



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO DE FÍSICA**

JÉSSICA OLIVEIRA ANTUNES

**INTRODUÇÃO AO FORMALISMO COVARIANTE APLICADO AO
ELETROMAGNETISMO**

**SÃO RAIMUNDO NONATO
2023**

JÉSSICA OLIVEIRA ANTUNES

INTRODUÇÃO AO FORMALISMO COVARIANTE APLICADO AO
ELETROMAGNETISMO

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura em Física do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo
Nonato .

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sousa Ribero.

SÃO RAIMUNDO NONATO

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Antunes, Jéssica Oliveira

A627i Introdução ao formalismo covariante aplicado ao eletromagnetismo /
Jéssica Oliveira Antunes. - 2023.
31 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo
Nonato, 2023.

Orientador : Prof Dr. Antonio Sousa Ribeiro.

1. Equações de Maxwell. 2. Relatividade Especial. 3. Formalismo
Covariante. I. Título.

CDD - 530

Elaborado por Josué de Moura Costa CRB 3/1130

JÉSSICA OLIVEIRA ANTUNES

INTRODUÇÃO AO FORMALISMO COVARIANTE APLICADO AO
ELETROMAGNETISMO

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura em Física do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo
Nonato .

Aprovada em: 08/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Sousa Ribeiro (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior (Coorientador)
Universidade Federal do Vale Do São Francisco (UNIVASF)

Profa. Aline Simões dos Santos
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. José Márcio Machado de Brito
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Dedico este trabalho, aos meus pais, Gilmar e Maria Solidade, ao meu esposo, Paulo,
e aos meus irmãos, Geiva, Maelce e Antero.

AGRADECIMENTOS

Quero expressar minha imensa gratidão a Deus, aos meus pais Gilmar e Maria Solidade, por todo o apoio que sempre me deram. Ao meu esposo, Paulo, pelo incentivo e paciência que sempre teve comigo. Aos meus irmãos, Geiva, Maelce e Antero, agradeço pela cumplicidade e carinho. À minha amiga Maiany, agradeço pelo apoio incondicional. Agradeço ao professor orientador, Antônio, pela sua orientação e incentivo, ao professor coorientador, Artur pela sua contribuição no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço ao IFPI-campus São Raimundo Nonato por fornecer o ambiente acadêmico propício para a minha formação, aos professores e servidores que contribuíram direta ou indiretamente. Agradeço imensamente a cada um de vocês.

RESUMO

As equações de Maxwell descrevem as leis fundamentais do eletromagnetismo e são frequentemente apresentadas em sua forma vetorial. No entanto, ao serem analisadas no contexto da Relatividade Especial, nota-se, uma aparente inconsistência matemática nas transformações dos campos elétrico e magnético. Como as leis da Física têm que ser as mesmas para todos os referenciais inerciais - princípio da Relatividade Especial, faz-se necessário introduzir o uso de tensores que naturalmente as generalizam para uma forma covariante. Nessa forma, utiliza-se o tensor campo eletromagnético, que combina os campos elétrico e magnético, este tensor é essencial, pois garante a consistência matemática das leis do eletromagnetismo no contexto relativístico. Assim sendo, o objetivo deste trabalho é apresentar as equações do eletromagnetismo em sua formulação covariante, na qual consiste em expressar as equações usando quadri vetores e quadri tensores. As equações de Maxwell, neste formalismo, representam uma generalização para uma formulação no espaço-tempo de Minkowski.

Palavras-chaves: equações de Maxwell; relatividade especial; formalismo covariante.

ABSTRACT

Maxwell's equations describe the fundamental laws of electromagnetism and are often presented in their vector form. However, when analyzed in the context of Special Relativity, a mathematical inconsistency apparent in the transformations of the electric and magnetic fields is noted. As the laws of Physics must be the same for all inertial frames of reference - principle of Special Relativity, it is necessary to introduce the use of tensors that naturally generalize them to a covariant form. In this way, the electromagnetic field tensor is used, which combines the electric and magnetic fields. This tensor is essential, as it guarantees the mathematical consistency of the laws of electromagnetism in the relativistic context. Therefore, the objective of this work is to present the equations of electromagnetism in its covariant formulation, which consists of expressing the equations using quadriectors and quadritensors. Maxwell's equations, in this formalism, represent a generalization to a Minkowski spacetime formulation.

