



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
PIAUÍ – *CAMPUS* PARNAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

Equação da Onda Unidimensional: Modelagem e Métodos de Resolução

Tayla Johana dos Santos Costa

Parnaíba - 2018

Tayla Johana dos Santos Costa

Trabalho de Conclusão de Curso:

**Equação da Onda Unidimensional: Modelagem e Métodos de
Resolução**

Trabalho de conclusão de curso submetido à coordenação do curso de Licenciatura em Física, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí - *Campus* Parnaíba, como requisito para obtenção do grau em Licenciatura em Física.

Orientador:

Prof. Me. Diego Prudêncio Soares

Co-Orientador:

Prof. Me. Alexandro das Chagas de Sousa
Nascimento

Parnaíba - 2018

Dedico este trabalho à minha mãe, meu pai, minha avó e Deus.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a minha família por ter sido compreensiva nessa reta final, me permitindo ficar sem trabalhar e dando apoio nos últimos semestres neste TCC para que eu conseguisse poder me dedicar e finalmente finalizar depois de tantos altos e baixos. Ao meu noivo, Francisco José Cordeiro Fontenele, que também já é da minha família e dedicou inúmeras horas para me ouvir sobre o trabalho e o curso, bem como me ver chorar e consolar por todos os empecilhos durante esse processo de finalização do curso, sem esquecer as inúmeras vezes que leu e releu meu TCC dando sua opinião na forma de escrita, objetivos e metodologia; agradeço também por me ouvir falar das minhas disciplinas mesmo não sendo da área me ajudou a estudar e exercitar os conceitos e cálculos. A minha comadre Aracelly Maria, que leu este TCC algumas vezes e me deu apoio e força durante todo o processo do curso.

Aos meus colegas de sala e de curso: Jefferson Wherculis por ter me apresentado a linguagem/plataforma LaTeX e proporcionado toda este belo visual do trabalho; Thaynara Brena, por ler meu trabalho e levantar minha moral numa hora que eu tava duvidando se ele estava interessante; Ângelo Neto e Nilson Marcos, por terem me ajudado em inúmeras passagens de cálculo e comandos do LaTeX assim como as discussões no grupo de estudo com as disciplinas dos períodos 6, 7 e 8 para a conclusão do curso; João Vitor, por me ajudar na revisão do trabalho, pelas caronas e pela ajuda em me familiarizar com o clima do grupo de estudo; Gabriel Gaspar, pelas caronas, críticas construtivas quanto ao TCC e pelo jeito peculiar de querer mandar no grupo de estudo, fazendo com que nós fossemos cada vez mais produtivos; Everton Lins, por mostrar que nunca é tarde para fazer o que gosta e que não fazer o Ensino Médio não o impediria de seguir com a tão sonhada graduação, que é possível conciliar a vida pessoal e terminar um curso tido como tão difícil e pelos seus "PDFs" de foto do quadro e questões resolvidas para estudar; e por último, e não menos importante, Edmilson Junior, por estar comigo desde o primeiro período me

dando caronas e força, por me levar para o grupo de estudo que foi fundamental para eu chegar até o final do curso (*go alfas!*).

Agradeço ao João Marcos por me incentivar a permanecer no curso e por estudar comigo na disciplina de Física Moderna, uma das épocas onde mais precisei, a Renata Yarima por ser uma amiga dentro e fora do curso e pelo bebê mais lindo que ela nos trouxe, Luigi; a Gabriela de Assis e suas resoluções de questões, seus "PDFs" para fazer resenha e resolver questões; agradeço a Bruna Reis e a Maria José pelo apoio durante um momento tão difícil que foi abandonar o primeiro tema de TCC que escolhi para o novo elas terem me consolado e me dado força para continuar e estudar de forma independente depois, agradeço também ao grupo de estudo da luluzinha. Dentre os demais alunos, agradeço em especial ao Lucas Sousa que esteve comigo ajudando a estudar e compreender os conteúdos, desde o primeiro período até quase no último ano. Ao Wellyson Rodrigues, que embora tenha perdido mais o contato, me iniciou no Grupo Observacional de Astronomia. Agradeço muito ao incentivo que o trio Keilla Façanha, Nailson Vasconcelos e Rodrigo Almeida, que inúmeras vezes diziam palavras de conforto, apoio aos alunos mais novos do curso e que ainda hoje nos ensinam e incentivam a buscar novos horizontes.

Agradeço a todos os professores do curso, por sempre ensinarem coisas que levarei não só para a carreira profissional como para a vida: José Venâncio Leão, Gilvana Parente, Laura Emilia, Jeová Calisto, Luiz Fernando, Renata Cunha, Marcos Antonio, Vilma Dias, Itamar Junior, Lucrécia Souza, Akyciel Farias e Iriane Rosa. Especialmente Bruno Sombra por ser compreensivo no fim do curso com uns problemas pessoais que tive e que estavam afetando meu desempenho e por aceitar cuidar do grupo de astronomia mesmo sem ser tão familiarizado com a área; Alexandro Nascimento, por aceitar o desafio de ser meu co-orientador com tão pouco prazo para o fim, por ter ajudado o grupo de astronomia durante muitos anos e Diego Prudêncio por ter aceitado ser meu orientador, nunca ter dispensado minhas ideias de projeto e por me ajudar bastante com este trabalho que me proporcionou tanto aprendizado. Agradeço também aos professores Lucas Izidio e Deymes que mesmo não tendo ministrado aulas diretamente para mim, me proporcionaram grandes aprendizados no laboratório de ensino de Física.

Por fim, às tias do refeitório e aos demais funcionários do campus, em especial à psicóloga Erotides, que foi de fundamental importância nesse processo de finalização e ao Luciano Kelvin pelo auxílio e apoio. A Deus, pois sem ele nada disso teria sido possível.

“A ciência é uma irmã caçula (talvez bastarda) da arte”.

Césare Mansueto Giulio Lattes.

Resumo

Neste trabalho abordamos um conjunto de metodologias para a resolução de Equações Diferenciais Parciais, com foco principal na apresentação de uma metodologia alternativa, o qual utiliza de um método de substituição de variáveis por outras duas arbitrarias a fim de facilitar a busca de solução. Pela ampla aplicação do tema de ondulatória, escolhemos trabalhar com a Equação da Onda mas nada impede a possibilidade de aplicação desta proposta em inúmeras outras áreas da Física e o tratamento da onda unidimensional por conta da possibilidade de utilização também em casos de dimensões superiores a uma. A partir de uma situação Física proposta, foi possível executar a modelagem matemática da equação da onda, encontrada na maioria dos livros que abordam o tema. Partindo da equação diferencial foram propostas duas situações ao qual ela pode aparecer: como problema homogêneo e não homogêneo. Com base na pesquisa bibliográfica exploratória inicial foi possível realizar a resolução da equação da onda unidimensional de três formas: a primeira, usando o método tradicionalmente encontrado em livros de Física, conhecido como método de separação de variáveis, com o intuito de mostrar como o método é simples, porém limitado; na segunda utilizamos o arcabouço matemático adquirido durante a leitura e reprodução dos cálculos comprovando a eficácia ao encontrar a Solução D’Alembert, que é uma solução característica muito conhecida para o problema e eficaz; e por fim utilizamos novamente a substituição de variáveis para resolver o problema não homogêneo o qual possibilitou reforçar a eficácia do método proposto ao encontrarmos a solução geral para a equação da onda.

Palavras-Chave: Métodos, Equações Diferenciais, Equação da Onda

Abstract

This work has an approach of characteristics of the group to solve the Partial Differential Equations, focusing mainly on present an alternative methodology, which consist to variable method substitution any other arbitrary for the purpose of further a solution exploration. The broad application of the undulatory theme we chose to work with the Wave Equation by to possibility the using of this proposal techniques on innumerable different Physics studies and the treatment one-dimensional wave because of the potential using on situations with higher dimensions. From a physical situation proposal, it was possible execute a mathematic working to find the feature equation this way found in most books which deal with the theme and starting from the differential equation. Thus, it was two situations which it can appear: as an homogeneous problem or non-homogeneous problem. To achieve these objectives was carried out a bibliographic research of exploratory type at the beginning was possible realize the one-dimensional wave equation solution on three times: first using the traditional method found on Physics and Differential Equation books to show that the method is simple, but limited; second form using the mathematic theoretical framework acquired during the study and reproduction to prove the efficiency calculus by D’Alembert solution, that is a famous feature equation on this kind of problems; and finally it has used again the replacement of variables to solve the non-homogeneous problem which enabled to strengthen the effectiveness of the proposed method by finding the general solution for the wave equation.

Key-words: Methods. Differential Equation. Wave Equation.

Sumário

Resumo	v
Introdução	1
1 Conceitos Básicos	3
1.1 Variáveis Independentes e Dependentes	4
1.2 Funções Contínuas, Não-Contínuas e Classe de Continuidade	5
1.3 Classificação das Equações Diferenciais	7
1.4 Regra da Cadeia, Teorema de Green e Teorema da Função Implícita	8
2 Algumas Técnicas de Resolução de Equações Diferenciais	10
2.1 Equações Diferenciais Ordinárias	10
2.2 Equações Diferenciais Separáveis	11
2.3 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Cons- tantes	13
2.4 Equações Diferenciais Parciais Simples	14
2.5 Método de Separação de Variáveis	15
3 Método das Curvas Características	18
4 Ondas	27
4.1 Modelagem da Equação da Onda	30
4.2 Solução Pelo Método de Variáveis Separáveis	32
4.3 Equação da Onda Homogênea e a Solução D’Alambert	34
4.4 Solução da Equação da Onda Não Homogênea	39
Considerações Finais	43

Introdução

Um dos temas da matemática que mais possui aplicações nas demais ciências são as Equações Diferenciais Parciais - EDP's; áreas como Física, Química, Biologia, Ecologia, Sociologia e Economia representam algumas das abrangências (SIMÕES, 2014). Especialmente na Física, as EDP's fazem parte de temas como mecânica, fluidos, eletricidade, magnetismo, ótica e ondas (SODRÉ, 2003), o qual para este, o caso unidimensional é analisado em detalhes neste trabalho. A matemática proporciona construir uma modelagem consistente para descrever os diversos fenômenos físicos (SIMÕES, 2014), possibilidade de resolver inúmeros problemas e prever situações físicas como encontrados em livros aplicados a Física (NUSSENZVEIG, 2002; MACHADO, 2004; ARFKEN; WEBER, 2007; GRIFFITHS, 2011).

