 u(t))] + B[e^{\alpha t}(\dot{u}(t) + \alpha u(t))] + C e^{\alpha t} u(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$$

$$A[\ddot{u}(t) + (2A\alpha + B)\dot{u}(t) + \alpha^2 u(t)] = P_n(t) \quad (2.30)$$

Determinando a solução particular pela equação (2.30) tem-se $a\alpha^2 + b\alpha + c$, então uma solução particular da equação (2.29) é:

$$x_p(t) = e^{\alpha t} (A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n) \quad (2.31)$$

□

Por outro lado e de forma análoga (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) aponta que o método consiste em determinar a solução particular $x_p(t)$ a partir do tipo de função $f(t)$ que constitui a equação diferencial não-homogênea, com coeficientes b_j a serem determinados.

2.4 NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos é um conjunto que é munido de duas operações, da adição e multiplicação que satisfazem certas propriedades, chamadas axiomas de corpo, ou seja corresponde a dizer que cada par de elementos $x, y \in K$ sua soma $x + y \in K$ e multiplicação $x \cdot y \in K$ possuem uma relação biunívoca. Partindo para a ideia do corpo dos complexos segue o mesmo raciocínio tendo como ponto de partida estas propriedades elencadas por (NETO, 2016) em que corrobora com o texto, afirmando que, historicamente os números complexos foram aplicados a fim de se resolver equações algébricas de grau dois e com coeficientes reais, do tipo.

$$z^2 + az + b = 0; \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.32)$$

Que pode ser escrita na forma:

$$\left(z + \frac{a}{2}\right)^2 = z^2 + az + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$$

As soluções da equação (2.32) são

$$z_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad z_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

No que se refere em relação as raízes complexas, é considerada a solução do tipo $\frac{a^2}{4} - b < 0$ pois no que se refere as propriedades dos números complexos, a solução é denotada por $\mathbb{C}$. A partir da equação (2.32) implicitamente possui duas operações a de soma e produto em $\mathbb{R}$, logo

$$z^2 + az + b = (z - z_1) \cdot (z - z_2)$$

Com isso, se $z = a + ib$ e $w = c + id$ são números complexos é definido a partir daí soma e produto

$$Z + W = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad (2.33)$$

e o produto é dado por

$$Z \cdot W = (a_ib) \cdot (c + id) = ac + ibc + aid + i^2bd = (ac - bd) + i(bc + ad) \quad (2.34)$$

Com isso defini-se o módulo $|z|$ do número complexo z onde

$$|z|^2 \equiv z^*z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 \quad (2.35)$$

Então z_1 e z_2 são raízes reais e complexas de (2.4), e para o desenvolvimento desse texto adotar-se-á as raízes complexas. Sendo assim as operações (2.33) e (2.34) gozam das propriedades, comutatividade, associatividade, distributividade, existência do zero, existência da unidade, existência do inverso aditivo e da existência do inverso multiplicativo, com isso pode ser afirmado que $\mathbb{C}$ é um corpo com as operações (2.33) e (2.34).

Segundo (NETO, 2016) considera um número complexo não nulo na forma $z = x + iy$. Se ℓ é o seguimento de reta que liga 0 a z e θ é o ângulo que ℓ faz com o eixo dos x ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) e pode ser escrito

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{|z|} \quad \quad \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{|z|}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \cos\theta \quad (*) \quad \quad \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \sin\theta \quad (**)$$

como $z = x + iy$ substituindo em (*) e (**) tem-se a expressão chamada representação polar.

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (2.36)$$

Topologicamente o plano complexo tem por princípio todas as propriedades do corpo dos reais, isto é tanto métricas como topológicas do plano $\mathbb{R}^2$.

Com base nisto, vale a pena ressaltar sobre a função exponencial complexa, que o exponencial definido por (NETO, 2016) é a função complexa definida pela série inteira:

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots \quad (2.37)$$

Como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, deduz que estas séries são traduzidas pelas funções cosseno e seno, então pode-se utilizar as propriedades das funções anteriores.

Segundo (NETO, 2016) quando exprimi-se a função exponencial $e^{it} = \cos t + i \sin t$, se $t \in \mathbb{R}$ onde as duas funções, $\cos t$ e $\sin t$ são funções reais, periódicas de período 2π . Por outro lado, o conjugado de e^{it} , isto é, $\overline{e^{it}} = e^{-it} = \cos t - i \sin t$ obtendo as seguintes identidades:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-it}) \\ \sin t = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-it}) \end{cases}$$

Sendo que, levando em consideração a exponencial $\exp(z) = e^z = e^x \cdot e^{iy}$ como os coeficientes da série que define a exponencial são todos reais, isto é, $x \in \mathbb{R}$ então $e^x \in \mathbb{R}$. A função $x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in \mathbb{R}$ é chamada exponencial real enquanto a função $y \in \mathbb{R} \rightarrow e^{iy}$ é chamada exponencial imaginária.

A partir das propriedades dos números complexos, pela equação (1.1) e pelas coordenadas polares descritas acima pela equação (2.36) tem-se a forma trigonométrica

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}} \quad (2.38)$$

A partir dessa expressão com a equação (2.35) tem-se

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.39)$$

e o argumento z é dado por

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.40)$$

Então o produto de dois números complexos definido anteriormente $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ é:

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.41)$$

ou seja o módulo do produto é o produto dos módulos e o argumento é a soma dos argumentos.

Segue que, de forma semelhante que o módulo de um quociente é o quociente dos módulos, e o argumento do argumento é a diferença entre os argumentos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (2.42)$$

Segundo (NUSSENZVEIG, 2014) a interpretação de $e^{i\theta}$ como rotação de um ângulo θ onde $\theta = \omega t + \phi$, e que a imagem de $z(t)$ no plano complexo descreve o movimento circular uniforme ao movimento harmônico simples.

2.5 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO E FORÇADO

Os osciladores são instrumentos conceituais valiosos para compreender fenômenos naturais e partículas com caráter vibratório. Conforme destacado por Figueiredo (FIGUEIREDO; NEVES, 2018), um oscilador harmônico é um modelo matemático que caracteriza o movimento de uma partícula sob a influência de uma força atrativa, direcionando-a para a origem ou ponto de equilíbrio. Corroborando com o texto (NUSSENZVEIG, 2014) versa, que a partir da segunda lei de Newton, temos por representatividade a equação das oscilações harmônicas, que a qual se tem por sistemas conservativos ideais em que a energia mecânica se conserva pois considera-se aqui oscilações livres. Assim as oscilações harmônicas são modeladas com a seguinte característica:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.43)$$

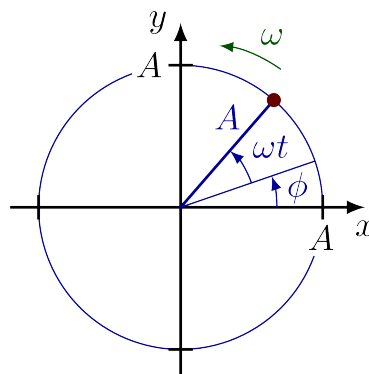


Figura 4 – Oscilador harmônico simples com mudança de fase ϕ . Fonte: <https://tikz.net/dynamics_oscillator/>

Na equação (2.43) representa uma equação diferencial homogênea linear, e esta nos informa que os efeitos deste oscilador no sistema se dar apenas por uma força através do conceito de energia e esta é conferida pela lei de Hooke mencionada acima, que expressa o movimento senoidal de um sistema massa-mola por exemplo, pois quase sempre ocorrem na natureza. Para ser tratado sobre as oscilações periódicas, deve ser levado em consideração o conceito de energia num sistema, e neste fim (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008) asseguram que, para ser verificado a conservação de energia tem por necessidade o cuidado de não retirar ou colocar energia no sistema, pois parte dela sai e outras vezes, parte entra. A partir dessas considerações, com o passar do tempo o sistema vai perdendo energia até que oscile em pequenos ângulos, mas caso haja uma força externa e faça com que o oscilador torne a ter movimentos oscilatórios, deverá ser considerado uma função com derivadas capaz de descrever o causador destas oscilações.

A equação diferencial que descreve a equação do oscilador harmônico simples possui parâmetros que surgiram através da 2ª lei de Newton, a qual descreve de maneira específica como a velocidade muda sobre as diferentes influências chamadas de forças (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008). Para oscilações amortecidas forçadas, segue o entendimento de que: são forças externas que atuam no sistema (por exemplo no sistema massa-mola), causando mudanças na amplitude e na frequência. (BOYCE; RICHARD, 2014) afirmam, que o oscilador forçado com amortecimento, é capaz de obter um ganho máximo de energia na medida em que a força motriz entra no mesmo estado de frequência do oscilador, assim o sistema entra em ressonância. Através deste modelo físico, a finalidade é entender os contextos que envolvem o oscilador harmônico amortecido e forçado, e por eles tem a pretensão de se estudar fenômenos físicos e naturais como: o fenômeno da ressonância que é investigada nas engenharias mecânica, civil e elétrica.

2.5.1 Oscilações amortecidas

Na física experimental achasse diversos exemplos para os tipos de amortecimentos, um deles é o pêndulo simples em que considerando a resistência do ar, água, óleo ou a eletricidade, pois com isso tem suas oscilações amortecidas até que pare de oscilar, outro exemplo são as oscilações em um tubo de um líquido, no caso de

um tubo em U em que as oscilações se amortecem devido a viscosidade do líquido e outro exemplo pertinente é o som do diapásão, onde as vibrações produzem um efeito sonoro e com o tempo as partículas no ar param de oscilar devido ao efeito resistivo das partículas. além disso para (NUSSENZVEIG, 2014) é interessante analisar o fenômeno da ressonância a partir do amortecimento fraco, onde o fator de amortecimento é $2\beta = \gamma < \omega_o$ pois com o fator de amortecimento, sendo $2\beta \ll \omega_o$ a frequência do sistema ω é muito próxima de ω_o , isto é $\omega \approx \omega_o$. Com isso para oscilações resistivas tem-se:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0 \quad (2.44)$$

No campo das oscilações cujas as soluções são senos e cossenos (THOHTON; MARION, 2011) expõe que as funções exponenciais tratadas anteriormente neste trabalho no tópico das funções trigonométricas complexas, o autor diz que são mais convenientes a serem manipuladas e é geralmente a melhor forma representativa de solução, com isso na seção (2.6) deste trabalho foram tratadas os tópicos da teoria das equações diferenciais onde foram vistas as soluções do tipo homogênea e particular então:

$$x(t) = e^{i\omega t} \quad e \quad x(t)^{*1} = e^{-i\omega t}$$

No caso especial para que haja o fenômeno da ressonância impreterivelmente o sistema deve estar em seu regime de subamortecimento e nesse caso deve ser tratado as soluções do tipo seno e cosseno. Segundo (THOHTON; MARION, 2011) assegura que a função de deslocamento em função do tempo $x(t) \in \mathbb{R}$ as duas exponenciais são complexas e a partir disso foram discutido a fórmula de Euler na seção que trata dos corpos dos complexos assim:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

Conforme equação (2.44) o parâmetro ligado ao amortecimento é ρ e para resolver essa equação dividi-se os membros por m então $\frac{\rho}{m}$ então aparecerá um fator

¹ (*) significa o conjugado da solução $x(t)$

Tabela 2 – Casos de amortecimento e seus parâmetros. Fonte (THOHNTON; MARION, 2011) Adaptada

Amortecimento	β	Parâmetro de amortecimento
Subamortecido	$\beta < \omega_0^*$	β
Crítico	$\beta = \omega_0^*$	β
Superamortecido	$\beta > \omega_0^{***}$	$\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

* Para o caso de amortecimento fraco considera-se o parâmetro de amortecimento como importante no caso do fenômeno da ressonância.

** Para o caso do amortecimento crítico decai mais rapidamente para tempos grandes em que o termo reduz o decaimento.

*** Nesse caso as oscilações param rapidamente.

(2β) que é o mesmo γ de amortecimento e este caracteriza a magnitude da força de amortecimento sendo este parâmetro proporcional a força de amortecimento.

$$\frac{\rho}{2m} = \beta \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{m} = 2\beta$$

Sendo ω_0 a frequência natural, será tratada na seção (2.8) sobre o fenômeno da ressonância. Com essas notações (THOHNTON; MARION, 2011) deixa claro a equação de movimento para o oscilador amortecido:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.45)$$

A partir disso pode ser resolvida a equação de movimento com base nas soluções independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ diante disso quaisquer solução deve ter a forma $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$.

A frequência natural do sistema é equacionada da seguinte forma

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.46)$$

Para uma melhor visualização do parâmetro de amortecimento para os três casos de amortecimento pode ser observado na tabela acima, onde tem-se expresso a fronteira entre o regime de subamortecimento e o de superamortecimento que é o amortecimento crítico, e este é um campo interessante de estudo, em investigar

o mínimo de energia para que o regime de subamortecimento passe para o regime superamortecido, sendo que para este problema depende do efeito resistivo ρ .

Para discutir sobre os aspectos inerentes aos casos de amortecimento (NUSSENZVEIG, 2014) afirma que a equação (2.45) é uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes e através dessa equação pode ser procurada uma solução usando a notação complexa.

$$z(t) = e^{pt} \quad (2.47)$$

Para o amortecimento subamortecido segue que os coeficientes encontrados foram solucionados pela equação característica e tem a seguinte forma:

$$z(t) = e^{-\beta t} (ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}) \quad (2.48)$$

Uma outra forma equivalente de se obter a equação a seguir é fazendo

$$z(t) = Ce^{i\omega t} \quad (2.49)$$

onde C é uma constante complexa arbitrária então:

$$z(t) = C = Ae^{i\phi} \quad (2.50)$$

o que dá, tomando a parte real

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) \quad (2.51)$$

Segundo (NUSSENZVEIG, 2014) para o caso de amortecimento fraco $2\beta \ll \omega_0$ o fator de decaimento $Ae^{-\beta t}$ pode ser considerado como a amplitude de oscilação lentamente variável e as curvas definem a envoltória das oscilações.

Esse caso é estruturalmente instável, ou crítico, porque qualquer variação do coeficiente de atrito, de $p = 0$ para $p > 0$, faz com que o sistema caia no regime subamortecido, a seguir, em que as trajetórias ainda oscilam, mas perdem amplitude, deixando de percorrer elipses. (DOERING; LOPES, 2012, p.55)

Então nesse caso há um limite mínimo quando se tem $p > 0$ com isso tem-se o entendimento que para se obter o regime de subamortecimento depende do parâmetro p (coeficiente de atrito).

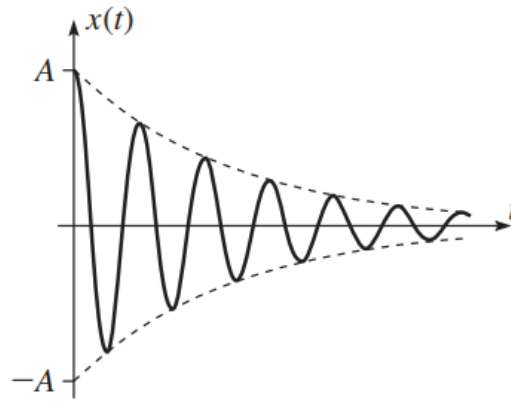


Figura 5 – Representação gráfica que definem as envoltórias no caso de amortecimento fraco. Fonte:(THOHNTON; MARION, 2011)

Segundo (DOERING; LOPES, 2012) para o movimento oscilatório subamortecido tem a seguinte notação matemática que envolve autovetores e autovalores e ajustando os parâmetros para que estejam conforme o autor (NUSSENZVEIG, 2014) e (THOHNTON; MARION, 2011) : $0 < \frac{1}{4}p^2 < q$ que é o **caso 3** da subseção 2.5.1, nesse caso, $\Delta = \beta^2 - q$ e os autovalores generalizados de A são complexos conjugados $-\beta \pm i\omega$, com $\omega = \sqrt{-\Delta} > 0$; então tem-se

com isso a partir da equação (2.48) a equação diferencial homogênea referente ao regime de subamortecimento é dado por

$$x(t) = e^{-\beta t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) \quad (2.52)$$

2.5.2 Oscilações forçadas

As oscilações forçadas, são tipos de oscilações impedidas de obter oscilações periódicas livres, isto é, devido a uma força externa ou motriz, o sistema é provocado a ter variações no tempo até possuir amplificações em seu sistema tendendo a se tornar um sistema ressonante, fazendo assim maximizar a amplitude do oscilador e claro, se e somente se $\omega \approx \omega_0$, assim (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) contribui afirmando que as amplitudes ficam cada vez maiores devido ao ganho de energia fazendo assim o sistema acumular energia, aspecto a ser tratado na seção (2.5.3). Considerando um sistema em situação de oscilação harmônica amortecida, um oscilador é caracterizado por três grandezas: a massa m , a constante elástica k e a constante de amortecimento 2β , e através destas características, uma força motriz tendo uma atuação sobre o

corpo oscilante, poderá estar sujeito a grandes amplitudes dependendo da frequência provocada por ele, caso a força motriz oscile na mesma frequência do oscilador resultará em um fenômeno natural, tópico a ser tratado na seção 2.8 e se tratando da influência para a causa do fenômeno da ressonância, terá como ponto de partida o fator de qualidade, a ser tratado na seção (2.5.4).

