



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

EDUARDO ROCHA BATISTA

RELAÇÕES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

CORRENTE, PI

2023

EDUARDO ROCHA BATISTA

RELAÇÕES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência parcial
para obtenção do diploma do Curso de
Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência
e Tecnologia do Piauí, Campus
Corrente.

Orientadora: Prof^a. Ma. Anna Karla
Barros da Trindade

CORRENTE, PI

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Batista, Eduardo Rocha

B333r Relações e aplicações dos números de Fibonacci / Eduardo Rocha
Batista.

- 2024.

27 p.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente,
2024.

Orientador : Prof Me. Anna Karla Barros da Trindade.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Sequência de Fibonacci . 3.
Números de Fibonacci . 4. Problemas matemáticos. I. Título.

CDD - 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB 3/1251

RELAÇÕES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Eduardo Rocha Batista¹
Anna Karla Barros da Trindade²

RESUMO

A sequência de Fibonacci surgiu a partir da solução para o problema de como sucedia numericamente a reprodução de coelhos. Também conhecida como os números de Fibonacci, essa sequência de números apresenta diversas aplicações, tanto na área da matemática como também na arte, natureza e arquitetura. Esse trabalho tem por objetivo fazer uma abordagem teórica sobre as relações e algumas das diversas formas de aplicações do número de Fibonacci. O artigo inicia-se com um breve relato da vida e obras de Leonardo de Fibonacci, com destaque para sua obra principal, *Liber Abaci*. Na sequência será abordado a definição formal, exemplos, relação com o número de ouro, relação com triângulo de pascal e suas aplicações no ambiente escolar.

Palavras-Chave: Sequência; Fibonacci; Aplicações; Relações.

ABSTRACT

The Fibonacci sequence arose from the solution to the problem of how rabbits reproduced numerically. Also known as Fibonacci numbers, this sequence of numbers has several applications, both in the area of mathematics and also in art, nature and architecture. This work aims to provide a theoretical approach to the relationships and some of the different forms of application of the Fibonacci number. The article begins with a brief account of the life and works of Leonardo de Fibonacci, with emphasis on his main work, *Liber Abaci*. Next, the formal definition, examples, relationship with the golden number, relationship with Pascal's triangle and its applications in the school environment will be discussed.

Keywords: Sequence; Fibonacci; Applications; Relations.

Data de aprovação: _____/_____/_____

¹ Graduando em Licenciatura Plena em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Piauí, cacor.2019121lmat0012@aluno.ifpi.edu.br

² Professora Mestra do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Piauí, anna.trindade@ifpi.edu.br

1 INTRODUÇÃO

Na minha experiência como discente de matemática e de docente (Estágios e Residência), constatei que uma questão bastante evidenciada por muitos alunos é com relação a aplicabilidade de certos conteúdos trabalhados pelos professores em sala de aula, sendo comum os questionamentos: Professor, para que vamos estudar este assunto? Onde este assunto vai ser usado em que na minha vida? No decorrer do curso de Licenciatura em Matemática, tive várias disciplinas relevantes. Dentre estas, uma que foi muito importante foi a História da Matemática, nela tivemos a oportunidade de saber um pouco mais sobre o contexto histórico da Matemática e conhecer grandes nomes de matemáticos, desde épocas mais antigas até a atualidade. Nela, fomos instigados a apresentar seminários sobre algum tema da Matemática. Decidi então falar sobre a Sequência de Fibonacci, que no início não sabia de praticamente nada. Comecei então a estudar o tema e gostei muito. Percebi que o conteúdo era vasto e tinha possibilidades de mostrar inúmeras aplicações práticas. Além disso, percebi que não é um tema tão conhecido e explorado no ensino básico. Estas razões foram os impulsos que me levou a escolher tema: Relações e Aplicações dos Números de Fibonacci.

Para falar sobre esta temática, é necessário em primeiro ponto trazer a definição do que seria a sequência de Fibonacci. Segundo Lessa (2020) “Uma sequência numérica é uma função f , definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos tal que:

$f: n \rightarrow f(n) = a_n$ onde o n é chamado de índice e a_n o n ésimo elemento da sequência, ou termo geral.” Onde os elementos de uma sequência estão na forma: (a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ,

a_5 , ..., a_n). Tratando-se da sequência de Fibonacci consiste em uma sequência composta por uma sucessão infinita de números nos quais obedecem a um padrão em que cada elemento subsequente é a soma dos dois anteriores.

Segundo De Almeida (2013) a sequência de Fibonacci apresenta extensa aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, ela é muito importante devido as suas propriedades e relações com a natureza, e por isso torna-se de grande interesse para alunos dos ensinos Fundamental e Médio. Partindo de um problema bem simples a sua resolução despertou interesse mútuo entre diversos matemáticos da época e também nos dias atuais.

Em consonância Pacheco (2021) traz que o trabalho de Fibonacci colaborou para a difusão do sistema de numeração Indu - Árábico pela Europa Ocidental, além de reunir muito do conhecimento matemático produzido, até aquele momento. A relação mais notória da sequência de Fibonacci é com o número ouro onde prova-se que as suas aplicações vão além do mundo que é a matemática.

O conteúdo apresentado neste artigo é direcionado a professores do Ensino Fundamental Séries Finais e Ensino Médio que desejam aprofundar seus conhecimentos sobre os números de Fibonacci e, finalmente, utilizá-los em suas aulas. Em consequência a isto espera-se que o trabalho possa despertar curiosidade e também causar maior proximidade com a disciplina matemática, por parte dos discentes.

O trabalho em questão parte da indagação: Quais as aplicações e influência da sequência de Fibonacci no mundo e na matemática? Dessa forma tem-se por objetivo geral abordar as aplicações dos números de Fibonacci de forma exemplificativa e apresentar algumas similaridades com outras relações e sequências matemáticas, assim como mencionar exemplos de atividades para serem trabalhadas em sala de aula. De forma específica objetiva-se com o artigo:

- Apresentar, brevemente, a história de vida do Leonardo Fibonacci e suas obras;
- Definir a Sequência de Fibonacci;
- Mostrar exemplos e relações básicas da sequência de Fibonacci;
- Expor sugestões de como pode ser trabalhada em sala de aula a Sequência de Fibonacci.

Para chegar à resposta da pergunta norteadora, adotou-se uma metodologia que se constituiu de pesquisa metodológica, bibliográfica exploratória, de abordagem qualitativa com método descritivo. As principais fontes dos artigos são dissertações de mestrado apresentadas ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. As plataformas on-line utilizadas foram Google Acadêmico, repositório da Universidade Federal de Santa Catarina, dispondo de artigos científicos, revistas e livros disponíveis na língua portuguesa desde o ano de 1991 a 2023.

Para alcançar os objetivos e responder ao que foi questionado, estruturou-se o trabalho em capítulos, como descrito logo abaixo:

O artigo inicia-se trazendo um apanhado da história de Fibonacci, fazendo menção à suas principais obras. Neste capítulo objetivou-se conhecer um pouco da vida do matemático Fibonacci, suas principais contribuições matemáticas.

