



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS ANGICAL DO PIAUÍ
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

BRUNO FILHO SENA

**UM ESTUDO SOBRE APLICAÇÕES DA SÉRIE DE TAYLOR COMO
FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS**

ANGICAL DO PIAUÍ
2021

BRUNO FILHO SENA

UM ESTUDO SOBRE APLICAÇÕES DA SÉRIE DE TAYLOR COMO
FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo)
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de
Licenciatura em Física do Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí,
Campus Angical.

Orientador: Prof. Me. Antônio Carlos
Ferreira de Abreu

ANGICAL DO PIAUÍ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Sena, Bruno Filho

S474e Um estudo sobre aplicações da série de Taylor como ferramenta para
resolução de problemas físicos / Bruno Filho Sena. - 2020.
22 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto
Federal do Piauí, Campus Angical, 2020.

Orientador : Prof. Me. Antonio Carlos Ferreira de Abreu.

1. Expansão de uma função. 2. Problemas físicos. 3. Série de Taylor.
I. Título.

CDD - 530

Elaborado por Jesselina Soares de Sena CRB 3/1373

BRUNO FILHO SENA

UM ESTUDO SOBRE APLICAÇÕES DA SÉRIE DE TAYLOR COMO
FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de
Licenciatura em Física do Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí,
Campus Angical.

Aprovado em: 11/12/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc –Antonio Carlos Ferreira de Abreu

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

Prof. Msc. Liberalino de Souza Meneses - Avaliador

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

Prof. Msc. Wemerson José Alencar - Avaliador

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

RESUMO

Este trabalho tem como sucinta proposta expor a importância do uso da Série de Taylor na Física. Como caminho metodológico se fez o uso de uma consulta bibliográfica, a qual foi embasada nos trabalhos dos autores; Morais e Silva (2009), Quina (2015), Cerqueira (2013) entre outros citados neste trabalho. A consequência dessa exploração literária foi verificar que a expansão de uma função em série de Taylor como ferramenta matemática do cálculo é fundamental para o desenvolvimento e entendimento de alguns problemas físicos discutidos no âmbito acadêmico.

Palavras-Chaves: Expansão de uma função. Problemas físicos. Série de Taylor.

ABSTRACT

This work has as a succinct proposal to expose the importance of using the Taylor Series in Physics. As a methodological approach, a bibliographic consultation was used, which was based on the authors' works; Morais e Silva (2009), Quina (2015), Cerqueira (2013) among others mentioned in this work. The consequence of this literary exploration was to verify that the expansion of a Taylor series function as a mathematical tool of calculation is fundamental for the development and understanding of some physical problems discussed in the academic field.

Keywords: Expansion of a function. Physical problems. Taylor series.

1 INTRODUÇÃO

Trabalhos que envolviam o tratamento e manipulação de sequências e séries era realidade em muitas civilizações antigas como, por exemplo: os egípcios, babilônicos, árabes, chineses. Em relação aos babilônicos, com a descoberta da tableta plimpton (1900 - 1600 a.c.) os estudiosos puderam perceber uma progressão geométrica $1+2+2^2+\dots+2^9$ cuja soma forma a série da soma de seus quadrados:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 \quad (1)$$

Além disso, um papiro encontrado na cidade de Kahun (Egito) contém muitos problemas teóricos de progressões aritméticas e geométricas como o seguinte: Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1/\frac{3}{4}$.

Os paradoxos de Zenão¹ sobre o movimento deixaram muitos matemáticos por séculos intrigados. Já que os mesmos envolviam a soma de um número infinito de termos positivos a um número finito, o qual é a essência da convergência de uma série infinita de números.

Outra personalidade importante no estudo de séries e de sequências foi Arquimedes (287 - 212 a.C.), que alcançou vários resultados relevantes envolvendo áreas de volumes de várias figuras sólidas onde o mesmo construiu vários problemas e tentou explicar como as somas infinitas poderiam ter resultados finitos.

Nos séculos posteriores destaca-se o matemático Fibonacci (1170 - 1250 d.C.) que descobriu uma sequência de inteiros na qual cada número é igual à soma de dois anteriores (1,1,2,3,5,8,...), essa ideia de Fibonacci é usada, por exemplo, na modelagem da população reprodutiva de coelhos. Essa sequência tem muitas propriedades curiosas e interessantes que continuam sendo aplicadas em várias áreas da matemática moderna e ciência. Os chineses desenvolveram técnicas numéricas para analisar resultados experimentais e ainda durante séculos XII a XIV os mesmos usaram a ideia de diferença infinita para analisar tendências em seus resultados.

