

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO PIAUÍ - IFPI CAMPUS PARNAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

GABRIELA DE ASSIS ARAUJO

**CAOS EM UM PÊNDULO DUPLO: UMA
INVESTIGAÇÃO UTILIZANDO
VIDEOANÁLISE**

Parnaíba - PI
Março de 2018

GABRIELA DE ASSIS ARAUJO

CAOS EM UM PÊNDULO DUPLO: UMA INVESTIGAÇÃO UTILIZANDO VIDEOANÁLISE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência parcial para obtenção do di-
ploma do Curso de Licenciatura em Física
do Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Piauí/ *Campus* Parnaíba.

Parnaíba - PI

Março de 2018

GABRIELA DE ASSIS ARAÚJO

CAOS EM UM PÊNDULO DUPLO: UMA
INVESTIGAÇÃO UTILIZANDO VIDEOANÁLISE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí/*Campus* Parnaíba.

Aprovada em ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof.MSc. Itamar Vieira de Sousa Júnior- (Orientador) - Presidente
IFPI/ *Campus* Parnaíba-PI

Prof.MSc.Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento - Examinador
IFPI/ *Campus* Parnaíba-PI

Prof. MSc.Francisco Nailson Farias de Vasconcelos - Examinador
IFMA/ *Campus* Barreirinhas-MA

Parnaíba
2018

Aos meus pais, Maria Gorete e Reginaldo Silva

Agradecimentos

Sou grata primeiramente a Ele, pela oportunidade de poder ser uma pessoa melhor a cada dia. Agradeço aos meus pais, Maria Gorete e Reginaldo Silva pelo amor, incentivo e apoio incondicional, a vocês devo toda minha vida. Agradeço aos meus irmãos, Lidiane, Naylton e Júnior pelo companheirismo e pela força, sei que sempre acreditaram em mim, a vocês todo meu amor. Sou grata por todos meus familiares que sempre estiveram presentes nessa caminhada, obrigada por tudo.

Agradeço ao meu professor e orientador, Itamar Vieira, pela paciência e dedicação no decorrer do nosso trabalho. Obrigada por ter influenciado minha escolha dentro da docência em Física. Deixo aqui registrado meus sinceros sentimentos de admiração e respeito por você. Agradeço as professores, Alexandro Nascimento e Francisco Nailson Vasconcelos, por terem aceito o convite de participação da banca, e pelas belas palavras de contribuição ao trabalho. Agradeço a todos os professores do curso de Lic. em Física do IFPI- Parnaíba, em especial aos professores Janete C. Ribeiro e Bruno P. Sombra, pelo tempo dedicado a nossa turma, ensinamentos e companheirismo.

O espaço não é suficiente para registrar o nome de todos os amigos que fiz nessa jornada, mas, sou grata eternamente por cada um de vocês, que de formas diferentes, contribuíram para a construção da minha forma de ver a vida, tanto pessoal como profissional. Recebi ajuda de pessoas que nunca imaginei, então, sou grata a todos que fizeram parte dessa reta final de curso, e que souberam lidar com minhas angústias.

Não posso deixar de registrar meus agradecimentos ao Clube da Luluzinha e dos Alphas. Apesar das divisões, fomos um único grupo que se uniu para enfrentar as dificuldades nos últimos três períodos. Vocês me ensinaram (além de um pouco de Física) sobre parceria, amizade e querer sempre o bem do próximo. Desejo sucesso a todos vocês, muito obrigada por cada “Calma, vai dá certo”.

Por fim, agradeço a toda comunidade IFPI- Parnaíba, Instituição que me recebeu ainda no ensino médio e que me proporcionou um universo bem diferente do qual eu estava acostumada. Obrigada por todos aqueles que de forma direta ou indireta, tornaram esse momento possível.

"O determinismo frio legado por Newton poderia conduzir a uma espécie de fatalismo. A borboleta de Lorenz afirma que: por menores que sejamos, podemos ter influência sobre o mundo. "

Desconhecido

"Se não houver frutos, valeu a beleza das flores; se não houver flores, valeu a sombra das folhas; se não houver folhas, valeu a intenção da semente."

Henfil

Resumo

A Teoria do Caos é um tema contemporâneo de grande importância na ciência, e por vezes, não é apresentado de forma consistente aos Licenciandos em Física, contribuindo para um pensamento mitológico em torno do assunto. Neste trabalho investigamos o surgimento do caos em sistemas dinâmicos simples utilizando a análise de vídeos com o software *Tracker*. Abordamos alguns conceitos relativos à este tema visando uma contribuição para formação dos futuros docentes em Física. Devido a complexidade do conteúdo, este trabalho apresenta uma introdução aos conceitos mais importantes da Teoria do Caos. Nele, descrevemos alguns aspectos históricos sobre o pensamento científico iniciados a partir de Newton, até o surgimento da Física Moderna. Buscamos ressaltar a importância dos sistemas não lineares e caóticos na compreensão da natureza, através de modelos historicamente consolidados.

Palavras-chaves: Teoria do Caos. Pêndulo Duplo. Videoanálise. *Tracker*.

Abstract

Chaos Theory is a contemporary subject of great importance in science, and sometimes it is not consistently presented to the Licentiates in Physics, contributing to a mythological thinking around the subject. In this work we investigate the emergence of chaos in simple dynamic systems using video analysis with the software `emph Tracker`. We discuss some concepts related to this subject aiming at a contribution to the training of future physics teachers. Due to the complexity of the content, this paper presents an introduction to the most important concepts of Chaos Theory. In it, we describe some historical aspects of scientific thought initiated from Newton until the emergence of Modern Physics. We seek to emphasize the importance of non-linear and chaotic systems in the understanding of nature, through historically consolidated models.

Key-Words: Chaos Theory. Double pendulum. Videoanalysis

Lista de ilustrações

Figura 1 – Atrator de Lorenz. Gráfico que deu origem ao popular "Efeito Borboleta"(STEWART, 1991)	20
Figura 2 – Função $f_A(x)$ para determinados valores do parâmetro A. A linha diagonal é representada pela função $y = x$. Fonte (HILBORN, 2000)	23
Figura 3 – Técnica 1 Representada em (a). Técnica 2 representada em (b). Temos o estudo da função logística para A=2. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)	24
Figura 4 – Em (a) temos o mapa da equação 3.3 para $A = 2,9$ representado a estabilidade da população. Em (b) o mapa da equação 3.3 para $A = 3,1$ representado várias soluções possíveis e consequente instabilidade do sistema. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)	24
Figura 5 – Diagrama de bifurcação para o mapa da Equação Logística . Fonte (THORNTON; MARION, 2011)	25
Figura 6 – Esquema simplificado das correntes de convecção do modelo de Lorenz. Fonte(HILBORN, 2000)	26
Figura 7 – Em (a),(b), (c) temos gráfico da função de X, Y e Z em função do tempo. Em (d) temos a projeção das trajetórias no espaço de fase no plano ZX. O pontos iniciais do movimento são $X = 0$, $Y=1$ e $Z=0$. Fonte (HILBORN, 2000)	28
Figura 8 – Espaço de Fase do modelo de Lorenz no plano YZ com $r = 2$. Uma trajetória no sentido horário e a outra no sentido anti-horário. Fonte (HILBORN, 2000)	28
Figura 9 – Soluções para as equações de Lorenz com $r=160$. Temos soluções periódicas após um intervalo de tempo de 3 segundos.Fonte (HILBORN, 2000)	29
Figura 10 – Solução para $Z(t)$ das equações de Lorenz com $r = 150$. Temos soluções periódicas de dois períodos quando comparados a figura 9. Fonte (HILBORN, 2000)	30
Figura 11 – Solução para $Z(t)$ das equações de Lorenz com $r = 143$. O gráfico superior tem condições iniciais $X = 20$, $Y = 0$, $Z = 163$ e o inferior $X = 20$, $Y = 0$ e $Z = 166$. Fonte (HILBORN, 2000)	30
Figura 12 – Espaço de fase de um oscilador harmônico simples. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)	34
Figura 13 – Espaço de fase de um fluxo hipotético num plano. Fonte (STEWART, 1991)	35