No terceiro capítulo é abordada a Sequência de Fibonacci, tema central do trabalho, como continuação é tratado de forma individual algumas aplicações, exemplos e relações da sequência de Fibonacci, irá se abordar as aplicações da sequência, destacando aplicações no mundo material e mostrar algumas das inúmeras aparições na natureza. Neste capítulo objetiva-se mostrar algumas aplicações de tal sequência, evidenciando o quanto tal assunto está relacionado com o mundo.

No quarto capítulo será apresentado uma série de atividades didáticas que podem ser desenvolvidas com alunos do Ensino Médio com a sequência de Fibonacci. Neste capítulo almeja-se apresentar atividades didáticas, evidenciando seus objetivos, pré-requisitos, recursos a serem utilizados, tempo de duração e como as mesmas devem ser desenvolvidas. Também, busca-se enfatizar o quanto tal assunto é interessante para ser abordado em sala de aula. Por fim faz-se uma breve consideração.

2 LEONARDO FIBONACCI

Neste capítulo buscou-se falar um pouco do contexto histórico, onde foram destacados aspectos sobre a vida de Fibonacci e suas obras.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO E OBRAS

Imagem 1: Fibonacci



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm>

Segundo Maretto (2021), Leonardo de Pisa era considerado o matemático mais notável da idade média e foi o primeiro matemático italiano reconhecido como um grande matemático europeu. Também conhecido por Leonardo Bigollo ou Leonardo Pisano por viajar muito em busca de conhecimento. Conforme Livio (2008) “Bigollo” significava “viajante” ou “homem sem importância” nos dialetos toscano e veneziano, respectivamente. O ano de seu nascimento é um ponto de discórdia para diversos autores. Para Frazão (2022) ele nasceu em 1.170 na cidade de Pisa, na Itália.

Imagem 2: Localização da cidade de Pisa – Itália



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm>

Filho de Guglielmo dei Bonacci, um aventureiro mercador, Leonardo Fibonacci acompanhou as atividades do pai no porto de Pisa, cidade onde nasceu, que mantinha grande influência no comércio do Mediterrâneo. Inserido nas atividades de comércio do seu genitor, Fibonacci teve acesso a matemática hindu e árabe, esta que era empregada no comércio oriental. De acordo com Eves (2004), Fibonacci recebeu parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai desempenhava uma função alfandegária, atividade esta que despertou o interesse do mesmo pela aritmética.

Almeida (2014) cita que um dos professores de Fibonacci era muçulmano e por ele foi apresentado o livro do matemático Persa Alkhowarizmi sobre álgebra, técnicas de cálculos indo-árabe e sistemas de numeração. Em sua escrita Eves (2004) fala que Leonardo fez diversas viagens pelo Egito, Sicília, Grécia e Síria e teve a oportunidade de conhecer os métodos matemáticos orientais e árabes.

Fibonacci era tão talentoso que chamou a atenção do imperador Frederico II:

Os talentos de Fibonacci chamaram a atenção do patrono do saber, o imperador Frederico II, com o consequente convite para participar de um torneio matemático na corte. João de Palermo, um membro do séquito imperial, propôs três problemas. O primeiro consistia em achar um número racional x tal que $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ fossem ambos quadrados de números racionais. Fibonacci deu a resposta $x = 41/12$, que é correta, uma vez que $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$ e $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$. Essa solução aparece no *Liber quadratorum*. No segundo problema pedia-se que achasse uma solução da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci tentou provar que nenhuma raiz da equação pode ser expressa irracionalmente na forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou, em outras palavras, que nenhuma raiz pode ser construída com régua e compasso. Obteve então uma resposta aproximada que, expressa em notação decimal, é 1,3688081075 e que é correta até a nona casa. A resposta aparece, sem nenhuma discussão anexa, num trabalho de Fibonacci intitulado *Flos* (floração ou flor) e tem provocado alguma perplexidade. O terceiro problema, também registrado nesse último trabalho, é mais fácil e pode ser encontrado no Exercício 8.4. (EVES, 2004, p.293).

A importância de Leonardo para a matemática perpassa várias das áreas da disciplina. Vê-se que Fibonacci ao longo da sua vida viajou para muitos outros países e nesses conforme Almeida (2014), ele estudou sobre os diversos sistemas de numeração, em torno do ano de 1.202 retornou para Pisa. De volta a Itália Leonardo escreveu vários livros, como mostra Ferreira:

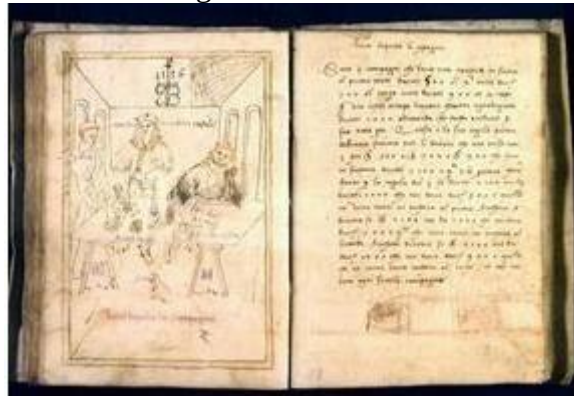
Fibonacci escreveu cinco obras: quatro livros e uma que foi preservada como carta. Os quatro livros de Fibonacci:

- *Liber abacci* (1202): Foi revisto em 1228. Foi neste livro que Fibonacci falou pela primeira vez sobre o problema dos coelhos.
- *Practica geometriae* (1220): Onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria.
- *Flos* (1225): Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados por João de Palermo, um membro da corte do imperador Frederico II.
- *Liber quadratorum* (1225): É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal. (FERREIRA, 2007, p. 10).

O Livro do Cálculo (*O Liber Abaci*) escrito em 1.202 foi a primeira obra de Fibonacci que apresenta vários problemas, dentre eles se destaca o crescimento hipotético da reprodução da população de coelho o qual originou a sequência de números de Fibonacci (MARETTO, 2021). E ainda hoje cria-se novas aplicações, elucidado por Boyer:

Sem dúvida o problema no *Liber Abaci* que mais inspirou aos futuros matemáticos foi o seguinte: Quantos pares de coelhos são produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês? (BOYER, 1974, p. 186).

Imagem 3: *Liber Abaci*



Fonte:

<https://www.bing.com/images/search?q=liber+abaci&qpv=liber+abaci&form=IGRE&first=1>

Na obra *Practica geometriae* (1220) se demonstra uma técnica bastante avançada na época para a resolução de problemas algébricos com geometria e emprego da álgebra para resolução de problemas geométricos. Cinco anos depois, João de Palermo propôs um desafio para Pisa com três problemas e as respectivas soluções foram descritas no livro *Flos*. No mesmo ano foi publicado a sua obra *O Libre Quadratorum* traduzindo para o português: *O Livro dos Quadrados*, que alcança resultados precisos até a nona casa decimal através das raízes cúbicas.

A fama de Leonardo Fibonacci e de sua sequência não é à toa, com séculos de estudos tem-se hoje várias propriedades e relações entre os termos dessa sequência; muito importante também são as várias aplicações que foram e são encontradas como comprovações da existência dessa sequência numérica na natureza. Fibonacci faleceu, provavelmente, no ano de 1250 e foi enterrado em um cemitério em Pisa, perto da Catedral. No fundo desse cemitério, encontra-se uma estátua de Fibonacci.