O presente trabalho tem como intuito principal apresentar um método alternativo para a resolução de Equações Diferenciais Parciais como descrita por Medeiros, Ferrel e Biazzutti (2005), com aplicação na equação da onda unidimensional (GONDAR; CIPOLATTI, 2005), que embora alguns Físicos autores não utilizem tal método, é uma ferramenta matemática que abrange uma infinidade ainda maior de problemas, pois dá a possibilidade de resolução de equações diferenciais com termo misto. Reunir os métodos tradicionais de equações diferenciais que contribuem diretamente para encontrar as soluções da equação da onda seja ela homogênea ou não homogênea.

É de fundamental importância conhecermos mais métodos de resolução pois proporciona uma flexibilidade maior ao estudante/pesquisador na hora de resolver problemas, sejam eles simples ou mais avançadas (ASSIS, 2015). Ondulatória é um dos estudos mais abrangentes em Física, pois envolvem fenômenos dos mais variados tipos como: luz, calor, som, propagação de onda sísmica entre outros, o qual podem ocorrer nas formas unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais; consideraremos o fenômeno unidimensional, pois a partir de uma aproximação matemática é possível resumir n dimensões

para apenas uma, simplificando assim as equações.

A partir da exploração de algumas das aplicações dos métodos Matemáticos à Física, através de uma revisão bibliográfica, reprodução dos cálculos e provando o método de resolução de equações de forma analítica, reunimos os conceitos relacionados que são fundamentais lembrar para compreender o desenvolvimento do trabalho; bem como os principais métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais analisamos um método alternativo mais geral para equações com termo misto, utilizando de analogias com as equações conhecidas da parábola, elipse e hipérbole bem como algumas proposições e exemplos. Por fim conceituamos as definições principais sobre os fundamentos da ondulatória, fazendo uma modelagem da equação da onda unidimensional, em seguida aplicamos as técnicas obtidas, reproduzindo a resolução feita anteriormente por outros autores para a equação da onda homogênea (MACHADO, 2004). Analisamos a equação D'Alarbert tanto para o problema homogêneo (BRANNAN; BOYCE, 1994) como o não homogêneo.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

O estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDP) é de extrema importância para a Física, pois a maioria dos fenômenos físicos podem ser descritos por estas equações, tais como as Leis de Newton para o resfriamento dos corpos, dinâmica dos fluidos, as Equações de Maxwell do eletromagnetismo, deformação dos corpos elásticos; também fenômenos ligados à biologia como a propagação de vírus, genética e a química (SODRÉ, 2003).

Abaixo apresentamos alguns exemplos de EDP com a forma usual que encontramos nos livros de Física e uma notação matemática (SODRÉ, 2003):

Em estudos relacionados à corrente de calor observa-se, pela Lei de Fourier, tal corrente sendo descrita da seguinte forma:

$$\vec{q} = -k\nabla T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (1.1)$$

Temos que $\vec{q}$ é a corrente de calor, k uma constante característica do material ou meio em que se propaga e ∇ representando o operador gradiente da função, que são as derivadas parciais da função da temperatura T em termos das coordenadas x e y (o qual pode haver outra dimensão como a z se a propagação for tridimensional). Ainda em estudos relacionados ao calor, temos a equação do calor bidimensional como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (1.2)$$

O qual $\frac{\partial T}{\partial t}$ é a taxa de temperatura com passar do tempo, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ são as derivadas da propagação em relação às coordenadas do plano.

Um outro exemplo é a Equação de Laplace Tridimensional

$$\Delta U = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (1.3)$$

sendo Δ o operador laplaciano que nada mais é que a soma das derivadas de segunda ordem da função em relação às coordenadas x , y e z .

Alguns conceitos necessários para entender de tais equações serão apresentadas nas seções seguintes.

1.1 Variáveis Independentes e Dependentes

Podemos classificar variável independente como qualquer incógnita que pode assumir qualquer valor possível sem depender de outra variável. Já a variável dependente ocorre quando uma variável depende da outra para definir seu valor.

Definição 1.2: Quando uma variável depende de outra, ou outras, ela é dita dependente. Dizemos também que essa variável é uma função das variáveis da qual ela depende. Ela não pode assumir qualquer valor, pois depende de outras variáveis. São exemplos de variáveis dependentes as seguintes funções: $y(x)$, $z(x, y)$, $h(x, y, z)$, $x(y)$, $y(x, z, t)$, $f(x, y)$ [...] (MACHADO, 2004).

Vamos tomar como exemplo uma função horária da velocidade do movimento variado para exemplificar. Seja:

$$v(t) = v_0 + at. \quad (1.4)$$

a equação que representa a velocidade de uma partícula se movimentando com aceleração constante a , a partir de uma velocidade inicial v_0 , onde a variável temporal t pode assumir qualquer valor. Note que a incógnita referente ao tempo assume um valor próprio que independe das variáveis de aceleração e velocidades envolvidas na equação. O oposto ocorre com a velocidade em questão, que é representada como $v(t)$, onde v é a variável que depende de t para assumir um valor.

Podemos exemplificar uma variável dependente correlacionada a duas ou mais incógnitas observando a figura 1.1 a seguir, exemplo de uma Equação da Onda Harmônica (NUSSENZVEIG, 2002) que ao sofrer a ação de uma força externa para iniciar a oscilação, aparece durante a resolução um incremento da força à equação geral de oscilações harmônicas simples. A função fica dependente de duas variáveis.

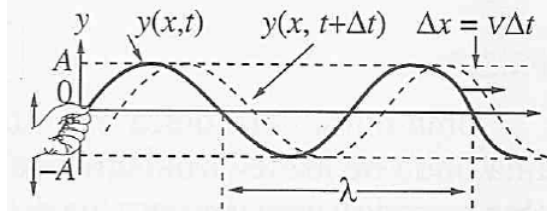


Figura 1.1: Representação de uma onda harmônica com suas variáveis dependentes e independentes. Fonte: (NUSSENZVEIG, 2002, p.101)

Tal movimento é descrito pela função:

$$y(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \delta). \quad (1.5)$$

Observar que a onda se propaga em duas coordenadas, x e y . A equação descreve a posição y em que a onda se encontra, dependendo simultaneamente das incógnitas x (representante da posição) e t (representante do tempo), o qual novamente as variáveis independentes x e t podem assumir quaisquer valores possíveis.

1.2 Funções Contínuas, Não-Contínuas e Classe de Continuidade

Uma função $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita contínua num ponto $x = a$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$. Quando $F(x)$ é contínua para todo x pertencente a I dizemos simplesmente que F é contínua.

Da mesma forma, para uma função de duas variáveis $F = F(x, y)$, dizemos que a mesma é contínua no ponto $(x, y) = (a, b)$ se, e somente se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y) = F(a, b).$$

Quando $F(x, y)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos apenas que F é contínua. A mesma ideia acima pode ser aplicada para funções de três ou mais variáveis.

Geometricamente, dizer que uma função de uma variável $F(x)$ é contínua num ponto P qualquer de seu domínio significa que naquele ponto não há nenhum “salto”, ou distanciamento da curva característica, definido assim por Hamilton (2001) como no gráfico a seguir:

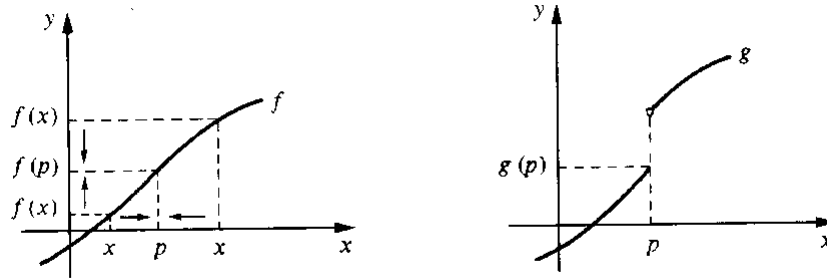


Figura 1.2: Gráfico de função contínua e não contínua, respectivamente. Fonte: (HAMILTON, 2001, p.60)

Dizemos que uma função é de classe C^n quando ela é uma função derivável até a ordem n e tal derivada é contínua (LIMA, 2010a), por exemplo, dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que denotaremos por $f(x)$ temos que:

- * $f'(x)$ é a função derivada primeira da função $f(x)$. No caso de $f'(x)$ ser uma função contínua dizemos que $f(x)$ é de classe C^1 , ou simplesmente $f \in C^1$;
- * $f''(x)$ a função derivada segunda da função $f(x)$. No caso de $f''(x)$ ser uma função contínua dizemos que $f(x)$ é de classe C^2 , ou simplesmente $f \in C^2$;
- * A definição segue de maneira análoga até as derivadas de uma ordem n qualquer com $n \in \mathbb{N}$.

Se $f(x)$ possuir derivadas contínuas até a ordem n , qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, dizemos que f é infinitamente diferenciável e que $f \in C^\infty$.

A classe de continuidade define até que ponto podemos derivar uma função e ela ainda ser contínua. Uma função pode ser de classe C^0 , significa que ela é uma função contínua, mas a sua derivada não é contínua.

1.3 Classificação das Equações Diferenciais

Conhecer e classificar as equações diferenciais são importantes, pois desta forma podemos determinar de que forma é possível resolver equação, qual o método mais adequado, já que para determinados tipos de equações temos métodos específicos para resolvê-las. Podemos classificar as equações diferenciais quanto ao tipo, ordem, grau e linearidade.

Equações que envolvem funções e suas derivadas são denominadas Equações Diferenciais. Quando as derivadas que aparecem numa equação são derivadas ordinárias, isto é, derivadas de funções que dependem apenas de uma variável, então a equação é denominada de Equação Diferencial Ordinária (EDO). Em contrapartida, quando na equação diferencial aparecem mais de uma variável independente, então a mesma é uma Equação Diferencial Parcial (EDP).

A Ordem de uma equação diferencial é a maior ordem das derivadas que aparecem na equação. Já o grau é o valor do maior expoente que eleva a função incógnita ou qualquer de suas derivadas (SODRÉ, 2003). Por exemplo, temos as seguintes equações:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \cos(t);$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

A primeira dessas equações é uma EDO de ordem 4, pois é a maior derivada da equação; e grau 1, por ser o maior expoente na qual a função incógnita x e suas derivadas estão elevados. A segunda equação é uma EDP de ordem 2, pois a maior derivada que aparece na equação é de 2ª ordem, é de grau 3 pois a derivada primeira de v com relação a y está sendo elevada ao expoente 3, enquanto as outras derivadas de u e v estão elevadas a 1.