Logo a medida que o desenvolvimento do cálculo foi tomando forma, o progresso na compreensão de séries infinitas teve um papel significativo no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, que obteve grandes contribuições pela pessoa de Pascal (1623 - 1662 d.C.), de Fermat (1601 - 1665 d.C.), Descartes (1596 - 1650 d.C.). Apesar da limitação de Pascal para entender séries, Ele com Descartes e Fermat deixaram importantes contribuições em fundamentos de cálculo diferencial integral.

Até a metade do século XVII, matemáticos tinham desenvolvido e analisado séries de números. O tempo chegara para investigar sequências e séries de funções. Ambos, Newton (1642 - 1727 d.C.) e Leibniz (1646 - 1716 d.C.) desenvolveram representações de séries para funções. Usando métodos algébricos e geométricos, Newton calculou as séries para as funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$ para a função exponencial. Estes resultados são encontrados nos trabalhos de Newton intitulados *Method of Fluxions and Infinite Series* e *Analysis with Infinite Series*. Newton utilizou

¹ Sua data de nascimento e de falecimento são desconhecidas, as quais podem ser em 504 a 430 a.c. ou 501 a 425 a.c.

séries para desenvolver muitos resultados de cálculo, tais como área, comprimento de arco e volumes. Leibniz somou sequências de recíprocas de números poligonais e, seguindo o trabalho de St.Vincent (1584 - 1667 d.C.), somou e analisou várias sequências geométricas.

Evidentemente a lista de colaboradores no processo de agrupamento de conceitos referentes ao desenvolvimento de Séries infinitas é extensa, pois como relata a história da matemática os primeiros filósofos já manipulavam a ideia de somas infinitas. No entanto o cerne deste trabalho delimita-se em mostrar a Série de Taylor como parâmetro significativo na resolução de problemas trabalhados na disciplina de física em vez de embrenhar-se no contexto histórico que envolve Séries infinitas.

2 CAMINHO METODOLÓGICO ABORDADO

Através de uma investigação baseada em consultas de fontes bibliográficas, o presente estudo foi construído na ótica da pesquisa bibliográfica, que segundo Marconi e Lakatos (2003) sua função é pôr o investigador em uma ligação direta com tudo o que já foi registrado sobre o problema investigado. Embora existam muitos trabalhos científicos no arcabouço matemático que abordam a série de Taylor como enfoque principal, pouco se foi trabalhado na literatura da física sobre o tema em questão.

Além disso, a falta de conexão do entendimento do aluno, quando os professores trabalham conceitos matemáticos de séries no tratamento de um fenômeno físico, como afirma Possa e Nogueira (2003,pág.1) "[...] Contudo, nas disciplinas de matemática, tais como cálculo, análise e em muitos casos até mesmo de física matemática dos cursos de Física, não existe uma associação com problemas físicos. Isto é, existe a falta de interpretações físicas ligadas a como somar os termos das séries e a soma de séries [...]". Logo, as situações problemáticas descritas no texto acima motivaram a construção deste artigo.

3 DEFINIÇÃO DE SÉRIE DO PONTO DE VISTA MATEMÁTICO

Geralmente, uma série poder ser definida como um conjunto de elementos dispostos em ordem obedecendo a uma lei, denominada lei de formação, em que cada série tem sua própria lei de formação mesmo se os elementos forem iguais. Para ilustrar, Machado (2004) mostra que os elementos: domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado formam uma série conhecida como semana. No entanto, os

elementos: terça, sexta, segunda, quarta, sábado, quinta e domingo formam outra série distinta.

A situação seguinte ilustra a ideia de série infinita, que é abordada no trabalho de Moraes e Silva² : Samuel Blaustein possui uma dívida no valor de \$100,00 que deseja liquidar efetuando pagamentos da dívida sempre à metade do que deve. Por exemplo, no primeiro mês efetua o pagamento no valor de \$50,00, no segundo mês \$25,00 no terceiro mês \$12,50 e assim por diante. Problema como este nos deixa a seguinte indagação, “será que em algum momento esta dívida será liquidada?” Se observarmos esta divisão sucessiva do saldo ao meio, teremos uma infinidade de resultados como mostra o esquema abaixo:

$$\left[\left(\frac{100}{2^1}\right)\right] = \frac{100}{2} = 50,00 \quad (2)$$

$$\left[\left(\frac{100}{2^2}\right)\right] = \frac{100}{2^2} = 25,00 \quad (3)$$