Keywords: Maxwell's equations; special relativity; covariant formalism.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O vetor tangente à curva $x^a = x^a(u)$ em P	17
Figura 2 – Vetor decomposto em eixos ortogonais	26
Figura 3 – Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fazendo um ângulo θ entre si	26

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RE	Relatividade Especial
----	-----------------------

LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{E}$	Campo elétrico
$\vec{B}$	Campo magnético
$F^{\mu\nu}$	Tensor campo eletromagnético
j^μ	Quadrivetor corrente
A^μ	Quadrivetor potencial
$\square$	d'Alembertiano
Λ	Lambda
ζ	Letra grega minúscula zeta
$\in$	Pertence

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	TENSORES	14
2.1	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS E COORDENADAS	14
2.2	CURVAS E SUPERFÍCIES	14
2.3	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	15
2.4	TENSORES CONTRAVARIANTES	17
2.5	TENSORES COVARIANTES	18
3	FORMALISMO COVARIANTE APLICADO AO ELETROMAGNETISMO	20
4	CONCLUSÃO	24
	REFERÊNCIAS	25
	APÊNDICE A – NOTACÃO DE EINSTEIN NO CÁLCULO VETORIAL	26
	APÊNDICE B – PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E TRIPLO EM NOTAÇÃO DE EINSTEN	30

1 INTRODUÇÃO

A interação eletromagnética, conforme descrita pelas equações de Maxwell, possibilitou a unificação do eletromagnetismo e da óptica, mostrando que a luz é uma onda eletromagnética [1]. Além disso, essas equações serviram de base para a teoria da RE desenvolvida por Albert Einstein em 1905. A referida teoria se apoia em dois postulados fundamentais: 1) As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais; 2) A velocidade da luz no vácuo, c , é a mesma em todas as direções [1, 2]. Com a interligação do eletromagnetismo, notou-se que os campos elétrico e magnético são aspectos distintos de um campo fundamental, o campo eletromagnético [1].

As equações de Maxwell em coordenadas cartesianas, quando analisadas no contexto da Relatividade Especial, observa-se uma inconsistência nas transformações dos campos elétrico e magnético em relação as transformações de Galileu. Para solucionar essas inconsistências nas transformações dos campos entre referenciais inerciais, recorre-se ao cálculo tensorial, que naturalmente as generalizam para uma forma covariante. Em outras palavras, a descrição matemática das leis da Física torna-se independente dos referenciais e dos respectivos sistemas de coordenadas, em concordância com o princípio da RE [3].

O trabalho está organizado da seguinte maneira: capítulo um - Introdução. No capítulo dois trata os tensores, sua definição e como eles se transformam sob uma mudança de coordenadas, incluindo os tensores contravariantes e covariantes. No capítulo três, apresenta as equações do eletromagnetismo em sua forma covariante.

2 TENSORES

Neste capítulo, vamos introduzir o formalismo dos tensores. A abordagem que adotamos é focar-nos na técnica de tensores, sem levar completamente em conta o significado geométrico por trás da teoria. Há duas abordagens distintas para o ensino de tensores: a abstrata ou livre de índice (sem coordenadas) e a que usa índices, sendo a mais comum em livros didáticos de relatividade. Quando se quer fazer um cálculo real com tensores, muitas vezes é preciso usar um sistema de coordenadas específico adaptado ao problema. Adotaremos a abordagem de índice convencional, que se baseia em como os tensores se transformam sob uma mudança de coordenadas [4].

2.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS E COORDENADAS

Vamos começar trabalhando com tensores em n dimensões. Um tensor é um objeto definido em uma entidade geométrica chamada variedade diferencial. Em termos simples, uma variedade é um conjunto de pontos que se assemelha localmente ao R^n [4].

Para simplificar, consideramos uma variedade n -dimensional M como um conjunto de pontos, onde cada ponto possui um conjunto de n coordenadas $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, e cada coordenada abrange um subconjunto dos reais, que pode variar de $-\infty$ a $+\infty$. É possível que nem toda a variedade possa ser coberta por um sistema de coordenadas não degenerado, ou seja, um sistema que atribui um conjunto único de n números de coordenadas a cada ponto. Às vezes, é útil usar sistemas de coordenadas com pontos degenerados. Por exemplo, as coordenadas polares (R, ϕ) no plano têm uma degeneração na origem, pois ϕ é indefinido nesse ponto. Nós, usamos coordenadas que cobrem apenas uma parte da variedade, chamadas “coordenadas remendadas”[4].