São equações diferenciais lineares todas aquelas que são de grau 1 na função incógnita e em suas derivadas, caso contrário, dizemos que a equação diferencial é não-linear.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Linear}$$
$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Não-Linear}$$

1.4 Regra da Cadeia, Teorema de Green e Teorema da Função Implícita

Primeiramente vamos lembrar alguns resultados importantes do cálculo, um deles é a regra da cadeia, onde estão definidas abaixo os casos que utilizaremos no presente texto.

I - Sejam as funções $f(x)$, e $x = g(t)$ supostas deriváveis, neste caso temos uma função composta $h(t) = f(g(t))$, cuja derivada pode ser escrita como:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{df(g(t))}{dx} \frac{dg(t)}{dt}. \quad (1.6)$$

II - Considere uma função dependente de duas variáveis $z = f(x, y)$ onde x e y dependem de um parâmetro t , isto é, $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Suponha tais funções também diferenciáveis. Neste caso, podemos encontrar a derivada da função $z(t) = f(x(t), y(t))$ com relação a variável t da seguinte forma:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (1.7)$$

III - Por fim, para o caso de termos uma função diferenciável $z = f(x, y)$ onde $x = x(r, s)$ e $y = y(r, s)$ são funções diferenciáveis que dependem das variáveis r e s , podemos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial s}$ de forma análoga à do item anterior, onde teremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{cases} \quad (1.8)$$

Um outro resultado importante do cálculo é o teorema de Green que nos mostra uma estreita relação entre a integração numa região e a integração na fronteira dessa mesma região.

Teorema de Green: Sejam M e N funções de duas variáveis, como por exemplo x e y , de tal modo que possuam derivadas parciais primeira contínuas em um disco aberto G no $\mathbb{R}^2$. Se uma curva C for fechada contida inteiramente em G , e se R for uma região

limitada por C , então (LEITHOLD, 1994):

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1.9)$$

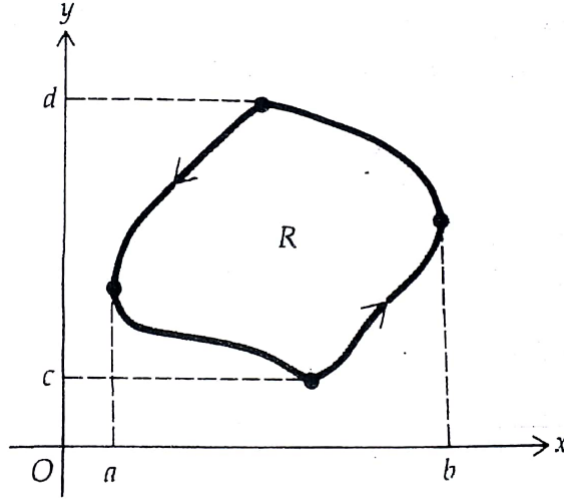


Figura 1.3: Representação de gráfico de uma região R limitada por uma curva fechada orientada. Fonte: (LEITHOLD, 2001, p.1101)

Uma outra ferramenta importante é o teorema da função implícita que nos mostra em que condições uma das variáveis independentes de uma função f pode ser representada como uma função das outras variáveis independentes de f , além disso, este teorema nos mostra como podemos calcular a derivada de tal variável independente em relação as outras variáveis independentes. Vejamos abaixo a versão do teorema da função implícita para o caso em que a função f depende apenas de duas variáveis.

Teorema (da Função Implícita): Considere uma função $f = f(x, y)$ de classe C^k com $k \geq 1$ tal que $f(x, y) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$, então y pode ser expressa como uma função de x de classe C^k e, além disso (LIMA, 2010b).

$$\frac{dy}{dx}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}. \quad (1.10)$$

Capítulo 2

Algumas Técnicas de Resolução de Equações Diferenciais

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Iniciaremos nosso estudo com Equações Diferenciais de 1ª Ordem descritas em Machado (2004), onde teremos uma função f dependendo de duas variáveis sendo x e y . Podemos escrever tal equação na seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.1)$$

Suponha que a função $f(x, y)$ pode ser escrita como razão de duas outras funções:

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \quad (2.2)$$

Se substituirmos $f(x, y)$, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (2.3)$$

$$N(x, y)dy = -M(x, y)dx, \quad (2.4)$$

E assim podemos reescrever na seguinte forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.5)$$

Utilizando como exemplo a função $f(x, y) = \frac{2x^2 - y}{x}$ e supondo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - y}{x}. \quad (2.6)$$

Reescrevendo:

$$x dy - (2x^2 - y)dx = 0, \quad (2.7)$$

ou

$$(y - 2x^2)dx + x dy = 0. \quad (2.8)$$

No caso acima podemos dizer que $y = y(x)$, porém isso não é uma regra geral, pois em outros casos pode ser melhor e mais fácil considerar que x seja uma função da variável y , isto é, $x = x(y)$.

2.2 Equações Diferenciais Separáveis

Podemos chamar de equações separáveis todas aquelas que tem tal característica (MACHADO, 2004):

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0, \quad (2.9)$$

pois podem ser colocadas na forma a seguir:

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0. \quad (2.10)$$

Podemos chamar os termos de:

$$M(x, y) = M(x) = \frac{F(x)}{f(x)}, \quad (2.11)$$

$$N(x, y) = N(y) = \frac{g(y)}{G(y)}, \quad (2.12)$$

Dessa forma, a equação (2.10) pode ser escrita como:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (2.13)$$

Para resolver a equação acima, basta que integremos em ambos os lados, resultando em

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c, \quad (2.14)$$

Iremos resolver como exemplo a seguinte equação:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad (2.15)$$

Separando as variáveis, como mostrado anteriormente:

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx, \quad (2.16)$$

ou ainda,

$$2xdx - \frac{1}{y}dy = 0. \quad (2.17)$$

Integrando ambos os termos respectivamente com suas variáveis integrantes:

$$\int 2xdx - \int \frac{1}{y}dy = \int 0dx, \quad (2.18)$$

Resolvendo:

$$x^2 - \ln y = c, \quad (2.19)$$

onde c é uma constante qualquer:

$$\ln y = x^2 - c. \quad (2.20)$$

Utilizando a propriedade da exponencial para eliminar o $\ln$ da função:

$$y = e^{x^2-c} = e^{x^2} \cdot e^{-c}, \quad (2.21)$$

e finalmente temos:

$$y(x) = Ae^{x^2}. \quad (2.22)$$

onde esta é a solução da equação e A é uma constante a ser determinada.

2.3 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Uma EDO linear, homogênea de segunda ordem, com coeficientes constantes, são equações do tipo:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0. \quad (2.23)$$

ou simplesmente:

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2.24)$$

onde a, b e $c \in \mathbb{R}$.

Para resolver esta equação é comum verificarmos para quais valores de m a função $y(x) = e^{mx}$ é solução de (2.24). Note que:

$$y'(x) = me^{mx} \quad \text{e} \quad y''(x) = m^2 e^{mx}. \quad (2.25)$$

substituindo a (2.25) na (2.24):

$$\begin{aligned} am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} &= 0, \\ (am^2 + bm + c)e^{mx} &= 0. \end{aligned}$$

como $e^{mx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ segue que:

$$am^2 + bm + c = 0. \quad (2.26)$$

esta equação é denominada equação característica da equação (2.23).

As possíveis soluções da equação (2.23) dependem do valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ da equação 2.26: assim para $\Delta > 0$ temos duas soluções reais e diferentes, para $\Delta = 0$ temos uma solução e se $\Delta < 0$ temos duas soluções complexas conjugadas.

Analisemos cada caso:

I - Para o caso $\Delta > 0$, a solução geral da equação (2.23) poderá ser escrito da forma:

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}. \quad (2.27)$$

onde m_1 e m_2 são soluções da equação (2.26).

II - Se tivermos $\Delta = 0$, sendo m a solução de 2.26, então a solução geral da (2.23) será uma função da forma:

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}. \quad (2.28)$$

III - Para $\Delta < 0$ as soluções de (2.26) serão complexas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, onde a solução geral neste caso será:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x). \quad (2.29)$$

Para uma melhor explicação de porque as equações (2.27), (2.28) e (2.29) são soluções da (2.23), recomenda-se que o leitor verifique Brannan (1994).

2.4 Equações Diferenciais Parciais Simples

As Equações Diferenciais Parciais são definidas pela existência de derivadas envolvendo uma ou mais variáveis dependentes em ordem e/ou duas ou mais independentes (SIMÕES, 2014).

Algumas das equações diferenciais parciais são simples de resolver, pois apresentam-se de tal forma que para resolvê-las basta que integremos em ambos os lados, como por

exemplo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + x^2 + 2y, \quad (2.30)$$

$$\int \frac{\partial z}{\partial x} dx = \int (x + x^2 + 2y) dx \quad (2.31)$$

$$z(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 2yx + \sigma(y). \quad (2.32)$$

onde a função sigma depende de y pois dessa forma ela se torna a "constante" na função, que quando derivado em x ele se torna nulo desta forma não alterando a função inicial.

Vejamos um exemplo um pouco maior, uma derivada parcial de segunda ordem.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = x^2 - e^t. \quad (2.33)$$

Resolvemos integrando primeiramente em x e posteriormente em t para obter a função u :

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = \int (x^2 - e^t) dx, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x^3}{3} - xe^t + \sigma(t) \quad (2.35)$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int \frac{x^3}{3} - xe^t + \sigma(t) dt, \quad (2.36)$$

$$u = \frac{x^3 t}{3} - xe^t + \int \sigma(t) dt + \alpha(x). \quad (2.37)$$

O termo $\sigma(t) \int dt$, onde $\sigma(t)t$ continua sendo uma função de t digamos $\beta(t)$. Reescrevendo temos:

$$u = \frac{x^3 t}{3} - xe^t + \beta(t)t + \alpha(x). \quad (2.38)$$

2.5 Método de Separação de Variáveis

O método de separação de variáveis consiste em transformar uma EDP de n variáveis em n EDO's, uma para cada variável independente, a partir da suposição de que a solução da EDP seja um produto de n funções de uma variável, uma para cada variável

independente, como exemplo considere a EDP:

$$x \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}. \quad (2.39)$$

considerando que a solução da EDP acima seja do tipo:

$$z(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.40)$$

teremos:

$$x \frac{\partial}{\partial x}(X(x)Y(y)) = \frac{\partial}{\partial y}(X(x)Y(y)), \quad (2.41)$$

$$xY(y) \frac{\partial X(x)}{\partial x} = X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y}, \quad (2.42)$$

$$\frac{x}{X(x)} \frac{dX(x)}{dx} = \frac{1}{Y(y)} \frac{dY(y)}{dy}. \quad (2.43)$$

Observamos que, na equação acima, os termos estão separados em variáveis x de um lado e y do outro, essa igualdade só é possível para todo x e y apenas se a equação for ela mesma uma constante, logo:

$$\begin{cases} \frac{x}{X(x)} \frac{dX(x)}{dx} = c; \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{dY(y)}{dy} = c. \end{cases} \quad (2.44)$$

resolvendo primeiro $(2.44)_1$ separando assim apenas a primeira equação do sistema, temos:

$$\frac{1}{X(x)} dX(x) = \frac{c}{x} dx, \quad (2.45)$$

$$\int \frac{1}{X(x)} dX = \int \frac{c}{x} dx, \quad (2.46)$$

$$\ln X(x) = c \ln x + k_1, \quad (2.47)$$

$$\ln X(x) = \ln x^c + k_1, \quad (2.48)$$

$$e^{\ln X(x)} = e^{\ln x^c + k_1}, \quad (2.49)$$

$$X(x) = e^{k_1} x^c. \quad (2.50)$$

ou seja, a função de $X(x)$ é escrita como:

$$X(x) = C_1 x^c. \quad (2.51)$$

onde a constante C_1 é uma outra forma de representar a constante k_1^c .