Figura 14	– Espaço de fase do Pêndulo Plano. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)	36
Figura 15	– (a) Representação da Seção de Poincaré, identificando os cortes transversais nos caminhos de fase. (b) Os pontos A_1, A_2 e A_3 são as interseções dos caminhos de fase com as seções, projetadas no plano y-x. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)	37
Figura 16	– À esquerda temos o gráfico do pêndulo amortecido forçado, para alguns valores de força motora. No centro, a representação da projeção do espaço de fase a direita temos a Seção de Poincaré para cada caso. (THORNTON; MARION, 2011).	38
Figura 17	– Em (a) temos a representação de como traçar a Seção de Poincaré numa condição hipotética de um ciclo limite num espaço bidimensional. Em (b) temos as possíveis situações que limite (HILBORN, 2000).	39
Figura 18	– Esquema de um pêndulo físico duplo, cujo movimento está sob efeito apenas da gravidade. Fonte: Elaboração do autor	43
Figura 19	– Espaço de fase da posição e velocidade de um oscilador harmônico amortecido. O atrator do sistema é ponto zero. Diferentemente dos osciladores harmônicos simples de energia constante, antes de fechar o ciclo, o oscilador já não possui a mesma energia. Logo, o formato de espiral é devido a essa perda de energia. Fonte: (DAVIDSON, 2011)	44
Figura 20	– Interface do programa Tracker. Do lado esquerdo, temos o vídeo do pêndulo já em análise. Observe que temos a opção de marcar a trajetória do pêndulo no vídeo. A direita, temos a construção do gráfico de posição xy e uma tabela dos pontos obtidos a partir do referencial estabelecido, destacado em lilás. Fonte: Elaboração do autor	46
Figura 21	– Eletroímã e Fonte. Fonte: Elaboração do autor	48
Figura 22	– Fixadores e pêndulo duplo Fonte: Elaboração do autor	48
Figura 23	– Experimento montado. Fonte: Elaboração do autor	49
Figura 24	– Câmera Hero4 Silver utilizada para gravação dos vídeos Fonte: disponível em http://www.detonablog.com.br/gopro-hero4-silver-vs-hero4-session/	49
Figura 25	– Para h_1 temos em (a) Gráfico de θ (ângulo de rotação) em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor	51
Figura 26	– Para h_2 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor	51

Figura 27	– Para h_3 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy. "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor	52
Figura 28	– Para h_4 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$. (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico das posições xy. "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor	53
Figura 29	– Para h_5 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy. "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor	54
Figura 30	– Para h_6 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy. "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor	54
Figura 31	– Gráficos do movimento angular θ em função do tempo e a correspondente trajetória xy para h_4 , h_5 , h_6 respectivamente.	55
Figura 32	– Gráficos da posição angular (θ) em função do tempo e das respectivas posições xy , obtidos a partir de três filmagens diferentes, tendo como ponto inicial h_6 . Fonte: Elaboração do autor	56

Lista de símbolos

ω	Frequência angular
θ	Ângulo de rotação (coordenada generalizada)
δ	Constante de fase
x	Posição no Oscilador Harmônico Simples
$\dot{x}$	Velocidade no Oscilador Harmônico Simples
$\dot{X}$	Coordenada de função de fluxo nas equações de Lorenz
$\dot{Y}$	Coordenada relacionada a temperatura nas equações de Lorenz
$\dot{Z}$	Coordenada relacionada a temperatura nas equações de Lorenz
$\dot{\theta}$	Velocidade angular do pêndulo
$\mathcal{L}$	Lagrangiano do sistema

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	TEMAS CONTEMPORÂNEOS NA FORMAÇÃO DOCENTE EM FÍSICA	15
2.1	Breve histórico da Física Clássica	17
2.2	Breve histórico sobre a Teoria da Caos	19
3	CAOS E DETERMINISMO	22
3.1	Crescimento de Populações - Equação Logística	22
3.2	Convecção de Fluidos e o Efeito Borboleta	25
3.3	Outros lugares onde o Caos Aparece	30
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	33
4.1	Espaço de Fase e Seção de Poincaré	33
4.2	Os Atratores	39
4.3	Rotas para o Caos e o Expoente de Lyapunov	40
4.4	O Pêndulo Duplo	41
4.5	Sobre o <i>Tracker</i>	45
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	48
5.1	Preparação do Experimento	48
5.2	Captura de Imagens	49
5.3	Análise dos Vídeos com o Tracker	50
	Considerações Finais	57
	Referências	58

1 INTRODUÇÃO

Com o advento da internet, a busca por informação se tornou uma tarefa relativamente simples. A divulgação do conhecimento nos diversos ramos da ciência está sendo difundida de forma cada vez mais rápida e acessível.

Entretanto, por ser um ambiente onde praticamente qualquer pessoa pode escrever ou compartilhar ideias, o conhecimento difundido na internet acaba por carecer de confiabilidade. Muitas ideias científicas são distorcidas e divulgadas de forma fantasiosa confundindo facilmente os leitores leigos que buscam informação. Um dos ramos da ciência onde isso frequentemente ocorre é na Teoria do Caos. Dentro dessa perspectiva, o papel da escola como principal fonte de conhecimento científico sistematizado e seguro, é de suma importância na formação dos estudantes. Mas, diante disso, surge a seguinte questão: Como preservar a formação dos estudantes diante dessa democratização do conhecimento? Talvez essa seja uma pergunta com várias respostas, mas, sugerimos aqui que uma das formas é inserir na formação dos professores de Física, o conhecimento das teorias científicas mais recentes, mesmo que essas, não façam parte do currículo obrigatório.

O papel do professor, em especial de Física, tem sido muito discutido e cobrado, uma vez que a disciplina de Física deve oferecer conteúdos interdisciplinares, contextualizados, retroativos, visando conexão com a construção do conhecimento ao longo da história e, além disso, conteúdos atuais. Tudo isso para que os estudantes sejam contemplados com os processos de formação e transformação do mundo, e a partir disso, construam a sua própria perspectiva sobre a natureza e as coisas que nos cercam.

Na tentativa de colaborar com a divulgação científica, bem como na formação docente, o presente trabalho visa destacar os conceitos básicos da Teoria do Caos através de uma breve revisão bibliográfica do tema, considerando os principais conceitos e modelos historicamente consolidados. Além disso, analisaremos por meio de um software o surgimento do Caos em um pêndulo duplo permitindo ao leitor conhecer um pouco mais sobre o tema e apresentando uma ferramenta que permite estudar fenômenos dinâmicos.

Será apresentada ao leitor uma visão histórica sobre a perspectiva da formação docente em Física na atualidade, assim como, uma breve retrospectiva da Física clássica até os primeiros estudos que culminaram na Teoria do Caos.

A estrutura do trabalho está dividida em quatro capítulos. Temas Contemporâneos na Formação Docente, Caos e Determinismo, Fundamentação Teórica e Resultados e Discussões

No primeiro Capítulo, temos um breve recapitulação a respeito do atual papel do

professor de Física em consonância com os Órgãos, Leis e Diretrizes que regem o sistema de ensino brasileiro. Após essas considerações, descrevemos um pouco sobre os aspectos históricos da Física Clássica, que foram fundamentais para a construção de um pensamento determinístico da natureza. E por fim desse capítulo, apresentamos os primórdios da Teoria do Caos, que fora iniciado ainda no início do século XX, com o cientista Henri Poincaré, mas que só pode ser comprovada na década de 1960, com o estudo de fluidos atmosféricos de Edward Lorenz.

No segundo Capítulo, buscamos descrever modelos historicamente consolidados na Teoria do Caos. Descrevemos o crescimento de populações biológicas e a equação logística, o Modelo de fluidos atmosféricos de Lorenz, que dera origem ao popular "Efeito Borboleta". Inserimos ainda, algumas breves discussões sobre outros locais onde o Caos aparece, com intuito de mostrar a aplicabilidade da Teoria do Caos em outras áreas de pesquisa, a fim de elucidar que seu conhecimento é de grande importância social.

O terceiro Capítulo ressalta alguns conceitos que são intrínsecos a Teoria do Caos e consequentemente ao seu entendimento inicial, como: Espaço de Fases, Seção de Poincaré, Expoente de Lyapunov, Atratores, dentre outros. Nesta parte, buscamos trazer alguns levantamentos teóricos sobre a dinâmica do pêndulo físico duplo, afim de servir de base para os resultados obtidos com a realização do experimento.