2.2 CURVAS E SUPERFÍCIES

Diante de uma variedade, a nossa atenção se concentra nos pontos e subconjuntos de pontos que delimitam curvas e superfícies de diferentes dimensões. Definiremos essas curvas e superfícies parametricamente. Portanto, uma vez que uma curva tem um grau de liberdade, depende de um parâmetro [4]. Designamos-a via equação paramétrica

$$x^a = x^a(u), \quad (a = 1, 2, \dots, n),$$

na qual u é um parâmetro e $x^1(u), x^2(u), \dots, x^n(u)$ indicam n funções relacionadas a u [4]. Da mesma maneira, um subespaço ou superfície de m dimensões ($m < n$) tem

m graus de liberdade, depende de m parâmetros e é representada pelas equações paramétricas

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \dots, u^m), \quad (a = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Quando $m = n - 1$, o subespaço é conhecido como hipersuperfície (variedade n -dimensional com $n > 2$). Nesse caso,

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}), \quad (a = 1, 2, \dots, n),$$

os parâmetros $n - 1$ podem ser ignorados dessas n equações, para fornecer uma equação que conecta as coordenadas, ou seja,

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0. \quad (2.2)$$

De uma perspectiva diferente, mas equivalente, um ponto em uma variedade tem n graus de liberdade. Se estiver restrito a uma hipersuperfície, um $(n - 1)$ -subespaço, então suas coordenadas devem satisfazer um vínculo, isto é

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0,$$

Isso é igual à equação (2.2) [4]. Assim, pontos em um subespaço m -dimensional ($m < n$) devem atender a $n - m$ vínculos

$$\left. \begin{aligned} f^1(x^1, x^2, \dots, x^n) &= 0, \\ f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) &= 0, \\ &\vdots \\ f^{n-m}(x^1, x^2, \dots, x^n) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Uma opção à representação paramétrica (2.1) [4].

2.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Um ponto crucial sobre o cálculo tensorial é que, quando fazemos uma afirmação sobre tensores, não desejamos que essa afirmação seja verdadeira apenas para um sistema de coordenadas, mas sim em todos os sistemas de coordenadas. É importante entender como as quantidades se comportam ao mudarmos de um sistema de coordenadas para outro [4]. Considerando a mudança de coordenadas $x^a \rightarrow x'^a$ dada pelas n equações

$$x'^a = f^a(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (a = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3)$$

as f s são funções contínuas diferenciáveis de único valor, pelo menos para certas faixas de seus argumentos [4]. Portanto, nessa etapa, observamos a transformação de coordenadas como uma atribuição a um ponto da variedade, cujas coordenadas antigas

são $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, e as novas coordenadas $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ [4]. Podemos expressar (2.3) de maneira mais sucinta

$$x'^a = x'^a(x), \quad (2.4)$$

$x'^a(x)$ representa as n funções $f^a(x)$ [4]. Observamos a diferenciação (2.4) em relação a cada coordenada x^b . Temos uma matriz de transformação $n \times n$ de coeficientes:

$$\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

O determinante J' dessa matriz (2.5) é chamado de Jacobiano da transformação:

$$J' = \left| \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right|.$$

Vamos assumir que isto é diferente de zero para algum intervalo da coordenada x^b . Portanto, do teorema da função inversa (estabelece a existência de uma função inversa para uma aplicação continuamente diferenciável), podemos em princípio resolver a equação (2.4) exclusivamente para as antigas coordenadas x^a e obter as equações da transformação inversa

$$x^a = x^a(x'). \quad (2.6)$$

De acordo com a regra de produto para determinantes, se definirmos o Jacobiano da transformação inversa como,

$$J = \left| \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \right|$$

então $J = 1/J'$ [4]. As funções $x'^a = x'^a(x)$ e $x^a = x^a(x')$ não são apenas diferenciáveis, mas também suaves, ou seja, podemos diferenciar as funções quantas vezes for necessário [4].