Imagem 4: Estátua de Fibonacci no cemitério de Pisa



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo_da_Pisa.jpg

3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A expressão Números de Fibonacci descreve a sequência de números que formam o seguinte padrão: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, Nela, cada elemento da sequência, a partir do terceiro, é gerado pela soma de seus dois antecessores, neste capítulo será definido como se dá a construção de tal sequência, além disso procurou-se mostrar de onde se originou este estudo por Fibonacci, na época.

3.1 RELAÇÃO ENTRE A REPRODUÇÃO DE COELHOS E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

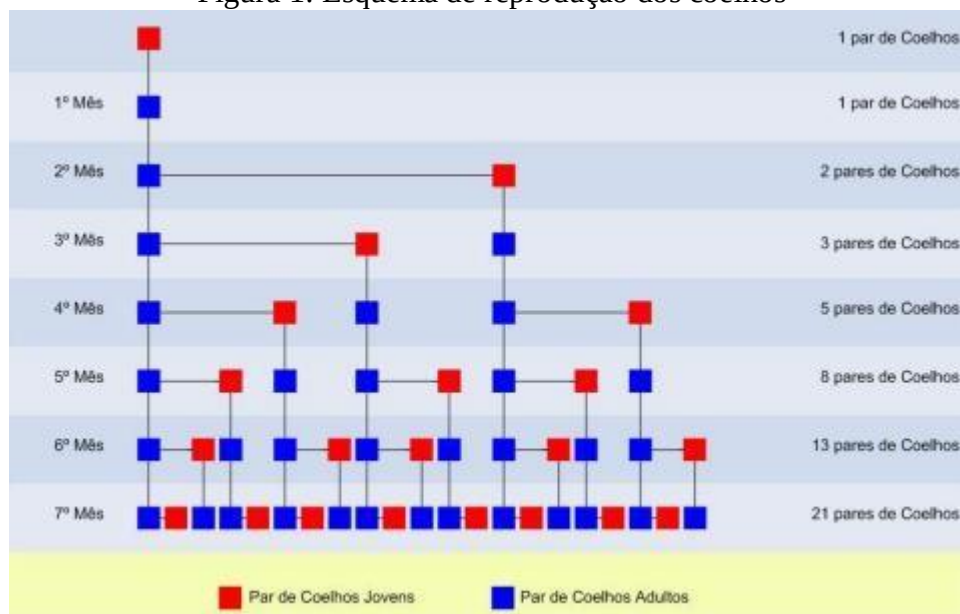
O problema hipotético apresentado no capítulo 12 do Livro do Cálculo escrito por Fibonacci, que teria sido o “pontapé”, é:

Uma pessoa tem um par de coelhos recém nascidos, num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (ALMEIDA, 2014, p.2).

Segundo Maretto (2021) esse problema bastante conhecido e aprofundado pelos matemáticos contribuiu muito para o mundo matemático. Para solucionar tal problema Fibonacci teria utilizado o conteúdo sequência numéricas, veja como seria uma das possíveis soluções:

No momento onde se tem o tempo zero, só existia um par de coelhos jovem. No primeiro mês, esse par de coelhos já estaria adulto e fértil. No próximo mês, esse primeiro par gera outro par, tendo-se assim 2 pares. No terceiro mês, o par adulto gera outro par jovem, enquanto que o par de filhotes se torna fértil. Logo, fica-se com 3 pares. No quarto mês, cada um dos dois pares gera um par jovem e o terceiro par se torna adulto e fértil. Seguindo esta linha de raciocínio, nos demais meses o número de pares será 5, 8, 13, 21, 34 e assim sucessivamente, como se pode ver na Figura 1, abaixo:

Figura 1: Esquema de reprodução dos coelhos



Fonte: FERREIRA, 2007.

A solução deste problema ria uma sequência que tem várias aplicações na natureza e é recheada de inúmeras propriedades interessantes, que serão mostrados mais adiante. Esta é a sequência conhecida como Sequência de Fibonacci.

3.2 DEFINIÇÃO DA SEQUÊNCIA

Segundo Almeida (2014), após o problema da reprodução de coelhos pode-se definir resumidamente como a soma dos dois números anteriores da sequência, definida como a sequência recursiva. Logo se tem:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2.$$

Formando a seguinte sequência 1,1,2,3,5,8,13,21,34... que também são conhecidos como os números de Fibonacci. Zahn (2011) traz que essa sequência recebeu o nome de Fibonacci no século XIX, pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891). E este por sua vez, posteriormente, criou outra sequência a partir da de Fibonacci.

3.3 EXEMPLOS E RELAÇÕES DA SEQUÊNCIA

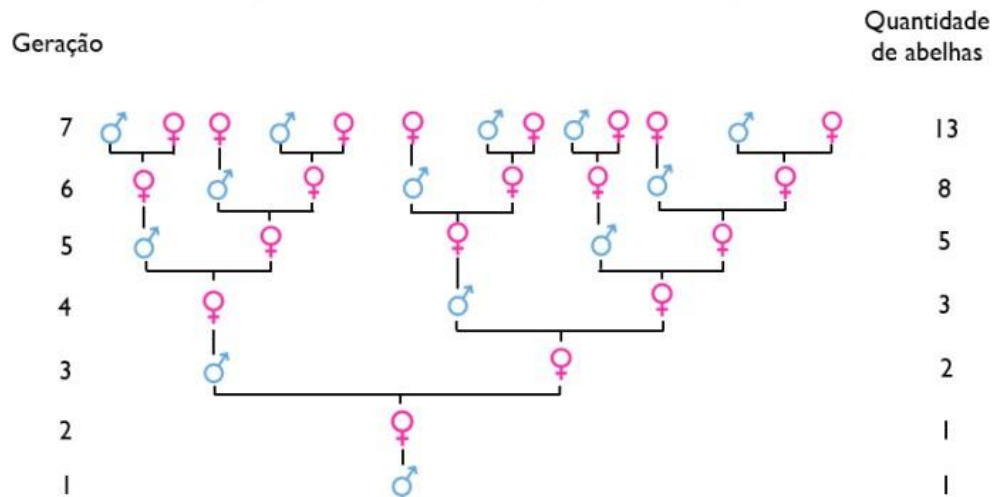
Inicialmente utilizados para modelar o problema sobre crescimento de uma população de coelhos, os Números de Fibonacci são utilizados para modelar situações em diversas áreas como matemática, estatística, biologia, arquitetura, medicina, economia, entre outras. Com os Números de Fibonacci já definidos, algumas relações de grande importância serão expostas.

3.3.1 As Abelhas

Segundo Farias *et. al.* (2020) a sequência de Fibonacci possui uma grande ramificação de aplicações que pode ser encontrada nos elementos naturais do planeta como animais, plantas, galhos, flores, orelha humana e também dispõe relação com a proporção áurea. Um exemplo é a reprodução de abelhas do sexo masculino da espécie *apis*.

O mesmo autor cita exemplo da aplicação da sequência de Fibonacci na linhagem familiar de um zangão. Uma vez que o zangão tem um progenitor que é a abelha fêmea e a mesma tem progenitores (macho e fêmea) pode-se estabelecer a sequência da seguinte forma: a abelha macho tem apenas um progenitor (fêmea), consequentemente ele terá um casal de avós (macho e fêmea) e três bisavós sendo um macho e duas fêmeas, aplicando essa análise obtém-se a sequência de Fibonacci descrita na Figura 2.