Resolvendo agora a $(2.44)_2$ separando:

$$\frac{1}{Y(y)} dY(y) = c dy, \quad (2.52)$$

$$\int \frac{1}{Y(y)} dy = \int c dy, \quad (2.53)$$

$$\ln Y(y) = cy + k_2, \quad (2.54)$$

$$Y(y) = e^{cy+k_2}, \quad (2.55)$$

$$Y(y) = e^{k_2} e^{cy}. \quad (2.56)$$

a função $Y(y)$ é:

$$Y(y) = C_2 e^{cy}. \quad (2.57)$$

onde a constante C_2 é uma outra forma de representar a constante e^{k_2}

Desse modo a solução da EDP (2.39) é o produto das equações (2.51) e (2.57), assim:

$$z(x, y) = C_1 x^c C_2 e^{cy},$$

$$z(x, y) = D x^c e^{cy}.$$

onde D é uma representação do produto de constantes $C_1 C_2$.

Capítulo 3

Método das Curvas Características

Nesta sessão veremos um método mais geral, abordado por Medeiros (2005) que podemos utilizar na resolução de equações diferenciais parciais de 2ª ordem. Veremos que as equações diferenciais de segunda ordem, podem ser classificadas em três classe: EDP's elípticas, parabólicas e hiperbólicas (ARFKEN; WEBER, 2007).

Considerando um operador diferencial abaixo:

$$Tu = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.1)$$

Tal operador tem como domínio o conjunto das funções de classe C^2 , elas possuem uma função incognita $u(x, y)$ no $\mathbb{R}^2$ onde são acompanhadas por funções reais $a(x, y)$, $b(x, y)$ e $c(x, y)$, o qual (x, y) pertencem ao conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Note que T é um operador linear para todo par de funções u e $v \in C^2$ e todo par de coeficientes reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale a propriedade:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv. \quad (3.2)$$

podemos associar uma função F qualquer definida num conjunto $\mathbb{R}^n$ tal que cada um de seus pontos $(x, y, \delta, \eta, \kappa)$ possua um número real $F(x, y, \delta, \eta, \kappa)$. Denomina-se equação diferencial de segunda ordem quase linear, uma equação do tipo:

$$Tu = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (3.3)$$

Considerando uma curva γ no $\mathbb{R}^2$, sem auto-intersecções podemos escrever simbolicamente

mente o Problema de Cauchy, ¹ que consiste em determinar uma função solução $u(x, y)$ para o sistema abaixo, onde são conhecidos os valores de $u(x, y)$ e suas derivadas na curva. Onde com base na (3.3) temos (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 2005):

$$\begin{cases} Tu = F; \\ u(x, y) \text{ em } \gamma; \\ \frac{\partial u}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ em } \gamma. \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\gamma : x = \phi(t) \text{ e } y = \omega(t). \quad (3.5)$$

Faremos uma adaptação da notação representando todas as incógnitas em questão em relação a t , já que u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ são conhecidas em γ portanto escrevemos as seguintes funções:

$$G(t) = u(x, y); \quad (3.6)$$

$$U(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y); \quad (3.7)$$

$$V(t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \quad (3.8)$$

Reescrevendo: Conhecemos sobre γ as funções u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e consequentemente $G(t)$, $U(t)$, $V(t)$ e $F(\phi(t), \omega(t), G(t), U(t), V(t))$. Assim conhecemos sobre γ as funções, $\frac{dU}{dt}$ e $\frac{dV}{dt}$ e as derivadas segundas de $u(x, y)$:

Utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \phi' + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \omega' \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \phi' + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \omega' \\ a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para sabermos se tal sistema tem solução determinável precisamos obter o determi-

¹Problema de Cauchy são equações sujeitas a condições iniciais para encontrar a solução, o qual de acordo com o valor das variáveis e condições, o problema é modelado em torno do ponto (SILVA, 2016).

nante D a partir de uma matriz $A_{3 \times 3}$ obtida no sistema de equações 3.9:

$$A = \begin{pmatrix} \phi' & \omega' & 0 \\ 0 & \phi' & \omega' \\ a & 2b & c \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Assim, pela Regra de Sarrus, temos:

$$D = c\phi'^2 - 2b\phi'\omega' + a\omega'^2. \quad (3.11)$$

De tal sistema de equações (3.9), obtemos tais condições a partir do determinante D :

- Se $D \neq 0$, a solução do sistema pode ser determinada pela regra de Cramer
- Para $D = 0$ o sistema é impossível ou é possível e indeterminável, neste caso utilizaremos um método para modificar a equação $Tu = F$, a fim de facilitar sua solução. Para isso precisaremos introduzir o conceito de curva característica.

Definição: Denomina-se curva característica de $Tu = F$ aquela cujo o determinante é igual a 0, isto é $c\phi'^2 - 2b\phi'\omega' + a\omega'^2 = 0$; caso contrário a curva não é característica.

Medeiros (2005) propõe primeiramente que:

I - Se $a \neq 0$ em γ as curvas características são solução da seguinte EDO:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = 0. \quad (3.12)$$

II = Se $c \neq 0$ as curvas características são soluções da seguinte EDO:

$$c \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 - 2b \left(\frac{dx}{dy} \right) + a = 0. \quad (3.13)$$

III - Se $a = c = 0$ as curvas características são:

$$x = y = \text{cnst}. \quad (3.14)$$

Como exemplo, podemos tomar alguns exemplos Físicos como as equações que descrevem o movimento transversal numa corda elástica, transferência de calor, um problema de origem estacionária e um modelo da Física Matemática.

Exemplo proposto (α):

$$Tu = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.15)$$

Temos: $a = -1$, $b = 0$ e $c = 1$. Como $a \neq 0$, as curvas características satisfazem equação (3.12):

$$-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 = 0. \quad (3.16)$$

É fácil ver que:

$$y = \pm x + k. \quad (3.17)$$

onde k é uma constante.

Exemplo proposto (β):

$$Tu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.18)$$

$a = b = c = 1$ assim pela (3.18):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 1 = 0, \quad (3.19)$$

Sendo:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} - 1\right)^2 = 0. \quad (3.20)$$

Onde $y = x + k$, sendo k uma constante qualquer. A família de curvas característica é $y = x + k$:

Exemplo proposto (γ):

$$Tu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \quad (3.21)$$

Observe que $a = c = 1$ e $b = 0$:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 = 0 \quad (3.22)$$

Onde as soluções vão ser $y = \pm ix$, ou seja, não possui curvas características reais.

Exemplo proposto (σ):

$$Tu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.23)$$

Sendo $a = 1$ e $b = c = 0$ pela (3.12):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0.$$

Isto é, $y = k$ possui apenas uma família de soluções características e esta família é composta por apenas uma constante.

Em alguns outros casos podemos utilizar uma mudança conveniente para uma forma canônica do operador T , onde poderão permitir que as equações diferenciais parciais de segunda ordem sejam classificadas em três categorias. Considerando inicialmente a forma quadrática dada por:

$$Q(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2.$$

O discriminante $b^2 - ac$ é fundamental para nos mostrar a forma da equação, pois se $b^2 - ac > 0$ então $Q(\xi, \eta)$ representa uma hipérbole, uma parábola se $b^2 - ac = 0$ e elipse se $b^2 - ac < 0$, tal classificação será adotada de forma análoga para as equações diferenciais.

Considerando a equação abaixo:

$$Tu = a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.24)$$

- i Se $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$ temos uma EDP hiperbólica.
- ii Se $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$ então temos uma EDP parabólica.
- iii se $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0$ EDP elíptica teremos.

Aplicando nos exemplos anteriores eles se classificam como: α hiperbólico, β parabó-

lica e γ é elíptica e elas podem ser representadas pelas seguintes formas canônicas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F; \\ \beta) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F; \\ \gamma) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Baseada nas proposições anteriores podemos concluir que em caso de equação hiperbólica, temos duas famílias de soluções, apenas uma em caso das parabólicas e nenhuma curva característica real nas elípticas.

Utilizando uma transformação similar para as seguintes funções $\alpha = \xi(x, y)$ e $\beta = \eta(x, y)$. Suponha as funções ξ e η são de classe C^1 e o determinante Jacobiano diferente de zero, isto é:

$$J(\alpha, \beta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0$$

O objetivo é escrever a equação (3.3) em relação às novas variáveis α e β . Pela regra da cadeia temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y}. \quad (3.26)$$

E as derivadas de segunda ordem: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad (3.27)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad (3.28)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (3.29)$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2. \quad (3.31)$$

Analogamente temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2. \quad (3.32)$$

E por fim:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad (3.33)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad (3.34)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (3.35)$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}. \quad (3.36)$$

Assim:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y}. \quad (3.37)$$

Multiplicando as equações (3.31) por $\mathbf{a}$, (3.32) por $\mathbf{c}$ e a (3.37) por $2\mathbf{b}$ e somando as 3 equações resultante e fazendo:

$$\begin{cases} A = \mathbf{a} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2\mathbf{b} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathbf{c} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \\ B = \mathbf{a} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \mathbf{b} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \mathbf{c} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ C = \mathbf{a} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2\mathbf{b} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \mathbf{c} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \end{cases} \quad (3.38)$$

A equação (3.3) se transforma em:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = H \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (3.39)$$

Calculando o discriminante $B^2 - AC$ verificuemos que $B^2 - AC = J^2(\mathbf{b}^2 - \mathbf{ac})$ onde J é o jacobiano e $\mathbf{b}^2 - \mathbf{ac}$ é o discriminante de (3.3). Isso mostra que as características da função não modificam, ou seja, antes e depois da mudança de variáveis ela continua sendo respectivamente hiperbólica, parabólica ou elíptica:

Nosso intuito agora é mostrar que existe uma transformação $\alpha = \xi(x, y)$ e $\beta = \eta(x, y)$

tais que a equação (3.39) tenha:

- Hiperbólico quando $A = C = 0$ e $B \neq 0$;
- Parabólico se $A = B = 0$ e $C \neq 0$;
- Elíptico com $B = 0$ e $A \neq 0$ e $C \neq 0$.