O quarto Capítulo traz os resultados e discussões para o experimento do pêndulo físico duplo realizado para esse trabalho.

Fechamos nossa argumentação com Considerações Finais, pois esse trabalho não tem a pretensão de se constituir uma conclusão, mas sim, trazer aos futuros ingressantes na área de Licenciatura em Física, uma outra forma de pensar a Física na atualidade. Esperamos que os futuros discentes na área da física e ciências afins, considerem não apenas seu processo de construção, e a base sólida oferecida pelo currículo obrigatório, mas também, o que tem se construído de novo dentro da sociedade moderna.

2 TEMAS CONTEMPORÂNEOS NA FORMAÇÃO DOCENTE EM FÍSICA

No Brasil, pode-se considerar que a docência teve início com as primeiras tentativas de alfabetização indígena no período colonial. Desde então, houve uma árdua evolução no ensino brasileiro até se chegar ao modelo atual regido pelos órgãos e leis brasileiras competentes ao ensino ([HORIKAWA, 2015](#)).

Segundo o artigo 43, inciso II da Lei de Diretrizes e Bases da educação brasileira de número 9394/96, cabe às Instituições de Ensino Superior oferecer uma educação que fomenta a pesquisa e investigação de caráter científico, que promova o desenvolvimento e criação da ciência, tecnologia e cultura, contribuindo dessa forma com o entendimento do homem para com o meio em que vive (BRASIL, 1996 p.28)

Com relação ao momento atual da educação brasileira, é imprescindível que o professor da educação básica demonstre que possui as habilidades previstas pela LDB e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da educação básica, pois não há como mediar o conhecimento daquilo que não se teve oportunidade de aprimorar em si mesmo ([MELLO, 2000](#)). Logo, a formação inicial dos professores para atuarem na mesma educação básica, deve levar em conta interdisciplinaridade, transversalidade, contextualização, e a integração de áreas em projetos de ensino, que constituem hoje mandados ou princípios pedagógicos capazes de levar os alunos a utilizar os conhecimentos da escola em contextos variados ([ZABALA; ARNAU, 2015](#)).

Não existe mais desculpa para se prender as velhas e enferrujadas matrizes curriculares, pois elas já foram derrubadas com as pesquisas e produção do conhecimento científico. Os saberes tradicionais são importantes para que possamos localizar na história o ofício do professor, porém, é imprescindível que haja e inserção de temas abertos sem empobrecer os conteúdos docentes, ou seja, trazer uma forma de ensino aprendizagem que contribua de forma significativa para relação professor/aluno ([FERRARI et al., 2008](#)).

Assim como em qualquer ciência, a Física encontra-se cercada por vários temas contemporâneos que estão na fronteira do conhecimento humano. O estudo destes temas em Física busca resolver problemas atuais das sociedades humanas nas mais diversas áreas e em coisas tão distintas como a medicina e a origem do universo, por exemplo.

É justamente esta capacidade de permear diversos campos de conhecimento que faz da Física uma ciência intrinsecamente interdisciplinar e contextualizada. Tal fato deveria ser motivo de comemoração para os professores e as aulas de Física deveriam ser, em sua essência, uma forma interessante e completa de ver o mundo que nos cerca ([HOWESÝ,](#)

2000).

Entretanto, apesar da Ciência apresentar uma grande variedade de temas atuais, as Aulas de Ciências, em especial a Física, ainda são focadas em conteúdos do século passado e dificilmente poderemos contornar tal problema, já que a medida que a sociedade evolui, determinados conceitos tornam-se tão complexos que somente pequenos grupos de cientistas altamente especializados são capazes de compreendê-los.

Então o que podemos fazer para tornar os conteúdos mais complexos e atuais da ciência mais próximos da realidade dos estudantes? Esta é uma pergunta difícil de ser respondida, mas uma pista para a solução desse problema pode ser obtida investigando o processo de formação dos futuros professores.

Uma rápida investigação nos revela que a formação docente é composta muitas vezes pela falta de significado dos conteúdos considerados críticos (ANGOTTI, 1993). Essa postura adquirida durante a graduação é preocupante pois, em geral, os egressos e futuros professores não se esforçam em desenvolver em seus alunos o pensamento crítico e científico, ensinando-os sobre como planejar e conduzir investigações, desenvolver as habilidades de argumentação e de questionamento sobre os mais diversos conteúdos da física. Esse comportamento está intimamente ligado à falta de uma base empírica pessoal capaz de servir de modelo nos primeiros anos de profissão (BORGES, 2006).

Devido essa concepção “estática” voltada para a formação docente em Física, destacamos a importância dos temas contemporâneos no período da graduação como forma de preservar a formação do licenciado, para que o mesmo chegue às escolas com a sua formação científica preservada, auxiliando de forma correta os estudantes de nível médio, protegendo-os do obscurantismo das pseudociências pós-modernas (OSTERMANN; MOREIRA, 2000).

Dentre os diversos temas atuais que compreendem a Física, vamos destacar nesse trabalho a Teoria do Caos, tema que desperta grande interesse e possui muitas informações disponibilizadas na rede. Uma das principais razões para que a Teoria do Caos seja compreendida pelos futuros docentes em física, está relacionada com a filosofia e a ciência, pois os pesquisadores dessa área de conhecimento quebram o paradigma da crença absoluta de previsão dos fenômenos. Outro aspecto relacionado é a divulgação científica destinada ao público leigo, papel que deve ser assumido pelas escolas para que haja efetiva democratização dos temas da atualidade (FERRARI et al., 2008).

A Teoria do Caos é considerada recente, data dos anos de 1960 e 1970, apesar de ter tido uma ascensão considerável no meio de divulgação científica, não foi incorporada aos cursos básicos de nível superior, e conseqüentemente, de nível médio. Esse fato impacta diretamente na formação dos docentes, uma vez que a maioria possui uma visão limitada e determinística dos fenômenos físicos. Essa visão dificulta entendimento quando

são colocados em contato com a mecânica quântica e teoria da relatividade, áreas consideradas complexas que exigem uma visão mais ampla e desapegadas do senso comum (SHAW, 2010).

A maioria dos licenciandos preserva a concepção comum de aleatoriedade a respeito da Teoria do Caos, e os cursos, com suas rígidas matrizes curriculares, não contribuem satisfatoriamente para mudar essa realidade, ficando a área de pesquisa restrita a pesquisadores de pós-graduação. Dessa forma, estudar a Teoria do Caos durante os cursos de graduação, contribui para a quebra do paradigma da ciência determinista impostas pelas leis da Física clássica, pois, a teoria mostra que até mesmo sistemas determinísticos que satisfazem condições de previsibilidade, podem apresentar comportamento sensível as condições iniciais, tornando-se imprevisíveis (FERRARI et al., 2008).

É certo que o complexo processo educacional científico exige a percepção da conexão entre todas as partes envolvidas no processo de formação docente e ensino. Conceber a educação como inserida e contextualizada em uma sociedade maior, implica estimular a interdisciplinaridade, trazendo às instituições educativas temas vigentes e operantes na sociedade atual, de modo a estimular o desenvolvimento de competências necessárias à formação de seres humanos que saibam intervir no seu meio social de modo produtivo e consciente (SHAW, 2010).

2.1 Breve histórico da Física Clássica

A revolução no pensamento científico que culminou em Newton nos levou a uma percepção do universo como um conjunto de engrenagens que funcionam “como um relógio”¹. Nesse primeiro momento, vamos brevemente comentar porque os cientistas dos séculos XVII e XVIII foram compelidos a uma visão determinística das leis que regem o universo conhecido e, por conseguinte, trazer os aspectos históricos que culminaram no que hoje é conhecido como a Teoria do Caos.