Figura 2: Árvore genealógica da abelha macho



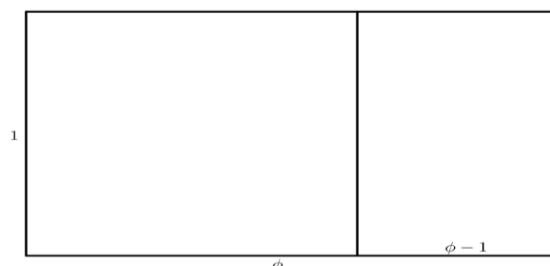
Fonte: FARIAS *et. al.*, 2020.

3.3.2 O Número Ouro e a Espiral Áurea

No mundo matemático a sequência de Fibonacci tem suas aplicações em diversas áreas e a sua conexão com o número de ouro é um destaque. O número de ouro é número irracional, simbolizado por Φ e está presente em diversas áreas como na arquitetura, na música, nas obras de artes, na natureza entre outras, o seu valor é aproximadamente 1,618 (ALMEIDA, 2014).

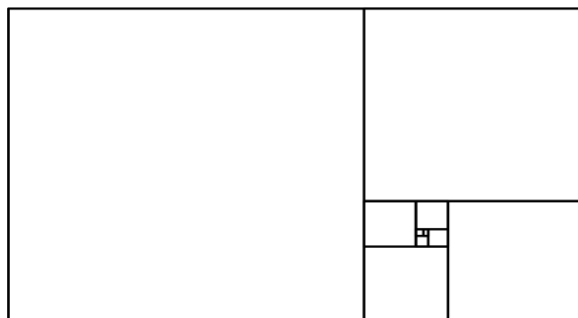
Para demonstrar a relação do número ouro com a sequência de Fibonacci, é necessário um retângulo áureo cujo valor da razão de sua largura e do seu comprimento é 1,618. Ao dividirmos esse retângulo formando a primeira parte em um quadrado de lado igual à largura do retângulo e com a diferença da largura e comprimento do retângulo inicial cria-se a largura do segundo retângulo e o seu comprimento é igual à largura do retângulo inicial (Figura 3), a continuação desse processo resulta em novos retângulos áureos conforme a Figura 4 (PACHECO, 2021).

Figura 3: Retângulo áureo dividido em um quadrado e um novo retângulo



Fonte: PACHECO, 2021.

Figura 4: Sequência de retângulos áureos



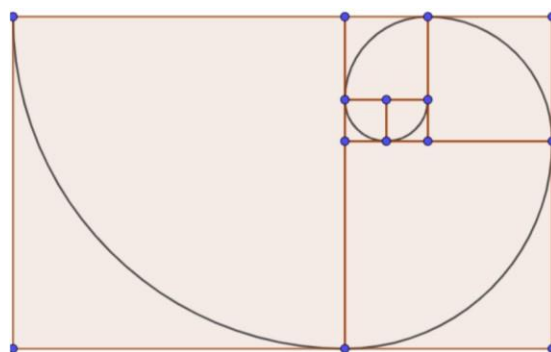
Fonte: PACHECO, 2021.

A construção de um espiral áurea acontece com etapas:

Primeiro um quadrado de lado $l = 1$. Em seguida, colocamos dois desses quadrados um ao lado do outro, obtendo um retângulo com dimensões 1 e 2. Agora, no lado maior, construímos um quadrado de lado 2. Note que, o resultado é um retângulo de lados 2 e 3. No lado de medida igual a 3, construa um quadrado de lado 3, cujo resultado é um retângulo de lados 3 e 5. Ao dar continuidade ao procedimento acima, formaremos outros quadrados de lados 5, 8, 13, 21 e assim por diante, onde cada lado do quadrado é igual ao maior lado do quadrado anterior (MARETTO, 2021, p.8).

O processo de criação da espiral áurea envolve a aplicação cuidadosa da proporção áurea para formar uma sequência de retângulos que, quando conectados, resultam em uma espiral elegante e harmoniosa. Este fenômeno matemático transcende os limites da abstração, conectando-se à beleza e à ordem presentes no tecido fundamental da natureza e da arte. Nota-se a sequência de Fibonacci nos resultados dos lados, 1,1,2,3,5,8,13,21... e com ajuda de um compasso, pode-se traçar um quarto de círculo nesses respectivos quadrados (Figura 5) (MARETTO, 2021).

Figura 5: Espiral Áurea



Fonte: MARETTO, 2021.

Na natureza essa espiral é encontrada em vários ambientes e se faz perceber em diversos animais, objetos e até mesmo no corpo humano.

Imagem 5: Espiral Áurea na Natureza



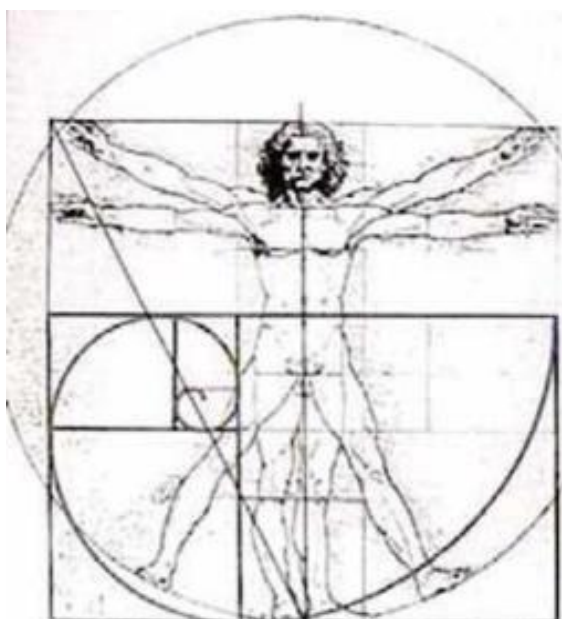
Fonte: MARETTO, 2021.

3.3.2.1 NO CORPO HUMANO

Quando aplicada ao corpo humano, a proporção áurea pode ser observada em diversos elementos anatômicos, contribuindo para a percepção de beleza e equilíbrio. A ideia por trás disso é que as partes do corpo que estão em proporções áureas são percebidas como esteticamente agradáveis.