Mostraremos aqui o caso hiperbólico e os casos parabólico e elíptico serão abordados no apêndice, já que nosso intuito é estudar especificamente a equação da onda que por sua vez é hiperbólica. Com efeito supondo $a \neq 0$ as famílias de curvas características são obtidas pela equação (3.12), o qual o caso $c \neq 0$ é similar. Sejam:

$$\xi(x, y) = c_1; \quad \eta(x, y) = c_2. \quad (3.40)$$

tais famílias e considere as mudanças de variáveis $\alpha = \xi(x, y)$ e $\beta = \eta(x, y)$. Pelo teorema da função implícita temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}}. \quad (3.41)$$

Substituindo a (3.41) na (3.12) obtemos:

$$a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3.42)$$

Pela equação (3.38)₁ segue que $A = 0$, analogamente temos:

$$a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3.43)$$

provando que $C=0$. Sendo assim, para o caso hiperbólico, a equação (3.39) se reduz a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = L \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (3.44)$$

Para mostrar que a equação (3.44) pode ser escrita na forma canônica (3.25)₁ basta realizar a mudança de variável:

$$X = \alpha + \beta \text{ e } Y = \alpha - \beta \quad (3.45)$$

Resolvendo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right), \quad (3.46)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right). \quad (3.47)$$

Sabendo que: $\frac{\partial X}{\partial \beta} = 1$ e $\frac{\partial Y}{\partial \beta} = -1$, temos:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} \right). \quad (3.48)$$

derivando agora em relação a α de acordo com as coordenadas:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial \alpha}, \quad (3.49)$$

Sabendo que: $\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 1$ e $\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 1$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial Y^2}. \quad (3.50)$$

Portanto a equação (3.44) fica:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial Y^2} = L \left(X, Y, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} \right). \quad (3.51)$$

ou seja, na forma canônica (3.25)₁.

Capítulo 4

Ondas

Estamos rotineiramente em contato com inúmeros tipos de ondas, cada uma se manifestando de formas diferentes, por exemplo, ao escutar uma rádio, acender lâmpadas, até mesmo quando saímos na rua durante o dia e sentimos o calor do Sol, ou avistar os objetos e pessoas ao nosso redor; a nossa visão e audição são os nossos sensores naturais que nos ajudam a ler e interpretar os inúmeros comprimentos de onda que nos cercam. Uma definição satisfatória é dada por Griffiths (2011): "uma onda é um distúrbio de um meio contínuo que se propaga com uma forma fixa e velocidade constante". Acrescenta ainda que dependendo do meio que a onda se propaga ela pode ser dispersa, isto é, modifica a velocidade e o tamanho, ela pode se espalhar dependendo das dimensões; desconsiderando estas condições para as do tipo estacionária.

O fenômeno da ondulatória é uma das ideias mais amplas que se aplica em todos os ramos da Física, com a possibilidade de utilização em inúmeros contextos. Existem duas classes que definem a forma da propagação dessa onda, o qual é o ponto chave para a delimitação dos problemas relacionados; as ondas mecânicas são aquelas que necessitam de um meio para se propagar, como a água ou um gás; já as ondas eletromagnéticas, que é a classificação de onda que permeia o meio em vivemos se estendendo até o limite do universo, não necessitam de um meio para se propagar, sendo assim, a informação pode ser levada pelo vácuo, através do espaço, de baixo da água ou gás (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

Primeiramente vamos relembrar algumas definições e tipos de ondas baseada nos autores Machado (2006) e Nussenzveig (2002), vamos tomar como base para definir as características e grandezas a ilustração abaixo:

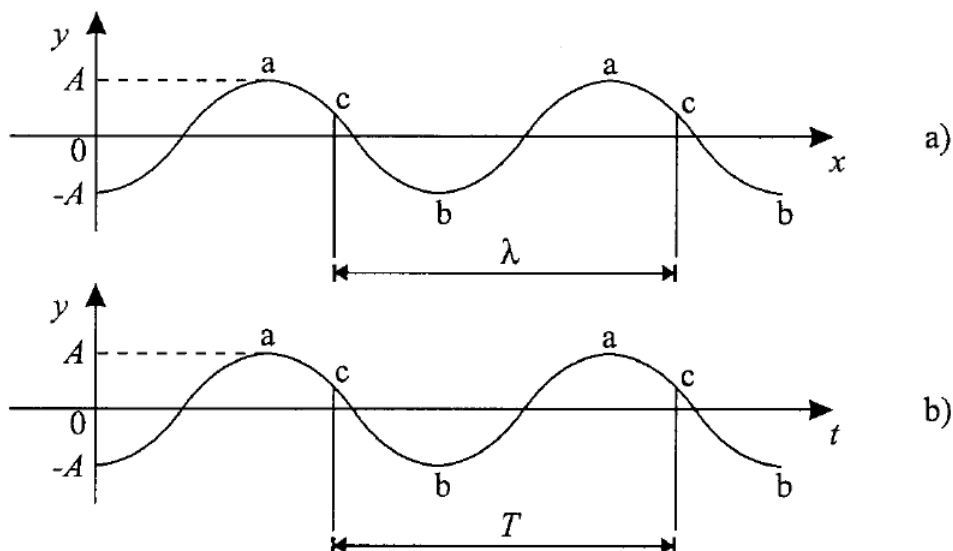


Figura 4.1: Gráfico da representação de ondas transversais que representam crista(a), vale(b) e início e fim (c) de comprimento de onda(λ) e período (T). FONTE: (MACHADO,2006,p.282)

- ✓ O Comprimento de onda é representado por λ e define dois pontos iguais de máximos que são chamados de *crista*, ou dois mínimos chamados de *vale*; consecutivos em uma onda que possui a mesma configuração espacial;
- ✓ O período T refere-se ao intervalo de tempo para completar um ciclo da onda, ou seja, a diferença entre dois pontos consecutivos;
- ✓ A quantidade de vezes que a onda passa por um mesmo ponto é representada por $\nu = \frac{1}{T}$, a frequência angular por $\omega = 2\pi\nu$;
- ✓ O número de onda é $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ que representa a quantidade de unidade de comprimentos de onda que atinge a mesma fase;
- ✓ A altura máxima que uma onda alcança na coordenada y do plano é chamada de Amplitude e é representada pela letra A;
- ✓ As ondas se classificam em duas categorias: Transversais, que se propagam perpendicular à direção da perturbação que a originou como na Figura 4.1; Longitudinal, a perturbação é no mesmo sentido de propagação da onda como na Figura 4.2;
- ✓ Ondas são chamadas de estacionárias quando seus pontos de máximos e mínimos não se movem com o passar do tempo.

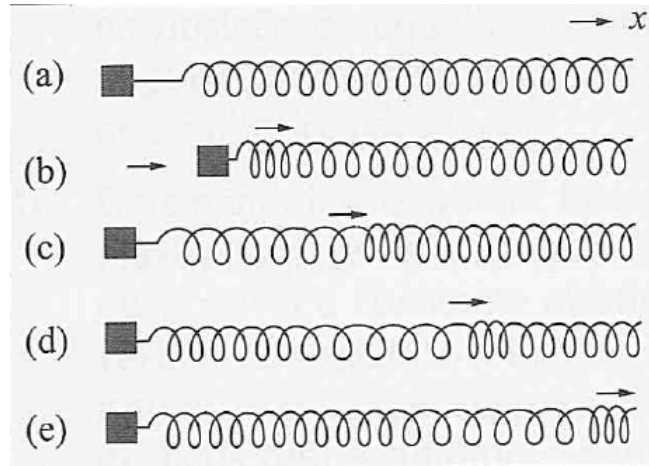


Figura 4.2: Uma ilustração de como ocorre a propagação de uma onda longitudinal ao longo de uma mola que em a) está relaxada e nas demais a propagação está em diferentes instantes. Fonte: (NUSSENZVEIG,2002,p.98)

Equações de ondas surgem como modelo matemático para descrever diversos fenômenos físicos importantes, que mesmo ocorrendo em ambientes bidimensionais ou tridimensionais podemos fazer uma aproximação utilizando o modelo para casos unidimensionais. Vamos considerar uma oscilação unidimensional, homogênea, em uma seção transversal de uma barra cilíndrica, elástica e reta suficientemente fina, uma onda longitudinal como na figura abaixo.

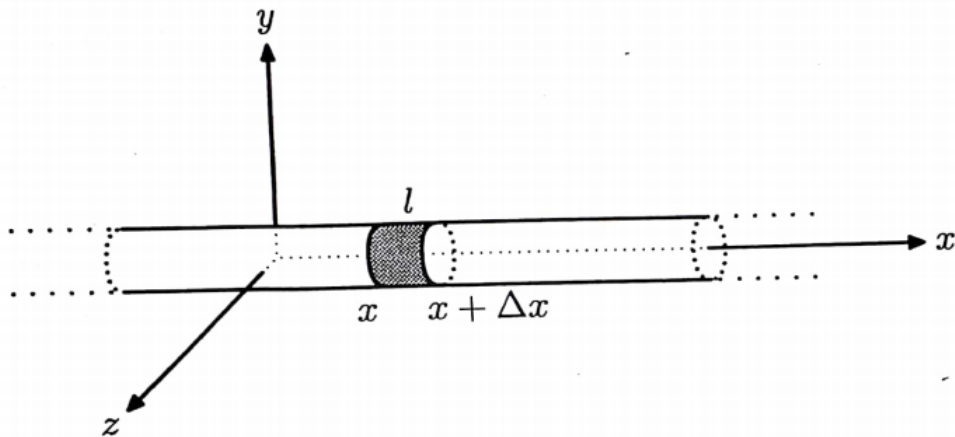


Figura 4.3: Barra cilíndrica elástica com sua posição de referência, elemento l de deslocamento de uma seção transversal. Fonte:(GONDAR,2006,p.46)

O eixo de simetria da barra coincide com a abscissa do plano cartesiano, de modo que cada posição de referência esteja sempre associado a um número real x . Utilizando $l(x)$ uma fração da barra compreendido entre x e $x + \Delta x$, sendo $u(t, x)$ a função do deslocamento

da oscilação em que x é posição e t o tempo teremos que em $r(t, x) = x + u(t, x)$ e analogamente $r(t, x + \Delta x) = x + \Delta x + u(t, x + \Delta x)$. Baseado nestes dados, podemos iniciar a modelagem da equação da onda.