Isaac Newton foi um dos físicos mais brilhantes do século XVII. Sua obra contempla desde a natureza da luz até a forças que regem o movimento dos corpos celestes. Newton formulou suas leis na forma de equações, ajudando a desenvolver uma área da matemática que atualmente é conhecida como cálculo integral e diferencial. Estas equações são capazes de modelar um problema conferindo-lhe um resultado previsível e confiável. Levando em consideração a época que vivera, as Leis de Newton obtiveram um grande sucesso, pois por mais de dois séculos, elas permaneceram como absolutas na descrição definitiva da natureza (STEWART, 1991)

Para a Física de Newton, se um sistema possuísse condições iniciais conhecidas, o movimento subsequente era causal e determinista, ou seja, poderíamos prever de forma

¹ Expressão utilizada para representar o máximo de credibilidade e perfeição mecânica

única todo o futuro do comportamento daquele sistema, para qualquer tempo. De fato, foi demonstrado que as equações de movimento de Newton, por exemplo, seguem três princípios básicos, são eles:

1. Dado as condições iniciais em qualquer instante, sempre existirá uma solução para qualquer tempo posterior;
2. Um conjunto de soluções iniciais leva a uma única solução;
3. Alterações minúsculas nos sistemas não provocam mudanças significativas no resultado final, logo as soluções são estáveis

Uma das mais conhecidas aplicações dessas leis, foi a previsão do retorno do cometa Halley, feita pelo cientista astrônomo britânico Edmond Halley, contemporâneo de Newton (PIRES, 2011).

Por muito tempo, os modelos estudados pelos cientistas contemporâneos da época apresentavam exatamente as características esperadas, logo, não havia necessidade de se questionar os conceitos de previsibilidade e causalidade (STEWART, 1991). A partir dessas concepções, surgia a ideia de um universo que funcionava como uma máquina inteiramente determinística, onde as leis da natureza eram imutáveis.

Reforçando ainda mais a concepção determinística, temos o físico e matemático do século XVIII, Pierre Simon de Laplace, britânico cuja vida dedicou grande parte a ciência, contribuindo significativamente no campo matemática da probabilística e entre outros. Laplace nas suas obras relacionadas a probabilidade, escreveu sobre uma inteligência capaz de conhecer todas as forças da natureza e seus respectivos estados. Se essa força fosse capaz de analisar todos esses dados, nada poderia ser incerto, e o futuro assim como o passado estariam em estado de total controle (PATY, 2004).

A inteligência descrita por Laplace ficou conhecida posteriormente como "Demônio de Laplace"². Devemos considerar que naquele momento, predominava o clima de êxtase na previsibilidade, pois experimentos como a balança de torção de Coulomb (1785), a descoberta da luz como onda eletromagnética, a Lei da Indução eletromagnética de Faraday, as leis da Termodinâmica, e entre muitos outros, estavam devidamente controlados mediante as técnicas desenvolvidas na época. Essa euforia levou a comunidade científica ao determinismo clássico, onde equações que descrevem a evolução de um sistema de forma singular, na ausência de perturbações externas, podem descrevê-lo de forma específica para qualquer tempo (STEWART, 1991).

A partir do século XIX as bases determinísticas da Física começam a ruir com o surgimento da Física Moderna. O estudo da natureza nas escalas cosmológica (com a

² "Demônio" deriva do grego *daimon* e deve ser compreendido originalmente como um semideus

Teoria da Relatividade) e na escala microscópica (Física Quântica) mostravam de forma contundente as falhas da Física clássica em explicar diversos fenômenos. A teoria da relatividade de Einstein contribuiu com uma nova percepção de tempo e espaço, quebrando o paradigma Newtoniano que os tratava como "entidades" absolutas. Einstein, a partir dos trabalhos de Maxwell e de Lorentz, demonstrou que essas grandezas são relativas e mudam quando observadas sob pontos de vista diferentes, ou seja, referenciais em movimento relativo experimentam noções diferentes de espaço e tempo, o que contraria o senso comum (BIEZUNSKI, 1993).

Já a mecânica quântica, que teve seus primórdios no estudo da radiação de corpo negro, revelou as estranhezas do mundo atômico e subatômico causando a perplexidade da comunidade científica ao constatar que o comportamento da matéria nesse nível é regido por uma dinâmica probabilística onde não podemos nem ao menos determinar de forma absoluta a posição e a velocidade de um corpo. Muitos cientistas são conhecidos por desencadearem os primeiros estudos sobre a física moderna, dentre eles podemos destacar os trabalhos de Max Planck, Niels Bohr, Albert Einstein e Erwin Schrödinger (JR, 2010).

Com essa nova visão da ciência, a Física clássica abre espaço para um universo com leis mais complexas, dotadas de singularidades que não seguem mais um padrão rigoroso e previsível. A natureza de comportamento linear começa a fazer parte das exceções de um mundo onde a maior parte dos fenômenos apresenta comportamento não linear (PIRES, 2011).

2.2 Breve histórico sobre a Teoria da Caos

O Caos é um estado dinâmico complexo, caracterizado pela aparente imprevisibilidade do comportamento de um sistema, e por grande sensibilidade as condições iniciais (PIRES, 2011).

A Teoria do Caos apesar de ser considerada recente, tem suas raízes nos estudos realizados pelo matemático francês Henri Poincaré, no início do século XX. Poincaré observou que um sistema simples, onde uma partícula se move num espaço bidimensional, pode apresentar movimentos altamente complexos e instáveis. A instabilidade do sistema vislumbrada por Poincaré era tão alta que, duas trajetórias que comesçassem próximas, poderiam se separar uma da outra de forma exponencial, o que na prática, levaria a uma imprevisibilidade sobre o movimento do sistema a longo prazo (SILVEIRA, 1993).

Poincaré começou a perceber que certos sistemas dinâmicos não apresentavam soluções analíticas, e que isso era uma característica intrínseca ao sistema. É o caso do sistema envolvendo três corpos que se atraem através da força gravitacional. Poincaré provou que esse problema de forma geral não é integrável, pois não existem "integrais adicionais" para resolver o sistema. O estudo desses sistemas só pode ser realizado impondo-se condições

particulares ou por soluções numéricas, na época, ainda sem a ajuda dos computadores, muito trabalhosas. A ausência de poder computacional na época remete ao fato desses estudos não terem tido grande repercussão naquele momento ([FERRARI et al., 2008](#)).

Com o advento da criação dos computadores, chegamos ao cientista tido com o pai da Teoria do Caos: Edward Norton Lorenz (1917 - 2008), meteorologista do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) em meados do século XX.

O estudo do comportamento dos gases atmosféricos, levou Lorenz a construir um modelo matemático simplificado sobre o movimento do ar na atmosfera terrestre. O baixo poder de processamento dos computadores da época, levou-o a suprimir algumas casas decimais dos valores utilizados para a simulação. Através desse estudo, concluiu que pequenas variações nos valores iniciais dos parâmetros do seu sistema levavam a resultados muito divergentes. Esta sensibilidade às condições iniciais popularizou-se como "Efeito Borboleta", devido ao padrão complexo, ou mais precisamente, Atrator do sistema descoberto por Lorenz, se assemelhar ao formato de uma borboleta. ([BIEZUNSKI, 1993](#)).

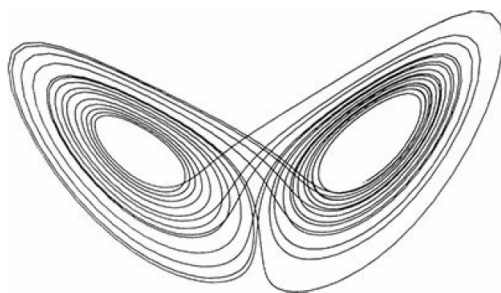


Figura 1: Atrator de Lorenz. Gráfico que deu origem ao popular "Efeito Borboleta"([STEWART, 1991](#))

Podemos ver que Lorenz inseriu duas inovações com a utilização do computador: provar a sensibilidade às condições iniciais e exibir imagem do Atrator conforme a Figura 1, sugerida inicialmente por uma descrição verbal, de Poincaré. As conclusões apresentadas em seu trabalho de 1963 podem ser resumidas em duas fundamentais: 1) a sensibilidade às condições iniciais é uma característica intrínseca de certos sistemas dinâmicos não-lineares e 2) equações simples podem gerar dinâmicas complexas ([AUBIN; DALMEDICO, 2002](#)).

Os chamados Atratores³ são regiões para qual tendem sistemas dinâmicos no decorrer do tempo, podendo ser simples pontos ou estruturas complexas chamadas de Atratores estranhos. Com base no conceito de Atratores estranhos que o cientista David Ruelle, em 1970, formulou em um seminário de Física, que um fluido submetido a forças cada vez maiores, apresenta um espectro contínuo de frequências, enquanto na teoria, deveria observar frequências crescentes e independentes uma das outras ([BIEZUNSKI, 1993](#)).