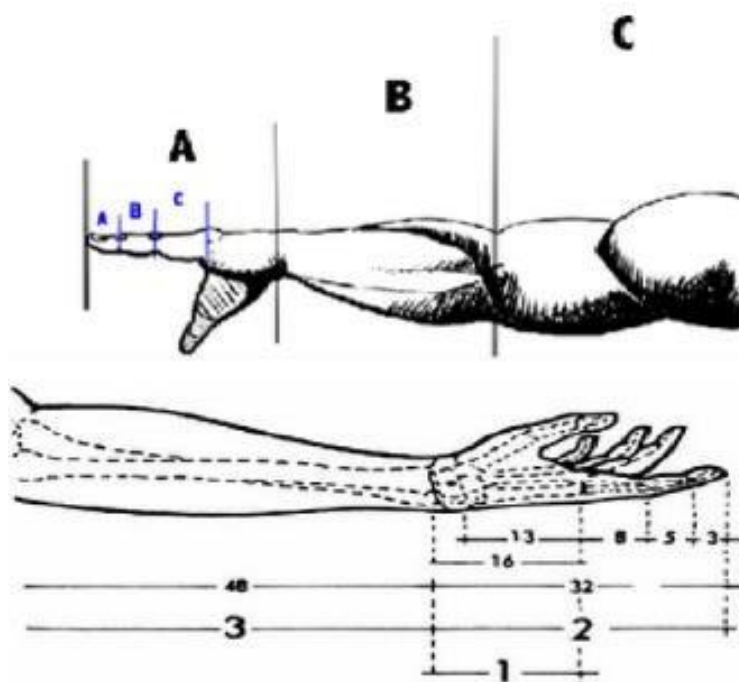
Um exemplo clássico é a divisão do corpo humano em segmentos de acordo com a proporção áurea. Se considerarmos a altura total de uma pessoa, a divisão em segmentos como a altura do umbigo até os pés e a altura do umbigo até a cabeça pode seguir a proporção áurea, criando uma harmonia visual. Da mesma forma, a divisão dos membros, como a relação entre o comprimento do braço e do antebraço, pode ser aproximadamente proporcional a ϕ .

Figura 6: Espiral Áurea no corpo humano



Fonte: <http://pegasus.portal.nom.br/proporcao-aurea-e-sequencia-de-fibonacci/>

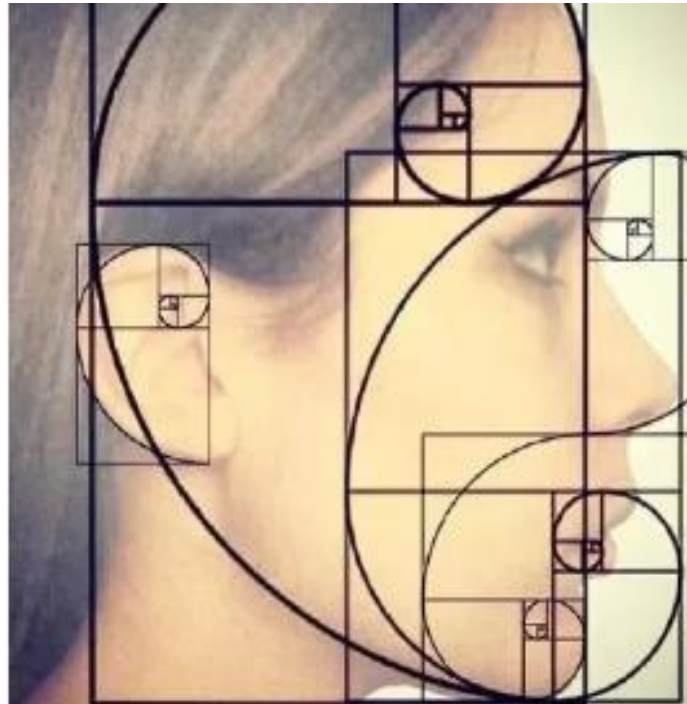
Figura 7: Proporção áurea no corpo humano



Fonte: <https://www.raciociniocristao.com.br/2014/05/digitais-criador>

Além disso, a proporção áurea também pode ser associada a características faciais, como a localização dos olhos, nariz e boca. Acredita-se que rostos que seguem essas proporções são percebidos como mais atraentes.

Imagem 6: Espiral Áurea na face humana



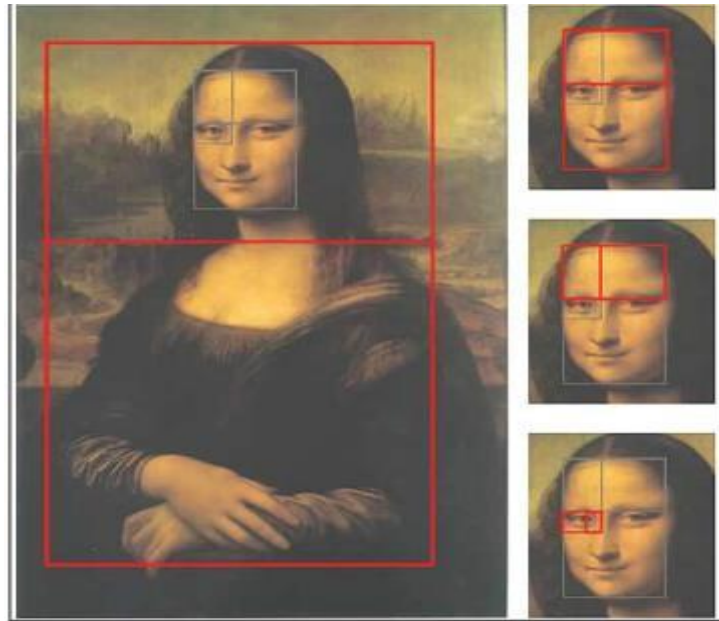
Fonte: <http://www.criacionismo.com.br/2017/06/a-natureza-numerica-e-os-codigos.html>

É importante notar que a aplicação estrita da proporção áurea ao corpo humano pode variar e que a percepção da beleza é subjetiva, variando culturalmente e ao longo do tempo. Apesar disso, o conceito da proporção áurea continua a ser uma influência significativa em muitas disciplinas artísticas e de design, buscando alcançar uma estética equilibrada e agradável.

3.3.2.2 NA ARTE E CONSTRUÇÕES

Muitos, dos grandes, artistas utilizaram a proporção áurea em suas obras com o objetivo de alcançar harmonia, beleza e perfeição. A ideia é que a divisão de uma figura ou espaço de acordo com a proporção áurea resulta em uma composição visualmente atraente e equilibrada aos olhos do observador. Segundo Neto (2013) um exemplo de arte é a famosa pintura *Monalisa* do pintor italiano Leonardo da Vinci, o número de ouro nas relações entre seu tronco e cabeça e também entre elementos do rosto.

Imagem 7: Monalisa



Fonte: FREITAS, 2008.

Com relação a arquitetura, com mesmo objetivo que nas artes, muitos arquitetos usaram em suas construções a proporção áurea. Lauro (2005), menciona que um dos mais famosos exemplos é o Partenon, construído no século V a. C pelo arquiteto e escultor Fídias.