$$\left[\left(\frac{100}{2^3}\right)\right] = \frac{100}{2^3} = 12,50 \quad (4)$$

$$\left[\left(\frac{100}{2^4}\right)\right] = \frac{100}{2^4} = 6,25 \quad (5)$$

Se continuarmos a dividir o saldo indefinidamente, a soma destas parcelas será considerada uma soma infinita, isto é;

$$50 + 25 + 12,50 + 6,25 + \dots \quad (6)$$

Ou ainda;

$$\frac{100}{2^1} + \frac{100}{2^2} + \frac{100}{2^3} + \frac{100}{2^4} + \dots \frac{100}{2^n} \dots \quad (7)$$

Esta soma nos leva a pensar que ao final teremos sanado a dívida, mas na verdade temos: uma soma infinita e assim, não será possível efetuar o pagamento total, pois sempre existirá um valor a ser pago. Podemos considerar cada valor da soma anterior como elemento de uma sequência S_n na escrita

$$a_1 = \frac{100}{2^1}, a_2 = \frac{100}{2^2}, a_3 = \frac{100}{2^3}, a_4 = \frac{100}{2^4} \dots, a_n = \frac{100}{2^n} \dots, \quad (8)$$

Ou ainda;

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n \quad (9)$$

Considere a sequência S_n dada pela soma dos pagamentos sucessivos

² Exemplo usado por MORAIS, Francisco Portela. SILVA, Jandherson Moura, no trabalho intitulado: séries numéricas e séries de potências. página 9-10.

efetuados pelo Sr. Samuel Blaustein, daí vem:

$$S_1 = a_1 \quad (10)$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \quad (11)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad (12)$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (13)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \quad (14)$$

A sequência S_n formada a partir da sequência a_n é chamada de série infinita, no que segue apresenta-se a definição formal de série infinita.

- 1 **Definição**³ Seja a_n uma sequência de números reais. Chama-se de série infinita a sucessão S_n definida da seguinte forma

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \quad (15)$$

Os números $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, são chamados de termos da série infinita. O número S_n diz-se termo geral da série

O símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots \quad (16)$$

É usado para denotar a série infinita.

Os números $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$, chamam-se somas parciais e S_n diz-se termo geral das somas parciais.

Exemplo 1. Encontre os quatro primeiros termos da sequência de somas parciais S_n e obtenha uma fórmula para S_n em termos n para as séries abaixo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (17)$$

O termo geral da série é $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ Podemos reescrevê-lo usando frações parciais da seguinte forma,

$$a_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \quad (18)$$

Então

$$S_1 = a_1 \quad (19)$$

$$S_1 = \frac{1}{2(2-2)} - \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \quad (20)$$

³ Definição usada por MORAIS, Francisco Portela. SILVA, Janderson Moura, no trabalho intitulado: séries numéricas e séries de potências. página 10-11.

$$s_2 = a_1 + a_2 \quad (21)$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5} \quad (22)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad (23)$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 7}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7} \quad (24)$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (25)$$

$$S_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 7}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 9}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9} \quad (26)$$

Como $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$, temos:

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right), a_2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5}\right), a_3 = \left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 7}\right), a_4 = \left(\frac{1}{2 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 9}\right), \dots, a_{n-1} = \left(\frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)}\right), a_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \quad (27)$$

Assim, como $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ vem que:

$$S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 7}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 9}\right) + \dots + \left[\frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)}\right] + \left[\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right] + \dots \quad (28)$$

Eliminando os termos simétricos e simplificando a expressão, obtemos a fórmula define S_n , isto é,

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}, \text{ ou ainda, } S_n = \frac{1}{2n+1} \quad (29)$$

4 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Quando os elementos de uma séria são potências de variáveis, temos uma série de potências. Neste caso, a série é representada por

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n x^n = \sum_{n=n_0}^{n=n_f} b_n \quad (30)$$

Onde a_n e b_n também possui uma lei de formação. Aqui se considera apenas uma variável (x), mas a série pode conter mais de uma. Como se pode verificar a seguir, a série de potências em x

$$x, 2x^2, 3x^3, 4x^4 \quad (31)$$

Que é representada por

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} nx^n = x, 2x^2, 3x^3, 4x^4 \quad (32)$$

E a lei de formação é

$$a_n = n, b_n = nx^n \quad (33)$$

A série de potências em t

$$1, -t^2, t^4, -t^6, t^8 \quad (34)$$

Tem uma representação

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} (-1)^n t^{2n} = 1, -t^2, t^4, -t^6, t^8 \quad (35)$$

E a lei de formação é

$$a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n x^{2x} \quad (36)$$

- 2 **Definição**⁴ (Soma de séries). A soma de uma série é a soma dos elementos desta série. Que é representada por

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_f} \quad (37)$$

Se for uma série numérica, e por

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n = a_{n_0}x^{n_0} + a_{n_0+1}x^{n_0+1} + \dots + a_{n_f}x^{n_f} \quad (38)$$

Se for série de potências. A representação de uma série e de sua soma é a mesma. O contexto é que define qual está em questão.