4.1 Modelagem da Equação da Onda

Se $l(x)$ é um elemento da barra que se compreende entre $r(t, x)$ e $r(t, x + \Delta x)$ temos que a variação de r é:

$$\Delta r(t, x) = r(t, x + \Delta x) - r(t, x) = \Delta x + u(t, x + \Delta x) - u(t, x). \quad (4.1)$$

Como para Δx muito pequenos o próprio $r(t, x)$ descreve o deslocamento $l(x)$, temos pela Segunda Lei de Newton:

$$F(t, x) = m \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(t, x). \quad (4.2)$$

onde m pode ser descrito em função da densidade volumétrica da barra $\rho = \frac{m}{V}$ com $V = A\Delta x$ (A sendo área da secção transversal e Δx a largura). Dessa forma podemos reescrever da seguinte maneira:

$$F(t, x) = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(t, x). \quad (4.3)$$

Iniciamos a descrição do modelo com a consideração apenas da tensão T , consequência das interações moleculares, desprezaremos todas as eventuais forças externas, sendo $T(t, x)$ e $T(t, x + \Delta x)$ as tensões respectivas à $r(t, x)$ e $r(t, x + \Delta x)$. A força resultante assim será a diferença entre as tensões final e inicial.

$$F(t, x) = T(t, x + \Delta x) - T(t, x). \quad (4.4)$$

Note que:

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(t, x + \Delta x) - T(t, x)}{\Delta x}. \quad (4.5)$$

Como estamos trabalhando com pequenas deformações, onde $\Delta x \ll 1$ assim:

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \approx \frac{T(t, x + \Delta x) - T(t, x)}{\Delta x}. \quad (4.6)$$

Portanto:

$$T(t, x + \Delta x) - T(t, x) = \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \Delta x. \quad (4.7)$$

Assim, temos que:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial T}{\partial x}(t, x). \quad (4.8)$$

Pela Lei de Hooke ¹ temos que a Tensão pode ser dada pelo Módulo de Young vezes a área e a derivada $u_x(t, x)$.

$$T(t, x) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(t, x). \quad (4.9)$$

Derivando a equação (4.9) em x e igualando com a 4.8 temos, chamando $\frac{E}{\rho}$ de a^2 :

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.11)$$

onde a é uma constante que tem dimensões de velocidade.

Baseada na equação diferencial (4.11), característica da onda, podemos abordar alguns métodos de resolução para encontra a solução. Iniciaremos nas seções seguintes com as formas de resolver a equação quando ela aparece na forma homogênea: utilizando o método de Separação de Variáveis que é o método mais tradicionalmente abordado pelos livros de Física; o método das curvas características na mesma equação homogênea para obter a Solução D’Alambert. Em seguida resolveremos a equação da onda não homogênea a fim de obter uma solução ainda mais geral.

¹A Lei de Hooke é uma força de resistência que se opõe a 2ª Lei de Newton, quando existe uma mola com um objeto preso à uma de suas extremidades. A fórmula mais conhecida para esta lei é: $ma = -kX$, onde k é a constante elástica da mola e x é a distância que a mola foi comprimida ou esticada do repouso (TIPLER; MOSCA, 2000).

4.2 Solução Pelo Método de Variáveis Separáveis

O tipo de solução neste caso é deduzida a partir de uma equação homogênea, onde não aparece um termo de derivada mista e nenhuma ação de força externa como, por exemplo, problemas de movimento harmônico simples (NUSSENZVEIG, 2002). Podemos resolver a equação da onda (4.11) utilizando o método de variáveis separáveis, que consiste em escrever a função $u(x, t)$ como produto de duas funções: uma dependendo de x e uma de t (MACHADO, 2004).

Fazendo:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.12)$$

vamos substituir na equação (4.11) temos:

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [X(x)T(t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [X(x)T(t)]. \quad (4.13)$$

Resolvendo:

$$a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (X(x)T(t)) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} (X(x)T(t)) \right], \quad (4.14)$$

$$a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial X(x)}{\partial x} T(t) + X(x) \frac{\partial T(t)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial X(x)}{\partial t} T(t) + X(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right]. \quad (4.15)$$

como as derivadas de $X(x)$ em relação à t e $T(t)$ em relação à x são 0 podemos já instantaneamente escrever a derivada segunda como:

$$a^2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} T(t) = \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} X(x). \quad (4.16)$$

Como X e T dependem de apenas uma variável, as derivadas passam a ser ordinárias ao invés de parciais, assim:

$$a^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} T(t) = \frac{d^2 T(t)}{dt^2} X(x). \quad (4.17)$$

Separando todos os termos que tem x de um lado e t do outro e sabendo que, sendo a igualdade válida, podemos supor que ambas são iguais a um mesmo valor qualquer diferente de zero, pois $u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$; assim igualaremos ambas a função à um

constante $-k^2$:

$$\frac{a^2}{X(x)} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2T(t)}{dt^2} = -k^2. \quad (4.18)$$

Resolvemos de forma separada as equações da seguinte maneira:

$$\frac{a^2}{X(x)} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k^2 \quad (4.19)$$

e

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2T(t)}{dt^2} = -k^2 \quad (4.20)$$

Primeiramente, resolvendo a (4.19):

$$\frac{a^2}{X(x)} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k^2, \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{k^2}{a^2} X(x) = 0. \quad (4.22)$$

Substituindo $\frac{k^2}{a^2} = \omega^2$ equação característica será:

$$m^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow m = \pm i\omega. \quad (4.23)$$

Assim a solução geral desta equação é dada por:

$$X(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x). \quad (4.24)$$

Tomando as seguintes proposições:

$$\alpha = A \cos \delta; \quad (4.25)$$

$$\beta = A \sin \delta. \quad (4.26)$$

Substituindo na (4.24) temos:

$$X(x) = A \cos(\omega x - \delta). \quad (4.27)$$

Agora, resolvendo a (4.20):

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + k^2 T(t) = 0. \quad (4.29)$$

A equação característica é $n^2 + k^2 = 0$ ou seja $n = \pm k$, assim:

$$T(t) = \gamma \cos(kt) + \epsilon \sin(kt). \quad (4.30)$$

Fazendo:

$$\gamma = B \cos(\phi); \quad (4.31)$$

$$\epsilon = B \sin(\phi). \quad (4.32)$$

Assim, a (4.30) torna-se:

$$T(t) = B \cos(kt - \phi). \quad (4.33)$$

Substituindo as (4.33) e (4.27) na (4.12) a solução $u(x, t)$ fica:

$$u(x, t) = D \cos(\omega x - \delta) \cos(kt - \phi). \quad (4.34)$$

As constantes D , ω , k , δ e ϕ podem ser encontradas a partir das condições iniciais definidas. O método descrito é simples, pois chegamos com base em uma substituição e é fácil ver como vai ser a solução. A maioria dos livros didáticos de Física e EDP's aplicadas à Física utilizam deste método, pois além de ser prático, ele descreve a maioria dos fenômenos ondulatórios.

4.3 Equação da Onda Homogênea e a Solução D'Alambert

Quando não ocorre interação de forças externas dizemos que a equação é homogênea, pois não aparece uma função ao qual depende a resolução dos problemas. Utilizando a técnica do Capítulo 3, partindo da equação (4.11), iremos apenas utilizar uma outra

notação para derivadas parciais com o intuito de ficar visualmente melhor:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}^2 \mathfrak{u}_{\mathfrak{x}\mathfrak{x}} - \mathfrak{u}_{\mathfrak{t}\mathfrak{t}} = 0 \\ \mathfrak{u}(0, \mathfrak{x}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \\ \mathfrak{u}_{\mathfrak{t}}(0, \mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) \end{cases} \quad (4.35)$$

a notação utilizada equivale a $\mathfrak{u}_{\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{x}^2}$, $\mathfrak{u}_{\mathfrak{t}\mathfrak{t}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{t}^2}$ e $\mathfrak{u}_{\mathfrak{t}} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{t}}$. Considerando $\mathfrak{a} > 0$ sem perder generalidade.

Para determinar qual o tipo da EDP, vamos verificar o valor de $\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{c}$, para a equação (4.35)₁. Vejamos que:

$$0^2 - \mathfrak{a}^2(-1) = \mathfrak{a}^2 > 0. \quad (4.36)$$

sendo assim, temos uma EDP Hiperbólica. Como $\mathfrak{a} \neq 0$ que as curvas características de (4.35)₁: satisfazem a equação (3.12), então

$$\mathfrak{a}^2 \left(\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathrm{d}\mathfrak{x}} \right)^2 - 1 = 0, \quad (4.37)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathrm{d}\mathfrak{x}} \right)^2 = \frac{1}{\mathfrak{a}^2}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathrm{d}\mathfrak{x}} = \sqrt[2]{\frac{1}{\mathfrak{a}^2}}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathrm{d}\mathfrak{x}} = \pm \frac{1}{\mathfrak{a}}. \quad (4.40)$$

separando e integrando temos que:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{t} = \pm \mathfrak{x} + \mathfrak{c}. \quad (4.41)$$

onde $\mathfrak{c}$ é uma constante qualquer. Note que a equação acima forma duas famílias de curvas características: $\mathfrak{c} = \mathfrak{x} - \mathfrak{a}\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{c} = \mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{t}$.

Fazendo a mudança de variável:

$$\alpha = \mathfrak{x} - \mathfrak{a}\mathfrak{t}; \quad \beta = \mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{t}. \quad (4.42)$$

temos $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = 0$ e $\mathfrak{B} \neq 0$ pois a equação é hiperbólica (pelas equações (4.41) e (4.42)).