Imagem 8: O Partenon



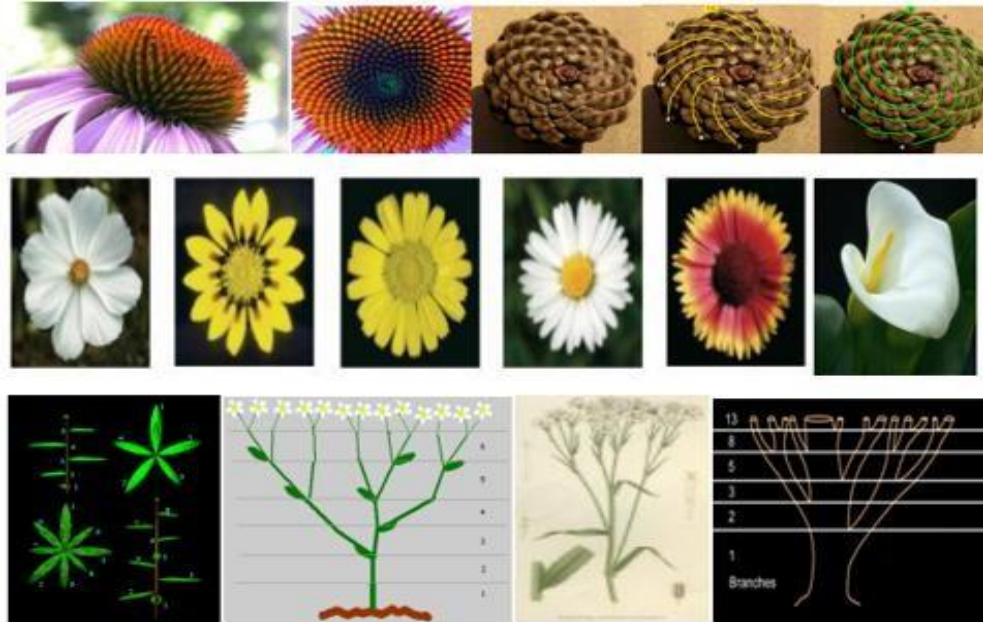
Fonte: VAZ, 2008.

É importante notar que a aplicação rigorosa da proporção áurea não é uma regra inflexível, e muitos artistas e arquitetos escolhem intuitivamente seguir ou desviar dela com base em suas visões e intenções criativas. A proporção áurea é uma ferramenta, não uma fórmula rígida, e seu impacto na estética é muitas vezes subjetivo, variando de acordo com o contexto cultural e as preferências individuais.

3.3.2.3 EM ANIMAIS E PLANTAS

Na flor de um girassol (cabeça) as sementes são acomodadas de tal maneira que sigam um padrão, este segue a sequência de Fibonacci. Esta espiral impede que a semente do girassol se amontoie fora, ajudam a planta sobreviver.

Imagem 9: A Espiral Áurea e a Sequência de Fibonacci



Fonte: file:///C:/Users/akbtr/OneDrive/%C3%81rea%20de%20Trabalho/14.pdf

Pétalas de algumas flores e outras plantas também podem estar relacionadas ao Leonardo. Se você examinar cuidadosamente o número ou a disposição das pétalas em uma flor que ainda tem todas as suas pétalas intactas e não perdeu nenhuma, descobrirá que o número de pétalas de uma flor, para muitas flores é um número de Fibonacci.

Em alguns animais pode-se observar claramente a espiral de Fibonacci.

Imagem 10: Animais que tem algo associado com a sequência



Fonte: file:///C:/Users/akbtr/OneDrive/%C3%81rea%20de%20Trabalho/14.pdf

O antílope e o camaleão são exemplos notáveis desse fenômeno. No caso do antílope, se seus chifres continuassem crescendo indefinidamente, isso levaria à formação da espiral de Fibonacci. Por sua vez, no camaleão, ao observar o rabo contraído desse animal, também se evidencia uma das representações mais precisas dessa mesma espiral.

Imagem 11: Antílope e camaleão



Fonte: FREITAS, 2008.

O Nautilus é um molusco que se origina no sudoeste do Oceano Pacífico. Sua concha exibe uma representação precisa da espiral áurea.

Imagem 12: Nautilus Marinho



Fonte: FREITAS, 2008.

Esses padrões não ocorrem por acaso. A relação áurea é considerada uma solução eficiente e otimizada para o crescimento e desenvolvimento, fornecendo uma estrutura que maximiza a eficiência na utilização de recursos, como luz solar e espaço. A presença da relação áurea na natureza é fascinante e destaca a harmonia matemática subjacente à diversidade e complexidade dos seres vivos. Ela continua a intrigar cientistas, artistas e observadores da natureza, demonstrando que a beleza e a ordem podem ser encontradas em toda parte, desde as menores estruturas até os padrões mais amplos da vida.

3.3.3 O Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci

O triângulo de Pascal ou como também é conhecido o triângulo aritmético, é representado por um arranjo geométrico triangular formado por números binomiais infinitos correlacionados entre si. Em sua composição tem-se linhas e colunas, de cada linha o seu primeiro e último número é de valor igual a 1, cada linha 0,1,2,3... tem um elemento cujo os valores são 1,2,3,5... respectivamente, na linha de número 2 o seu elemento é o resultado da soma dos dois anteriores (SANTIAGO, 2016).

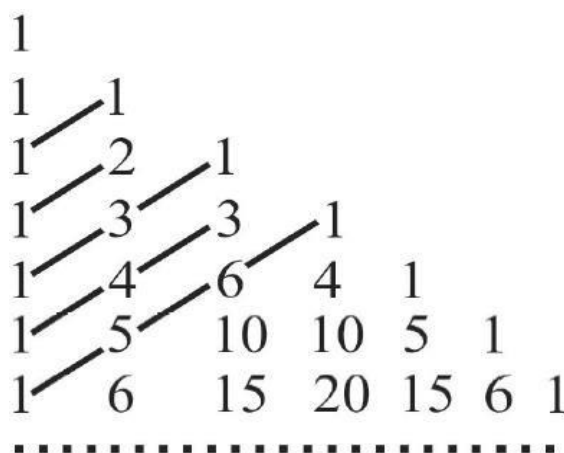
Figura 8: Representação do Triângulo

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Fonte: SANTIAGO, 2016.

A diagonal do triângulo de pascal é chamada de diagonal aumentada, onde a soma dos seus números na diagonal resulta na sequência dos números de Fibonacci conforme representa a Figura 8. Pode-se notar que os resultados da soma desde a primeira diagonal até sétima são, respectivamente, 1,1,2,3,5,8,13. Provando, assim, que a soma de cada diagonal é um número de Fibonacci (DE ALMEIDA, 2016).

Figura 9: Diagonal aumentada



Representativamente temos a sequência de Fibonacci da seguinte forma: $F_1=F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$ e assim sucessivamente (MARETTO, 2021).

3.3.4 Teorema de Zeckendorf (Relação dos Números Inteiros com o Número de Fibonacci)

O matemático Edouard Zeckendorf, nascido na Bélgica, ficou conhecido por desenvolver estudos sobre a sequência de Fibonacci. Quando membro da Real Sociedade de Ciência de Liège no ano de 1957, publicou ao menos vinte artigos sobre a teoria dos números elementares. Na sequência de Fibonacci ao realizar a soma dos seus termos não subsequentes e dessemelhantes é possível representar os números inteiros positivos de uma única forma (MARETTO, 2021).

Como já mostrado no trabalho, a sequência de Fibonacci é 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... Atribuindo índices aos termos dessa sequência temos: $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, $F_8=21$, $F_9=34$, $F_{10}=55$.

Usando apenas os termos iniciais da sequência pode-se demonstrar o teorema de Zeckendorf. Pode-se mostrar que:

$$4 = F_4 + F_2 \quad (3+1 = 4)$$

$$6 = F_5 + F_2 \quad (5+1 = 6)$$

$$7 = F_5 + F_3 \quad (5+2 = 7)$$

$$9 = F_6 + F_3 \quad (8+1 = 9)$$

$$10 = F_6 + F_4 \quad (8+2 = 10)$$

Certamente, foram apresentados alguns exemplos que ilustram as observações e relações da sequência de Fibonacci tanto na natureza quanto na matemática. Contudo, essas constatações não se limitam aos casos mencionados. Inúmeras outras situações revelam essa mesma conexão de maneiras fascinantes.