Exemplo 2, A série

$$\sum_{n=1}^{n=7} n = ,1,2,3,4,5,6,7 \quad (39)$$

Fica

$$\sum_{n=1}^{n=7} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \quad (40)$$

Exemplo 3, Assim também a série

⁴ Definição usada por MACHADO, Kleber Daum no livro intitulado: equações diferenciais aplicadas, vol.1, página 420-421.

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} nx^n = x, 2x^2, 3x^3, 4x^4 \quad (41)$$

Fica

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \quad (42)$$

Brook Taylor, foi um matemático britânico inventivo e produtivo, conhecido pelo nome das famosas Séries de Taylor. Foi encorajado a desenvolver seu talento musical e artístico e entrou para o St John's College, Cambridge (1703), onde passou a gostar de matemática. Já matemático conceituado publicou seu livro de cálculo, *Methodus incrementorum* (1715), em que apresentou sua famosa série, base do cálculo diferencial, e seu livro sobre geometria, *Linear perspectiva*, no mesmo ano. Apesar do nome, de acordo com Ressureição (2014) e Santos (2017) não foi ele que inventou as séries de Taylor, os estudos já tinham sido antecidos por James Gregory.

A ideia proposta por Taylor era supor que uma função poderia ser escrita na forma de uma série de potências, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad (43)$$

Ou

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (44)$$

As funções definidas por séries de potências possuem derivadas em todas as ordens, e as séries das derivadas convergem no mesmo intervalo de convergência da série inicial.

Calculando as derivadas até a ordem n temos:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + \dots \quad (45)$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 + \dots + (n-1) \cdot na_n(x-a)^{n-2} + \dots \quad (46)$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot na_n(x-a)^{n-3} + \dots \quad (47)$$

$$f^n(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) \cdot (n-1) \cdot na_n + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) \cdot n \cdot (n+1) \cdot a_{n+1}(x-a) + \dots \quad (48)$$

Fazendo $x = a$ na função f e nas derivadas obtemos:

$$f(a) = a_0 \quad (49)$$

$$f'(a) = 1 \cdot a_1 \quad (50)$$

$$f''(a) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 \quad (51)$$

$$f'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 \quad (52)$$

$$f^n(a) = n! a_n \quad (53)$$

Isolando o n-ésimo termo obtemos,

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!} \quad (54)$$

Assim, substituindo o n-ésimo termos na função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (55)$$

Encontramos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n \quad (56)$$

Ou seja,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \dots \quad (57)$$

esta expressão é denominada de **Série de Taylor**.

5 SÉRIE DE MACLAURIN

A série de MacLaurin é um caso especial da fórmula de Taylor quando $a = 0$, ou seja, partindo da série de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \dots \quad (58)$$

E fazendo $a = 0$, temos a forma geral da Série de MacLaurin que é dada por

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x)^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot (x)^n + \dots \quad (59)$$

Ou ainda

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n \quad (60)$$

Para esclarecer estes conceitos usa-se aqui um exemplo, considere a função $f(x) = e^x$. A qual será expandida em torno do ponto $x_0 = 0$, ou seja, busca-se achar a série de Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^x)|_0 (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (61)$$

Que é a série de Taylor de . O $f(x) = e^x$ primeiro termo corresponde a $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{0!} x^0 e^0 = 1 \quad (62)$$

O segundo, que tem $n = 1$, é

$$a_1 = \frac{1}{1!} x^1 \left[\frac{d}{dx} (e^x) \right]_0 = x(e^0)_0 = x \quad (62)$$

O terceiro termo tem $n = 2$ e fica

$$a_2 = \frac{1}{2!} x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} (e^x) \right]_0 = \frac{1}{2} x^2 (e^0)_0 = \frac{1}{2} x^2 \quad (63)$$

E assim sucessivamente. O n -ésimo termo é

$$a_n = \frac{1}{n!} x^n \left[\frac{d^n}{dx^n} (e^x) \right]_0 = \frac{1}{n!} x^n (e^x)_0 = \frac{1}{n!} x^n \quad (64)$$

E a série de Taylor fica

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots \quad (65)$$

Assim, a função e^x pode ser aproxima da por uma série de Taylor, dada acima. Se quisermos uma aproximação até segunda ordem, faremos

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2} x^2 \quad (66)$$

Que é boa somente se $x \ll 1$. Quando x é razoavelmente grande, é preciso considerar mais termos da série para conseguir uma aproximação melhor.