Em três dimensões, a equação de uma superfície é dada por $z = f(x, y)$; então, sua diferencial total é definida como

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

De forma análoga a partir de (2.4), podemos definir a diferencial total

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^a}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial x'^a}{\partial x^n} dx^n,$$

para cada a indo de 1 a n . Podemos escrever isso de forma mais sucinta utilizando um sinal de soma explícito:

$$dx'^a = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b. \quad (2.7)$$

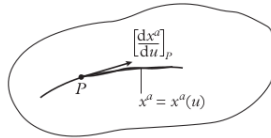
Portanto, podemos escrever (2.7) usando Notação de Einstein (Apêndice A) simplesmente como

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b.$$

2.4 TENSORES CONTRAVARIANTES

Suponha que P seja um ponto sobre uma variedade e $\gamma(u)$ uma curva diferenciável parametrizada por u tal que $P = \gamma(0)$ [4]. Seja $(x^1, \dots, x^n)$ um sistema de

Figura 1 – O vetor tangente à curva $x^a = x^a(u)$ em P .



Fonte: D'Inverno, 2022.

coordenadas local na vizinhança de P ; podemos escrever a curva γ em termos dessas coordenadas dada por

$$x^a = x^a(u).$$

A derivada em $u = 0$ determina um vetor tangente à curva em P que é expresso nessas coordenadas como

$$T^a = \frac{dx^a}{du}(0).$$

Introduzindo um novo sistema de coordenadas $(x'^1, \dots, x'^n)$ na vizinhança de P , observe a mesma curva γ no sistema de coordenada x'^a . Usando (2.4) podemos escrever a curva $\gamma(u)$ como

$$x'^a(u) = x'^a(x(u)).$$

Em termos dessas coordenadas, temos

$$\begin{aligned} T'^a &= \frac{dx'^a}{du}(0), \\ T'^a &= \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right]_P \left[\frac{dx^b}{du}(0) \right], \\ T'^a &= \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right]_P T^b. \end{aligned}$$

Lembrando de que o índice repetido b é somado [4]. Definimos um vetor contravariante ou tensor contravariante de posto 1 em P como um conjunto de quantidades,

escrito como X^a nas coordenadas x^a do sistema, que se transforma sob uma mudança de coordenadas de acordo com

$$X'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b, \quad (2.8)$$

a matriz de transformação é analisada em P [4, 5]. O vetor tangente a uma curva é apenas um caso especial de (2.8). É relevante distinguir entre o objeto geométrico invariante, como o vetor tangente, e sua representação em um sistema de coordenadas específico [4]. Isso é dado pelos n números $[dx^a/du]_p$ no sistema de coordenadas x^a e os números diferentes $[dx'^a/du]_p$ no sistema x'^a [4].

Generalizando a definição (2.8) para obter tensores contravariantes de posto superior. Um tensor contravariante de posto 2 é um conjunto de quantidades n^2 associados a um ponto P , denotado por X^{ab} no sistema de coordenadas x^a , que se transforma de acordo com

$$X'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} X^{cd}.$$

As X'^{ab} são componentes do sistema de coordenadas x'^a , as matrizes de transformação são avaliadas em P e a lei envolve dois índices imaginários c e d [4, 6].

2.5 TENSORES COVARIANTES

Seja ϕ uma função escalar diferenciável (valor real) sobre uma variedade; assim, em um ponto geral P na variedade, temos $\phi(P) = k$, onde k é um número real. Agora, no espaço R^3 com as coordenadas euclidianas padrão (x^1, x^2, x^3) , a equação $\phi(x^a) = k$ define uma superfície S e

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\phi}{\partial x^3} \right),$$

apresenta um vetor normal à superfície [4]. Sendo ϕ um campo escalar e $(x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas na vizinhança do ponto P . Então, podemos escrever

$$\phi = \phi(x^a), \quad (2.9)$$

e por (2.1) a equação $\phi(x^a) = k$ define uma hipersuperfície S através de P [4]. A derivada de ϕ define um vetor covariante em P normal a S dado por

$$N_a = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x^a} \right]_p. \quad (2.10)$$

O índice do vetor covariante N_a está abaixo, enquanto o vetor contravariante T^a está acima. A diferença na posição do índice é importante porque ele se transforma de maneira diferente [4].