4 APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA SALA DE AULA

A sequência de Fibonacci é bastante conhecida no âmbito escolar de nível superior, e há grande carência de como abordar esse tema em outros graus escolares, como o ensino fundamental e quando abordado é de maneira superficial (De Almeida, 2016). É notória a existência da sequência de Fibonacci no dia a dia e grande é a sua importância no mundo da matemática por esta razão torna-se plausível que desde o ensino fundamental seja trabalhado esse tema na sala de aula. Em sala de aula esse tema se torna bastante atrativo para os alunos com atividades interativas e lúdicas, devido ao seu apelo visual (FARIA *et al.*, 2020).

Durante o estudo notou-se que a sequência de Fibonacci está presente nas mais diversas áreas da matemática, por exemplo, geometria, álgebra e aritmética. Nos anos finais do ensino fundamental, após os alunos terem contato introdutório sobre tal conteúdo é essencial aplicar atividades que desenvolvam habilidades que estão presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Pacheco, 2021).

Não é diferente para o Ensino Médio. Introduzir o ensino da Sequência de Fibonacci no Ensino Médio não apenas enriquece o currículo matemático, mas também oferece benefícios educacionais significativos aos estudantes. Além de ser uma excelente ferramenta para estimular o pensamento crítico e a resolução de problemas pode-se explorar a relação entre os termos consecutivos da sequência. Assim, os alunos são desafiados a observar padrões, formular hipóteses e deduzir propriedades matemáticas. Esse processo incentiva o raciocínio lógico, habilidades essenciais que extrapolam o âmbito matemático, sendo aplicáveis em diversas áreas da vida cotidiana e em futuros estudos acadêmicos.

4.1 SUGESTÃO DE COMO TRABALHAR A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO FUNDAMENTAL SÉRIES E FINAIS

Ao integrar a Sequência de Fibonacci ao currículo do Ensino Fundamental, pode-se proporcionar aos estudantes uma experiência de aprendizagem envolvente, estimulando o pensamento crítico, o raciocínio lógico e o desenvolvimento de habilidades matemáticas fundamentais. Este subcapítulo busca apresentar sugestões práticas e inovadoras para explorar a Sequência de Fibonacci em sala de aula, transformando-a em uma aliada pedagógica valiosa e inspiradora para os alunos.

Com relação à Introdução da Sequência de Fibonacci, sugere-se ao professor que se comece por explicar o que é a Sequência de Fibonacci, em seguida mostre os primeiros termos da sequência e destaque a regra de formação. Importante neste momento inicial o uso de recursos visuais, como cartões ou blocos coloridos, para representar os números da Sequência de Fibonacci. É sempre importante trazer algo que chame atenção dos discentes, lembre-se que as pessoas aprendem de “n” formas. Os alunos podem criar padrões visuais interessantes ao organizar esses elementos.

Apoiando, tem-se que:

A maior parte das informações que absorvemos vem pelo sentido da visão. Seja observando um objeto ou lendo um texto, via de regra, são os olhos que nos conectam ao mundo exterior e nos permitem assimilar novos conhecimentos. Por isso, os estímulos visuais são tão importantes na sala de aula, eles não apenas despertam o interesse e a curiosidade dos alunos, mas podem ajudar os estudantes a reterem melhor o conteúdo (DESAFIOS DA EDUCAÇÃO, 2014, p. 1).

Para alunos mais avançados, introduza a ideia de programação, permitindo que escrevam códigos simples para gerar os termos da Sequência de Fibonacci ou criem padrões visuais usando linguagens de programação de blocos. Incentive, em seguida, os alunos a realizar pesquisas sobre a história da Sequência de Fibonacci, seu criador, e como ela é aplicada em diferentes áreas, como na arte, arquitetura e computação.

Uma aula interessante seria com a utilização de materiais manipuláveis ou materiais de arte. Para esta aula peça aos alunos para criarem a Sequência de Fibonacci usando materiais manipuláveis, como palitos de dente, copos, ou até mesmo blocos de construção. Isso ajuda a tornar a abstração matemática mais tangível. Explore também, como a Sequência de Fibonacci está presente na natureza, por exemplo, na disposição de sementes em um girassol, na espiral de uma concha ou na forma de uma pinha. Incentive os alunos a criar desenhos ou arte inspirada nesses padrões naturais.

Em um outro momento desafie os alunos a identificar padrões na sequência. Por exemplo, peça que destaquem números pares, ímpares ou que encontrem outras relações interessantes entre os termos. Encoraje os alunos a explorarem propriedades matemáticas da Sequência de Fibonacci, como a razão entre os termos consecutivos se aproximando do número áureo (ϕ).

Não esqueça de propor problemas do mundo real que possam ser resolvidos usando a Sequência de Fibonacci. Isso destaca a aplicabilidade da matemática na resolução de problemas práticos.

Para que o aluno possa construir o conhecimento será necessário que, diante do enunciado de um problema, ele conheça cada expressão verbal utilizada. Em seguida deverá ser capaz de traduzir cada dado apresentado verbalmente em dados concretos do mundo em que ela vive. Por último precisará entender as relações lógicas constantes do problema para então relacionar os dados entre si e realizar as operações necessárias à solução. Tudo isto supõe o desenvolvimento de certas capacidades do aluno as quais poderão ou não estar presentes (CARRAHER, 1991).

A caminhada do aluno na escola vai além de só aprender coisas; ela pede que ele saiba desvendar os desafios apresentados. Quando ele se depara com um problema, precisa não só entender as palavras usadas, mas também captar o significado delas no contexto geral.

Depois, ele precisa mostrar que sabe transformar as palavras em coisas reais que fazem sentido para ele. Cada informação que aparece nas palavras se torna como um elo que precisa ser entendido e traduzido para algo que faça sentido na vida dele. O estudante se torna quase como um tradutor, pegando ideias difíceis e transformando em coisas concretas que tenham a ver com a vida dele. A escola, então, se torna um lugar onde o aluno forma não só o conhecimento, mas também quem ele é, sempre mudando e melhorando.

Ao abordar a Sequência de Fibonacci dessa maneira, os alunos não apenas compreendem os conceitos matemáticos, mas também percebem a presença da matemática em várias disciplinas e aspectos da vida cotidiana. Essa abordagem interativa ajuda a despertar o interesse dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

4.2 SUGESTÃO DE COMO TRABALHAR A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO MÉDIO

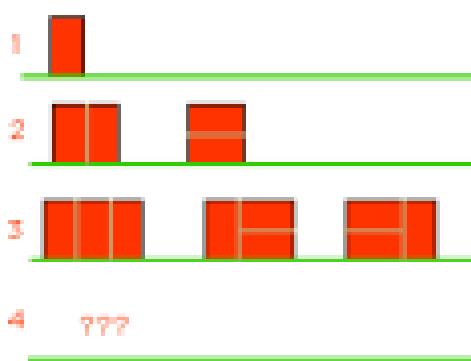
No contexto do ensino médio, após explorar a progressão aritmética (P.A.) e a progressão geométrica (P.G.), é pertinente revisar alguns conceitos relacionados à sequência de Fibonacci, previamente abordados em séries anteriores. Após apresentar a sequência de Fibonacci no quadro e recordar o procedimento para encontrar seus elementos subsequentes, é recomendável desafiar os alunos a representarem, de forma algébrica, a lei de formação dessa sequência.