Partindo da equação (2.44) temos que, a força externa é representada conforme abaixo:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.53)$$

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = f \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x} + f \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{m\ddot{x}}{m} = -\frac{kx}{m} - \frac{\rho\dot{x}}{m} + \frac{f}{m} \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{\ddot{x}}{1} = -\frac{kx}{m} - \frac{\rho\dot{x}}{m} + f_0 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} = -\frac{\rho}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{f}{m} \cos(\omega t)$$

Segundo (BOYCE; RICHARD, 2014), considera que $2\beta = \frac{\rho}{m}$ é descrito como o fator de amortecimento e os parâmetros $f_0 = \frac{f}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ são constantes positivas e representando respectivamente a amplitude da força motriz e a frequência natural do oscilador tem-se a equação de movimento das vibrações forçadas é dada por:

$$\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x + f_0 \cos(\omega t) \quad (2.54)$$

Assim a solução geral da equação (2.54) tem que possuir a seguinte forma que resulta na composição de duas soluções acopladas, sendo $x_h(t)$ a solução homogênea e $x_p(t)$ a solução particular:

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.55)$$

Com isso as duas parcelas à direita formam a solução da equação homogênea associada a equação (2.54) e as duas parcelas restantes correspondem à solução

particular $x_p(t)$ da equação não-homogênea completa. Os coeficientes A e B são encontrados substituindo na equação (2.55). As soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da equação homogênea dependem das raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$ já apresentadas na seção (2) nos tópicos das equações diferenciais na subseção (2.3.1).

A solução forçada dita por (BOYCE; RICHARD, 2014), equivale a uma solução que mesmo que o tempo aumente, ela não tende a desaparecer a saber a solução particular ($x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$) já em relação a solução transiente tende a desaparecer a saber a solução homogênea (x_h) que possui um termo de decaimento ($e^{-\beta t}$).

A partir dessas definições, um sistema que apresenta comportamento periódico (2π), é dito oscilatório, e quando é adicionado uma força motriz capaz de oscilar com a mesma frequência do oscilador, diz-se então que a frequência do causador das oscilações (ω) está aproximadamente igual à frequência natural do sistema (ω_0).

2.5.3 Energia do oscilador

Com as ideias trazidas por (BOYCE; RICHARD, 2014) sobre a transiência da equação homogênea e a solução forçada dada pela solução particular, tem-se que na presença dessas oscilações forçadas há a transferência de energia e a quantidade de energia que entra e sai do oscilador é mensurada pelo balanço de energia definido por (NUSSENZVEIG, 2014) a partir disso na interação entre a força motriz e o oscilador é conceituado a partir da energia mecânica do oscilador no instante t é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) \quad (2.56)$$

Como a energia não é mais conservada no oscilador, a dissipação ocorre em outras formas de energia, como por exemplo a térmica (NUSSENZVEIG, 2014). Um caso interessante é investigar a energia total armazenada durante o processo de oscilação, nesse caso em amortecimento fraco com forçamento ao sistema no regime de subamortecimento um caso a parte, pode ser investigado o mínimo de energia que o oscilador precisa para que saia do regime de amortecimento crítico para o de subamortecimento sendo que este é uma fronteira que separa dois regimes diferentes.

Conforme equação (2.56) a energia cinética do oscilador em um dado instante t

é dado por:

$$T(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi) \quad (2.57)$$

$$\boxed{T(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi)} \quad (2.58)$$

A equação (2.57) vem pelo fato do ajuste das condições iniciais onde, pela forma geral das oscilações livres $x(t) = a \cos(\omega t) + b \text{sen}(\omega t)$ e de uma forma geral pode ser expressa como $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, assim para $\dot{x}(t) = v(t) = -\omega A \text{sen}(\omega t + \phi)$, então desenvolvendo resulta:

$$\dot{x}^2 = \omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi)$$

A energia potencial é dada por

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{k = m\omega^2}$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{U(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)} \quad (2.59)$$

Somando membro a membro as equações (2.57) e (2.59) obtém-se a energia total do oscilador, que se conserva.

$$E = T(t) + U(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Agrupando os termos

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\text{sen}^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi))$$

Pela relação fundamental da trigonometria $\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) = 1$ então

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cdot 1$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2} \quad (2.60)$$

Logo com este resultado, a energia total é proporcional a amplitude ao quadrado que é um parâmetro interessante para o caso do regime subamortecido e também o quadrado da frequência.

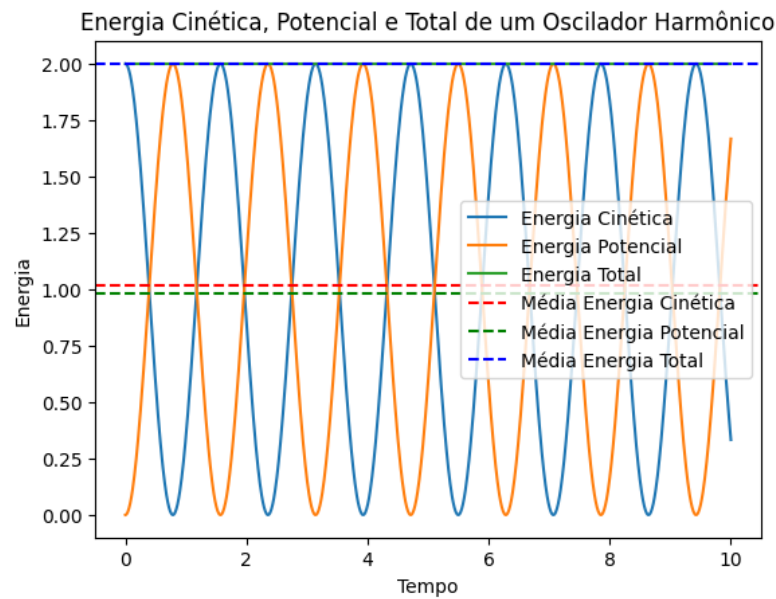


Figura 6 – Gráfico a energia total acumulada em um oscilador. Fonte: própria

O gráfico mostra as energias cinética $T(t)$ e potencial $U(t)$ durante o período de oscilação correspondentes às curvas da posição $x(t)$ e da velocidade $v(t)$. Segundo (NUSSENZVEIG, 2014) no instante em que o oscilador passa pela posição de equilíbrio, a energia cinética será máxima, pois a velocidade do sistema será máxima, no entanto, quando a magnitude do deslocamento é máxima, o oscilador terá energia potencial em seu ponto máximo. Como as curvas da energia cinética $T(t)$ de cor azul e a energia potencial $U(t)$ de cor laranja são simétricas em torno do ponto de equilíbrio, segue que

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2} \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 \quad (2.61)$$

Para isso subdividir os intervalos das oscilações, será necessário termos o valor médio de uma função $f(t)$ num intervalo $0 \leq t \leq \tau$ é definido da seguinte forma

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt$$

Diante disso a energia cinética média por período é igual à energia potencial média por período tendo como resultado a metade da energia total. Assim também decorre que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = E - U(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - A^2 \cos^2(\omega t + \phi)) \end{aligned} \quad (2.62)$$

A energia potencial na equação (2.59) os termos $A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$ estão em função de x , segue que $x^2 = A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$.

Segundo (NUSSENZVEIG, 2014) conforme o oscilador vai armazenando energia potencial e cinética nas posições que se encontra oscilador, ou seja, quando $U(x)$ são zeros, a energia cinética $T(x)$ são máximos, ou vice-versa, pois para uma energia total dada (2.5.3), define imediatamente a energia cinética como da posição do oscilador. Assim, quando ocorre a transferência de energia da força motriz $f(t)$ para o oscilador, a quantidade de energia balanceada total que entra no sistema e que sai do sistema, é dada por

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$

A energia mecânica do oscilador no caso em que a energia não é mais conservada é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t) \quad (2.63)$$

Com isso a taxa de variação temporal da energia $E(t)$ é dada por

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x)$$

Com isso pela equação (2.44) e pela relação $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{dE}{dt} = -\rho\dot{x}^2 = -m\beta\dot{x}^2 \quad (2.64)$$

Conforme equação (2.64) a taxa de dissipação de energia mecânica no oscilador é igual ao produto da força de resistência pela velocidade $\dot{x}$ ao quadrado isso quer dizer que a força resistiva é oposta a velocidade em função do tempo de oscilação.

2.5.4 Fator de qualidade

O fator de mérito ou fator de qualidade, é uma grandeza física que mensura a quantidade de energia armazenada em um oscilador pela energia dissipada por ciclo de oscilação. Segundo (NUSSENZVEIG, 2014) o fator Q é dado pela relação:

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{Energia armazenada no oscilador}}{\text{Energia dissipada por ciclo}} \right) \quad (2.65)$$

Em razão da quantidade de energia armazenada no oscilador pode ser representado a energia média como

$$\Delta \bar{E} = -\frac{d\bar{E}}{dt} \cdot \tau = \gamma \bar{E} \tau \quad (2.66)$$

O $\bar{E}$ representa a energia média ainda armazenada no oscilador no instante (t) durante as oscilações que corresponde a um intervalo de tempo $\Delta T = \tau$ e o β representa a taxa de decréscimo relativo da energia média por unidade de tempo.

Compreendido matematicamente a relação da energia armazenada no oscilador e a energia dissipada pela hipótese do amortecimento fraco e a energia dissipada em um ciclo, o fator de qualidade pode ser representado da seguinte forma

$$Q = \frac{2\pi \bar{E}}{\Delta \bar{E}} = \frac{2\pi}{\gamma \tau} = \boxed{\frac{\omega_0}{2\beta}} \quad (2.67)$$

Então como dito anteriormente o fator de qualidade mede a quantidade de energia armazenada no oscilador e é o responsável pela eficiência do sistema que é produzida pela ação energética das oscilações provocadas por uma força externa, tendo como princípio o pico da ressonância e a largura da ressonância associada. Por meio do quociente entre a frequência natural do oscilador e o fator de amortecimento

isso é de fato importante assim (NUSSENZVEIG, 2014) assegura que quanto maior o fator de qualidade Q menor será o amortecimento no oscilador assim o fator de qualidade pode ser representado pelo tempo de decaimento (τ_d) quando este oscila em torno de $\overline{E}(t)$:

$$Q = \frac{2\pi\tau_d}{\tau} \quad (2.68)$$

Considera-se até aqui o fator de qualidade como algo representativo no que tange a taxa da energia mecânica média sob a quantidade de oscilações por unidade de tempo, em que quanto menor o amortecimento maior será o fator de qualidade e através dessa relação pode ser investigado o limite mínimo como dito antes em virtude do regime de subamortecimento, com isso é introduzido a compreensão do fenômeno da ressonância através do modelo mecânico para o oscilador amortecido e forçado. A fim de caracterizar bem o fenômeno através do aumento de amplitude ou através do fator de amplificação ou do fator de qualidade Q . Segundo (THOHNTON; MARION, 2011) afirma que muitos dos propósitos para se definir o fator de qualidade, vem pelo fato de desejarmos uma ressonância muito aguda a partir do valor do fator de qualidade como já descrito na equação (2.67) assim um Q grande indica que a ressonância é estreita.

O gráfico representado pela figura (7) a seguir, evidencia a largura da ressonância que quanto mais for reduzido o valor da constante de amortecimento (2β) a largura de ressonância se torna mais estreita. Definindo previamente aqui a notação de Marion, adotar-se-á a sigla **LCMM** (Largura Completa na Metade do Máximo).

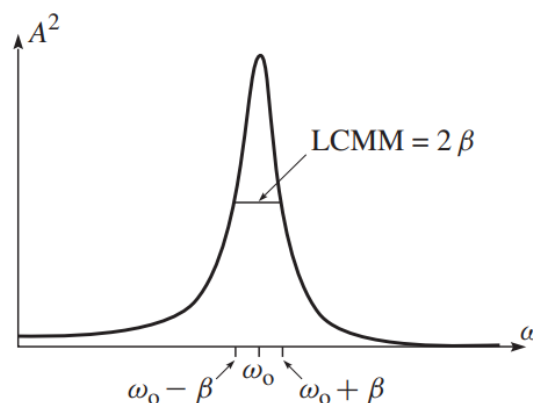


Figura 7 – Largura completa na metade do máximo (LCMM). Fonte:(THOHNTON; MARION, 2011)

Conforme a figura, os pontos na metade do máximo, como foi definido anteriormente por (THOHNTON; MARION, 2011) evidenciam a região de subamortecimento e são representados pela aproximação da frequência externa e a frequência natural do sistema $\omega \approx \omega_0 \pm \beta$, tendo como aproximação da **LCMM** com o fator 2β com isso a análise do fator de qualidade Q é interessante na compreensão do fenômeno da ressonância. Para uma notação que não fuja da compreensão simbólica, o autor (NUSSENZVEIG, 2014) mostra que no amortecimento subcrítico ou subamortecido se dar através da notação $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ que no caso $\frac{\gamma}{2} = \beta \Rightarrow \gamma = 2\beta$ e conforme notação gráfica **LCMM** = 2β .

2.6 RESSONÂNCIA

A Física estuda os fenômenos naturais construindo modelos básicos que reproduzem, dentro de limites aceitáveis, as características essenciais desses fenômenos. Um desses fenômenos que surgem com certa frequência no ensino de Física é o da ressonância. Tal fenômeno está presente, por exemplo, ao fazer uma taça de vidro vibrar intensamente, podendo quebrar, quando submetida a uma onda sonora de frequência específica, ou quando um aparelho de micro-ondas funciona, fornecendo energia para o aumento da vibração das moléculas de um alimento.

O fenômeno da ressonância refere-se a quantidade de energia da força propulsora por ciclo e é igual à quantidade de energia mecânica transformada em energia interna para cada ciclo, assim tem-se uma condição de estado estável, na qual as oscilações prosseguem com amplitude constante. O oscilador por si já possui uma frequência natural (ω_0) caso seja tentado a vibrar com uma certa frequência (ω), então para valores próximos de (ω_0) o oscilador responderá muito bem quando este é forçado a uma frequência correta sendo assim a este estado de resposta dar-se o nome de ressonância.

Segundo (THOHNTON; MARION, 2011) diz que a propriedade mais relevante é que a amplitude A de resposta é proporcional a amplitude da força motriz ou externa $A \propto f_0$ e o caso mais interessante apontado na seção anterior é quando o fator de amortecimento é muito menor que a frequência natural do sistema, isto quando se tem um amortecimento muito fraco ($\beta \ll \omega_0$), pois quanto mais o β é reduzido, a frequência externa provocada por uma força motriz periódica de período 2π é maior.

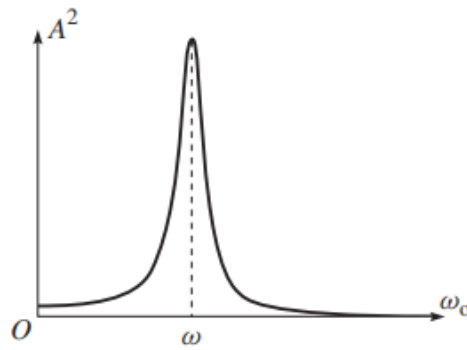


Figura 8 – O quadrado da amplitude A^2 em função da frequência natural ω_0 . Fonte: (THOHNTON; MARION, 2011)

Exemplos práticos podem ser aplicados como a recepção de ondas de rádio por um circuito LRC em um rádio qualquer, de modo que quando ajusta-se a frequência de um rádio para receber uma estação a 90,1 MHz, você está ajustando o circuito LRC do rádio de modo que sua frequência natural seja 90,1 MHz. (THOHNTON; MARION, 2011) explica que, como há diversas rádios distribuídas com frequências emitindo sinais diferentes, há somente uma que de fato força uma corrente que emite o sinal enviado e reproduza o som.

A partir dos parâmetros ligados às vibrações forçadas se destaca a energia transmitida da força externa para o sistema oscilante, e é conveniente expressar a solução particular ou solução estacionária $x_p(t)$ por meio da notação complexa $x(t) = \text{Re } z(t)$, assim

$$\ddot{z} + \beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (2.69)$$

Fazendo

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad (2.70)$$

Derivando em função de t

$$\dot{z} = i\omega z \Rightarrow \ddot{z} = i^2 \omega^2 z = -\omega^2 z$$

Substituindo as derivações na equação (2.69) resulta

$$z_0\omega_0^2 + z_0i\beta\omega + z_0(-\omega^2) = \frac{F_0}{m} \Rightarrow z_0(\omega_0^2 + i\beta\omega - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \quad (2.71)$$

Daí tem-se que

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)} \quad (2.72)$$

Da equação (2.71) tem-se

$$z_0(\omega_0^2 + i\beta\omega - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \Rightarrow z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + i\beta\omega - \omega^2)}$$

Da equação (2.69) tem-se

$$A^{i\phi} = z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + i\beta\omega - \omega^2)}$$

Para obter o módulo A e a fase ϕ faz-se usa-se as expressões (2.39), (2.40) e (2.42) que resolvendo tem-se

$$z_1 = \frac{F_0}{m} = r_1$$

$$z_2 = \omega_0^2 - \omega^2 + i\beta\omega = r_2 e^{i\theta_2}$$

o que dá

$$r_2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}, \quad \text{tg}\theta_2 = \frac{\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Para que tenha-se a ideia do fenômeno da ressonância a partir daqui, é esperado que a frequência da força externa aplicada (ω) se aproxime da frequência natural (ω_o) onde a amplitude $A \rightarrow \infty$ e $\omega \rightarrow \omega_o$ seja suficientemente próximo, então a forma equacionada da amplitude do fenômeno da ressonância, é dado pela amplitude $A(\omega)$ e o argumento $\phi(\omega)$

$$A(\omega)^2 = \frac{(F_0)^2}{m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2]} \quad (2.73)$$

$$\boxed{\phi(\omega) = -tg^{-1} \left(\frac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)} \quad (2.74)$$

a solução estacionária é dada por

$$\boxed{x_p(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))} \quad (2.75)$$

Segundo (BOYCE; RICHARD, 2014), quando ω está em um valor intermediário, tendo como consequência a frequência $\omega \approx \omega_0$ a amplitude pode atingir seu ponto máximo e para encontrar esse ponto, a amplitude $A(\omega)$ pode ser diferenciada em relação a frequência (ω) e igualar a zero, assim $\omega = \omega_{max}$. Então a frequência máxima é dada por:

$$\omega_{max}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{m^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{k} \right) \Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{k} \right)} \quad (2.76)$$

$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\beta^2}{k} \right)} \quad (2.77)$$

Com isso o $\omega_{max} \approx \omega_0$ quando o β é pequeno. Então segundo (BOYCE; RICHARD, 2014) define o fenômeno da ressonância quando para sistemas ligeiramente amortecidos a frequência externa ω se aproxima da frequência natural ω_0 e esse efeito é mais nítido quando o fator de amortecimento β é reduzido. Com isso, (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) afirma que é fácil determinar quando $A(\omega_0)$ possui seu valor máximo quando $\omega \cong \omega_0$ então a frequência será máxima.