Introduzindo um sistema de coordenadas $(x'^1, \dots, x'^n)$ na vizinhança de P . Olhando para a mesma hipersuperfície, mas desta vez descrita em termos do sistema de coordenadas x'^a , é dada por $\phi(x'^a) = k$. Neste sistema de coordenadas, as componentes do vetor covariante são

$$N'_a = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x'^a} \right]_p. \quad (2.11)$$

Da equação (2.6) x^a pode ser pensado como uma função de x'^b , e a equação (2.9) pode ser escrita de forma análoga

$$\phi = \phi(x^a(x')), \quad (2.12)$$

Diferenciando (2.12) em relação a x'^b , aplicando a regra da cadeia, conseguimos obter

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^b} = \frac{\partial \phi}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial x'^b},$$

onde $[\partial x^a / \partial x'^b]$ é calculada em P . Portanto, ao trocar a ordem dos termos, o índice fictício e o índice livre (de b a a) resultam em

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^a} = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \frac{\partial \phi}{\partial x^b},$$

de forma que por (2.10) e (2.11)

$$\begin{aligned} N'_a &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x'^a} \right]_p, \\ N'_a &= \left[\frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \frac{\partial \phi}{\partial x^b} \right]_p, \\ N'_a &= \left[\frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \right]_p N_b. \end{aligned}$$

Portanto, definimos um vetor covariante ou tensor covariante de posto (ordem) 1, como um conjunto de quantidades, denotado por X_a no sistema de coordenadas x^a , associado a um ponto P , que se transforma de acordo com

$$X'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} X_b,$$

onde a matriz de transformação é avaliada em P [4, 5]. Da mesma maneira, definimos um tensor covariante de posto 2 pela lei de transformação

$$X'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} X_{cd},$$

e assim segue para tensores de classificação superior [4, 7].

3 FORMALISMO COVARIANTE APLICADO AO ELETROMAGNETISMO

O formalismo covariante do eletromagnetismo consiste em expressar as equações usando quadri vetores e quadri tensores [8]. As equações de Maxwell são a base do eletromagnetismo e são representadas na forma diferencial.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (3.4)$$

onde escrevemos as equações de Maxwell em unidades naturais com $c = 1$, c é a velocidade da luz.

Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são definidos pela força de Lorentz (que é a força que atua sobre uma carga q , que se move com velocidade $\vec{v}$ numa região onde existem campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$) [9],

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

A equação de continuidade (que expressa um princípio de conservação, no caso, a conservação da carga elétrica) [8],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0.$$

Para identificar as quantidades quadri vetores e quadri tensores, começaremos por escrever a equação de continuidade como,

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.5)$$

De acordo com esta observação (embora x^j seja um vetor contravariante, é possível observar que $\partial/\partial x^j$ é um vetor covariante. Geralmente, $\partial/\partial x^j$ é representado por ∂x^j ou ∂_j . E análogo, ∂x_j por ∂^j) [8]. Podemos escrever a equação (3.5) como:

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

Essa será a notação que utilizaremos a partir de agora. As quantidades representadas por j^μ são [8]:

$$j^0 = \rho$$

$$j^1 = j_x$$

$$j^2 = j_y$$

$$j^3 = j_z$$

ou

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}),$$

onde j^μ é o quadrivetor corrente.

Com ρ e $\vec{j}$ formando um quadrivetor, podemos agora combinar as equações (3.1) e (3.4) em uma única relação. Para alcançar isso, devemos observar que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ formam um conjunto de seis quantidades e não podem ser representadas como quadrivetores. No entanto, há a chance de serem acomodadas em um quadritensor anti-simétrico [8]. Das equações (3.1) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \rho \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial t} &= j_x \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial t} &= j_y \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial t} &= j_z\end{aligned}$$

Estas equações podem ser escritas de forma conveniente como:

$$\begin{aligned}\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= j^0 \\ \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= j^1 \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} &= j^2 \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} &= j^3\end{aligned}$$

ou, de forma concisa,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.6)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico, conhecido como o tensor do campo eletromagnético, e é definido por [8],

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Verificando as outras duas equações de Maxwell (3.2) e (3.3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Pode ser escrita como

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0$$

$$\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0$$

$$\partial^0 F^{13} + \partial^1 F^{30} + \partial^3 F^{01} = 0$$

$$\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0$$

ou, compactamente

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0,$$

também pode ser expressa como

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0,$$

A equação acima é chamada de identidade de Bianchi [8].

Podemos obter das equações (3.2) e (3.3) os potenciais dos campos elétrico e magnético [10, 11].

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.7)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

ϕ e $\vec{A}$ formam um quadrivetor

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}),$$

o quadrivetor A^μ é chamado de quadrivetor potencial [10].