Em seguida, os estudantes podem ser incentivados a identificar algumas propriedades da sequência e expressá-las de maneira algébrica. Nesse ponto, o professor pode expandir o conhecimento, mencionando aplicações adicionais da sequência de Fibonacci e estimulando os alunos a realizar pesquisas e trabalhos abordando diversos aspectos, como a história, as propriedades e as relações entre os elementos da sequência, além das aplicações práticas no cotidiano deles.

Explore recursos como vídeos, livros, filmes e questões que envolvem a sequência de Fibonacci, pode ser altamente benéfico para despertar o interesse dos alunos não apenas na própria sequência, mas também em tópicos matemáticos de forma mais abrangente.

De Oliveira (2013), sugere uma atividade em que os alunos possam exercitar e comprovar de maneira lúdica a aplicação da sequência de Fibonacci. A atividade sugere que o aluno forme uma parede de tijolos, em que o comprimento da parede é duas vezes maior que a largura que possui. Na Figura 10, tem as primeiras construções.

Figura 10: Parede com tijolos



Fonte: De Oliveira, 2013.

A questão que os alunos devem responder é: em quantas maneiras é possível formar uma parede de $4u.c$ e se é provável descobrir um padrão na sequência? Atividades como esta, levam o aluno a pensar e problematizar o conteúdo. Lembre-se de adaptar as atividades de acordo com o nível de compreensão e interesse dos alunos, tornando o aprendizado da Sequência de Fibonacci uma experiência envolvente e educativa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, foi possível não apenas evidenciar, mas também explorar de maneira aprofundada a notável relevância da Sequência de Fibonacci. Ao analisar sua estrutura única, tornou-se evidente que essa sequência se destaca de maneira singular no vasto panorama das sequências numéricas, revelando uma intrincada teia de relações com outros tópicos matemáticos. Um exemplo fascinante dessa interconexão é a notável ligação da Sequência de Fibonacci com o triângulo de Pascal, destacando-se como um elo precioso entre diferentes domínios matemáticos.

Além das suas complexas relações matemáticas, identificou-se uma multiplicidade de aplicações práticas e relações concretas com o mundo real para a Sequência de Fibonacci. Desde a modelagem de crescimento populacional em biologia até a aplicação em arquitetura e arte, essa sequência revela sua versatilidade surpreendente. E dada a natureza extraordinária dessa sequência numérica, é imperativo apresentá-la aos alunos do ensino básico.

Dessa forma, propõe-se uma abordagem didática simples, cuidadosamente alinhada aos temas previamente estudados pelos alunos. Essa estratégia visa proporcionar uma introdução fluida à Sequência de Fibonacci, fornecendo uma base sólida para a compreensão das suas características intrínsecas e aplicações inúmeras. A integração desse conteúdo ao currículo não só enriquece o aprendizado matemático, mas também fortalece a conexão entre teoria e prática, estimulando a curiosidade dos alunos. Não há dúvida de que o estudo aprofundado da Sequência de Fibonacci trará benefícios inestimáveis ao despertar do interesse dos alunos pela matemática.

Ao promover um ambiente educacional que valoriza a investigação e a compreensão prática, esse estudo estimula o raciocínio matemático, cultivando habilidades críticas e a percepção da aplicação real dos conceitos em situações do cotidiano. Assim, a inclusão da Sequência de Fibonacci no ensino básico não apenas enriquece o currículo, mas também contribui para a formação de estudantes mais engajados e conscientes da vastidão e relevância da matemática em suas vidas.

Para finalizar, o estudo sobre o tema foi extremamente gratificante, proporcionou uma significativa ampliação do meu conhecimento. Dada a abrangência desse assunto, reconheço que há diversos pontos que não foram abordados nessa escrita e análise. No entanto, acredita-se que o que foi discutido possa se tornar uma fonte relevante de pesquisa para aqueles interessados em explorar tais tópicos.

Espero que as sugestões possam ser efetivamente aplicadas em salas de aula pelos professores. Acredito firmemente que estas possuem uma riqueza considerável e oferecem a oportunidade de estabelecer uma conexão entre a Matemática e o mundo concreto. Almeja-se, assim, inspirar futuros trabalhos que explorem este tema, desta vez com a implementação prática das atividades em ambientes educacionais e a análise dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. G. S. **Propriedades e generalizações dos números de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo - SP: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

CARRAHER, T. N. **Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação**. 6. ed. Petrópolis: Vozes, 1991.

DE ALMEIDA, D. V. **Propriedades e aplicações dos números de Fibonacci**. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2013.

DE OLIVEIRA, J. J. **Sequências de fibonacci: possibilidades de aplicações no ensino básico**. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2016.

DESAFIOS DA EDUCAÇÃO. **A importância dos estímulos visuais na sala de aula**. 2014. Disponível em: <https://desafiosdaeducacao.com.br/importancia-dos-estimulos-visuais-na-sala-de-aula/>. Acesso em: 16 dez. 2022.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas - SP: Editora UNICAMP, 2004.

FARIAS, C. O. *et. al.* **Aprendendo sobre Fibonacci desde cedo**: Atividades para o ensino fundamental. Departamento de Análise Matemática, Instituto de Matemática e Estatística – IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2020.

FERREIRA, R. A. **Sequência de Fibonacci**. [S.l.], 2007. Disponível em: <http://mirrors.ctan.org/info/babel.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2022.

FRAZÃO, D. **Biografia de Leonardo Fibonacci**. Ebiografia. 2022. Disponível em: https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/. Acesso em: 15 dez. 2022.

FREITAS, F. M. **A proporção áurea e curiosidades históricas ligadas ao desenvolvimento da ciência.** 51 f. — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008. Disponível em: <http://www.africamae.com.br/wp-content/pdf/aurea.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2022.

LAURO, M. M. **A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura.** Exacta, v. 1, n. 3, p. 35–48, 2005.

LESSA, J. R. **Sequência de Fibonacci.** In: Infoescola: navegando e aprendendo. 2020. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/>. Acesso em: 15 dez. 2022.

LIVIO, M. **Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** 3rd. ed. Rio de Janeiro - RJ: Editora Record, 2008.

MARETTO, G. L. S. **Os números de Fibonacci e a representação de Zeckendorf.** Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Instituto de Matemática. Campo Grande – MS. 2021.

NETO, P. R. S. **A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013. Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/515/2011_00411_PABLO_ROBERTO_DE_SOUSA_NETO.pdf?sequence=1. Acesso em: 15 dez. 2022.

PACHECO, F. G. **Sequência de fibonacci:** história, propriedades e aplicações. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2021.

SANTIAGO, Tâmara Paiva. **Triângulo de Pascal:** aplicações no Ensino Fundamental e Médio. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Salvador. 2016.

VAZ, E. **Material Didático.** 65 f. — Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2008. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/md_elenice_vaz.pdf. Acesso em: 15 dez. 2022.

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro.** Rio de Janeiro - RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2011.