Considere agora a função $f(x) = \cos x$. Procura-se calcular a série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$. Isso significa encontrar

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (\cos x)|_0 (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (67)$$

Para $n = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{0!} x^0 \cos x|_0 = 1 \quad (68)$$

Quando $n = 1$, obtemos

$$a_1 = \frac{1}{1!} x^1 \left[\frac{d}{dx} (\cos x) \right]_0 = -x(\sin x)_0 = 0 \quad (69)$$

O terceiro termo tem $n = 2$ e fica

$$a_2 = \frac{1}{2!} x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} (\cos \cos x) \right]_0 = \frac{1}{2} x^2 (x)_o = -\frac{1}{2} x^2 \quad (70)$$

Quando $n = 3$, encontra-se

$$a_3 = \frac{1}{3!} x^3 \left[\frac{d^3}{dx^3} (\cos \cos x) \right]_0 = \frac{1}{3!} x^3 (\sin \sin x)_o = 0 \quad (71)$$

Se $n = 4$, temos

$$a_4 = \frac{1}{4!} x^4 \left[\frac{d^4}{dx^4} (\cos \cos x) \right]_0 = \frac{1}{4!} x^4 (\cos \cos x)_o = \frac{1}{4!} x^4 \quad (72)$$

E assim sucessivamente. Os termos com n ímpar são nulos e pares são alternados, de forma que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad (73)$$

E a série de Taylor de $f(x) = \cos x$ fica

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots + (-1)^1 \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \dots \quad (74)$$

Quando $x \ll 1$, podemos aproximar $\cos x$ por

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2} x^2 \quad (75)$$

E dependendo do valor x , podem ser necessários mais termos da série para se ter uma boa aproximação.

Outra série importante é a da função binominal, dada por $f(x) = (1 + x)^m$, onde m é uma potência qualquer. Para essa função, considera-se $x_0 = 0$, temos, para $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{0!} x^0 (1 + 0)^m = 1 \quad (76)$$

Quando $n = 1$, achamos

$$a_1 = \frac{1}{1!} x^1 \left[\frac{d}{dx} (1 + x)^m \right]_0 = xm(1 + 0)^m = mx \quad (77)$$

Se $n = 2$, ficamos com

$$a_2 = \frac{1}{2!} x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} (1 + x)^m \right]_0 = \frac{1}{2} x^2 [m(m-1)(1+0)^m] = \frac{m(m-1)}{2} x^2 \quad (78)$$

E, para $n = 3$, obtemos

$$a_3 = \frac{1}{3!} x^3 \left[\frac{d^3}{dx^3} (1+x)^m \right]_0 = \frac{1}{3!} x^3 [m(m-1)(m-2)(1+0)^m]$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 \quad (79)$$

De modo que

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{(m-1)(m-2)(m-n-1)}{n!} x^n, n \neq 0 \quad (80)$$

E, assim, a série binomial fica

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)! n!} x^n \quad (81)$$

6 SÉRIE DE TAYLOR APLICADA NA FÍSICA

6.1 FUNÇÃO HORÁRIA NO MRUV

A posição de um ponto material em MRUV varia com o quadrado do tempo segundo a expressão abaixo:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (82)$$

Onde S_0 e V_0 são, respectivamente, a posição inicial e a velocidade inicial no instante t_0 e a é a aceleração (constante) a que está submetido o ponto material. Fixados Parâmetros S_0 , V_0 e a que definem o movimento acelerado, a expressão acima permite determinar para qualquer instante de tempo, a posição do ponto material. Por isso, é denominada a função horária do **MRUV**.