Diante do que foi dito pelos autores (NUSSENZVEIG, 2014), (THOHNTON; MARION, 2011), (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) segue que no que diz respeito aos efeitos da ressonância, o caso mais interessante para um sistema é para o caso do amortecimento fraco em que $\beta \ll \omega_0$ e para que surja o efeito ressonante é necessário que o sistema esteja em regime de subamortecimento, assim toma-se:

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$$

Neste caso, faz-se:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

De modo que as equações (2.73) e (2.74) ficam

$$A^2(\omega) \approx \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} \right) \frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\beta^2}{4} \right]} \quad (2.78)$$

$$\phi(\omega) \approx -tg^{-1} \left(\frac{\beta}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) \quad (2.79)$$

Segundo (NUSSENZVEIG, 2014) a ponta típica de ressonância é dada por $A(\omega)^2$ e é associado a uma ressonância estreita em que ponto máximo A_{max}^2 é atingido quando $\omega \approx \omega_0 \pm \beta$.

A amplitude máxima A_{max} conforme $A^2(\omega)$ é dada por

$$A_{max} = A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\omega_0\beta} \quad (2.80)$$

Agora para descrever o faor de mérito ou qualidade compara-se a amplitude máxima com o valor da amplitude $A(\omega)$ no limite de baixas freqüências quando $\omega \ll \omega_0$ então:

$$\frac{A(\omega_0)}{A(0)} = \frac{\omega_0}{\beta} = Q \quad (2.81)$$

Com isso o fator de amplificação produzido pela ressonância em relação à amplitude para $\omega \ll \omega_0$ é precisamente igual ao fator de qualidade do oscilador, isto é quanto mais estreita é a ressonância, mais pontiaguda ela é. Pode ser exprimido também a semilargura do pico de ressonância nas oscilações forçadas, em que o fator de amortecimento β é o inverso do tempo de decaimento das oscilações livres, e é dado por:

$$\Delta\omega = \beta = \frac{1}{\tau_d} \quad (2.82)$$

Conforme as equações (2.80), (2.81) e (2.82) à medida que o fator de qualidade Q passa a diminuir, a ressonância torna-se menos acentuada ou vice-versa.

2.6.1 Contextos que envolvem o fenômeno da ressonância

No artigo *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks*² baseado no desastre estrutural de uma ponte localizada nos Estados Unidos da América, teve seu início de construção no dia 23 de novembro de 1938 e inaugurada no dia 1 julho de 1940. Porém no dia 7 de novembro de 1940, a ponte estava em um estado de vibração, causada por ventos de aproximadamente 67km/h com 12 vibrações/min. Este problema de engenharia vem ao longo do tempo sendo estudado e os autores (BILLAH; SCANLAN, 1991) asseguram que o problema estrutural foi caracterizado pelo chamado *aerolastic flutter*³.

Nessa subseção, destaca-se o entendimento de certos fenômenos que são ligados a ideia do fenômeno da ressonância, que no caso citado por (BILLAH; SCANLAN, 1991) fazem o seguinte questionamento:

As principais questões neste caso são: Qual foi a natureza exata das ocorrências provocadas pelo vento em Tacoma Narrows, e podem ser consideradas correctamente como casos de ressonâncias? (BILLAH; SCANLAN, 1991, p.118)⁴

Com este questionamento, os autores deixam claro quais motivos levaram a ponte em Tacoma Narrows, viesse a obter oscilações periódicas que dependiam da velocidade do vento e por isso era chamada de “Gallopig Gertie”, nesse intuito o artigo aponta os limites em considerar se este é ou não é um exemplo associado somente ao fenômeno da ressonância. Assim o artigo busca de maneira qualitativa o fenômeno da ressonância em livros didáticos, que é discutido o clássico oscilador amortecido e forçado discutido nas subseções (2.5.1) e (2.5.2) e conforme a equação de movimento (2.54), onde os parâmetros m , β , k e $F(t)$ são respectivamente parâmetros relevantes para um sistema mecânico linear do tipo forçado.

Nesse intuito (BILLAH; SCANLAN, 1991) deixa claro que os livros didáticos, trazem somente que o problema da ponte de Tacoma Narrows foi resultante do fenômeno da ressonância, porém eles descrevem e provam resultados mais complexos e

² Ressonância, falha na ponte Tacoma Narrows e livros didáticos de física para graduação

³ vibrações aerolásticas, é uma área da Física e Engenharia que estuda as vibrações no âmbito das interações entre as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas

⁴ The main issues in this instance are: What was the exact nature of the wind-driven occurrences at Tacoma Narrows, and, can they be considered correctly to cases of resonances? (BILLAH; SCANLAN, 1991, p.118)

didáticos, pois envolvia dois aspectos importantes na engenharia, as oscilações nos vãos da ponte e as vibrações forçadas causadas por vórtex dos ventos na superfície da ponte.

O colapso não se deveu à força bruta do vento, mas sim a uma ressonância entre a frequência natural de oscilação da ponte e a frequência dos vórtices gerados pelo vento que empurravam e puxavam alternadamente a estrutura da ponte. (BILLAH; SCANLAN, 1991, p.120)

5

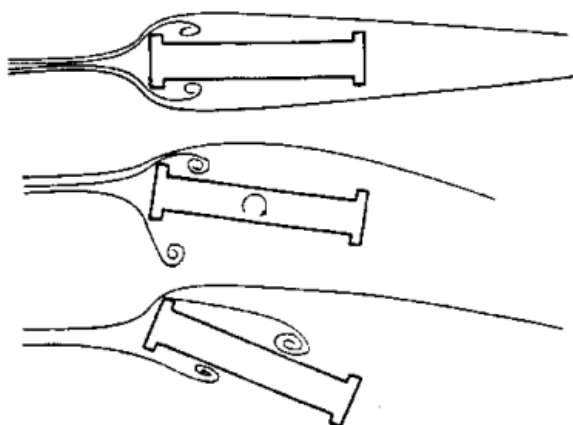


Figura 9 – Padrão de vórtice sobre a seção giratória do deck. Fonte: (BILLAH; SCANLAN, 1991, p.121)

6

Em suma os autores Billah e Scanlan, destacam que esse problema de fato não possuía somente parâmetros relacionados ao fenômeno da ressonância e sim deve ser aplicado outros parâmetros, que no caso a frequência dos vórtices gerados pelo vento, desestabilizando a estrutura da ponte, assim para os autores (BILLAH; SCANLAN, 1991) foi interessante investiga-lo no âmbito das vibrações aeroelásticas, tendo como princípio as vibrações induzidas por vortex.

No trabalho de (STOMP et al., 2007) no que tange às vibrações e as energias absorvidas, entende-se que as moléculas possuem seus modos vibracionais naturalmente estabelecidos, então pode ser dito que cada molécula de água possui uma frequência natural.

Conforme a figura acima (STOMP et al., 2007) afirma que as questões vibracionais das moléculas de água, quando se refere ao alongamento simétrico e assimétrico,

⁵ The collapse was not due to the brute force of the wind but due to a resonance between the natural frequency of oscillation of the bridge and the frequency of wind-generated vortices that pushed and pulled alternately on the bridge structure. (BILLAH; SCANLAN, 1991, p.120)

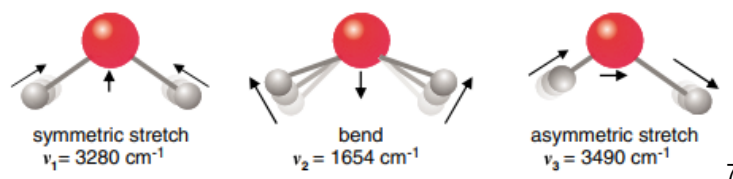


Figura 10 – Os três modos vibracionais da molécula de água e suas frequências fundamentais na água líquida: alongamento simétrico (ν_1), flexão (ν_2) e alongamento assimétrico (ν_3). Os átomos se movem nas direções indicadas pelas setas. Fonte: (STOMP et al., 2007, p.3)

seus picos de absorção são semelhantes com cerca de 3000 nm, então os harmônicos dessas vibrações ocorrem em níveis de energia mais altos. Agora em relação às vibrações de reflexão, acontecem em níveis mais baixo de vibração pois o comprimento de onda é de 6000 nm. Observa-se então a partir dos modos de vibração que o alongamento simétrico e assimétrico os níveis de frequências possuem um valor semelhante.

No que diz a respeito às vibrações moleculares, (CAMPANONE; BAVA; MASCHERONI, 2014) cita pontos importantes para compreensão da energia absorvida que no caso considerado são os harmônicos dessas vibrações que ocorrem em níveis de energia mais elevados, (tendo como princípio que as moléculas de água nunca deixam de vibrar) que duplicam ou triplicam a energia necessária. Assim (CAMPANONE; BAVA; MASCHERONI, 2014) contribui que a técnica experimental aplicada com uma frequência variável permite uma maior eficácia na uniformidade de aquecimento e absorção de energia em alimentos e faz com que haja também melhor uma uniformidade de campo da cavidade ressonante, assim:

As ressonâncias são definidas como valores de absorção máxima de potência devido à interação das ondas incidentes através de ondas transmitidas e refletidas dentro do material. Para sua aplicação, o estudo do comportamento externo do produto deve ser complementado também pelo conhecimento do comportamento interno. Isto requer controlar o padrão na cavidade e caracterizar os perfis desenvolvidos no interior do produto. (CAMPANONE; BAVA; MASCHERONI, 2014, p.915)

8

As vibrações moleculares em alimentos acontecem quando submetidas a forçamentos periódicos (2π) causados por um padrão de frequência, para que estas

⁸ The resonances are defined as values of maximum power absorption due to the interaction of the incident waves through transmitted and reflected waves within the material. For its application, the study of external behavior of the product should be complemented by the knowledge of internal behavior as well. This requires to control the pattern in the cavity and to characterize the profiles developed inside the product. (CAMPANONE; BAVA; MASCHERONI, 2014, p.915)

moléculas vibrem e absorvam o máximo de energia até que se tornem ressonantes, como no caso das moléculas de água que possuem pelo menos três tipos de vibrações. As microondas citadas por (CAMPANONE; BAVA; MASCHERONI, 2014) são emitidas pelo magnétron que irradia e incide sobre o alimento causando a vibração nas moléculas presentes aquecendo o alimento e isso acontece quando há absorção máxima de potência. Com isso a energia cinética das microondas se convertem em energia térmica quando estas passam dentro do alimento, com isso, como a estrutura do alimento possui uma frequência natural de vibração e com o forçamento através do irradiação das microondas, faz provocar o aumento de energia nas moléculas presentes, então uma quantidade de energia é acumulada dentro do alimento e por fim dependendo do nível de amortecimento do alimento haverá uma maior eficiência no sistema a partir de uma frequência externa operacional de 2,5 GHz, por exemplo um grão de arroz ou um alimento com geometria regular que nessa ocasião o alimento consegue obter uma temperatura desejável a partir do fenômeno da ressonância, tudo isso equivale a uniformidade do grão ou dos grãos.

Para (GEEDIPALLI; RAKESH; DATTA, 2007) considera que com o movimento giratório do prato faz com que os locais de aquecimento sejam de maneira uniforme e faça com que todo o alimento seja aquecido pela irradiação. Este processo de aquecimento leva em consideração a diversos fatores e um deles é o fator volumétrico do alimento, logo a plataforma giratória é um importante método para o aquecimento desses alimentos, com isso:

O carrossel ajuda a uniformizar as temperaturas em locais na direção radial. No entanto, para locais ao longo do eixo não há alteração na campos eletromagnéticos devido à mesa giratória rotativa. O carrossel é, portanto, ineficaz para aumentar a uniformidade do aquecimento ao longo do eixo de rotação. O jogo entre os valores experimentais e simulados é novamente considerado bastante bom. (GEEDIPALLI; RAKESH; DATTA, 2007, p.6)⁹

A partir disso o que é abordado por (GEEDIPALLI; RAKESH; DATTA, 2007) para que o alimento receba a energia cinética e a transforme em energia térmica com um bom aproveitamento, é necessário que haja a rotação do prato. Para que os objetivos

⁹ The carousel helps to even out temperatures at locations in the radial direction. However, for locations along the axis there is no change in the electromagnetic fields due to the rotating turntable. The carousel is, therefore, ineffective in increasing the uniformity of heating along the axis of rotation. The match between the experimental and simulated values is again found to be fairly good. (GEEDIPALLI; RAKESH; DATTA, 2007, p.6)

fossem alcançados por (CAMPANONE; BAVA; MASCHERONI, 2014) foi necessário construir um divisor de potência e adaptar para minimizar as reflexões em direção à fonte gerada das microondas que pode causar erros de medição. Outro exemplo prático de ressonância pode ser representado em modelos mecânicos em que um pelotão de soldados atravessa uma ponte cuja a marcha se dá na mesma frequência natural da ponte, como na ponte em toda sua extensão há várias distribuições de frequências naturais, pois a superfície e vãos da ponte não são uniformes, caso na marcha dos soldados haja uma frequência que se aproxime da frequência natural da ponte pode então entrar em ressonância a ponto de romper as estruturas feitas de concreto armado, por esta razão os soldados andam em descompasso para que não haja sintonia entre as frequências externa e natural.

Agora envolvendo moléculas ultrafrias, um artigo recente de uma equipe de Físicos do Massachusetts Institute of Technology (PARK et al., 2023) publicaram na revista *Nature*, uma descoberta para a compreensão da ressonância na colisão de moléculas ultrafrias, com efeito dessas colisões, houve o desaparecimento rápido de uma nuvem de moléculas super-frias de sódio-lítio (NaLi) assim, compreende-se que o campo magnético ajustou as partículas em ressonância, fazendo com que reagissem mais rapidamente do que normalmente fariam. Com isso a partir de ressonâncias naturais, pode ser que, controle certas reações químicas, assim:

Nossos resultados indicam que este novo tipo de ressonância magnética induzida por degeneração pode ser onipresente na física molecular ultrafria, oferecendo um novo e poderoso mecanismo para ajustar as interações intermoleculares com campos eletromagnéticos externos. (PARK et al., 2023, p.55) ¹⁰

O artigo mostra que a taxa de perda é próxima do limite universal e isto implica em uma perda inelástica, no entanto observaram que as taxas de perda próximas do limite universal estão fora da ressonância estreita. Com isso também, a ressonância de (NaLi + NaLi) Feshbach foi observada em um campo magnético específico, neste resultado, (PARK et al., 2023) ver que possivelmente há um novo tipo de ressonância de Feshbach, que no caso essa ressonância é dada em homenagem a Herman

¹⁰ Our results indicate that this new type of degeneracy-induced magnetic resonance could be ubiquitous in ultracold molecular physics, offering a powerful new mechanism for tuning intermolecular interactions with external electromagnetic fields. (PARK et al., 2023, p.55)

Feshbach em que considera sistema hamiltonianos, com mecanismo diferente daqueles observados até agora em sistemas atômicos ultrafrios.