Em relação a esse quadrivetor potencial, o tensor do campo eletromagnético pode ser expresso como [10, 11],

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.9)$$

Analisando a equivalência entre a equação (3.9) e as equações (3.7) e (3.8), vamos calcular F^{01} [10],

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0$$

$$F^{01} = \partial^0 A^x - \partial^1 \phi$$

$$F^{01} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -E_x,$$

essa equação, em conjunto com F^{02} e F^{03} , corresponde à equação (3.8). Para F^{12} :

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1$$

$$F^{12} = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x$$

$$F^{12} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = -B_z,$$

essa equação, juntamente com F^{13} e F^{23} , corresponde à equação (4.7).

Combinando as equações (3.6) e (3.9) obtemos

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\mu. \quad (3.10)$$

Pela equação (3.9), vemos que o quadrivetor A^μ não possui uma definição única [8]. O $F^{\mu\nu}$ permanece invariante para uma transformação de A^μ

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda,$$

onde Λ é uma função escalar. A transformação que mantém os campos invariantes é denominada transformação de Calibre (Gauge)[8]. Em particular, a condição de calibre de Lorentz

$$\nabla \cdot A = -\frac{\partial \phi}{\partial t},$$

que pode ser escrita, como

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

O calibre de Lorentz simplifica a equação (3.10)

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (3.11)$$

onde $\square$ é o d'Alembertiano, definido como

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Observa-se que o operador d'Alembertiano é uma extensão do operador laplaciano no espaço 4D. A equação (3.11) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= \rho, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos as equações de Maxwell com fontes em termos dos potenciais que são equações de onda eletromagnética.

4 CONCLUSÃO

A partir do cálculo vetorial, foi possível encontrar as Equações de Maxwell na forma covariante, o que representa uma generalização para uma formulação no espaço-tempo de Minkowski. Por meio dessa abordagem, obtemos o campo eletromagnético, que é um tensor de rank 2 anti-simétrico, cujas componentes são os campos elétrico e magnético. Assim, mostra-se no contexto relativístico que as transformações dos campos elétricos e magnéticos são independentes dos referenciais inerciais. Observou-se também que os campos são invariantes por transformações internas denominadas transformações de Calibre. Isso implica uma simetria inerente a eles. Como perspectiva fazer uma análise do campo eletromagnético na métrica de Klein, encontrando as possíveis soluções e comparando com a teoria eletromagnética padrão [12, 13].

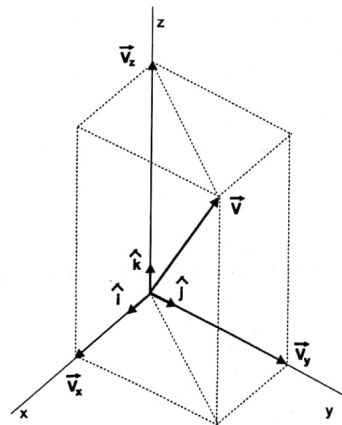
REFERÊNCIAS

- 1 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Eletromagnetismo*. [S.l.]: Editora Blucher, 2015. v. 3. 13
- 2 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014. v. 4. 13
- 3 ANTUNES, J. O. et al. As equações de maxwell no formalismo covariante. *Encontro de Física do Delta*, v. 1, 2023. 13
- 4 D'INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein's relativity: a deeper understanding*. [S.l.]: Oxford University Press, 2022. 14, 15, 16, 17, 18, 19
- 5 SILVA, W. N. P. et al. *Introdução a análise tensorial e a relatividade geral com uma breve discussão sobre divulgação científica*. [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2022. v. 1. 120 p. 18, 19
- 6 ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007. 18
- 7 EINSTEIN, A. Os fundamentos da teoria da relatividade geral. *A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, O Princípio da Relatividade*, p. 141–214, 1978. 19
- 8 BARCELOS NETO, J. *Fundamentos de relatividade especial*. [S.l.: s.n.], 1994. 210 p. 20, 21, 22, 23
- 9 BARCELOS NETO, J. *Matemática para Físicos com Aplicações*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2010. v. 1. 20, 26, 27
- 10 GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*, 3. ed. [S.l.: s.n.], 2010. 22
- 11 DOUGHTY, N. A. *Lagrangian Interaction*. [S.l.: s.n.], 1990. 22
- 12 SMOLYANINOV, I. I.; NARIMANOV, E. E. Metric signature transitions in optical metamaterials. *Physical Review letters*. 24
- 13 BARRET, J. et al. Kleinian geometry and the n=2 superstring. *International Journal of Modern Physics A*, v. 9, p. 1457–1493, 1994. 24
- 14 STEWART, J. *Cálculo*. [S.l.]: Editora Cengage Learning, 2013. v. 2. 26
- 15 Wikipedia contributors. *Plagiarism — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2004. [Online; acessado 23 de Julhor de 2004]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_delta>. 28
- 16 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. 28
- 17 Wikipedia contributors. *Levi-civita symbol — Wikipedia, the free encyclopedia*. 2024. [Online; acessado 15 de Fevereiro de 2024]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Levi-Civita_symbol&oldid=1204644726>. 29