Dito de outro modo a equação (82) é considerada a expansão da série de Taylor da função $\square(\square) = \square$ em torno do ponto $\square_0 = 0$, ou seja, é a própria série de MacLaurin da função discutida.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n(S)}{dt^n} \right]_0 t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (83)$$

O primeiro termo corresponde a $\square = 0$

$$a_0 = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0(S)}{dt^0} \right]_0 t^0 = S_0 \quad (84)$$

Quando o segundo termo ser $n = 1$, temos,

$$a_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d^1(S)}{dt^1} \right]_0 t^1 = V_0 t \quad (85)$$

E no caso de $n = 2$, se verifica

$$a_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2(S)}{dt^2} \right]_0 t^2 = \frac{1}{2} at^2 \quad (86)$$

E o n-ésimo termo,

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n(S)}{dt^n} \right]_0 t^n \quad (87)$$

E a série de Maclaurin fica

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n(S)}{dt^n} \right]_0 t^n = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} at^2 + \dots + \frac{1}{n!} Kt^n + \dots \quad (88)$$

Então é notável destacar, que a função horária estudada no movimento retilíneo uniformemente variado equivale à série de MacLaurin considerando apenas os três primeiros termos da série, que nesse caso são os termos envolvidos de significado físico na Mecânica Clássica.

6.2 ENERGIA CINÉTICA CLÁSSICA

Considere uma partícula⁵ como massa m se locomovendo no eixo x , partindo de $x_0 = 0$ até x . Sobre essa partícula age uma força F que a tira do estado de velocidade nula até o estado de velocidade v . Então, de acordo com a segunda lei de Newton, que

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (89)$$

Onde p é o momento linear. Por outro lado, a energia cinética da partícula varia de 0 até k . De acordo com o Teorema do trabalho-energia, o trabalho realizado pela força F é: $W = \delta K = K$ Assim,

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{dp}{dt} dx = \int_0^p v dp \quad (90)$$

No entanto, o momento linear relativístico é dado por

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (91)$$

Sendo m a massa de repouso. Então, usando a relação $v dp = d(vp) - p dv$ e colocando (91) em (90), encontra-se que

⁵ Situação retirada do trabalho dos autores Oliveira, S et al, no trabalho intitulado: uma comparação entre deduções da equação $E = mc^2$.

$$W = \int_0^v = [d(vp) - p dv] \quad (92)$$

E logo,

$$W = \left[\frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^v - m \int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (93)$$

Usando que

$$\int \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (94)$$

Vem

$$W = \left[\frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^v + \left[mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]_0^v = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^v \quad (95)$$

Finalmente

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (96)$$

Portanto

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \quad (97)$$

À medida que v se aproxima de c , a energia cinética se aproxima do infinito. Assim segundo vieira et al (2004) a equação (97) deve atingir a expressão newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$, válida quando v for muito menor que c . Que pode ser verificado expandido o fator de correção usando a série binomial na forma

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!n!}x^n \quad (98)$$

Para esse caso, $m = -\frac{1}{2}$ e $x = -\frac{v^2}{c^2}$, logo,

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (99)$$

Combinando a relação anterior com $K = (\gamma - 1)mc^2$, obtendo

$$K = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1\right) mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \quad (100)$$

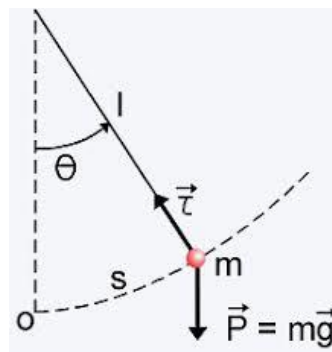
Quando $v \ll c$, todos os termos anteriores são desprezíveis, com exceção do primeiro, e, se obtém a expressão newtoniana.

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \quad (101)$$

6.3 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Os pêndulos fazem parte de uma classe de osciladores harmônicos simples nos quais a força restauradora está associada à gravidade, ao invés das propriedades elásticas de um fio torcido ou de uma mola comprimida.

Figura 1: Pendulo Simples



Fonte: www.cepa.if.usp.br.

O pêndulo simples, como mostra a figura 1, é composto de um corpo suspenso através de um fio de massa desprezível, e ele é posto a oscilar em torno de sua posição de equilíbrio. No seu movimento a corpo descreve um arco de circunferência.