³ O conceito de atratores será explicado nas sessões posteriores desse trabalho

Um trabalho no campo da biologia que também merece destaque e será discutido posteriormente, é do cientista Robert McCredie May (1936). Na década de 1970, May utilizou a equação logística, desenvolvida pelo matemático belga Pierre Verhulst em 1845, para simular a evolução de epidemias. Através desses estudos, concluiu que para determinados parâmetros da equação, a população apresentava-se constante, e depois oscilava entre valores grandes e pequenos até chegar a um comportamento irregular. Com esse estudo, May mostrou que equações que descrevem a natureza podem demonstrar um caráter sem previsibilidade, reforçando mais uma vez o perfil da "nova ciência" ([AMÂNCIO, 2008](#)).

Além desses estudos na área de crescimento populacional, a Teoria do Caos mostrou-se presente em muitos outros, como o movimento de pêndulos, circuitos, áreas relacionadas a economia, biologia, meteorologia, astronomia e entre outros. Nesse trabalho vamos dar enfoque qualitativo a alguns desses últimos e quantitativo aos sistemas físicos através da análise do movimento do pêndulo físico duplo.

3 CAOS E DETERMINISMO

Nesta seção iremos descrever alguns sistemas simples que possuem comportamento dinâmico sensível às condições iniciais. Ao longo do detalhamento destes modelos, serão discutidos alguns conceitos importantes sobre a Teoria do Caos.

3.1 Crescimento de Populações - Equação Logística

Um clássico modelo de sistema dinâmico que apresenta um comportamento caótico foi desenvolvido pelo cientista Robert McCredie May (1936) para descrever o crescimento de populações biológicas. Apesar de simples, este modelo acabou por revelar a existência de comportamentos complexos com relação a sua dinâmica, apresentando grandes diferenças de resultados para condições iniciais próximas.

Para caracterizar o modelo de May, vamos utilizar as variáveis n e x para representar a sequência de tempo e o observável físico do sistema, respectivamente. Dessa forma, podemos descrever o progresso de um sistema não linear, em um momento específico, investigando como o $(n + 1)$ -ésimo estado do sistema, depende do (n) -ésimo estado. Matematicamente podemos representar por $x_{n+1} = f(x_n)$, que é chamada de mapeamento, ferramenta utilizada para descrever o progresso dos sistemas dinâmicos.

Vamos considerar então, uma população de moscas em que indivíduos nascem e morrem numa mesma estação, representamos então por N_0 o número de moscas inicial, e N_1 o número de moscas após o intervalo de um ano. Logo, para saber o Valor de N_1 basta que:

$$N_1 = AN_0 \quad (3.1)$$

Onde A é um parâmetro determinado pelas condições que o ambiente oferece, de forma que se $A > 1$ há um aumento na população, $A < 1$ há um decréscimo. A medida que o tempo avança, para o caso de $A > 1$ teríamos um crescimento infinito (que na realidade não ocorre), e no caso de $A < 1$ teríamos a extinção da espécie em estudo. Dessa forma, deve haver um fator limitante para o controle dessa situação, então podemos acrescentar esse fator a nossa equação 3.1, de forma que teremos:

$$N_1 = AN_0 - BN_0^2 \quad (3.2)$$

Note que de fato, se $B \ll A$ teremos o termo quadrático desprezível, tornando-se importante apenas a medida que o tempo evolui. Com a equação 3.2, podemos encontrar o valor de N_{n+1} para todos os anos subsequentes. Entretanto, vemos que para ter um $N_{n+1} > 0$, N_n não pode exceder um $N_{max} = \frac{A}{B}$. Dessa forma podemos introduzir uma nova variável,

dada por $x_n = \frac{N_n}{N_{max}}$. Com essa mudança de variável e manipulação algébrica, podemos escrever a nossa equação logística unidimensional da forma:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) = f_A(x_n) \quad (3.3)$$

Essa equação é também chamada de função de iteração (repetição), onde x_n é um número real que varia no intervalo entre 0 e 1, e o parâmetro A , também é um numero real que varia no intervalo entre 0 e 4 para impedir que a população seja dada por um valor negativo ou infinito. O agrupamento de pontos dos valores de x_{n+1} e x_n é o chamado mapa da função $f_A(x_n)$, cuja compreensão é melhor explorada por meio de exemplos, como veremos a seguir.

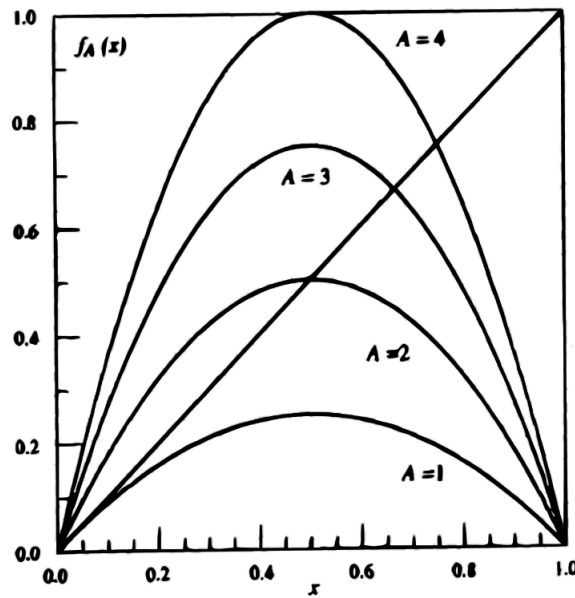


Figura 2: Função $f_A(x)$ para determinados valores do parâmetro A . A linha diagonal é representada pela função $y = x$. Fonte ([HILBORN, 2000](#))

A Figura 2 traz a representação gráfica da função 3.3 para determinados valores de A . Através desse gráfico, existe duas formas de verificar como se dá a estabilidade do valor de x a medida que o tempo avança para cada um dos mapeamentos. A primeira é iniciar com um valor de x_1 no eixo horizontal, encontrar o seu correspondente x_2 no eixo vertical e repetir o procedimento ate verificar a convergência das iterações. Essa técnica é demonstrada na Figura 3 (a) para o valor de $A = 2$. A segunda consiste primeiramente em traçar uma reta bissetriz entre as coordenadas. De forma semelhante, partimos de um ponto x_1 , em direção a curva, e ao fazermos a interseção, orientamos o caminho de forma horizontal até a reta, e depois reorientamos para a curva, e assim sucessivamente, até encontrar um ponto para o qual o sistema converge. Esse procedimento é representado pela Figura 3 (b).

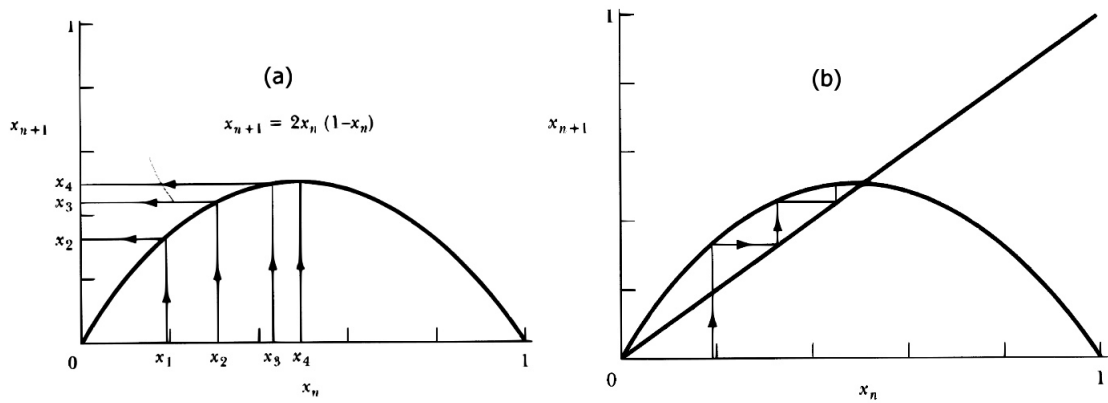


Figura 3: Técnica 1 Representada em (a). Técnica 2 representada em (b). Temos o estudo da função logística para $A=2$. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)