APÊNDICE A – NOTACÃO DE EINSTEIN NO CÁLCULO VETORIAL

No cálculo vetorial aprendemos que em um só objeto é atribuído três quantidades: módulo, direção e sentido. Geralmente representado por uma seta, na qual o tamanho equivale ao módulo, o segmento de reta à direção, e a orientação da seta ao sentido. Uma grandeza vetorial é denotada como: $\vec{V}$. É também comum apresentar um vetor através de suas componentes num sistema de eixos cartesianos ortogonais [9, 14].

Figura 2 – Vetor decomposto em eixos ortogonais



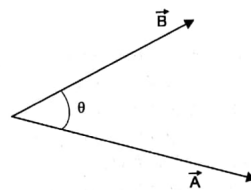
Fonte: Barcelos, 2010.

O vetor $\vec{V}$ pode ser escrito como

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k},$$

onde (V_x, V_y, V_z) são as componentes do vetor; $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ base canônica, e as bases são vetores unitários, ou seja, possui módulo igual a 1. Considere dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fazendo um ângulo θ entre si como mostra a Figura 2 [9]. O produto escalar entre esses

Figura 3 – Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fazendo um ângulo θ entre si



Fonte: Barcelos.

vetores é uma quantidade escalar definida por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta.$$

O produto vetorial, $\vec{A} \times \vec{B}$, é um vetor. Seu módulo é

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta.$$

Analisando o produto escalar e vetorial em relação à soma, ambos satisfazem à propriedade da distributividade, mas em relação à comutatividade, o vetorial é anticomutativo [9].

Comutatividade:

$$\begin{aligned}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \vec{A}), \\(\vec{A} \times \vec{B}) &= -(\vec{B} \times \vec{A}).\end{aligned}$$

Distributividade:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}, \\ \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}.\end{aligned}$$

Produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}), \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.\end{aligned}$$

Produto vetorial entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}), \\ \vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}.\end{aligned}$$

O que nos dá exatamente:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} ; \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}.$$

A Notação de Soma de Einstein é um formalismo que permite omitir o somatório. Considere um sistema cartesiano em três dimensões, dado com $\vec{R} = X_{\hat{i}} + Y_{\hat{j}} + Z_{\hat{k}}$, agora o sistema será representado por números $\vec{R} = X_1 \hat{e}_1 + X_2 \hat{e}_2 + X_3 \hat{e}_3$, desta forma, ao invés de utilizar x, y, z, usaremos x_1, x_2, x_3 ou r_1, r_2, r_3 , fazendo uso desta notação, temos que:

$$\begin{aligned}(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) &\implies (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3), \\ (x, y, z) &\implies (x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Considerando

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 X_i \hat{e}_i.$$

O somatório representa as três partes de um vetor que são $X_1\hat{e}_1 + X_2\hat{e}_2 + X_3\hat{e}_3$. Pode observar que os índices repetidos estão envolvidos na soma, podendo assim utilizar a Notação de Einstein $\vec{R} = X_i\hat{e}_i$ índices repetidos indica soma, quando o índice não se repete é chamado de índice livre, ou seja, não tem somatório.