A componente do peso, tangencial ao deslocamento é a força de restauração desse movimento, porque age no corpo de modo a trazê-lo de volta à sua posição central de equilíbrio. A componente do peso, perpendicular ao deslocamento é equilibrada pela tração exercida pelo fio, de modo que a resultante das forças tem a forma:

$$F = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (102)$$

Onde s é o deslocamento medido ao longo do arco que descreve a oscilação, e o sinal negativo indica que a força age na direção da posição de equilíbrio como no caso do sistema, massa - mola. O arco s é definido como

$$S = l\theta \Rightarrow \frac{d^2 S}{dt^2} \Rightarrow l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (103)$$

$$S = l\theta \Rightarrow \frac{d^2 S}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin \theta = 0 \quad (104)$$

Para pequenas oscilações do pêndulo, podemos aproximar $\sin \theta = \theta$, fazendo a expansão da série de Taylor da função $f(\theta) = \sin \theta$ em torno de $\theta_0 = 0$. Nesse caso, temos, para $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{0!} \theta^0 \sin 0 = 0 \quad (105)$$

Para $n = 1$, obtemos

$$a_1 = \frac{1}{1!} \theta^1 \left[\frac{d}{d\theta} (\sin \theta) \right]_0 = \theta (\cos \theta)_0 = \theta \quad (106)$$

O termo com $n = 2$ fica

$$a_2 = \frac{1}{2!} \theta^2 \left[\frac{d^2}{d\theta^2} (\sin \theta) \right]_0 = \frac{1}{2!} \theta^2 (-\sin \theta)_0 = 0 \quad (107)$$

Para $n = 3$, temos

$$a_3 = \frac{1}{3!} \theta^3 \left[\frac{d^3}{d\theta^3} (\sin \theta) \right]_0 = -\frac{1}{3!} [\theta^3 (\cos \theta)_0] = -\frac{\theta^3}{3!} \quad (108)$$

Quando $n = 4$, fica

$$a_4 = \frac{1}{4!} \theta^4 \left[\frac{d^4}{d\theta^4} (\sin \theta) \right]_0 = \frac{1}{4!} [\theta^4 (\sin \theta)_0] = 0 \quad (109)$$

E assim sucessivamente. os termos com n par são nulos e com n ímpares são alternados de forma que

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \quad (109)$$

E assim, a série de Taylor de $f(\theta) = \sin \theta$ fica

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\ &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} + \dots \quad (110) \end{aligned}$$

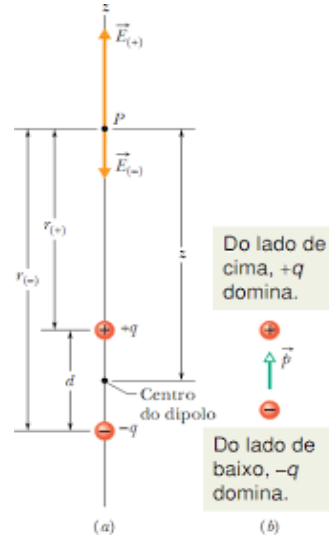
Então desconsiderando os termos anteriores ao primeiro termo tem-se que, para pequenas oscilações segundo Neto (2016), a equação (110), torna-se

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right) \theta = 0 \quad (111)$$

Denominada equação do oscilador harmônica simples.

6.4 DIPOLO ELÉTRICO

Figura 2: Dipolo elétrico



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2012, p.28, vol.3).

Considere a figura 2 acima, o dipolo elétrico é formado por duas cargas, sendo uma delas positiva de carga $+q$ e a outra negativa de carga $-q$, separadas por uma distancia d . Pelo princípio da superposição conforme Gomes, Magnani e Marcassa (2020), o campo elétrico total em um ponto P no eixo do dipolo, a uma distância z do seu centro conforme a Figura 2, é dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad (112)$$

$$E = E_+ + E_- \quad (113)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2_{(+)}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2_{(-)}} \quad (114)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}d\right)^2} - \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}d\right)^2} \right] \quad (115)$$

Percebe-se que os termos em evidência na expressão acima podem ser representados pela série binomial

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!n!}x^n \quad (116)$$

Então a expressão, fica

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right] \quad (117)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \left[1 - (-2) \frac{d}{2z} + \dots - \left(1 + (-2) \frac{d}{2z} + \dots \right) \right] \quad (117)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \left[\frac{d}{z} + \frac{d}{z} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \frac{2d}{z} \quad (118)$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3} \Rightarrow E \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad (119)$$

Para P distante do dipolo, ou seja, para $z \gg d$, podemos desprezar o termo $\frac{d}{2z}$ entre parênteses, e obtém-se o dipolo elétrico (119).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em resumo, o trabalho com séries é muito comum em vários campos da Física desde situações clássicas até as situações mais complexas. A modelagem matemática da série e do polinômio de Taylor em problemas físicos é de suma importância não só para se ter simplicidade na resolução dos mesmos, mas também obter um melhor conhecimento do fenômeno investigado.