O estudo desse sistema, como já foi mencionado, é interessante quando o parâmetro A varia dentro do intervalo permitido. O que podemos concluir dele é que para valores de A inferiores a 3, nosso sistema de crescimento de população (de moscas, nesse caso) sempre apresentará uma única solução, ou seja, será estável. Entretanto, verificou-se que para valores de $A > 3$, a solução apresenta dois pontos de interseção na curva, até um valor de A próximo de 3,45, onde a solução passa a oscilar em 4 novos valores. Podemos ver que quando o parâmetro A da equação logística é maior do que 3, o sistema vai apresentar alta sensibilidade as condições iniciais, se tornando totalmente imprevisível ao longo do tempo. Os pontos onde observamos a mudança na dinâmica do sistema, ou

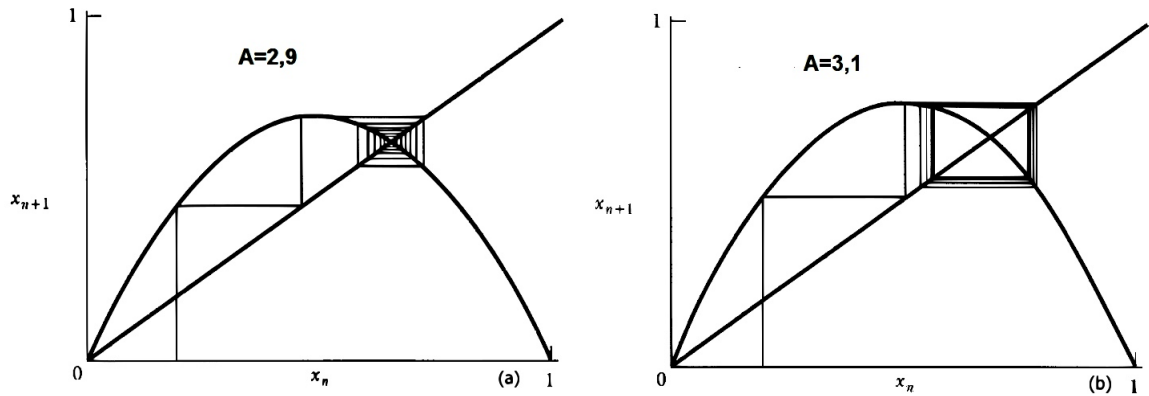


Figura 4: Em (a) temos o mapa da equação 3.3 para $A = 2,9$ representado a estabilidade da população. Em (b) o mapa da equação 3.3 para $A = 3,1$ representado várias soluções possíveis e consequente instabilidade do sistema. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)

seja, quando $A = 3$, $A = 3,45\dots$ são chamados de pontos de bifurcação. Chamamos de bifurcação a mudança do sistema quando seus parâmetros passam por um valor crítico. Elas são importantes porque fornecem modelos de transições e instabilidades a medida que os parâmetros do sistema são variados.

Através do diagrama de bifurcação representado pela Figura 5, podemos tirar algu-

mas conclusões a respeito do nosso sistema, representado pela equação logística. Observe que quando parâmetro A é menor que 1, a população se extingue, pois x_n permanece em zero. Para valores de A variando no intervalo de 1 a 2,9, o sistema apresenta crescimento até se estabilizar em $x = 0,655$, o período então para esse caso é de um ciclo.

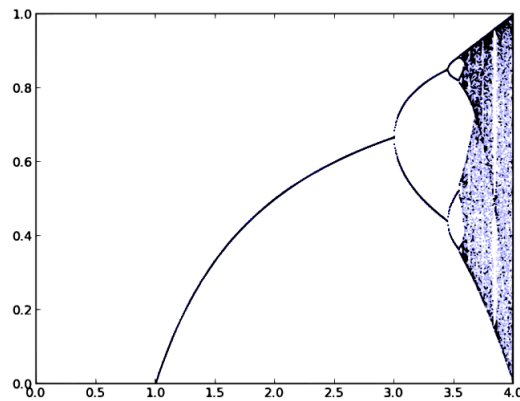


Figura 5: Diagrama de bifurcação para o mapa da Equação Logística. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)

Entretanto, ao atingir o valor de $A = 3$, temos a primeira bifurcação do sistema, pois para valores imediatamente maiores que 3, como de $A = 3,1$ o sistema já apresenta duas soluções possíveis, em $x = 0,558$ e $x = 0,765$, (ou seja, dois ciclos). A duplicação permanece até $A = 3,45$ onde passamos a ter 4 ciclos, e assim sucessivamente. O comportamento caótico desse sistema é observado para valores de A entre 3,57 e 4,0, com janelas de movimento periódico em determinados momentos. Esse é um exemplo de sistema sensível as condições iniciais, pois para parâmetros de $A > 3$, uma pequena modificação nas condições iniciais resulta em comportamentos totalmente imprevisíveis.

3.2 Convecção de Fluidos e o Efeito Borboleta

Um dos mais conhecidos modelos que remetem a Teoria do Caos é o de convecção dos fluidos atmosféricos, estudado pelo meteorologista do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) Edward Lorenz (1917-2008) em 1963. Descrever o fluido atmosférico da Terra por exemplo, pode ser um trabalho muito difícil, pois para cada ponto do espaço, o fluido possui características diferentes de densidade, temperatura, altitude, velocidade, pressão e entre outras, todas elas variando no tempo.

Lorenz simplificou o modelo de Stokes que era complexo e envolvia N variáveis e infinitos pontos, na tentativa de criar um modelo atmosférico mais simples que ocultava uma série de fenômenos reais, mas que poderia ter suas equações resolvidas de forma numérica com o uso de computadores. Apresentaremos uma das interpretações desse modelo segundo Hilborn (2000).

No modelo de Lorenz temos o sistema fluido, que pode ser a atmosfera da Terra, em correntes de convecção a duas temperaturas fixas T_q (Temperatura quente, próxima a superfície da Terra) e T_f (Temperatura fria no topo da atmosfera), onde a diferença de temperatura $T_q - T_f$ ¹ é mantida constante. A Figura 6 traz o esquema das configurações de corrente.

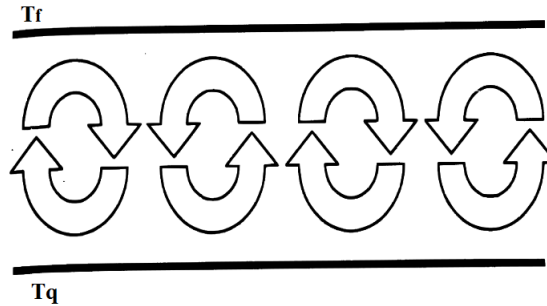


Figura 6: Esquema simplificado das correntes de convecção do modelo de Lorenz. Fonte([HILBORN, 2000](#))

De forma simplificada, temos um processo de convecção simples, onde a massa do fundo a temperatura mais quente, flui em direção ao topo, e ao perder calor retorna para o ponto de início, criando uma circulação estável no tempo. Entretanto, com um incremento na temperatura, o sistema desenvolve "de forma espontânea" diferenças de temperaturas resultantes do fluido e correntes variantes no tempo. Esse é um exemplo de outra característica típica não linear: embora o ambiente fluido seja perfeitamente estável no tempo (lembre-se de que assumimos que as temperaturas na parte superior e inferior são mantidas em valores fixos), o sistema "espontaneamente" desenvolve comportamento dependente do tempo.

O modelo desenvolvido por Lorenz é composto por três equações diferenciais com relação ao tempo, convencionalmente chamadas de $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$. Devemos ressaltar que essas grandezas não são de caráter espacial. Demonstrar essas equações foge a proposta desse trabalho², por agora, basta ressaltarmos que $X(t)$ remete a uma função de fluxo de fluidos, $Y(t)$ caracteriza a diferença de temperatura entre as partes ascendentes e descendentes do fluido em uma altura estabelecida, e $Z(t)$ está ligado ao desvio da linearidade de temperatura como função da posição vertical. Devido a simplicidade, esse modelo não pode ser utilizado para descrição de fluidos complexos (reais), sendo seu estudo relevante apenas para compreensão dos fenômenos caóticos.