2.6.2 Oscilações eletromagnéticas

Em prática as teorias que envolvem circuitos elétricos, uma das mais importantes é o eletromagnetismo, representando assim seus elementos a partir dos circuitos do tipo RLC. Os componentes que configuram este tipo de circuito são a: indutância, resistência pura e capacitância pura, nesse intuito o estudo do fenômeno da ressonância se dá através do ajuste dos valores que correspondem à indutância e a capacitância, conforme (NUSSENZVEIG, 1997) que considera as oscilações amortecidas em um circuito RLC conforme a lei de Kirchhoff:

$$\frac{Q}{C} + R I + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (2.83)$$

A partir da equação acima, é derivado em relação ao tempo (t) e dividindo por L, tem-se:

$$\boxed{\frac{d^2 L}{dt^2} + \frac{R}{C} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0} \quad (2.84)$$

chamando $\beta = \frac{R}{C}$ e $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $I = \frac{dQ}{dt}$ tem-se a uma equação análoga:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_0 \Rightarrow L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{\varepsilon_0}{L} \quad (2.85)$$

tem-se

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{\varepsilon_0}{L} \quad (2.86)$$

Tomando $\frac{\varepsilon_0}{L} = 0$ por ser a equação (2.86) uma EDO de 2ª ordem linear homogênea, para resolve-la precisa levar em consideração a notação complexa conforme (2.2), então $Q_h = ae^{\lambda t}$ e aplicando em ambos os termos da direita e esquerda da equação, tem-se

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta\lambda e^{\lambda t} + a\omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow ae^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0 \quad (2.87)$$

Conforme equação característica e que a equação acima seja satisfeita pode ser feito

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Para ser encontrado as raízes pode ser resolvido da pela equação de 2º grau, onde

$$\Delta = (2\beta)^2 - 4\omega_0^2 = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$

Encontrando as raízes da equação tem-se

$$\lambda = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{2\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{1}{2} \left(2\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \left(2\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right) = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Considerando aqui para o caso de raízes complexas, descrita também no caso 3 para oscilações mecânicas conforme subseção (2.3.1), tem-se

$$\lambda = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.88)$$

caso 1: Para raízes complexas $\beta < \omega_0$

Definindo outro parâmetro devido à raiz obtida acima, tem-se

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad (2.89)$$

Logo as raízes de (2.88) se reduzem em

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)} = -\beta \pm \sqrt{-\omega^2} = \beta \pm i\omega \quad (2.90)$$

Então a solução homogênea é dada da seguinte forma;

$$Q_h(t) = a_+ e^{(-\beta + i\omega)t} + a_- e^{(-\beta - i\omega)t} \quad (2.91)$$

Recorrendo a forma complexa trigonométrica das constantes complexas, faz-se

$$a_+ = \frac{A}{2} e^{i\phi} \quad (2.92)$$

$$a_- = \frac{A}{2} e^{i\phi} \quad (2.93)$$

Com as constantes encontradas substitui em (2.91)

$$\begin{aligned} Q_h(t) &= \frac{A}{2} e^{i\phi} e^{(-\beta+i\omega)t} + \frac{A}{2} e^{-i\phi} e^{(-\beta-i\omega)t} \\ &= \frac{A}{2} e^{i\phi} e^{-\beta t} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\phi} e^{-\beta t} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

deixando em evidência o termo $\frac{A}{2}$ tem-se

$$Q_h(t) = A e^{-\beta t} \left(\frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2} \right) \quad (2.94)$$

Como $\left(\frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2} \right) \equiv \cos(\omega t + \phi)$

Então

$$\boxed{Q_h(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)} \quad (2.95)$$

Logo a partir da equação acima o fator de amortecimento β faz com que as oscilações decaiam e a carga $Q_h(t)$ seja modulada pela exponencial $A e^{-\beta t}$.

ou ainda considera-se na solução abaixo a derivada em relação a t conforme equação (2.84), então:

$$\boxed{\ddot{I} + \beta \dot{I} + \omega_0^2 I = 0}$$

Os elementos apresentados anteriormente são vistos na subseção (2.7.1).
Supondo $\beta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_1 \approx \omega_0$ nesse caso para o amortecimento fraco, dá:

$$\boxed{Q(t) = \int^t I(t') dt' = \operatorname{Re} \left(A^{i\phi} \cdot \frac{e^{pt}}{p} \right) \approx \operatorname{Re} \left(-\frac{iA}{\omega_1} e^{i\phi} e^{pt} \right)}$$

Segundo (NUSSENZVEIG, 1997) para se resolver a equação acima, é necessário aproximar $p = p_+$ por $i\omega_1$ e as constantes A e ϕ são determinadas pelas condições iniciais $Q(0)$ e $I(0)$ assim,

$$Q(t) \cong \frac{A}{\omega_1} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{sen}(\omega_1 t + \phi) \quad (2.96)$$

é considerado na seção (4.1.1) a seguinte notação $-\frac{\gamma}{2} = \beta$ e $\omega_1 = \omega$ que se chama fator de amortecimento e a frequência externa que pode ser representado da seguinte maneira:

$$Q(t) \cong \frac{A}{\omega_1} e^{\beta t} \text{sen}(\omega_1 t + \phi)$$

Para descrever a energia armazenada no capacitor e indutor, segue da seguinte forma

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{A^2}{2\omega_1^2 C} e^{-\beta t} \text{sen}^2(\omega_1 t + \phi) \approx \frac{A^2}{2\omega_0^2 C} e^{-\beta t} \text{sen}^2(\omega_1 t + \phi)$$

que dá

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{L A^2}{2} e^{-\beta t} \cos^2(\omega_1 t + \phi) \quad (2.97)$$

Então o total de energia armazenada no circuito no instante t é

$$U(t) = U_C(t) + U_L(t) = \frac{1}{2} L A^2 e^{-\beta t} \quad (2.98)$$

mostrando que β é a taxa de amortecimento da energia tem-se

$$\frac{dU}{dt} = -\beta U$$

como a resistência pura no circuito, oferece uma energia dissipada através do calor, dá

$$\frac{dW}{dt} = R I^2(t) = R A^2 e^{-\beta t} \cos^2(\omega_1 t + \phi) \quad (2.99)$$

Então a energia dissipada no oscilador em um ciclo de oscilação é

$$\int_t^{t+\tau} \frac{dW}{dt} dt' \approx RA^2 e^{-\beta t} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} \cos^2(\omega_1 t' + \phi) dt' \quad (2.100)$$

Por outro lado tem-se

$$\boxed{\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} \cos^2(\omega_1 t' + \phi) dt' = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right)} \quad (2.101)$$

Com isso a energia dissipada por ciclo é dada por

$$= \frac{1}{2} RA^2 e^{-\beta t} \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (2.102)$$

Em razão do fator de qualidade Q do oscilador, como descrita na subseção (2.7.4) considera que quanto maior Q menor será a perda fracionária de energia por ciclo, assim tem-se:

$$Q \approx \frac{2\pi \frac{1}{2} LA^2 e^{-\beta}}{\frac{1}{2} RA^2 e^{-\beta} \frac{2\pi}{\omega_1}} = \frac{2\pi \frac{1}{2} LA^2 e^{-\beta}}{\frac{1}{2} RA^2 e^{-\beta} \frac{2\pi}{\omega_1}} = \frac{2\pi L}{R \frac{2\pi}{\omega_1}} = \frac{2\pi L \omega_1}{R 2\pi} = \frac{\omega_1 L}{R} \quad (2.103)$$

Como $\beta = \frac{L}{R}$ dá

$$\boxed{Q = \frac{\omega_1}{2\beta}} \quad (2.104)$$

Conforme o caso considerado para o amortecimento fraco, o fator de qualidade leva a condição $Q \gg 1$ em circuitos elétricos da mesma forma que os sistemas mecânicos como afirma (NUSSENZVEIG, 1997), assim com a investigação e projeto, em um artigo recém publicado na revista *Nature*, envolve a *Machine learnig*¹¹ para desenvolver um sistema de antena com tecnologia 5G pelo software CST MWS em um determinado circuito elétrico ressonante (HAQUE et al., 2023). O fenômeno da ressonância é descrito em circuitos elétricos RLC, e é medido pelo fator de qualidade mencionado na seção 2.7.4 e equação (2.81), onde quanto mais alto o valor do fator de qualidade dentro dos limites aceitáveis na faixa de frequências, melhor será a nitidez do sinal.

¹¹ aprendizado de máquina

Assim o fenômeno da ressonância no que tange ao circuito RLC (NUSSENZ-VEIG, 1997), é dado a partir da impedância complexa do circuito RLC

$$z = R + iX_L - iX_C = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (2.105)$$

tem-se que conforme a seção (3.4)

$$\bar{z} = ze^{i\phi} \quad (z = |\bar{z}|), \quad e \quad V = V_m \cos(\omega t) \quad (2.106)$$

de forma que

$$I(t) = \text{Re} \left(\frac{\bar{V}}{z} e^{i\omega t} \right) = \text{Re} \left(\frac{\bar{V}_m}{z} e^{i(\omega t - \phi)} \right) = \frac{V_m}{z} \cos(\omega t - \phi) \quad (2.107)$$

que dá

$$I_m = \frac{V_m}{z} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (2.108)$$

De acordo com o valor máximo da corrente em função do tempo (NUSSENZ-VEIG, 1997) assegura que a corrente média produzida para uma dada ddp de pico V_m dada pelo gerador, varia de acordo com a frequência externa provocada pela tensão (ω). Então para $\omega \rightarrow 0$, a reatância do capacitor domina e no caso para $\omega \rightarrow \infty$ a reatância do indutor será o dominante.

Com base nessas informações (NUSSENZVEIG, 1997) afirma que $\frac{I_m}{V_m}$ ocorre

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.109)$$

isto é, quando $\omega \approx \omega_0$ que no qual representa a aproximação da oscilação livre do circuito, tem-se

$$I_{m(\omega_0)} = \frac{V_m}{R} \quad (2.110)$$

Quando $\omega \approx \omega_0$ $I_m(\omega)$ pode ser estudado da seguinte forma através da equação (2.108)

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = R^2 \left\{ \frac{1}{R^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 L - \frac{\omega_0}{\omega \cdot \omega_0 C} \right)^2 \right\} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q \quad (2.111)$$

Onde $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ é o fator de qualidade associado a frequência angular ω_0 , então

$$I_m = \frac{V_m / R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (2.112)$$

Com estas relações (NUSSENZVEIG, 1997) contribui em que a energia eletromagnética durante as oscilações livres cai com $e^{-\beta t}$ e resultados análogos se encontram na subseção (4.1.5), com isso pode ser calculado a queda de tensão através do capacitor:

$$V_{C,m} = I_m X_C = \frac{I_m}{\omega C} \quad (2.113)$$

aplicando (2.108) em (2.113) tem-se

$$V_{C,m} = \frac{V_m}{\omega R C \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (2.114)$$

e em ressonância obtém-se

$$V_{C,m} = Q V_m \quad (2.115)$$

Logo (NUSSENZVEIG, 1997) conclui que para uma ressonância estreita cujo o pico é pontiagudo e o fator 2β de amortecimento é reduzido, o ($Q \gg 1$) e a amplitude da tensão ressonante no capacitor é muito maior do que a amplitude da excitação externa V_m , uma aplicação do fator Q em razão do fenômeno da ressonância é o seletor de frequências em um rádio, em que através da rotação do seletor das frequências varia a capacitância e cuja a frequência ω_0 está em ressonância com a frequência da emissora de rádio mostrando Q elevado. Do ponto de vista anterior sobre as grandezas descritas pelo modelo mecânico e pelo modelo eletromagnéticos Nussenzveig (1997, p.198) faz uma analogia entre estes dois modelos, assim:

OSCILADOR MECÂNICO	OSCILADOR L-C
$M \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ $x, m, k, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Energia cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ Energia potencial $V = \frac{1}{2}kx^2$	$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = 0$ $Q, L, \frac{1}{C}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Energia magnética $U_M = \frac{1}{2}LI^2$ Energia elétrica $U_E = \frac{Q^2}{2C}$

Tabela 3 – Tabela com o comparativo das características do oscilador mecânico e eletromagnético. Fonte: Nussenzveig (1997, p.198)

Com base nisto, os autores (HAQUE et al., 2023) investigaram através de uma técnica de aprendizado de máquina (machine learnig) o melhoramento e o bom desempenho de antenas Quasi-Yagi – Uda operando na banda n78 para aplicações 5G. Consideraram então, a simulação, medição e um modelo de circuito RLC para avaliarem a antena. Segundo (HAQUE et al., 2023) aponta em seu estudo que a antena projetada tem uma frequência operacional de 3,5 GHz, uma perda de retorno de -43.45dB, largura de banda de 520 MHz, ganho máximo de 6,57 dB e uma eficiência de quase 97%. Para isso, no trabalho dos autores utilizaram método de *Machine learnig* de regressão supervisionada para criar uma previsão precisa da frequência e do ganho da antena.

Com a aprendizagem de máquina os autores sugerem o uso do ADS ¹² e do CST para o desenvolvimento de algoritmos que forneçam previsões para o projeto da antena numa determinada banda de frequências e seja stisfatória. No final com o auxílio do CST MWS os autores asseguram:

No final, 141 amostras de dados são coletadas por meio da simulação com o auxílio do CST MWS¹³, e uma variedade de métodos de aprendizado de máquina de regressão (ML) são utilizados para prever o ganho e a frequência de ressonância da antena Yagi sugerida. (HAQUE et al., 2023, p.10)¹⁴

Com os resultados, os autores detectaram que o desempenho incluindo a simulação pelos softwares ADS e CST MWS, a medição e desenvolvimento do circuito

¹² Advanced Design System (ADS) para automação eletrônica <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/76183-keysight-advanced-design-system-ads-to-matlab-interface>>

¹³ é um software especializado em simulação eletromagnética 3D para problemas de alta frequência. Fonte: <https://www.mathworks.com/products/connections/product_detail/cst-microwave-studio.html> Acesso: 04. dez 23

¹⁴ In the end, 141 data samples are collected via the simulation with the aid of CST MWS, and a variety of regression machine learning (ML) methods are utilized to predict the gain and resonant frequency of the suggested Yagi antenna. (HAQUE et al., 2023, p.10)

elétrico, obtiveram ótimas estratégias de aproveitamento para o aprendizado de máquina para revisão do projeto onde foi comparado pela equipe os resultados medidos e os que foram simulados pela máquina para calcular a frequência de ressonância e o ganho da antena Yagi-Uda.

2.7 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos vem desde o século XX mais precisamente no final da década de 40, com uma gama de versatilidades e disponibilidades de computadores com softwares poderosos. (CHAPRA, 2011) assegura que desde essa época, houve uma revolução no uso desses métodos numéricos por mais que os custos fossem altos com os computadores. Ainda hoje em pleno século XXI, ainda há softwares que demandam de altos custos, porém, há outras possibilidades de se obter ótimos resultados em softwares livres.(GILAT, 2008)

Segundo (CHAPRA, 2011) os métodos numéricos são técnicas matemáticas que usa algoritmos para a compreensão computacional de um problema físico e surgem de forma alternativa e necessária quando pretende-se aproximar funções a partir de um problema inicial, desta forma:

Os métodos numéricos são ferramentas extremamente poderosas na resolução de problemas. Eles são capazes de lidar com um grande número de equações, não linearidades e geometrias complicadas que não são incomuns na prática da engenharia e, em geral, são impossíveis de resolver analiticamente. Dessa forma, eles aumentam enormemente a capacidade de resolver problemas. (CHAPRA, 2011, p. 03)

A definição de métodos numéricos por Chapra, mostra que os métodos numéricos são ferramentas que tem o objetivo de solucionar problemas de cunho lineares e não-lineares, sendo que por meio analítico uma determinada equação diferencial não linear é impossível ser resolvida, e estas equações tem por objetivo compreender problemas das engenharias, ciência e tecnologia e principalmente das ciências atmosféricas.

Na mesma intenção em mostrar que os métodos numéricos são ferramentas computacionais capazes de solucionar problemas complexos, há razões para estudá-lo, com isso Gilat (2008, p.21) corrobora que:

Os métodos numéricos são técnicas matemáticas usadas na solução de problemas matemáticos que não podem ser resolvidos ou que são difíceis de serem resolvidos analiticamente.

ou seja, os métodos numéricos são possibilidades de resolução de problemas que apresentam dificuldades comuns de soluções matemáticas. Entre os conceitos apresentados por Chapra (2011) e Gilat (2008) são perceptíveis as razões pelas quais devem ser usados métodos numéricos no sentido de que os dois autores consideram como propulsores de resolução de equações diferenciais.

Os métodos numéricos como já exposto, se configuram como técnicas matemáticas, que têm por objetivo resolver problemas reais e simulados, como por exemplo: a influência do clima, desastres naturais ou estruturas da matéria em suas propriedades moleculares, que com isso podem vir a ser problemas para sociedade uma vez que podem resultar em situações complexas de interação entre a natureza e o ser humano. Para a consecução do modelo físico via métodos numéricos, tem-se a contextualização de instrumentos a serem utilizados nos PCN+.

Segundo assegura o documento (BRASIL, 2017) apresenta quatro possibilidades da contextualização no ensino de física que são: resolução de problemas, atividades experimentais, atividades investigativas e a utilização de recursos computacionais. A partir da conceituação dos recursos computacionais onde é levado em consideração os métodos numéricos, o uso de recursos computacionais é uma estratégia relevante para o ensino de física. Será apresentado os seguintes métodos numéricos: Método de Euler e o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, em vista ao modelo para o oscilador amortecido e forçado (YDRI, 2016).

2.7.1 Método de Euler

Conhecido como método das tangentes, ele é capaz de aproximar soluções de equações diferenciais, e é uma técnica de solução algorítmica de uma EDO de primeira ordem, assim:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Então a primeira derivada fornece uma estimativa direta da inclinação em x_n , onde a função $f(x_n, y_n)$ é a equação diferencial calculada em x_n e y_n . O método de

Euler (CHAPRA, 2011) é um tipo de método chamado de passo único, onde o valor da função incremento é baseado na informação em um único ponto i . Os métodos de passo único podem ser descritos conforme (1.1). Para se ter uma precisão com este método, é necessário que atribuamos passos (h) pequenos como por exemplo $h = 0.01$ e quanto menor o número de passos, maior será a quantidade pontos para o efeito da suavização da curva, então (BOYCE; RICHARD, 2014) denota que:

$$y_{n+1} = y_n + f_n h \quad n = 0, 1, 2..$$

Então graficamente tem-se:

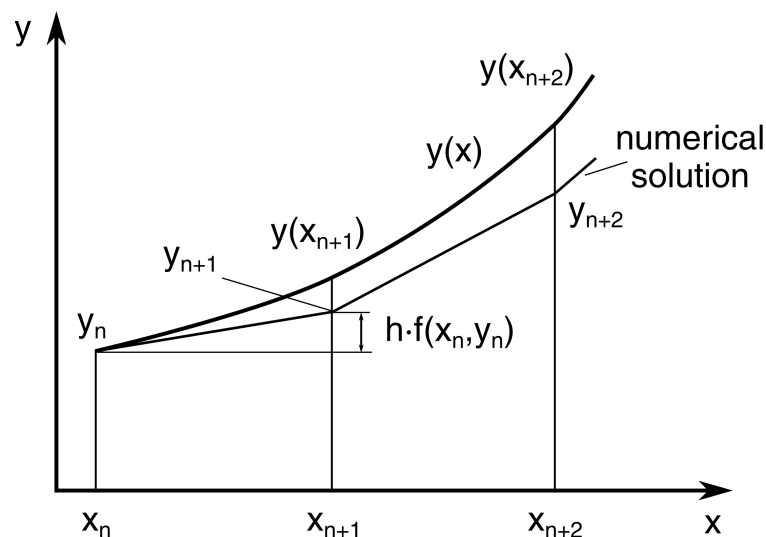


Figura 11 – Solução numérica pelo método de Euler. Fonte: <<https://www.freecodecamp.org/news/eulers-method-explained-with-examples/>>

Como o método de Euler é iterativo, ou seja, a partir das aproximações realizadas pelo computador, as soluções ficam cada vez mais aproximadas e por cada passo utilizado, as sequências de valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ se aproximam da função $\phi(t)$ nos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ conclui-se que com o método de Euler quanto menor o número de passos, melhor será a aproximação da função desejada.