Para encontrar o valor de B utilizemos a equação (3.38)₂, sendo esta a segunda equação do sistema:

$$B = a^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + 0 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) - 1 \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad (4.43)$$

$$B = a^2 - (-a)a, \quad (4.44)$$

$$B = 2a^2. \quad (4.45)$$

Assim, temos que a forma canônica da equação é $4a^2 u_{\alpha\beta} = 0$, como $4a^2 \neq 0$, temos:

$$u_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.46)$$

Resolvendo com o propósito de encontrar a solução vamos integrar em ambos os lados:

$$\int \frac{\partial u^2}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha = \int 0 d\alpha, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = f(\beta). \quad (4.48)$$

Integrando novamente agora em função de β temos:

$$\int \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta = \int f(\beta) d\beta, \quad (4.49)$$

$$u(\alpha, \beta) = \omega(\beta) + \phi(\alpha). \quad (4.50)$$

Retornando para as variáveis x e y temos:

$$u(x, y) = \phi(x - at) + \omega(x + at). \quad (4.51)$$

Agora nos resta utilizar as condições iniciais para descobrir a solução de $u(x, t)$ de D'Alambert para a equação da onda homogênea unidimensional.

Primeiramente verifiquemos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d\phi}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{d\phi}{d\alpha}. \quad (4.52)$$

Analogamente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}. \quad (4.53)$$

Calculando $u_t(t, x)$, temos pela regra da cadeia:

$$u_t(t, x) = \frac{\partial \phi(x - at)}{\partial t} + \frac{\partial \omega(x + at)}{\partial t}, \quad (4.54)$$

$$= \frac{d\phi(x - at)}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{d\omega(x + at)}{d\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t}. \quad (4.55)$$

Utilizando as equações (4.52) e (4.53):

$$u_t(t, x) = \frac{\partial \phi(x - at)}{\partial x}(-a) + \frac{\partial \omega(x + at)}{\partial x}a. \quad (4.56)$$

Fazendo $u_t(0, x) = g(x)$:

$$\frac{\partial \phi(x - a0)}{\partial x}(-a) + \frac{\partial \omega(x + a0)}{\partial x}a = g(x), \quad (4.57)$$

$$-a \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + a \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} = g(x). \quad (4.58)$$

Neste momento, as derivadas acima passam a ser ordinárias, assim:

$$-a\phi'(x) + a\omega'(x) = g(x). \quad (4.59)$$

De $u(0, x) = f(x)$ vem que:

$$\phi(x - a0) + \omega(x + a0) = f(x), \quad (4.60)$$

$$\phi(x) + \omega(x) = f(x). \quad (4.61)$$

derivando a equação acima em relação a x temos:

$$\phi'(x) + \omega'(x) = f'(x), \quad (4.62)$$

portanto:

$$\phi'(x) = f'(x) - \omega'(x). \quad (4.63)$$

Analogamente:

$$\omega'(x) = f'(x) - \phi'(x). \quad (4.64)$$

Substituindo a 4.63 na u_t da 4.59:

$$-a[f'(x) - \omega'(x)] + a\omega'(x) = g(x), \quad (4.65)$$

$$2a\omega'(x) = g(x) + af'(x), \quad (4.66)$$

$$\omega'(x) = \frac{1}{2a}g(x) + \frac{1}{2}f'(x). \quad (4.67)$$

Integrando a equação acima no intervalo de x_0 à x , obtemos:

$$\int_{x_0}^x \omega'(x) dx = \int_{x_0}^x \frac{1}{2a}g(x) dx + \int_{x_0}^x \frac{1}{2}f'(x) dx, \quad (4.68)$$

$$\omega(x) - \omega(x_0) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + \frac{1}{2}[f(x) - f(x_0)], \quad (4.69)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + \omega(x_0) - \frac{1}{2}f(x_0). \quad (4.70)$$

como $\phi(x) = f(x) - \omega(x)$ então:

$$\phi(x) = f(x) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi - \omega(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0), \quad (4.71)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi - \omega(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0). \quad (4.72)$$

Assim a solução $u(x, t) = \phi(x - at) + \omega(x + at)$, fica:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} g(\xi) d\xi - \omega(x_0) + \frac{1}{2}f(x + at), \quad (4.73)$$

$$+ \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} g(\xi) d\xi + \omega(x_0) - \frac{1}{2}f(x_0). \quad (4.74)$$

Lembrando as seguintes regras de integrais:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (4.75)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (4.76)$$

temos:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi. \quad (4.77)$$

conhecida por solução de D’Alambert para a equação da onda homogênea.

Analisando a parte Física vemos que a solução da onda vai depender das condições iniciais, onde $f(x)$ pode ser tomado como uma função inicial da posição, mais comumente visto nos livros didáticos como x_0 que representa a posição inicial; aparece também a função $g(\xi)$ o qual aparece nas condições como a $g(x)$ que equivale a derivada primeira de t , sendo assim a velocidade inicial do sistema, mais comumente vista como v_0 (velocidade inicial). Portanto temos que, de acordo com as condições iniciais obtemos uma solução diferente; por exemplo, se tivermos uma onda com velocidade diferente de zero vamos obter uma solução que depende da movimentação dessa onda.

Embora baseado em condições iniciais não seja muito fácil identificar logo de cara como será a solução, existem livros que preferem abordar inicialmente condições igualada a zero para que possamos substituir sem carregar uma função como em Brannan (1994).

4.4 Solução da Equação da Onda Não Homogênea

Numa onda unidimensional, sujeita a atuação de uma força externa em casos como osciladores harmônicos ou osciladores forçados, existe um termo a mais na equação o qual fará com que a solução seja um pouco mais complexa, podemos verificar problemas assim em livros como Nussenzveig (2002), com tratamento mais matemático em Gondar (2005).

Vamos resolver agora o problema de Cauchy para equações não homogêneas com as condições iniciais a seguir:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} - u_{tt} = G(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (4.78)$$

onde a $G(x, t)$ esta atuando como uma força externa.

Considerando um ponto $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ vamos associar estes pontos à uma região $M \subset \mathbb{R}^2$ de modo que a equação esteja contida dentro de M , limitada pela região M^* que é a união

de M com a sua borda representada aqui pela curva C que pode ser definida pela soma de cada segmento de reta da região. Vamos observar a partir da figura:

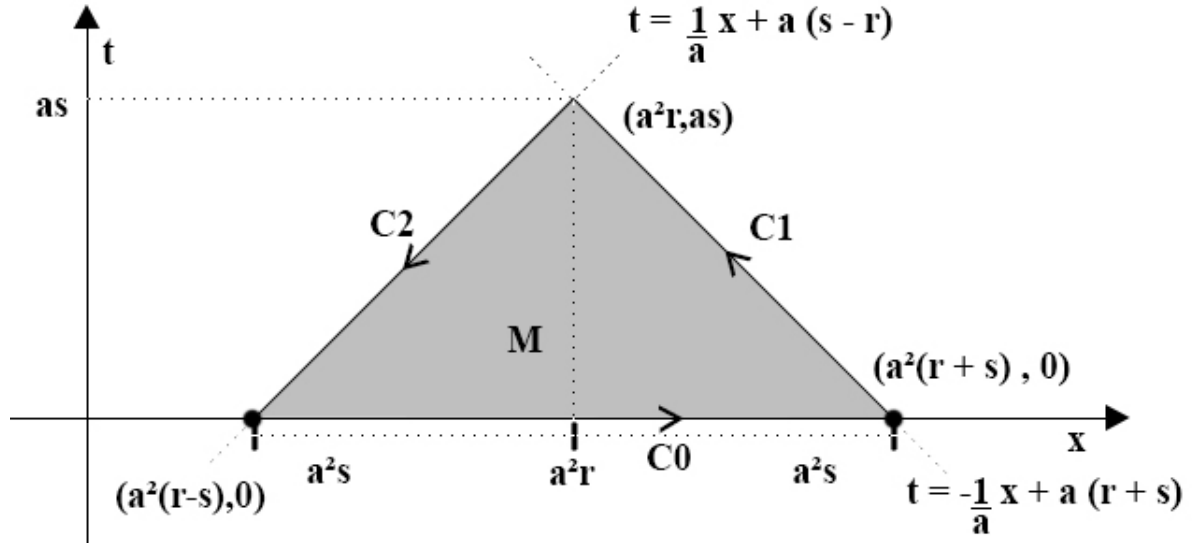


Figura 4.4: Ilustração da região M delimitada pela curva C com a transformação de x e t em r e s . Fonte: Autoria Própria

Para resolver precisamos integrar duas vezes a função $G(x, t)$ na fronteira da região M^* , sendo assim:

$$\iint_{M^*} G(x, t) dM^* = \iint_{M^*} a^2 u_{xx} - u_{tt} dM^*. \quad (4.79)$$

Veja que a curva C é formada pela união das três retas C_0 , C_1 e C_2 . Pelo Teorema de Green expresso na seção 1.4, a integral em (4.79) fica:

$$\iint_{M^*} G(x, t) dM^* = \oint_C a^2 u_x dt + u_t dx = \oint_{C_0 \cup C_1 \cup C_2} a^2 u_x dt + u_t dx. \quad (4.80)$$

ou seja, podemos fazer a somatória das integrais dos segmentos de reta da curva C , separadamente temos em C_0 :

$$\int_{C_0} u_t(x, 0) dx = \int_{a^2(r-s)}^{a^2(r+s)} u_t(x, 0) dx. \quad (4.81)$$

Em C_1 temos:

$$\int_{C_1} a^2 u_x dt + u_t dx = \int_{(a^2(r+s), 0)}^{(a^2r, a^2s)} a^2 u_x \left(-\frac{1}{a} dx \right) + u_t (-a dt), \quad (4.82)$$

Pela regra a seguir:

$$df(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (4.83)$$

Assim:

$$\int_{C_1} a^2 u_x dt + u_t dx = -a \int_{(a^2(r+s), 0)}^{(a^2 r, as)} du = au(a^2(r+s), 0) - au(a^2 r, as). \quad (4.84)$$

$$\int_{C_2} a^2 u_x dt + u_t dx = \int_{(a^2 r, as)}^{(a^2(r-s), 0)} a^2 u_x \left(\frac{1}{a} dx \right) + u_t (adt), \quad (4.85)$$

Em C_2 , obtemos:

$$\int_{C_2} a^2 u_x dt + u_t dx = a \int_{(a^2 r, as)}^{(a^2(r-s), 0)} du = au(a^2(r-s), 0) - au(a^2 r, as). \quad (4.86)$$