A seguir, temos as três equações diferenciais do modelo de Lorenz:

¹ Esse sistema foi estudado experimentalmente por Bernad em 1900 e posteriormente Lord Rayleigh trouxe algumas compreensões teóricas no ano de 1916. Devido a isso, essa configuração é chamada de Rayleigh-Bernad.

² Para informações detalhadas sobre as equações de Lorenz, recomendamos a leitura do apêndice C da referência ([HILBORN, 2000](#))

$$\dot{X} = p(Y - X) \quad (3.4)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (3.5)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (3.6)$$

Onde temos p , r e b como sendo parâmetros ajustáveis. O p é definido pela razão entre a viscosidade cinética do fluido e o coeficiente de difusão térmica. Em termos práticos, ele compara a taxa de perda de energia de uma porção de fluido devido a viscosidade com a taxa de perda de energia devido a condução térmica. O termo r é uma medida adimensional da diferença de temperatura entre as camadas de convecção do fluido. Por fim, o parâmetro b representa a razão entre a altura vertical h da camada do fluido e o tamanho horizontal dos rolos de convecção.

Essas equações não podem ser resolvidas analiticamente. Nas suas análises, Lorenz utilizou os valores de $p = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e r como sendo o parâmetro ajustável. Observou que valores de r muito pequenos, ou seja, para uma variação de temperatura muito baixa, o modelo aponta para um estado estacionário ($X = 0$, $Y = 0$ e $Z = 0$). Para valores de r maiores que 1, o sistema apresenta dois estados convectivos possíveis, um no sentido horário e outro no sentido anti-horário, sendo esses definidos pelas condições iniciais. A medida que o parâmetro r aumenta, o modelo apresenta regiões de comportamento caótico, periódicos e de intermitência que circulam de um lado para o outro de forma randômica, entre comportamentos caóticos e periódicos.

A figura 7 mostra em (a), (b) e (c) o resultado da integração numérica das equações de Lorenz, com $X = 0$, $Y = 1$ e $Z = 0$. Observamos que para $r < 1$, apesar do pequeno incremento na diferença de temperatura, com o passar do tempo o sistema entra no regime estacionário. O gráfico na Figura 7(d) é o chamado espaço de fase do sistema. Para o modelo de Lorenz, esse espaço é tridimensional, uma vez que esta em função de X, Y e Z , entretanto, temos em 7(d) uma projeção da trajetória no plano ZX .

Em outras palavras, podemos dizer que para valores de $r < 1$, independente das condições iniciais o sistema evolui até chegar a um estado estacionário. O ponto de origem do espaço de fase, é o Atrator do sistema, uma vez que é a região (ponto) para o qual o sistema evolui.

Para valores de $r > 1$, o sistema vai apresentar três pontos fixos. O ponto fixo da origem repele as trajetórias que começam perto dele. Em contrapartida, os outros dois pontos fixos atraem as trajetórias do movimento se r não for muito grande. Fisicamente isso nos diz que o estado condutor tornou-se instável. Portanto, para $r > 1$ esses dois pontos fixos fora da origem, são atratores do sistema e representam o estado de convecção constante.

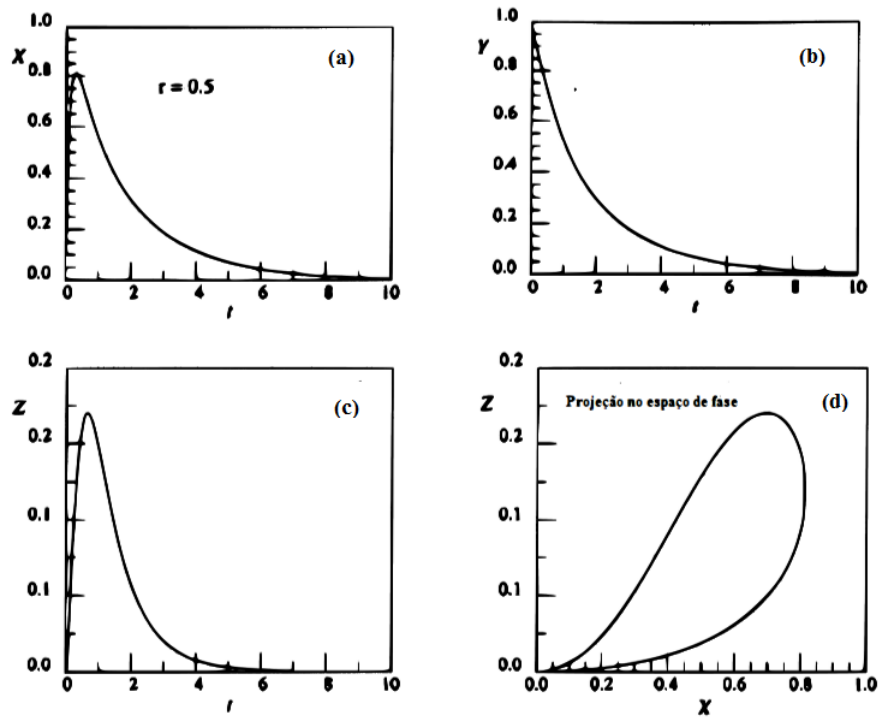


Figura 7: Em (a),(b), (c) temos gráfico da função de X , Y e Z em função do tempo. Em (d) temos a projeção das trajetórias no espaço de fase no plano ZX . O pontos iniciais do movimento são $X = 0$, $Y=1$ e $Z=0$. Fonte ([HILBORN, 2000](#))

O que determina a atração de um ponto ou do outro são as condições iniciais do sistema, diferentemente do modelo quando $r < 1$. A Figura 8 mostra o espaço de fase YZ do modelo de Lorenz para $r = 2$, dado condições iniciais diferentes. Uma consideração a ser feita sobre essa condição é que para Y e Z o sistema se instala em valores diferentes de zero, o que significa que o sistema está em circulação.

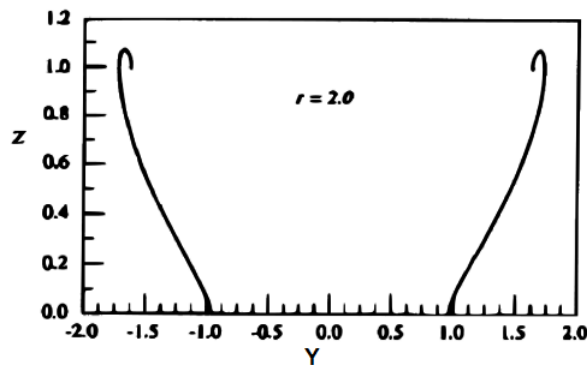


Figura 8: Espaço de Fase do modelo de Lorenz no plano YZ com $r = 2$. Uma trajetória no sentido horário e a outra no sentido anti-horário. Fonte ([HILBORN, 2000](#))

Verificou-se que nada extraordinário acontece até o valor de $r = 13.93$, onde encontramos que as regiões repelentes se desenvolvem em torno dos pontos fixos fora da

origem. A análise desse comportamento para valores de r próximos a esse, é bastante complexa, portanto, vamos para o caso em que $r = 160$.

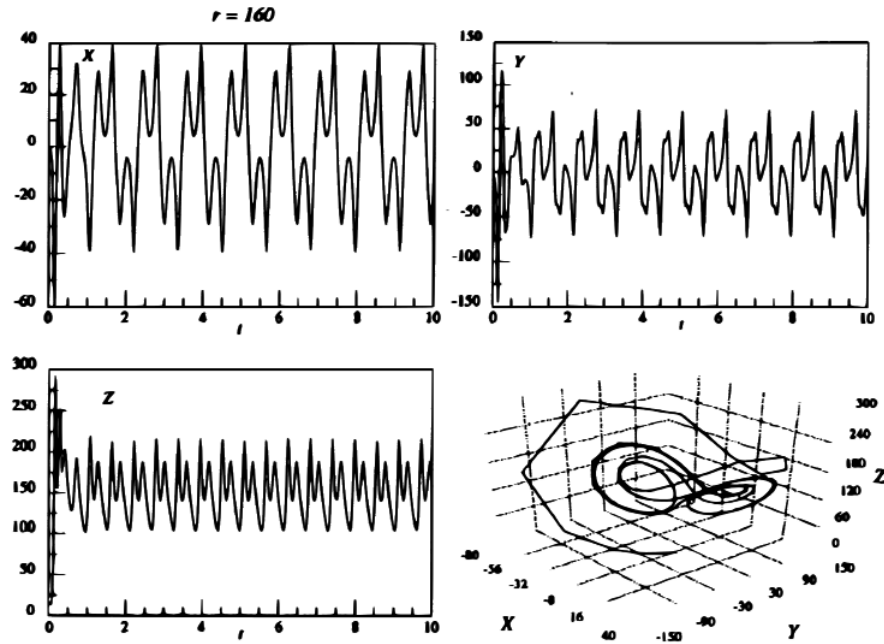


Figura 9: Soluções para as equações de Lorenz com $r=160$. Temos soluções periódicas após um intervalo de tempo de 3 segundos. Fonte (HILBORN, 2000)