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h \quad (2.116)$$

2.7.2 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem Clássico

Carl David Tolmé Runge (1856-1927), propusera um método, partindo do método de Euler, concebia então o método de Runge, em 1875, apesar dele ter recorrido ao método de Euler e através das expansões de Taylor, é parecido com a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson (CHAPRA, 2011), e também com certa semelhança ao método de Heun, tinha em seu desenvolvimento múltiplas estimativas da inclinação para que se chegasse a uma inclinação média melhorada e desejava-se aproximar a solução de uma equação diferencial de primeira ordem.

Através da expansão de Taylor, tem-se as seguintes aproximações:

$$P_4(x) = \sum_{n=0}^4 \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (2.117)$$

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Generalizando esta ideia através das expansões de Taylor, tem-se uma função $f(x)$ e esta é derivável até ordem k , o objetivo destas expansões é ter um polinômio $P_k(x)$ de ordem k que mais esteja próximo de $f(x)$ ao redor de a e a é um ponto considerado:

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] \quad (2.118)$$

Com isso, o método de Runge (CHAPRA, 2011) utilizava-se de uma média ponderada para chegar a uma inclinação melhorada, assim esse método possui resultados mais precisos. Tem-se então a partir disso, que a expansão até a quarta ordem é a mais satisfatória para este trabalho e há de perceber que com a utilização da quarta ordem, a solução analítica e numérica ao longo de um curva dada, está conforme o problema de valor inicial (PVI):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Dado o valor y_n em x_n , avaliamos o valor y_{n+1} em x_{n+1} usando o método de Runge até então como segue.

Conforme figura abaixo (YDRI, 2016) contribui que partir do ponto inicial (x_n, y_n) prossegue-se em sucessivas aproximações, com início pela estimativa inicial k_1 , após a primeira estimativa prossegue para a segunda estimativa k_2 no meio do intervalo $[x_n, \frac{1}{2}h]$ e para realizar o cálculo de k_2 na metade do passo $\frac{h}{2}$ tendo como referência a estimativa k_1 , resultará em $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$ e assim por diante. Em relação a estimativa k_3 terá como referência a estimativa k_2 resultando em $f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$. Após, a estimativa k_3 tem-se a estimativa k_4 em relação a k_3 que resulta em $k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$ com isso foi definido que cada estimativa está mais próximo da exata:

$$k_1 = hf(x_n, y_n);$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1);$$

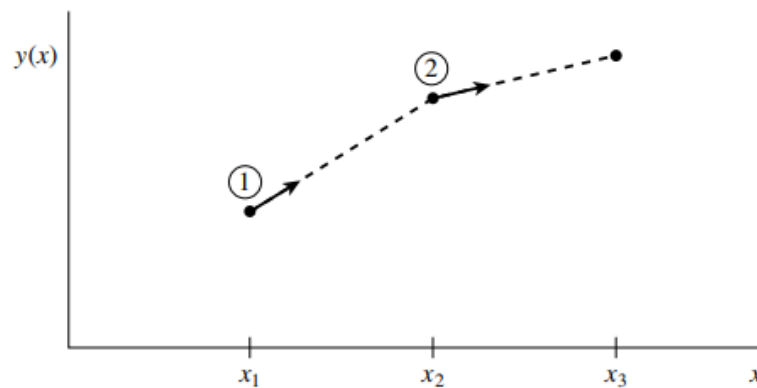


Figura 12 – Gráfico representando a extrapolação pelo método de Runge-Kutta de 2ª ordem. Fonte:(PRESS et al., 2007)

Após a segunda estimativa, tem-se:

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2);$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + \mathcal{O}(h^5)$$

Então (PRESS et al., 2007) contribui que a partir de sucessivas aproximações e avaliações, o método Runge-Kutta de quarta ordem em todo seu processo, a derivada

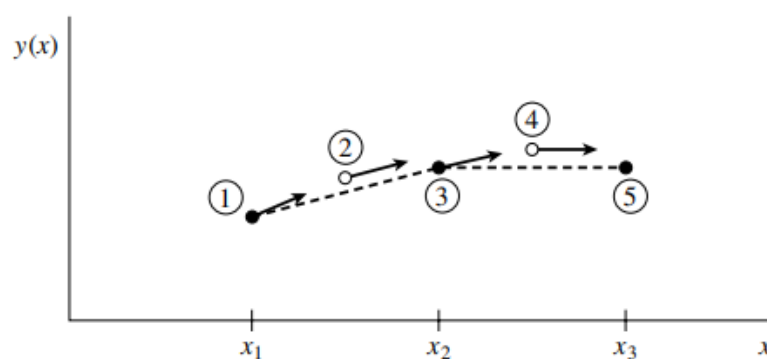


Figura 13 – Gráfico representando aproximações pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Fonte: (PRESS et al., 2007)

é avaliada uma vez no ponto inicial, duas vezes nos pontos médios do ensaio e uma vez no ponto final e a partir disso o valor final da função é calculado.

A partir da generalização da ideia de Runge acima, houve corroborações das ideias de Martin Willhelm Kutta (1867-1944), com isso, com a contribuição de Kutta, pode então ser comparado com a expansão de Taylor, que neste caso será utilizado o de quarta ordem e consequentemente o objetivo do método é determinar as constantes mais apropriadas. Para (CHAPRA, 2011), os métodos de Runge-Kutta (RK) alcançam a acurácia de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior, conforme demonstração a seguir:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right) \quad (2.119)$$

3 METODOLOGIA

3.1 MODALIDADE DE PESQUISA

Diante da proposta de pesquisa apresentada neste trabalho, a metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa. Nesse sentido, (GIL, 2002) assegura que a pesquisa bibliográfica é um método de investigação que se baseia em materiais disponíveis para consulta, sobretudo livros e artigos científicos, tornando-se fontes dos temas a serem explorados. De acordo com (GIL, 2002), a vantagem da pesquisa bibliográfica reside na abrangência do objeto de estudo, permitindo ao pesquisador uma manipulação de fenômenos de pesquisa muito mais ampla do que a pesquisa direta.

Dessa forma, a fim de alcançar os objetivos deste trabalho, foi necessário buscar materiais que corroborassem e abordassem a temática. Em relação a (BARDIN, 2011), foi realizada a análise de conteúdo. O principal objetivo do trabalho foi compreender o fenômeno da ressonância a partir de um modelo para o oscilador amortecido e forçado, com o intuito de contribuir para o ensino de física.

Para compreender esse fenômeno, foram estabelecidas correlações entre a parte teórica e computacional, especialmente no que diz respeito aos resultados analíticos. Utilizando como referência livros sobre as aplicações dos métodos numéricos de Euler e de Runge-Kutta de 4ª ordem, foram definidos na linha de comandos os parâmetros de entrada, declarações de controle e a execução das funções de acordo com as equações fornecidas. O objetivo foi expressar os parâmetros para a situação física por meio do programa computacional Python, apresentando dados gráficos e numéricos do fator de mérito ou de qualidade, relacionados ao modelo físico que representa um dos fenômenos naturais.

Com o auxílio da linguagem computacional Python, procedeu-se à verificação da equação diferencial que governa o oscilador amortecido e forçado, utilizando métodos numéricos. Esse processo possibilitou a determinação qualitativa da solução acoplada da equação diferencial linear não-homogênea. Por meio das linhas de comando, foram realizadas comparações entre os fatores de qualidade e os fatores de amortecimento.

As equações diferenciais foram resolvidas empregando o método de separação de variáveis e expressando o fator integrante para facilitar o raciocínio ao resolver

através da equação característica. Esse procedimento conduziu à obtenção de raízes complexas, resultando na solução de problemas de valores iniciais. Consequentemente, permitiu o entendimento das informações contidas em cada derivada dessas equações, reconhecendo seu significado físico.

3.2 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Com isso, a pesquisa deu prosseguimento através da pesquisa em artigos científicos como a revista *Nature*, livros próprios, livros encontrados na biblioteca central do IFPI, dissertações e teses que trazem uma abordagem coadunada ao tema da pesquisa. Em ordem, foi desenvolvido a parte analítica e computacional relativo ao fenômeno da ressonância

Consequentemente, foram realizadas as considerações e discussões teóricas, analíticas e computacionais do fenômeno da ressonância para cada método em virtude do oscilador amortecido e forçado cujo os resultados foram favoráveis devido ao regime subarmotecido previamente estabelecido, pois este regime foi o único que possuía parâmetros perfeitos para a observação do fenômeno da ressonância conforme a literatura. Na sequência do trabalho, foram exploradas as grandezas relevantes para a ocorrência da ressonância tanto para o âmbito mecânico como eletromagnético, com isso contribuir de forma clara em relação aos fenômenos de natureza física aos professores e alunos do curso de Licenciatura em Física.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

No desejo de alcançar o objetivo geral que é - Compreender o fenômeno da ressonância, com o auxílio da linguagem Python - a partir da pesquisa qualitativa, nesta pesquisa, obteve-se resultados: numéricos, gráficos e analíticos que fossem satisfatórios para que houvesse a devida compreensão do fenômeno da ressonância através das características e do comportamento da oscilação amortecida. Foi levado em consideração o regime de subamortecimento tendo como a força externa, o agente no sistema que o faz causar aumento na amplitude quando exatamente as frequências se aproximam $\omega \approx \omega_0$ resultando no fenômeno da ressonância, em vista o fator de qualidade Q.

Com a atenuação do pico de ressonância, a largura ficou cada vez mais estreita, evidenciando o fenômeno da ressonância no sistema com base na equação de movimento do oscilador, assim obteve-se os resultados condizentes com a literatura em relação ao fator de amortecimento e ao fator de mérito Q. No que tange aos métodos utilizados nas resoluções das equações diferenciais, proporcionaram uma visão do tipo de problema físico, que no caso a descrição da solução estacionária ou particular, com isso no caso supracitado, entre as soluções da equação característica a mais relevante ao caso $2\beta < \omega_0$ é a que possui raízes complexas. Analisando o modelo mecânico da ressonância verificou as características ligadas a atenuação do pico de ressonância e em relação à energia do oscilador, que mede o total de transferência de energia da força externa para o sistema.

4.0.1 Discussão sobre a compreensão do fenômeno da ressonância via oscilador amortecido e forçado

Em vista as características e os comportamentos das oscilações amortecidas e forçadas para diferentes tipos de amortecimentos no caso abordado $2\beta \ll \omega_0$, para que haja o fenômeno de ressonância, é necessário e suficiente que o sistema esteja em regime de subamortecimento e para existir o regime subamortecido deve haver soma de senos e cossenos (mostra-se como uma exigência matemática). Então para isso um sistema deve ser considerado amortecido, quando seu fator de amortecimento esteja entre $0 < \beta < 1$ sendo maior que 1 o sistema não será amortecido e sim superamortecido, que não vem ao caso analisado. A outra característica para que haja

o fenômeno de ressonância, é que o sistema precisa de uma força motriz para que esta, forneça energia ao sistema e produza oscilações forçadas até que a frequência externa seja muito próxima da frequência natural. Neste caso as oscilações forçadas possui vantagens e benefícios para um determinado sistema dependendo do grau de aplicação. Nos contextos abordados, o primeiro caso vem à tona ao desastre da ponte de Tacoma Narrows, em que ventos geraram vórtices na superfície da ponte fazendo com vinhesse a torcer várias vezes e em relação a ressonância, foi em razão dos vãos da ponte entrarem em ressonância partir de uma força externa $f_0 \cos(\omega t)$, na tranferência de energia em um alimento e no caso da obtenção da eficiência em uma antena 5G através do *Machine Learnig*.

4.0.2 Discussão sobre a solução analítica da oscilação mecânica amortecida e forçada

Seguindo os princípios das equações diferenciais, a solução geral da equação de movimento do oscilador resulta da combinação de duas soluções - uma homogênea e outra estacionária. Essas soluções atuam em dois planos: o real e o complexo. A solução particular, derivada de um elemento complexo, revela uma dependência temporal, indicando que as oscilações não são livres, mas sim amortecidas. Embora haja resistência, que eventualmente interrompe as oscilações, um forçamento persistente confere ao sistema um ganho de energia, aumentando sua amplitude ao longo do tempo. Dessa forma, a solução geral da equação diferencial da equação de movimento do oscilador mecânico pode ser descrita como:

$$x(t) = e^{-\beta t} [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)]] \quad (4.1)$$

Para que tomemos um PVI, faz-se necessário possuir uma condição inicial, daí as constante a e b , então $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = v(0) = 0$. Segue que substituindo-as:

$$x(0) = e^{-\beta 0} [a \cos(\omega 0) + b \sin(\omega 0) + A(\omega) \cos[\omega 0 + \phi(\omega)]] = 1 \cdot [a \cdot 1 + b \cdot 0 + A(\omega) \cos \phi(\omega)]$$

$$x(0) = a + [A(\omega) \cos \phi(\omega)] \quad (4.2)$$

como $x(0) = 1$ então $a + A(\omega)\cos\phi(\omega) = 1 \Rightarrow a = 1 - A(\omega)\cos\phi(\omega)$

$$\boxed{a = 1 - A(\omega)\cos\phi(\omega)} \quad (4.3)$$

Derivando (4.1) tem-se

$$\dot{x}(0) = v(0) = 0$$

$$\dot{v}(0) = e^{-\beta t}[-\beta (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t] - A(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)] \quad (4.4)$$

Pela condição inicial $v(0) = 0$

$$\begin{aligned} v(0) &= -\beta(a \cos\omega(0) + b \sin\omega(0) + b\omega(0)) - [A(\omega)\cos[\phi(\omega)]] \\ &= [-\beta(a) + b\omega] - A(\omega)\omega \sin [\phi(\omega)] = 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$-\beta(a) + b\omega = A(\omega)\omega \sin [\phi(\omega)]$$

De (4.3) substitui na equação abaixo

$$b\omega = A(\omega)\omega \sin [\phi(\omega)] + \beta [1 - A(\omega)\cos\phi(\omega)]$$

$$\boxed{b = \frac{A(\omega)\omega \sin [\phi(\omega)] + \beta [1 - A(\omega)\cos\phi(\omega)]}{\omega}} \quad (4.6)$$

Através das condições iniciais, as constantes (a) e (b) são determinadas, revelando a natureza da equação diferencial. O comportamento resultante descreve um movimento oscilatório amortecido e forçado, apresentando uma oscilação sutil. Isso ocorre devido à combinação de funções senoidais e cossenoidais na trajetória das oscilações, com um decaimento constante ao longo do tempo.

4.0.3 Discussão sobre a solução numérica e analítica da oscilação mecânica amortecida e forçada para a compreensão do fenômeno da ressonância.

Para as discussões computacionais, utilizou-se dois métodos numéricos em que se diferenciam no que diz a respeito a sua ordem. O propósito de ter escolhido o método de Euler e não um outro método equiparado ao método de RK4 ou mais robusto, foi pelo fato de sua história e importância ao desenvolvimento das aproximações por métodos numéricos. Seguindo uma ordem pelo grau de acuracidade, o método de Runge Kutta de 4ª ordem foi descrito a partir da linguagem computacional python, para sistemas de oscilações acopladas, como anteriormente foi dito.

Com base nos parâmetros m, β, f_0 e k partiu-se de valores iniciais iguais a 1. Definiu-se primeiramente o passo, no caso $h = 0.01$ isso quer dizer que para garantir uma melhor suavização gráfica, pode-se diminuir os passos de h porém aumentará o tempo computacional. Em relação a massa, sabe-se que ela define a inércia de um corpo, quanto mais denso um corpo maior será sua inércia e quanto menos denso um corpo menor será sua inércia, assim pode ser definido $m = 1kg$. Em seguida definiu-se a constante de amortecimento β onde por definição sabe-se que $(0 < \beta < 1)$, podendo ser adotado o valor de amortecimento igual a $0,1 \frac{N}{m/s}$. Após definiu-se o valor da força externa $f_0 = 1 N$ e em relação a constante elástica k sendo que, quanto mais aumentar o valor de k mais dura será a mola fisicamente e nos resultados computacionais, os níveis de amortecimento diminuí, então para garantir o amortecimento dentro dos limites do amortecimento fraco adota-se $k = 1N/m$.