Delta de Kronecker: O delta de Kronecker (em homenagem a Leopold Kronecker) é uma função de duas variáveis, geralmente apenas números inteiros não negativos. A função é 1 se as variáveis forem iguais e 0 caso contrário [15, 16]:

$$\delta_{ij} = (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \quad \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

O delta de Kronecker possui a propriedade de renomear os índices. Para os vetores unitários de um sistema de coordenadas $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ exige se que:

$$(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1) = (\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2) = (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3) = 1 \quad e \quad (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2) = (\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3) = (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3) = 0.$$

Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o produto escalar e vetorial podem ser escritos da seguinte forma:

Produto escalar em Notação de Einstein (observar o apêndice B.1)

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_i\hat{e}_i) \cdot (B_j\hat{e}_j), \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_iB_i \quad \text{ou} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_jB_j. \end{aligned}$$

Determinante de uma matriz (3 x 3)

$$C = \begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix},$$

Calculando a matriz

$$\det(C) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{vmatrix},$$

Temos que:

$$\det(C) = C_{11}C_{22}C_{33} + C_{12}C_{23}C_{31} + C_{13}C_{21}C_{32} - C_{12}C_{21}C_{33} - C_{11}C_{23}C_{32} - C_{13}C_{22}C_{31} \quad (\text{A.1})$$

Símbolo Levi-Civita:

O símbolo Levi-Civita em homenagem ao matemático e físico italiano Tullio Levi-Civita, representa uma coleção de números definido a partir do sinal de uma permutação dos números naturais $1, 2, \dots, n$, para algum inteiro positivo n . Símbolo

de Levi-Civita também chamado de símbolo de permutação, símbolo antissimétrico ou símbolo alternado, que se refere à sua propriedade antissimétrica e definição em termos de permutações [17]. Em três dimensões, o símbolo Levi-Civita é definido por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1) \\ 0 & (1, 1, 3), (3, 2, 3), (2, 2, 3), \end{cases}$$

ou seja, ϵ_{ijk} é igual a 1 se (i, j, k) for uma permutação par de $(1, 2, 3)$, -1 se for uma permutação ímpar e 0 se algum índice for repetido. Usando a definição do Levi-Civita, segue de (A.1) que

$$\begin{aligned} \det(C) = & \epsilon_{123}C_{11}C_{22}C_{33} + \epsilon_{231}C_{12}C_{23}C_{31} + \epsilon_{312}C_{13}C_{21}C_{32} \\ & + \epsilon_{213}C_{12}C_{21}C_{33} + \epsilon_{132}C_{11}C_{23}C_{32} + \epsilon_{321}C_{13}C_{22}C_{31}, \end{aligned}$$

Isto é,

$$\det(C) = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} C_{1i} C_{2j} C_{3k},$$

E usando notação de Einstein tem-se

$$\det(C) = \epsilon_{ijk} C_{1i} C_{2j} C_{3k}.$$

Produto vetorial em Notação de Einstein.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_i B_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j), \\ \vec{A} \times \vec{B} &= \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k. \end{aligned}$$

Produto triplo em Notação de Einstein.

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (A_i \hat{e}_i) \cdot [(B_j \hat{e}_j) \times (C_k \hat{e}_k)], \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{jkl} A_i B_j C_k \delta_{il}, \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{jki} A_i B_j C_k, \end{aligned}$$

Isso é um determinante:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Portanto, obtemos o produto escalar, vetorial e triplo em Notação de Einstein.

APÊNDICE B – PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E TRIPLO EM NOTAÇÃO DE EINSTEIN

Produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_i \hat{e}_i) \cdot (B_j \hat{e}_j) \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_i B_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \implies A_i B_j = A_i B_j \delta_{ij}\end{aligned}$$

A delta filtra um índice

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \quad \text{ou} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_j B_j.$$

Produto vetorial entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= A_i B_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \\ (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) &= \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \\ \vec{A} \times \vec{B} &= A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \\ \vec{A} \times \vec{B} &= \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k.\end{aligned}$$

Produto triplo $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$, com $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$, $\vec{B} = B_j \hat{e}_j$, $\vec{C} = C_k \hat{e}_k$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (A_i \hat{e}_i) \cdot [(B_j \hat{e}_j) \times (C_k \hat{e}_k)] \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (A_i \hat{e}_i) \cdot [B_j C_k (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)] \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (A_i \hat{e}_i) \cdot (B_j C_k \epsilon_{jkl} \hat{e}_l) \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (A_i \hat{e}_i) \cdot (\epsilon_{jkl} B_j C_k \hat{e}_l) \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{jkl} A_i B_j C_k (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_l) \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{jkl} A_i B_j C_k \delta_{il} \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{jki} A_i B_j C_k.\end{aligned}$$