É relevante frisar que nem sempre se pode representar uma função na forma de uma série, mas mesmo assim algumas das principais funções podem ser representadas por meio de uma série, como funções trigonométricas, funções de potências e exponenciais.

Assim a manobra matemática de expandir uma função em série de Taylor ou aproximá-la ao Polinômio de Taylor é uma ferramenta indispensável tanto na Física como no Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, é importante salientar também que este trabalho tem o intuito de contribuir no processo de ensino e aprendizagem dos alunos ingressados nos cursos de física.

REFERÊNCIAS

GOMES, N D; MAGNANI, B. F; MARCASSA, L. G. **Armadilhas ópticas de dipolo: teoria e experimento de forma didática.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 42, 2020. Disponível em: < https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172020000100469&script=sci_arttext&tlng=pt > acesso em 17 de nov. 2020.

MACHADO, K. D. **Equações Diferenciais Aplicadas à Física.** Vol.1. Ponta grossa, PR: Toda Palavra, 2019.

MARCONI, M. d. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica.** [S.l.]: Atlas, 2003. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india>. Acesso em 21 de nov. 2020.

MORAIS, F, P. et al. **Séries Numéricas e Séries de Potências.** São Luís, MA. 2009. Disponível em: <https://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&as_sdt=0%2C5&q=S%C3%A9ries+Num%C3%A9ricas+e+S%C3%A9ries+de+Pot%C3%Aâncias&btnG=>>. Acesso em 07 de nov. 2020.

MASSAGO, Sadao. **Sequências e Séries.** 2011. Disponível em: <[NETO, E, C. **Aplicação do Polinômio de Taylor na Aproximação da Função Seno.** Universidade Federal de Goiás, 2016. Disponível em: <<http://repositorio.se.df.gov.br/bitstream/123456789/673/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20-%20Em%c3%adlio%20Curi%20Neto%20-%202014.pdf>>. Acesso em 04 de set. 2020.](https://d1wgtxts1xzle7.cloudfront.net/35859538/sequencias-e-series.pdf?1417979713=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DSequencias_e_Series.pdf&Expires=1617643536&Signature=V9CvnflKHT4BnGBDaVQun-HfX~DOTN~zvTuvZjZL408DHsnZ3jM4fpxdt4kk71NcxGs98r~kklnhkj1oYj08yBWxhp8r4~YuuRZ4HKNE5vG8ty0zdgQ7YXKBEWrNnly18A6nWUV4IOqlFkmKT1Ga6-gS98E~7oN91E1XrJzyv6GLDUG2KEo673CBZ3dYPRNMVIAKDT02-G6TqJ7HXwj89OySQk9gnqnup-aCvhV-Emq~V4Dr4alzbgMfeJ~vtqUozwzlc4v-0XHPpRn7M8Vn-LaOUESqPSQgYcOAvhzz7WlqHHTAkbEsGJVtX3I~qB0rFvrgUwCXBYRe7nFns-O4iW_&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA>. Acesso em 09 de nov. 2020.</p>
</div>
<div data-bbox=)

RESSURREIÇÃO, V. P. **Teorema de Taylor:** Aplicação da fórmula de Taylor a extremos e convexidade. 2014. Disponível em: <https://www2.ufrb.edu.br/bcet/components/com_chronoforms5/chronoforms/uploads/tcc/20190314162542_2014.2_-_TCC_Vanline_Ressurreio_-_Teorema_de_Taylor_Aplicao_da_Frmula_de_Taylor_a_Extremos_e_Convexidade.pdf>. Acesso em 04 de nov. 2020.

SANTOS, E. I. dos. **O Polinômio e Série de Taylor: Um estudo com aplicações.** 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9833>>. Acesso em 06 de nov. 2020.

SUAVE, R. N.; NOGUEIRA, J. A. **Uma Discussão Sobre as Aproximações na Determinação do Período Máximo de um Pêndulo Simples.** Revista Brasileira de Ensino de Física, SciELO Brasil, v. 38, n. 2, 2016, pág.1.017. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172016000200601&script=sci_arttext>. Acesso em 03 de nov. 2020.

VIEIRA, S. et al. **Uma Comparação entre Deduções da Equação $E = mc^2$.** Revista Brasileira de Ensino de Física, SciELO Brasil, v. 26, n. 2, p. 93–98, 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0102-47442004000200003&script=sci_arttext&tlng=pt>. Acesso em 17 de nov. 2020.