O fenômeno da ressonância manifesta-se por meio de um pico atenuado, influenciado pela absorção de energia proveniente de uma fonte externa. Este comportamento indica que o fator de qualidade (Q) experimenta um incremento à medida que a energia mecânica se acumula no oscilador a cada ciclo de oscilação, resultando em um amortecimento reduzido. É relevante salientar que, nas instâncias analisadas a seguir, as oscilações foram determinadas empregando o método numérico de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4). A escolha criteriosa destes parâmetros visa posicionar o sistema em um regime subamortecido. No gráfico apresentado abaixo (Figura ??), observa-se um pico atenuado decorrente do acúmulo de energia em um instante t , induzido pela quantidade de ciclos (2π) por uma força motriz. Utilizando o método numérico de RK4, constata-se um aumento na amplitude quando $\omega \approx \omega_0$. Isso implica que, com o ganho

de energia, o sistema alcança uma amplitude máxima de 7 metros, valor calculado numericamente, correspondente a um fator de qualidade (Q) de aproximadamente 3,50. Com base nos resultados numéricos, a fim de viabilizar uma comparação entre os métodos numéricos e analíticos, seguiremos as equações (2.90) e (2.103). Abaixo, apresentamos um gráfico da amplitude em relação à frequência angular, utilizando os dados previamente definidos. A representação gráfica é a seguinte:

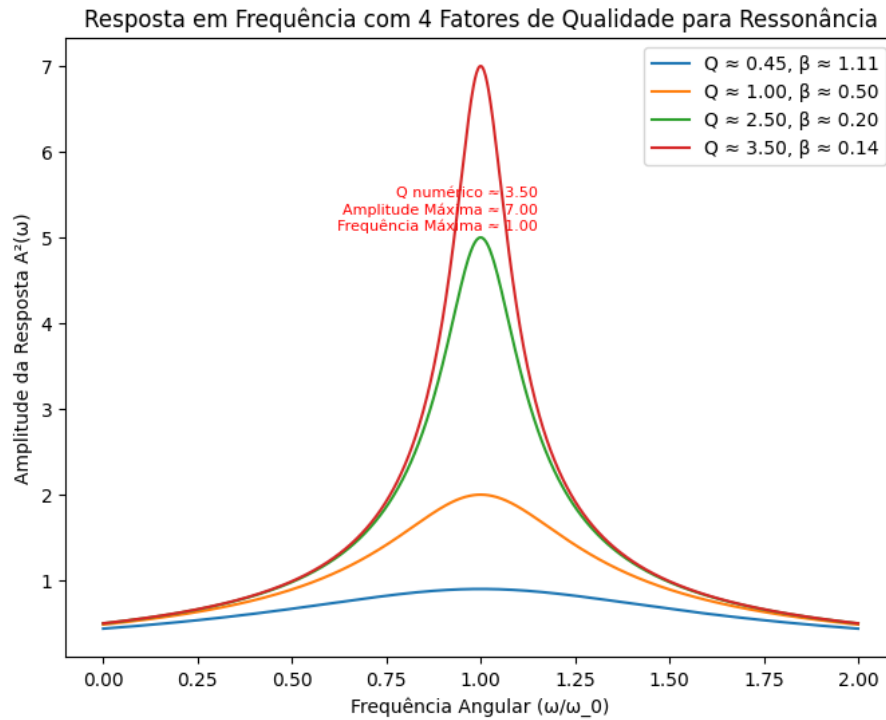


Figura 14 – Amplitude de um oscilador harmônico acionado para ilustrar a ressonância com uma frequência natural ω_0 . Fonte: Própria

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{2 \cdot 0,14} = \frac{1}{0,28} = 3,57 \Rightarrow \boxed{Q = 3,57}$$

$$A_{max} = \frac{f_0}{m\omega_0\gamma} = \frac{1}{1kg \cdot 1rad/s \cdot 0,14} = \frac{1}{0,14} = 7,1429m \Rightarrow \boxed{A_{max} = 7,1429 m} \quad (4.7)$$

Assim, comparando o resultado analítico e o resultado numérico da amplitude máxima e o fator de qualidade, valida a utilidade do método numérico para este modelo. Dessa forma exibindo em tabela temos:

Com base na tabela contendo os resultados analíticos e numéricos, é possível calcular o desvio relativo (D_R) entre o valor teórico e o valor numérico usando a seguinte relação, considerando uma margem de erro inferior ou igual a 5% para as grandezas

V_t e V_n o valor teórico ou analítico e o valor numérico respectivamente para ambas as grandezas analisadas:

$$D_R = \frac{V_t - V_n}{V_t} \times 100\% \quad (4.8)$$

Então

$$D_R = \frac{7,1429 - 7}{7,1429} \times 100\% = \frac{0,1429}{7,1429} = 0,020 \times 100\% = 2\%$$

$$D_R = \frac{3,57 - 3,50}{3,57} \times 100\% = \frac{0,07}{3,57} = 0,019 \times 100\% = 1,9\%$$

Parâmetros	Resultado numérico	Resultado analítico	Desvio relativo
Amplitude máxima (A_{max})	7 m	7,1429 m	2,0%
Fator de qualidade Q	3,50	3,57	1,9%

Tabela 4 – Tabela com os resultados numéricos para os efeitos da ressonância pelo método de Euler $\beta = 0,14$.
Fonte: Própria

O gráfico abaixo ilustra os três casos de amortecimento em relação à excitação ou estado vibracional da força motriz.

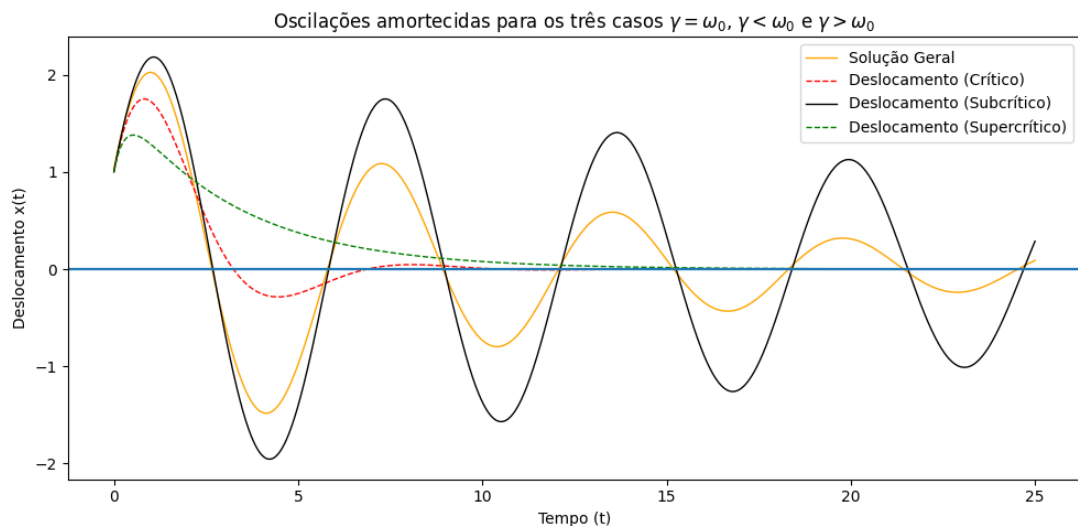


Figura 15 – Oscilações amortecidas para os três casos $\gamma = \omega_0$, $\gamma < \omega_0$ e $\gamma > \omega_0$. Fonte: Própria

Ao analisar os resultados numéricos impressos tendo em vista os 3 casos de amortecimento, pode-se observar como o percentual de energia acumulado varia ao longo do tempo para cada caso, isto é um fato. Vemos que o caso supercrítico em comparação com os outros casos há uma rápida dissipação de energia, resultando em uma

diminuição mais acentuada nos percentuais de energia acumulada ao longo do tempo, ou seja, isto faz com que o sistema perca energia mais rapidamente em comparação com os outros casos e tem uma maior retenção de energia relativa. No caso crítico, o sistema está em transição entre o amortecimento subcrítico ou subamortecido e supercrítico ou superamortecido, isto é, o sistema estando nesta condição de transição, há uma certa diminuição de energia fazendo com que a amplitude das oscilações seja minimizada, o que, por sua vez, resulta em uma menor quantidade de energia armazenada e dissipa mais rapidamente ao longo do tempo. Já no caso subcrítico ou subamortecido a diminuição nos percentuais de energia acontece gradualmente, diferentemente dos outros dois casos anteriores e ocorre devido à dissipação gradual de energia devido ao amortecimento fraco quando $\rho = 0.1 \frac{N \cdot s}{kg \cdot m}$. No entanto, a taxa de dissipação é menor do que no caso supercrítico, permitindo que o sistema mantenha oscilações significativas por um período mais longo. Conforme gráficos e dados a seguir:

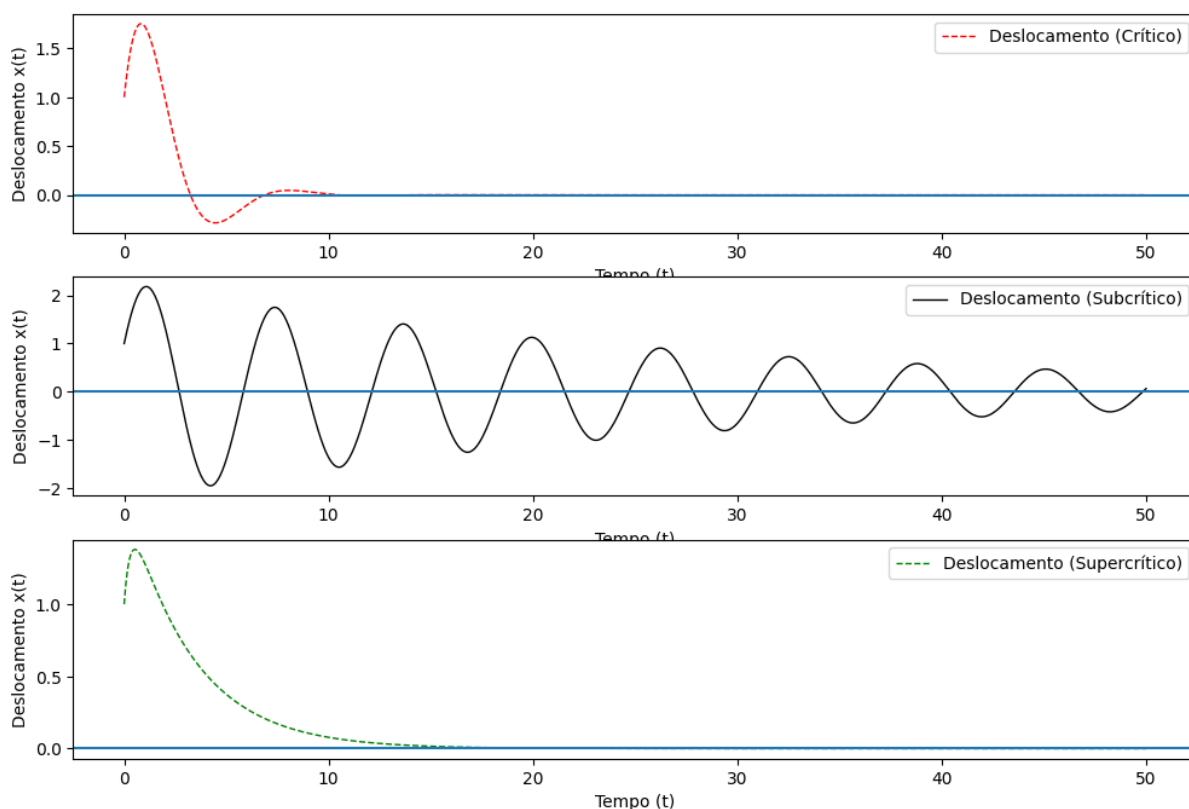


Figura 16 – Visualização dos casos de amortecimento para o oscilador amortecido e forçado $\gamma = \omega_0$, $\gamma < \omega_0$ e $\gamma > \omega_0$. Fonte: Própria

A partir da figura acima, é importante observar que, em geral, ao longo do tempo, a energia total em todos os casos deve diminuir devido ao efeito do amortecimento e

em especial o caso subcrítico ou subamortecido que é um caso interessante para o caso de ressonância. Para isto, é importante notar a variação percentual de energia entre os casos que foi utilizada para analisar como a energia total do sistema está sendo dissipada ao longo do tempo devido ao amortecimento. Com base nos resultados numéricos, segue abaixo os valores relativos a taxa de energia para cada oscilação em seu respectivo caso ao longo do tempo nos 10 primeiros segundos, assim temos:

Tempo (s)	E (%) Subcrítico	E(%) Crítico	E(%) Supercrítico
0.00	100	100	100
0.50	96.15	63.15	38.09
1.00	95.32	61.21	34.95
5.00	75.07	1.52	3.10
10.00	49.56	0.01	0.13

Tabela 5 – Tabela dos resultados numéricos da análise da energia acumulada para os 3 casos de amortecimentos $\rho = 0, 10 \frac{N}{kg \cdot m}$, $\rho = 1.0 \frac{N}{kg \cdot m}$ e $\rho = 3.5 \frac{N}{kg \cdot m}$ respectivamente. Fonte: Própria

Com estes resultados observa-se que para cada caso, o que possui uma menor perda de energia após 10 segundos é aquele que o grau de amortecimento é muito menor, assim neste caso, o oscilador quando excitado por uma força externa possui a capacidade de armazenar energia e dissipar uma menor quantidade de energia com o objetivo foi obter uma resposta significativa em situações de ressonância logo o regime que apresenta estas características é o regime subamortecido.

4.0.4 Avaliação da influência do fator de mérito no modelo do oscilador amortecido e forçado

O fator de qualidade tem como principal propósito mensurar a eficiência de um sistema ao receber uma quantidade específica de energia. Sua influência no oscilador se manifesta de maneira significativa, especialmente no que diz respeito à amplitude máxima alcançada e à quantidade de energia armazenada. Para compreender essa influência de maneira abrangente, foram realizadas comparações tanto analíticas quanto numéricas, visando avaliar a influência do fator de qualidade no desempenho do sistema no sentido de verificar o poder de resolução numérica do método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Ao realizar uma análise comparativa das diferentes frequências externas atuando sobre o oscilador onde, $\omega = \omega_0$ e o fator de amortecimento é $\beta = 0, 1$ a resposta da amplitude é máxima. Consideramos o amortecimento fraco para uma análise comparativa entre os métodos analítico e numérico. A atenuação inicial do

gráfico azul na mesma figura ocorre devido ao efeito do amortecimento fraco, resultando em um fator de qualidade mais elevado. Para $\beta = 0.10$ a $A_{max} = 4,98m$ e o fator de qualidade (Q) = 5,0.

Em relação ao gráfico (17) abaixo, representa a amplitude em razão da impulsão da frequência, para isso a eficiência do sistema diz respeito a capacidade do sistema armazenar energia. Para se calcular este fator faz-se pela equação (2.80) como $\beta = 0,1 \frac{N}{kg} \frac{s}{m} \ll \omega_0 = 1 \frac{rad}{s}$ a representação gráfica e numérica satisfaz as condições de amortecimento fraco, neste caso o sistema acumula uma quantidade suficiente de energia e dissipa uma menor quantidade de energia. Cada curva no gráfico representa um fator de amortecimento específico, enquanto a variação da qualidade do sistema é expressa pelo fator de qualidade associado a cada curva. Observa-se que à medida que o fator de qualidade aumenta, a eficiência do sistema melhora quando o pico da ressonância aumenta e está representado por um ponto de cor vermelha em que a amplitude é máxima, e isso é mais evidente em situações de amortecimento fraco. Essa observação reforça os conceitos discutidos anteriormente na fundamentação teórica sobre ressonância e fator de qualidade. Sendo um ótimo indicador, o fator de qualidade tem por característica a análise do comportamento das oscilações quando estas são excitadas.

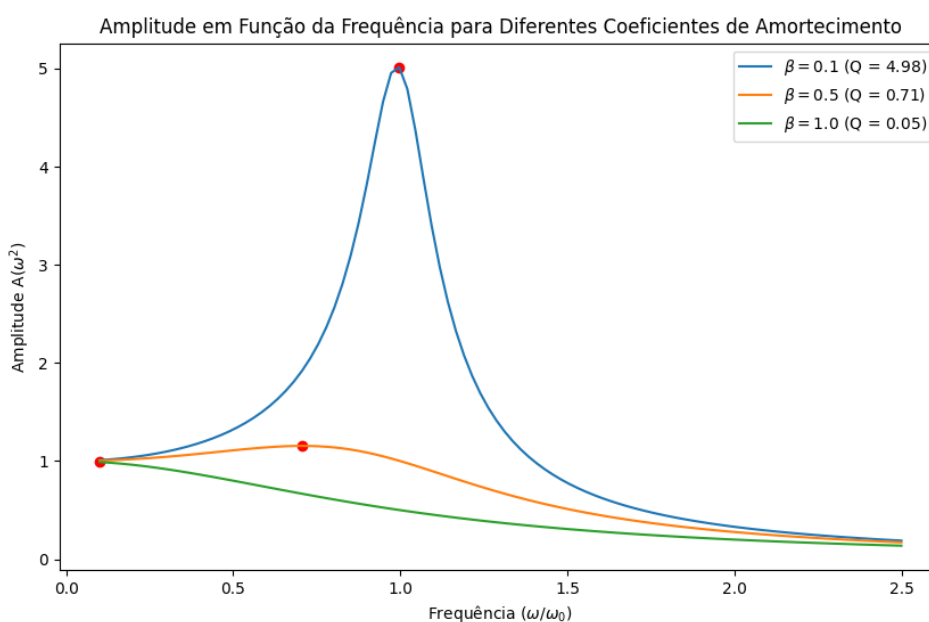


Figura 17 – Amplitude máxima causada pelo efeito da ressonância em um oscilador acionado para ilustrar a aproximação da frequência externa ω e a frequência natural ω_0 . Fonte: Própria

A partir dos dados numéricos, realizamos uma comparação dos fatores de

qualidade em diferentes situações de fator de amortecimento, o que resultou em diferentes configurações para cada curva no gráfico. Essa análise proporciona uma compreensão mais aprofundada, evidenciando que um fator de qualidade maior está associado a um fator de amortecimento menor, indicando uma eficiência aprimorada do sistema. Esses resultados destacam que, para induzir o fenômeno da ressonância, são necessários ajustes específicos nos parâmetros numéricos e físicos.