Somando as (4.81), (4.84) e (4.86) e igualando ao primeiro termo da 4.80:

$$\iint_{M^*} G(x, t) dM^* = \int_{a^2(r-s)}^{a^2(r+s)} u_t(x, 0) dx + au(a^2(r+s), 0) - 2au(a^2 r, as) + au(a^2(r-s), 0). \quad (4.87)$$

Isolando $u(a^2 r, as)$ temos:

$$u(a^2 r, as) = \frac{1}{2} [u(a^2(r+s), 0) + u(a^2(r-s), 0)] + \frac{1}{2a} \int_{a^2(r-s)}^{a^2(r+s)} u_t(x, 0) dx - \frac{1}{2a} \iint_{M^*} G(x, t) dM^*. \quad (4.88)$$

Para trocar as variáveis utilizadas voltando para x e t , modificando também os limites de integração vamos utilizar:

$$\begin{cases} a(r+s) = \frac{1}{a}x + t & \Rightarrow & a^2(r+s) = x + at \\ a(s-r) = -\frac{1}{a}x + t & \Rightarrow & a^2(r-s) = x - at \\ \frac{1}{a}x = t - a(s-r) & \Rightarrow & x = at + a^2(r-s) \\ \frac{1}{a}x = -t + a(r+s) & \Rightarrow & x = -at + a^2(r+s) \end{cases} \quad (4.89)$$

Fazendo os limites de 0 à t ser representado por w e sendo usado os do gráfico de 0 à

as e o limite que varia entre as retas utilizarmos a letra v :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[u(x + at, 0) + u(x - at, 0)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_t(x, 0) dx \\ &- \frac{1}{2a} \int_0^{as} \int_{aw+a^2(r-s)}^{-aw+a^2(r+s)} G(x, t) dM^*. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Usando as condições iniciais de (4.78) e as equações (4.89)₁ e (4.89)₂ a equação (4.90) se reduz à:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-w)}^{x+a(t-w)} G(v, w) dv dw. \quad (4.91)$$

Concluimos que esta solução, embora possua no início apenas um termo a mais, sendo uma função externa, a equação u que também dependente das mesmas variáveis, os casos homogêneo e não-homogêneo apresentados tem uma distinção na forma de resolução, tornando o cálculo um pouco mais complexo, necessitando assim de substituições de variáveis que possibilitaram simplificar mais a execução das contas para obter a solução.

Considerações Finais

Como demonstramos no decorrer do trabalho, as equações diferenciais parciais são ferramentas poderosas para modelar problemas que descrevem fenômenos nas demais áreas científicas (SILVA, 2016); na Física Ondulatória, nós apresentamos e aplicamos o método alternativo para encontrar as soluções da equação da onda unidimensional no caso homogêneo e não-homogêneo. Para tal, reunimos os conceitos acerca do método tradicional de resolver as equações. Assim, a partir do conteúdo produzidos nesta pesquisa proporcionamos aos estudantes/pesquisadores interessados no tema a possibilidade de uma maior flexibilizada para assimilação do conteúdo, um novo ponto de vista para obter soluções para os problemas em ondulatória.

Propuzemos três formas de resolução para a Equação da Onda Unidimensional no Capítulo 4, obtendo três formas de soluções diferenciadas sendo duas para equações homogêneas, o qual um dos métodos é o mais comumente utilizados em livros texto na seção (4.2) e a outra uma metodologia alternativa que resolve o mesmo problema na seção (4.3); a terceira forma foi para o caso não homogêneo que baseado em Sodré (2003), adaptamos aos casos mais gerais com também $\alpha \neq 1$.

Utilizamos bibliografia acessível com livros de curso de matemática e física, dissertações e artigos disponíveis em bibliotecas de universidades e na internet, reproduzimos os cálculos e comprovamos a veracidade das soluções propostas de acordo com as respectivas curvas características e método adequado.

No capítulo 1 pudemos ver que conceitos mesmo parecendo ser triviais, são de fundamental importância para sabermos se realmente compreendendo o que esta sendo dito de fato na linguagem matemática. Teve como objetivo principal atingir os não tão iniciantes em disciplinas de cálculo como também relembrar e/ou revisar para uma melhor compreensão do texto.

Algumas das inúmeras técnicas de resolução de equações diferenciais está presente no

capítulo 2, o qual além da abordagem contém comprovados e demonstrados dos cálculos das EDO's e EDP'S, contendo apenas os principais métodos utilizados nos capítulos posteriores como por exemplo o método de resolução da equação (4.18) que está sendo apresentado de forma mais detalhada na seção (2.2).

De acordo com a proposta descrita, pudemos ver que o capítulo 3 propõe de fato uma metodologia mais geral para resolver equações diferenciais parciais, pois utilizando da substituição de variáveis na equação 3.3 pudemos resolver de forma eficaz a equações na seção 4.3.

Se nos aprofundarmos mais na leitura em temas como Óptica e Movimentos Oscilatórios, poderemos verificar a aplicação das definições aqui apresentadas sobre ondulatória em termos como comprimento de onda, período, os tipos de ondas ou no caso avançado a utilização de soluções características que resolvem equações diferenciais parciais ou ordinárias, equações essas que descrevem um determinado movimento de acordo com suas condições iniciais, no livro de Nussenzveig (2002) aparecem casos como Movimento Harmônico Simples e Oscilações Forçadas-Amortecidas que possuem soluções bem distintas. No capítulo 4 foi possível mostrar que não só os conceitos básicos do Capítulo 1 são necessários na hora de resolver problemas em Física, também necessitamos de uma abrangência de conhecimentos acerca da matemática e técnicas de resolução de equações diferenciais.

Apêndice A

Caso Parabólico e Elíptico Para o Método de Curvas Características

Para o caso parabólico utilizamos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = L \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)$$

Usando a equação (3.13) sendo a e c não nulos podemos fazer $b^2 = ac$ e substituir em c :

$$\frac{b^2}{a} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 - 2b \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) + a = 0$$

Se multiplicarmos tudo por a teremos:

$$\begin{aligned} b^2 \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 - 2ba \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) + a^2 &= 0 \\ \left[b \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) - a \right]^2 &= 0 \end{aligned}$$

Deixando a derivada isolada, colocando $\frac{b}{a}$ e sabendo que a derivada agora é ordinária escrevemos:

$$\left[\left(\frac{dy}{dx} \right) - \frac{b}{a} \right]^2 = 0 \quad (A.1)$$

Sendo a equação característica $\phi(x, y) = k$ nos permite calcular a derivada $\frac{\partial y}{\partial x}$ deste

modo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

onde $\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$.

Sendo $A = 0$ podemos calcular B pela 3.41 substituindo $b^2 = ac$ obtemos:

$$\begin{aligned} B &= a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + b \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \frac{b^2}{a} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ B &= a \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (A.2)$$

Pela equação A.1, $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, sendo $\alpha = \phi$ temos que $B = 0$. Calculando C pela 3.38:

$$C = \left(a \frac{\partial \omega}{\partial x} + b \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \quad (A.3)$$

Concluindo: $A = B = 0$ e $C \neq 0$ a forma canônica do caso parabólico é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = G \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \quad (A.4)$$

No caso elíptico, $b^2 - ac < 0$ utilizaremos a (3.12) e obtemos uma solução como:

$$\theta(x, y) = k \quad \text{ou} \quad \theta_1(x, y) + i\theta_2(x, y) = \alpha + i\beta$$

Sendo α e β números reais e considerando $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ não nulos temos:

$$a \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (A.5)$$

Admitimos que $\left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|$ e $\left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|$ diferentes de 0 as derivadas de θ_1 e θ_2 são:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + i \frac{\partial \theta_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + i \frac{\partial \theta_2}{\partial y}$$

Fazendo a transformação $\alpha = \theta_1(x, y)$ e $\beta = \theta_2(x, y)$, o Jacobiano $J(\alpha, \beta)$ é:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} - \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \frac{\partial \theta_2}{\partial x}$$

Pela equação de Cauchy-Riemann são:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{\partial \theta_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = -\frac{\partial \theta_2}{\partial x}$$

$$\text{Logo } \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + i \frac{\partial \theta_2}{\partial y}.$$

$$J(\alpha, \beta) = \left| \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right| \neq 0$$

Retornando as variáveis anteriores α e β reescrevendo em termos de $A(x, y)$, $B(x, y)$ e $C(x, y)$ como já definimos anterior na (3.41) obtemos sabendo que neste caso $A = C$ e $B = 0$:

$$a \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 = a \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2$$

$$a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + b \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$$

Sendo $b^2 - ac < 0$ A será nulo apenas nos vetores $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$ assim para A e C não nulos a forma canônica no caso elíptico é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = F \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \quad (\text{A.6})$$

Referências Bibliográficas

- ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- ASSIS, A. O. Uma introdução a equações diferenciais com modelagens. *Anais da Semana de Licenciatura*, v. 1, n. 6, p. 271–274, 2015.
- BRANNAN, J. R.; BOYCE, W. E. *Equações diferenciais: uma introdução a métodos modernos e suas aplicações*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 1994.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de física de Feynman: edição definitiva*. [S.l.]: Bookman, 2008.
- GONDAR, J. L.; CIPOLATTI, R. Iniciação à modelagem matemática. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2005.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica. Tradução: Heloísa Coimbra de Souza; revisão técnica Antônio Manoel Mansanares,-.* [S.l.]: São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.
- LEITHOLD, L. *O Cálculo-3-vol.2ª*. [S.l.]: Edição, 1994.
- LIMA, E. L. Análise real: Funções de uma variável-vol. 1. *Coleção Matemática Universitária, IMPA*, 2010.
- LIMA, E. L. Análise real: Funções de uma variável-vol. 2. *Coleção Matemática Universitária, IMPA*, 2010.
- MACHADO, K. D. *Equacoes Diferenciais Aplicadas a Fisica*. [S.l.]: Editora UEPG, 2004.
- MEDEIROS, L. A.; FERREL, J.; BIAZUTTI, A. *Métodos clássicos em equações diferenciais parciais*. [S.l.: s.n.], 2005.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de fisica basica-vol.2*. [S.l.]: Edgard Blucher, 2002. reimp. 2007., 2002.
- SILVA, M. C. D. d. Equações diferenciais parciais e suas aplicações. 2016.
- SIMÕES, C. A. E. *Equações diferenciais na física*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Évora, 2014.
- SODRÉ, U. Equações diferenciais parciais. *Londrina:sn*, 2003.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros. Vol. 1: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.