No contexto numérico, tais ajustes referem-se a modificações nos principais parâmetros desse fenômeno, considerando as interações entre a força motriz e o próprio oscilador, responsável pela transferência de energia, e o oscilador que a recebe. Nesse cenário, tanto o fator de qualidade quanto a amplitude estarão maximizados, sendo diretamente influenciados pelo fator de amortecimento fraco.

Os resultados foram obtidos utilizando a equação da amplitude máxima em função da frequência ao quadrado, e a simulação da resposta do oscilador foi realizada por meio dos métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem. A seguir, apresentam-se os resultados numéricos conforme representados no gráfico a seguir: (17).

Fator β	Amplitude A_{max} quando $\omega = \omega_0$	Frequência (ext)	Fator Q	Freq. Natural
0,1	5,00 m	1,00 rad/s	5,00	1,00 rad/s

Tabela 6 – Tabela com o comparativo da amplitude máxima com os resultados numéricos (RK4) quando $\omega = \omega_0$ para os efeitos da ressonância. Fonte: Própria

Conforme discutido anteriormente, analisaremos agora, de maneira analítica, o caso em que o amortecimento é fraco, pois é o mais interessante quando se trata do regime subamortecido, então:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{0,2} = 5,0 \Rightarrow \boxed{Q = 5,0} \quad (4.9)$$

Em relação à amplitude máxima temos:

$$A_{max} = \frac{f_0}{m\omega_0 2\beta} = \frac{1}{1kg \cdot 1rad/s \cdot 0,20} = \frac{1}{0,20} = 5m \Rightarrow \boxed{A_{max} = 5,0 m} \quad (4.10)$$

Comparando o resultado analítico e o resultado numérico da amplitude máxima e o fator de qualidade, mais uma vez valida a utilidade do método numérico para

este sistema em que o software simula uma vibração externa forçada. Dessa forma calculando o desvio relativo entre os dois resultados, temos:

$$D_R = \frac{5,0 - 4,98}{5,0} \times 100\% = \frac{0,02}{5,0} = 0,004 \times 100\% = 0,4\%$$

Em relação ao desvio ao fator de qualidade temos:

$$D_R = \frac{5,0 - 5,0}{5,0} \times 100\% = 0\%$$

Parâmetros	Resultado numérico	Resultado analítico	Desvio relativo
Amplitude máxima (A_{max})	4,98 m	5,0 m	0,4%
Fator de qualidade Q	5,0	5,0	0%

Tabela 7 – Tabela com os resultados numéricos para os efeitos da ressonância pelo método de (RK4) $\beta = 0, 10$.
Fonte: Própria

Com base nos dados apresentados, verifica-se que, ao utilizar o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, o erro relativo em relação à amplitude máxima é praticamente insignificante, aproximando-se de zero. Esse resultado destaca a precisão do método numérico RK4 nos cálculos, conferindo uma acurácia adequada para sistemas físicos, como o oscilador amortecido e forçado. É importante notar que, nos outros dois casos mencionados anteriormente, que não serão utilizados para efeitos comparativos neste trabalho, não se observou a ocorrência do fenômeno da ressonância.

Fator β	Amplitude A_{max} quando $\omega < \omega_0$	Frequência (ext)	Fator Q	Freq. Natural
0,5	2,54 m	0,80 rad/s	5,00	1,00 rad/s

Tabela 8 – Tabela com o comparativo da amplitude máxima com os resultados numéricos (RK4) para os efeitos da ressonância. Fonte: Própria

Fator β	Amplitude A_{max} quando $\omega > \omega_0$	Frequência (ext)	Fator Q	Freq. Natural
1,0	2,00 m	1,20 rad/s	5,00	1,0 rad/s

Tabela 9 – Tabela com o comparativo da amplitude máxima com os resultados numéricos (RK4) para os efeitos da ressonância. Fonte: Própria

A partir dos dados mensurados, observamos que para diferentes interações entre as frequências externa e natural, as amplitudes diminuem à medida que a frequência externa aumenta, comprovando que quando $\omega = \omega_0$ e o fator de amortecimento fraco

no regime de subamortecimento, ocorrerá o fenômeno da ressonância em um dado sistema.

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem é empregado para resolver a equação diferencial do sistema, garantindo resultados precisos. Foi utilizado um número de pontos em um determinado subintervalo, assim o código em questão realiza uma análise do comportamento de um sistema massa-mola amortecido em resposta a uma força externa senoidal. Os resultados são apresentados de forma visual, conforme o gráfico (17) que relaciona a amplitude com a frequência, considerando diferentes valores de coeficiente de amortecimento (β). Este método implementado na função RK4, recebe as condições iniciais, o vetor de tempo, as constantes do sistema (frequência natural ω_0 e coeficiente de amortecimento β), e o passo de integração h , que quanto maior o passo mais suavizados serão os gráficos. Ao aplicar o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, o código calcula a evolução temporal do sistema ao longo do vetor de tempo fornecido. Com isso, o resultado numérico é uma solução aproximada da equação diferencial, permitindo analisar o comportamento do sistema para diferentes condições iniciais e parâmetros.

Através das curvas geradas, fica notável que o aumento do coeficiente de amortecimento de (0.1, 0.5 e 3.50) resulta em curvas mais largas e em uma diminuição acentuada na amplitude máxima, tendo como referência o ponto vermelho. De fato, isto reflete a influência do amortecimento na resposta do sistema, tornando-o menos sensível à frequência externa conforme o amortecimento aumenta. Cada curva no gráfico é destacada por um ponto vermelho, indicando a frequência em que a amplitude é máxima e representando a ressonância do sistema para a frequência externa. Esses pontos são calculados numericamente conforme a equação diferencial dada, proporcionando uma representação visual da resposta ressonante do sistema.

Assim a análise dos resultados numéricos é realizada para três casos específicos de frequência externa: frequência de ressonância natural ($\omega = \omega_0$), frequência abaixo da ressonância ($\omega < \omega_0$), e frequência acima da ressonância ($\omega > \omega_0$). O método de Runge-Kutta permite avaliar a amplitude, a frequência externa, o fator de qualidade (Q) e o tempo de pico para cada caso, fornecendo dados sobre o comportamento dinâmico do sistema.

Uma característica importante do método de Runge-Kutta, é a capacidade de se adaptar a diferentes condições iniciais e parâmetros do sistema. Isso é crucial para a compreensão de como o sistema responde a diferentes frequências externas e como o coeficiente de amortecimento influencia essa resposta. No código em questão é empregado para explorar o comportamento dinâmico do sistema sob diferentes forças externas assim o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é uma ferramenta valiosa para a análise dinâmica de sistemas físicos, como evidenciado no código. Sua precisão, estabilidade e adaptabilidade contribuem para uma compreensão aprofundada do comportamento do sistema massa-mola amortecido em resposta a forças externas variáveis ao longo do tempo.

Expressando a aplicação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) na equação diferencial do sistema massa-mola amortecido temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -2\beta v - \omega_0^2 y\end{aligned}$$

Após é usado o método de RK4 que o qual aproxima a solução das equações da seguinte forma:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot v \\ \ell_1 &= h \cdot (-2\beta v - \omega_0^2 y) \\ k_2 &= h \cdot \left(v + \frac{k_1}{2} \right) \\ \ell_2 &= h \cdot \left(-2\beta \left(v + \frac{k_1}{2} \right) - \omega_0^2 \left(y + \frac{\ell_1}{2} \right) \right) \\ k_3 &= h \cdot \left(v + \frac{k_2}{2} \right) \\ \ell_3 &= h \cdot \left(-2\beta \left(v + \frac{k_2}{2} \right) - \omega_0^2 \left(y + \frac{\ell_2}{2} \right) \right) \\ k_4 &= h \cdot (v + k_3) \\ \ell_4 &= h \cdot (-2\beta (v + k_3) - \omega_0^2 (y + k_3))\end{aligned}$$

As atualizações das variáveis são então dadas por:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ v_{n+1} &= v + \frac{1}{6}(\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3 + \ell_4)\end{aligned}$$

Onde ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 representam as inclinações estimadas no processo de integração numérica e k_1, k_2, k_3 e k_4 são usadas para calcular as inclinações da posição y em relação ao tempo t .

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma abordagem elucidativa das oscilações harmônicas, visando compreender o fenômeno da ressonância por meio da análise do modelo mecânico ressonante fundamentado no oscilador amortecido e forçado. Os dados numéricos, extraídos dos gráficos apresentados nos resultados e discussões, foram analisados através de tabelas. O modelo exibiu resultados próximos aos analíticos, sendo a precisão maximizada pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Caracterizamos a ressonância por meio das grandezas físicas, tais como amplitude máxima e fator de qualidade (Q), destacando a influência do fator de qualidade nas oscilações. Concluímos que um maior fator de qualidade está associado a uma eficiência aprimorada do sistema mecânico. O estudo proporcionou uma análise abrangente do fenômeno da ressonância, evidenciando a relevância do fator de qualidade em sistemas com vibrações naturais. A transferência de energia, induzida por uma força motriz, revelou que quanto mais energia um oscilador acumula, maior será o pico da ressonância e seu fator de qualidade. Essa constatação ressalta que os efeitos da ressonância estão intrinsecamente ligados ao contexto físico, explorado em quatro cenários distintos durante a pesquisa. Esses cenários incluem a ressonância observada na ponte Tacoma Narrows, onde vibrações aerolásticas causaram a destruição da ponte, e investigações sobre ressonância em colisões de moléculas ultrafrias.

Ao utilizar o método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem, medimos e comparamos as oscilações induzidas por frequência externa. O método de RK4 demonstrou menor margem de erro devido ao seu maior número de interações e passos considerados. A análise do modelo do oscilador mecânico proporcionou uma compreensão aprofundada do fenômeno da ressonância, explorando questões nas ciências naturais por meio de modelos explicativos e representativos. O estudo abrangeu contextos, desde incidentes notáveis, como a ponte Tacoma Narrows, até aplicações modernas, como o uso de aprendizado de máquina na otimização de antenas 5G.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, I.; VEIT, E.; MOREIRA, M. Atividades de modelagem computacional no auxílio a interpretação de gráficos da cinemática. **Revista Brasileira de Física**, v. 2, n. 2, p. 179 – 184, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011. Disponível em: <https://www.academia.edu/26932535/An%C3%A1lise_de_Conteudo_a_vis%C3%A3o_de_Laurence_Bardin>. Acesso em: 02 Abril. 2023.

BILLAH, K. Y.; SCANLAN, R. H. **Resonance, Tacoma Narrows Bridge failure, and undergraduate physics textbooks**. **Am. J. Phys**, v. 59, p. 118–124, 02 1991. Acesso em: 02 dez. 23.

BOYCE, W.; RICHARD, D. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 5. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2014.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: MEC-SEMTEC, 2002. Disponível em: <<http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 18 jun. 23.

BRASIL. **PNLD 2018**: Ministério da educação. física – guia de livros didáticos – ensino médio-ministério da educação – secretaria de educação básica – seb – fundo nacional de desenvolvimento da educação. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017. Disponível em: <<https://www.fnede.gov.br/pnld-2018/#>>. Acesso em: 24 jun. 23.

CAMPANONE, L. A.; BAVA, J. A.; MASCHERONI, R. H. **Modeling and process simulation of controlled microwave heating of foods by using of the resonance phenomenon**. **Applied Thermal Engineering**, v. 73, n. 1, p. 914–923, 2014. ISSN 1359-4311. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431114007443>>. Acesso em: 29 nov. 23.

CHAPRA, R. P. C. S. C. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. ed. Porto Alegre: Ed. Bookmann, 2011.

DOERING, C. I.; LOPES, A. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 5. ed. Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2011.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de física de Feynman**. v.1. Porto Alegre: Ed. Bookman, 2008.

FIGUEIREDO, D. G. d.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 2018.

GEEDIPALLI, S.; RAKESH, V.; DATTA, A. **Modeling the heating uniformity contributed by a rotating turntable in microwave ovens**. **Journal of Food Engineering - J FOOD ENG**, v. 82, p. 359–368, 10 2007. Acesso em: 29 nov. 23.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GILAT, V. S. A. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**: uma introdução com aplicações usando o matlab. 1. ed. Porto Alegre: Ed. Bookman, 2008.

HAQUE, M. A. et al. Machine learning-based technique for gain and resonance prediction of mid band 5g yagi antenna. **Scientific Reports**, v. 13, n. 1, p. 12590, Aug 2023. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41598-023-39730-1>>. Acesso em: 04 dez. 23.

JAPIASSU, H. **Interdisciplinaridade e a patologia do saber**. Rio de Janeiro: IAGO, 1976.

NETO, A. **Funções de uma variável complexa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**: Eletromagnetismo. 4. ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1997.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**: Fluidos, oscilações e ondas e calor. 4. ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 2014.

PARK, J. J. et al. A feshbach resonance in collisions between triplet ground-state molecules. **Nature**, v. 614, n. 7946, p. 54–58, Feb 2023. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41586-022-05635-8>>. Acesso em: 04 dez. 23.

PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**. 3. ed. USA: Cambridge University Press, 2007.

STOMP, M. et al. **Colorful niches of phototrophic microorganisms shaped by vibrations of the water molecule**. *isme j* 1: 271-282. **The ISME journal**, v. 1, p. 271–82, 09 2007. Acesso em: 29 nov. 23.

THOHNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 4. ed. São Paulo: Ed. Cengage Learning, 2011.

YDRI, B. **Computational Physics: An Introduction to Monte Carlo Simulations of Matrix Field Theory**. 2016.

Apêndices

APÊNDICE A – SCRIPTS DO PROGRAMA EM PYTHON

EXIBIÇÃO DOS CÓDIGOS DAS OSCILAÇÕES AMORTECIDAS E FORÇADAS

Script para exibir graficamente e numericamente a amplitude máxima e o fator de qualidade: Figura 14

```

1 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

3
#Funcao para calcular a amplitude maxima e o fator de qualidade (Q)
5 def calcular_amplitude_q(omega, omega_0, beta):
    amplitude = 1 / np.sqrt((1 - (omega**2 / omega_0**2))**2 + (2 * beta *
        omega / omega_0)**2)
7     Q = omega_0 / (2 * beta)
    return amplitude, Q
9
#Equacao diferencial do sistema massa-mola amortecido
11 def equacao_diferencial(y, t, omega_0, beta):
    dydt = y[1]
13     dvdt = -2 * beta * y[1] - omega_0**2 * y[0]
    return dydt, dvdt
15 # Metodo de Euler para resolver a equacao diferencial
def euler(y0, t, omega_0, beta, h):
17     y_result = [y0]
    for i in range(1, len(t)):
19         dydt, dvdt = equacao_diferencial(y_result[-1], t[i - 1], omega_0,
            beta)
        y_next = [y_result[-1][0] + h * dydt, y_result[-1][1] + h * dvdt]
21         y_result.append(y_next)
    return np.array(y_result)
23
# Parametros
25 omega_0 = 1.0
beta_values = [0.1, 0.5, 1.0] # Coeficientes de amortecimento para cada
    curva
27
# Frequencias a serem consideradas
29 omega_cases = np.linspace(0.1 * omega_0, 2.5 * omega_0, 100) # Variacao de
    frequencia

```

```

31 # Crie o grafico para diferentes valores de coeficiente de amortecimento e
    frequencia
    plt.figure(figsize=(10, 6))
33 plt.title('Amplitude em Funcao da Frequencia para Diferentes fatores de
    Amortecimento')
    plt.xlabel('Frequencia ( $\omega/\omega_0$ )')
35 plt.ylabel('Amplitude  $A^2(\omega)$ ')

37 # Calcule e plote as amplitudes para cada caso
    for beta in beta_values:
39         amplitude_values = 1 / np.sqrt((1 - (omega_cases**2 / omega_0**2))**2 +
            (2 * beta * omega_cases / omega_0)**2)

41 # Encontre o ponto de amplitude maxima
        max_amplitude_index = np.argmax(amplitude_values)
43         max_amplitude_omega = omega_cases[max_amplitude_index]
        max_amplitude_value = amplitude_values[max_amplitude_index]
45

        # Calcule o fator de qualidade (Q)
47         Q_value = max_amplitude_omega / (2 * beta)

49 # Plotagem da curva
        plt.plot(omega_cases, amplitude_values, label=f'$\\beta = {beta:.1f}$ (
            Q = {Q_value:.2f})')
51

        # Marque o ponto de amplitude maxima
53         plt.scatter(max_amplitude_omega, max_amplitude_value, color='red',
            marker='o')

55 # Exiba dados numericos
        print(f'--- $\\beta = {beta:.1f}$ ---')
57         print(f'Frequencia Natural: {omega_0:.2f}')

59 # Caso  $\omega = \omega_0$ 
        omega_case = omega_0
61         y0 = [1.0, 0.0] # Condicoes iniciais [posicao, velocidade]
        t = np.linspace(0, 30, 1000) # Tempo
63         h = t[1] - t[0] # Passo de integracao
        solucao_euler = euler(y0, t, omega_0, beta, h)

```

```

65 amplitude_value = np.max(np.abs(solucao_euler[:, 0]))
   Q = omega_0 / (2 * beta)
67 print(f'Amplitude para  $\omega = \omega_0$ : {amplitude_value:.2f},
      Frequencia Externa: {omega_case:.2f}, Q: {Q:.2f}')
   print(f'Tempo: {t[np.argmax(np.abs(solucao_euler[:, 0]))]:.2f} (Período
      : {2 * np.pi / omega_case:.2f})')
69
   # Caso  $\omega < \omega_0$ 
71 omega_case = 0.8 * omega_0
   y0 = [1.0, 0.0] # Condições iniciais [posição, velocidade]
73 solucao_euler = euler(y0, t, omega_0, beta, h)
   amplitude_value = np.max(np.abs(solucao_euler[:, 0]))
75 Q = omega_0 / (2 * beta)
   print(f'Amplitude para  $\omega < \omega_0$ : {amplitude_value:.2f},
      Frequencia Externa: {omega_case:.2f}, Q: {Q:.2f}')
77 print(f'Tempo: {t[np.argmax(np.abs(solucao_euler[:, 0]))]:.2f} (Período
      : {2 * np.pi / omega_case:.2f})')
79
   # Caso  $\omega > \omega_0$ 
   omega_case = 1.2 * omega_0
81 y0 = [1.0, 0.0] # Condições iniciais [posição, velocidade]
   solucao_euler = euler(y0, t, omega_0, beta, h)
83 amplitude_value = np.max(np.abs(solucao_euler[:, 0]))
   Q = omega_0 / (2 * beta)
85 print(f'Amplitude para  $\omega > \omega_0$ : {amplitude_value:.2f},
      Frequencia Externa: {omega_case:.2f}, Q: {Q:.2f}')
   print(f'Tempo: {t[np.argmax(np.abs(solucao_euler[:, 0]))]:.2f} (Período
      : {2 * np.pi / omega_case:.2f})')
87
   print(f'Maximo em  $\omega = \omega_{max\_amplitude\_omega}$  com Amplitude:
      {max_amplitude_value:.2f}, Q: {Q_value:.2f}\n')
89
   # Adicione uma legenda no canto superior direito
91 plt.legend(loc='upper right')
   plt.show()

```

Script dos casos de amortecimento. Figura (15)

```

2 import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
4 from scipy.integrate
import odeint
6
# Funcao para calcular a solucao analitica com amplitude e fase variaveis
em funcao da frequencia
8 def solucao_analitica(t, omega, beta, a, b, F_0, phi0):
    A_omega = F_0 / (2*m*omega * np.sqrt((omega - omega_0)**2 + beta**2/4))
10 # Amplitude variavel em funcao da frequencia
    phi_omega = np.arctan(beta / (2 * omega - omega_0))
12
# Fase variavel em funcao da frequencia
14 return np.exp(-beta * t) * (a * np.cos(omega * t) + b * np.sin(omega *
    t)) + A_omega * np.cos(omega * t + phi_omega)
16
# Funcao para simular e plotar um caso
def simular_e_plotar(ax, t, x, label, cor, estilo):
18 ax.plot(t, x, label=label, color=cor, linestyle=estilo, lw=1)
20
# Reduzindo a espessura para 1
ax.set_xlabel("Tempo (t)")
22 ax.set_ylabel("Deslocamento x(t)")
ax.legend(loc='best')
24 ax.axhline()
26
# Criar uma figura maior para visualizacao
plt.figure(figsize=(10, 5))
28
# Parametros gerais
30 t = np.linspace(0, 25, 1000)
omega = 1.0
32 omega_0 = 0.999
F_0 = 1.0
34 m = 1
beta = 0.1
36 a, b = 1.0, 2.0

```

```

38 # Calculando a solucao analitica geral
    sol_analitica_geral = solucao_analitica(t, omega, beta, a, b, F_0, 0.0)
40
    # Plotar a solucao analitica geral
42 plt.plot(t, sol_analitica_geral, label="Solucao Geral", color='orange',
        linestyle='-', lw=1) # Reduzindo a espessura para 1

44 # Condicoes iniciais e parametros para o caso critico
    Fator_amortecimento_crit = 1
46 k_crit = 1

48 # Definindo a funcao para o caso critico
    def f_crit(z, t):
50         x_crit, v_crit = z
            f1_crit = v_crit
52         f2_crit = -k_crit * x_crit - Fator_amortecimento_crit * v_crit
            return np.array([f1_crit, f2_crit])
54
    z_crit = np.array([a, b])
56 sol_crit = odeint(f_crit, z_crit, t)
    x_crit, v_crit = sol_crit[:, 0], sol_crit[:, 1]
58
    # Subplot para o caso critico
60 ax = plt.subplot(1, 1, 1)
    simular_e_plotar(ax, t, x_crit, "Deslocamento (Critico)", 'red', '--')
62
    # Condicoes iniciais e parametros para o caso subcritico
64 Fator_amortecimento_sub = 0.07
    k_sub = 1
66
    # Definindo a funcao para o caso subcritico
68 def f_sub(z, t):
        x_sub, v_sub = z
70         f1_sub = v_sub
            f2_sub = -k_sub * x_sub - Fator_amortecimento_sub * v_sub
72         return np.array([f1_sub, f2_sub])

74 z_sub = np.array([a, b])

```

```

sol_sub = odeint(f_sub, z_sub, t)
76 x_sub, v_sub = sol_sub[:, 0], sol_sub[:, 1]

78 # Subplot para o caso subcritico
simular_e_plotar(ax, t, x_sub, "Deslocamento (Subcritico)", 'black', '-')
    # Linha solida
80
    # Condições iniciais e parâmetros para o caso supercritico
82 Fator_amortecimento_super = 3.5
    k_super = 1
84
    # Definindo a função para o caso supercritico
86 def f_super(z, t):
    x_super, v_super = z
88    f1_super = v_super
    f2_super = -k_super * x_super - Fator_amortecimento_super * v_super
90    return np.array([f1_super, f2_super])

92 z_super = np.array([a, b])
sol_super = odeint(f_super, z_super, t)
94 x_super, v_super = sol_super[:, 0], sol_super[:, 1]

96 # Subplot para o caso supercritico
simular_e_plotar(ax, t, x_super, "Deslocamento (Supercritico)", 'green', '
    --')
98
plt.title("Oscilações amortecidas para os três casos  $\gamma = \omega_0$ ,  $\gamma < \omega_0$  e  $\gamma > \omega_0$ ")
100 plt.tight_layout()
plt.savefig("Solucao_Geral_vs_Numerica.png")
102 plt.show()

```

Script da figura 16

```

import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
4
# Funcao para calcular a solucao analitica com amplitude e fase variaveis
  em funcao da frequencia
6 def solucao_analitica(t, omega, beta, a, b, F_0, phi0):
    A_omega = F_0 / (2 * m * omega) * np.sqrt((omega - omega_0) ** 2 + beta
      **2 / 4)
8    # Amplitude variavel em funcao da frequencia
    phi_omega = np.arctan(beta / (2 * omega - omega_0))
10    # Fase variavel em funcao da frequencia
    return np.exp(-beta * t) * (a * np.cos(omega * t) + b * np.sin(omega *
      t)) + A_omega * np.cos(omega * t + phi_omega)
12
# Funcao para calcular a energia total
14 def calcular_energia_total(x, v, k, m):
    energia_potencial = 0.5 * k * x**2
16    energia_cinetica = 0.5 * m * v**2
    return energia_potencial + energia_cinetica
18
# Criar uma figura maior para visualizacao
20 plt.figure(figsize=(12, 8))
22
# Parametros gerais
t = np.linspace(0, 50, 1000)
24 omega = 1.0
omega_0 = 0.999
26 F_0 = 1.0
m = 1
28 beta = 0.1
a, b = 1.0, 2.0
30
# Calculando a solucao analitica geral
32 sol_analitica_geral = solucao_analitica(t, omega, beta, a, b, F_0, 0.0)
34
# Plotar a solucao analitica geral
plt.plot(t, sol_analitica_geral, label="Solucao Geral", color='orange',

```

```

        linestyle='--', lw=1) # Reduzindo a espessura para 1
36
# Condições iniciais e parâmetros para o caso crítico
38 Fator_amortecimento_crit = 1
    k_crit = 1
40
# Definindo a função para o caso crítico
42 def f_crit(z, t):
    x_crit, v_crit = z
44    f1_crit = v_crit
    f2_crit = -k_crit * x_crit - Fator_amortecimento_crit * v_crit
46    return np.array([f1_crit, f2_crit])

48 z_crit = np.array([a, b])
    sol_crit = odeint(f_crit, z_crit, t)
50 x_crit, v_crit = sol_crit[:, 0], sol_crit[:, 1]

52 # Subplot para o caso crítico
    ax = plt.subplot(3, 1, 1)
54 ax.plot(t, x_crit, label="Deslocamento (Crítico)", color='red', linestyle='
        --', lw=1)
    ax.set_xlabel("Tempo (t)")
56 ax.set_ylabel("Deslocamento x(t)")
    ax.legend(loc='best')
58 ax.axhline()

60 # Condições iniciais e parâmetros para o caso subcrítico
    Fator_amortecimento_sub = 0.07
62 k_sub = 1

64 # Definindo a função para o caso subcrítico
    def f_sub(z, t):
66        x_sub, v_sub = z
        f1_sub = v_sub
68        f2_sub = -k_sub * x_sub - Fator_amortecimento_sub * v_sub
        return np.array([f1_sub, f2_sub])
70
    z_sub = np.array([a, b])
72 sol_sub = odeint(f_sub, z_sub, t)

```

```

x_sub, v_sub = sol_sub[:, 0], sol_sub[:, 1]
74
# Subplot para o caso subcritico
76 ax = plt.subplot(3, 1, 2)
ax.plot(t, x_sub, label="Deslocamento (Subcritico)", color='black',
        linestyle='-', lw=1)
78 ax.set_xlabel("Tempo (t)")
ax.set_ylabel("Deslocamento x(t)")
80 ax.legend(loc='best')
ax.axhline()
82
# Condições iniciais e parâmetros para o caso supercritico
84 Fator_amortecimento_super = 3.5
k_super = 1
86
# Definindo a função para o caso supercritico
88 def f_super(z, t):
    x_super, v_super = z
90    f1_super = v_super
    f2_super = -k_super * x_super - Fator_amortecimento_super * v_super
92    return np.array([f1_super, f2_super])

94 z_super = np.array([a, b])
sol_super = odeint(f_super, z_super, t)
96 x_super, v_super = sol_super[:, 0], sol_super[:, 1]

98 # Subplot para o caso supercritico
ax = plt.subplot(3, 1, 3)
100 ax.plot(t, x_super, label="Deslocamento (Supercritico)", color='green',
        linestyle='--', lw=1)
ax.set_xlabel("Tempo (t)")
102 ax.set_ylabel("Deslocamento x(t)")
ax.legend(loc='best')
104 ax.axhline()

106 # Calculo da energia para os tres casos
energia_crit = calcular_energia_total(x_crit, v_crit, k_crit, m)
108 energia_sub = calcular_energia_total(x_sub, v_sub, k_sub, m)
energia_super = calcular_energia_total(x_super, v_super, k_super, m)

```

```

110 # Calculo do percentual de energia acumulada em relacao a energia total
    percentual_energia_crit = (energia_crit / energia_crit.max()) * 100
112 percentual_energia_sub = (energia_sub / energia_sub.max()) * 100
    percentual_energia_super = (energia_super / energia_super.max()) * 100
114
    # Exibir os resultados numericos
116 print("Tempo (t)\tPercentual de Energia (Critico)\tPercentual de Energia (
    Subcritico)\tPercentual de Energia (Supercritico)")
    for i in range(len(t)):
118     print(f"{t[i]:.2f}\t\t{percentual_energia_crit[i]:.2f}\t\t\t\t{
        percentual_energia_sub[i]:.2f}\t\t\t\t{percentual_energia_super[i
        ]:.2f}")

```

Script da figura 17

```

import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt

4 # Funcao para calcular a amplitude maxima e o fator de qualidade (Q)
def calcular_amplitude_q(omega, omega_0, beta):
6     amplitude = F_0 / (2*m*omega_0*np.sqrt((omega - omega_0)**2 + 2*beta
        **2/4))
    Q = omega_0 / (2 * beta)
8     return amplitude, Q

10 # Equacao diferencial do sistema massa-mola amortecido
def equacao_diferencial(y, t, omega_0, beta):
12     dydt = y[1]
    dvdt = -2 * beta * y[1] - omega_0**2 * y[0]
14     return dydt, dvdt

16 # Metodo de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver a equacao diferencial
def rk4(y0, t, omega_0, beta, h):
18     y_result = [y0]
    for i in range(1, len(t)):
20         k1_dy, k1_dv = equacao_diferencial(y_result[-1], t[i - 1], omega_0,
            beta)
        k2_dy, k2_dv = equacao_diferencial([y_result[-1][0] + h/2 * k1_dy,

```

```

22         y_result[-1][1] + h/2 * k1_dv], t[i - 1] + h/2, omega_0, beta)
    k3_dy, k3_dv = equacao_diferencial([y_result[-1][0] + h/2 * k2_dy,
        y_result[-1][1] + h/2 * k2_dv], t[i - 1] + h/2, omega_0, beta)
    k4_dy, k4_dv = equacao_diferencial([y_result[-1][0] + h * k3_dy,
        y_result[-1][1] + h * k3_dv], t[i - 1] + h, omega_0, beta)

24
26     dydt = (k1_dy + 2 * k2_dy + 2 * k3_dy + k4_dy) / 6
    dvdt = (k1_dv + 2 * k2_dv + 2 * k3_dv + k4_dv) / 6

28     y_next = [y_result[-1][0] + h * dydt, y_result[-1][1] + h * dvdt]
    y_result.append(y_next)
30     return np.array(y_result)

32 # Parametros
    omega_0 = 1.0
34 F_0 = 1.0
    m = 1.0
36 beta_values = [0.1, 0.5, 1.0] # Coeficientes de amortecimento para cada
    curva

38 # Frequencias a serem consideradas
    omega_cases = np.linspace(0.1 * omega_0, 2.5 * omega_0, 100) # Variacao de
    frequencia

40
    # Crie o grafico para diferentes valores de coeficiente de amortecimento e
    frequencia
42 plt.figure(figsize=(10, 6))
    plt.title('Amplitude em Funcao da Frequencia para Diferentes fatores de
    Amortecimento')
44 plt.xlabel('Frequencia ( $\omega/\omega_0$ )')
    plt.ylabel('Amplitude  $A^2(\omega)$ ')
46
    # Calcule e plote as amplitudes para cada caso
48 for beta in beta_values:
        amplitude_values = 1 / np.sqrt((1 - (omega_cases**2 / omega_0**2))**2 +
            (2 * beta * omega_cases / omega_0)**2)

50
    # Encontre o ponto de amplitude maxima
52     max_amplitude_index = np.argmax(amplitude_values)

```

```

max_amplitude_omega = omega_cases[max_amplitude_index]
54 max_amplitude_value = amplitude_values[max_amplitude_index]

56 # Calcule o fator de qualidade (Q)
Q_value = max_amplitude_omega / (2 * beta)

58 # Plotagem da curva
60 plt.plot(omega_cases, amplitude_values, label=f'$\\beta = {beta:.1f}$ (
    Q = {Q_value:.2f})')

62 # Marque o ponto de amplitude maxima
plt.scatter(max_amplitude_omega, max_amplitude_value, color='red',
    marker='o')

64 # Exiba dados numericos
66 print(f'--- $\\beta = {beta:.1f}$ ---')
print(f'Frequencia Natural: {omega_0:.2f}')

68 # Caso \\omega = \\omega_0
70 omega_case = omega_0
y0 = [1.0, 0.0] # Condições iniciais [posicao, velocidade]
72 t = np.linspace(0, 30, 1000) # Tempo
h = t[1] - t[0] # Passo de integracao
74 solucao_rk4 = rk4(y0, t, omega_0, beta, h)
amplitude_value = np.max(np.abs(solucao_rk4[:, 0]))
76 Q = omega_0 / (2 * beta)
print(f'Amplitude para $\\omega = \\omega_0$: {amplitude_value:.2f},
    Frequencia Externa: {omega_case:.2f}, Q: {Q:.2f}')
78 print(f'Tempo: {t[np.argmax(np.abs(solucao_rk4[:, 0]))]:.2f} (Período:
    {2 * np.pi / omega_case:.2f})')

80 # Caso \\omega < \\omega_0
omega_case = 0.8 * omega_0
82 y0 = [1.0, 0.0] # Condições iniciais [posicao, velocidade]
solucao_rk4 = rk4(y0, t, omega_0, beta, h)
84 amplitude_value = np.max(np.abs(solucao_rk4[:, 0]))
Q = omega_0 / (2 * beta)
86 print(f'Amplitude para $\\omega < \\omega_0$: {amplitude_value:.2f},
    Frequencia Externa: {omega_case:.2f}, Q: {Q:.2f}')

```

```

88     print(f'Tempo: {t[np.argmax(np.abs(solucao_rk4[:, 0]))]:.2f} (Período:
      {2 * np.pi / omega_case:.2f})')

90     # Caso \omega > \omega_0
omega_case = 1.2 * omega_0
y0 = [1.0, 0.0] # Condições iniciais [posição, velocidade]
92     solucao_rk4 = rk4(y0, t, omega_0, beta, h)
amplitude_value = np.max(np.abs(solucao_rk4[:, 0]))
94     Q = omega_0 / (2 * beta)
    print(f'Amplitude para \omega > \omega_0: {amplitude_value:.2f},
      Frequência Externa: {omega_case:.2f}, Q: {Q:.2f}')
96     print(f'Tempo: {t[np.argmax(np.abs(solucao_rk4[:, 0]))]:.2f} (Período:
      {2 * np.pi / omega_case:.2f})')

98     print(f'Maximo em \omega = {max_amplitude_omega:.2f} com Amplitude:
      {max_amplitude_value:.2f}, Q: {Q_value:.2f}\n')

100 # Adicione uma legenda no canto superior direito
    plt.legend(loc='upper right')
102 plt.show()

```