Podemos compreender a natureza física do comportamento desse sistema, observando os gráficos de X e Y na Figura 9 como funções do tempo. Verificamos que X oscila de forma simétrica no ponto $X = 0$. Isso nos diz que o fluido está em convecção primeiro no sentido horário, depois no sentido anti-horário, processo contínuo ao longo do tempo. Para Y que representa diferença de temperatura entre fluxo ascendente e descendente, também temos a oscilação em torno do ponto de $Y = 0$. Para a variável Z , temos que o ponto de oscilação é em torno de $Z = 160$.

Observe que temos um comportamento periódico, entretanto, quando mudamos o parâmetro r para 150, o comportamento oscilante de Z de repente muda, e passando a ter dois períodos conforme ilustra a Figura 10 (O leitor pode perceber as duplicações observando os maiores picos do gráfico). A medida que r diminui para valores inferiores a 144, todas as variáveis do sistema começam a ter comportamento aperiódico. Vejamos o comportamento de Z em função do tempo na Figura 11, com r fixado em 143 e condições iniciais bem próximas.

A partir da comparação entre os gráficos representados em 11, é possível analisar que após apenas algumas oscilações, as trajetórias são completamente diferentes, conferindo ao sistema alta sensibilidade às condições iniciais dadas.

A partir dessa breve exposição de dados, podemos ver que o modelo de Lorenz é um tipo de sistema dinâmico aparentemente simples, que apesar de não descrever a realidade

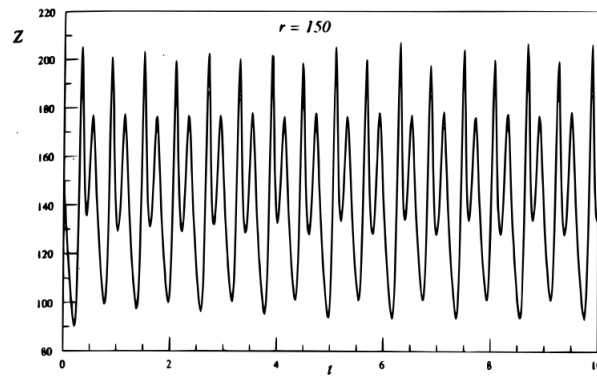


Figura 10: Solução para $Z(t)$ das equações de Lorenz com $r = 150$. Temos soluções periódicas de dois períodos quando comparados a figura 9. Fonte (HILBORN, 2000)

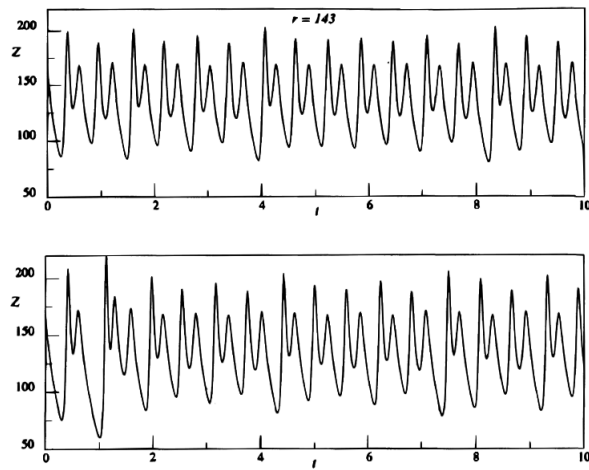


Figura 11: Solução para $Z(t)$ das equações de Lorenz com $r = 143$. O gráfico superior tem condições iniciais $X = 20$, $Y = 0$, $Z = 163$ e o inferior $X = 20$, $Y = 0$ e $Z = 166$. Fonte (HILBORN, 2000)

complexa do movimento do fluido atmosférico, é de suma importância para analisar o comportamento imprevisível que a sensibilidade as condições iniciais do sistema pode causar. Vale enfatizar que ele detém uma vasta variedade de comportamentos complexos, e aqui descrevemos apenas uma parte muito limitada desse comportamento.

3.3 Outros lugares onde o Caos Aparece

A Teoria do Caos possui caráter multidisciplinar, possuindo aplicações nas áreas da Física, Matemática, Química, Biologia, Medicina, Ecologia, Ciências Atmosféricas, Astronomia, e etc. Seria impossível destacar todos os estudos relevantes em que a Teoria do Caos ganha destaque, mas comentaremos a seguir, de forma breve e qualitativa alguns lugares onde podemos encontrar o Caos.

Vamos começar com um exemplo intuitivo. Suponha agora que tenha algumas bolas de gude que você decide atirá-las no chão. Após algum tempo as bolas param

em determinadas posições. Então, você marca as posições e repete o experimento exatamente (ou o mais próximo possível) como da primeira vez. Será que as bolas de gude vão posicionar-se exatamente como na vez anterior? É esperado, e a sua própria intuição diz que não. Mesmo que tente atirá-las da mesma posição, não conseguirá ter precisão suficiente para posicioná-los sempre da mesma forma. Nesse exemplo simples, temos a presença do Caos (GLEICK et al., 1989).

No que diz respeito a medicina, já foram detectados componentes com padrão caótico no organismo humano, tais como o intervalo entre os batimentos cardíacos, a pressão arterial, o fluxo sanguíneo e a respiração e a marcha. Podemos então ver que o próprio corpo humano se comporta como um sistema dinâmico, complexo e não-linear. Devido a isso, vemos que o entendimento dos sistemas não lineares tem sido importante também, para explicar e "prever" o comportamento desses fenômenos biológicos (VANDERLEI et al., 2009).

Apesar de ainda ser necessário um aprofundamento científico, tais estudos podem ser úteis na investigação e no tratamento de cardiopatias. A dinâmica dos ritmos cardíacos podem exemplificar um modelo em que métodos de controle do caos podem ser aplicados para que o sistema responda rapidamente a novas situações, alterando suas respostas. Um desses métodos trata-se do controle de caos aplicado ao marca-passo cardíaco, onde temos um modelo matemático que reproduz a atividade do marca passo, feito a partir de uma equação de Van der Pol³ modificada. Os resultados alcançados com esse estudo, mostraram a capacidade de controlar a instabilidade do sistema eliminando respostas patológicas indesejadas do coração (FERREIRA; PAULA; SAVI, 2010).

Na Matemática, esta teoria abriu um novo campo de estudo de sistemas de equações não-lineares e equações lineares que podem conduzir ao caos por meio de iterações. Uma forma simples de conferir a presença de caos na matemática, é fazendo iterações em um calculadora científica simples. Ao escolher repetir uma função com um determinado valor entre zero e um, observamos padrões de números de forma periódica e outras de forma caótica. O leitor pode comprovar o padrão caótico iterando a função $f(x) = x^2 - 1$, a partir de condições iniciais próximas (STEWART, 1991).

Em Astronomia podemos citar um dos mais conhecidos exemplos associados ao caos, que é o problema dos três corpos. A física de Newton não deixou dúvidas sobre a interação entre dois corpos (Sol-Terra, por exemplo), pois neles temos uma periodicidade que se repete indefinidamente, da onde definimos o ano terrestre. Entretanto, Poincaré observou que essa dinâmica não funcionava da mesma forma quando três corpos interagem juntos. Analisando um modelo de três corpos reduzido proposto por Hill, ele mostrou, a partir do método que hoje é conhecido por sessão de Poincaré, que a evolução desse

³ A equação de Van der Pol é dada por: $\frac{d^2x}{dt^2} - a(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$. Representa um oscilador com um termo $a(1 - x^2)$ de amortecimento não linear.

sistema é frequentemente caótica ([STEWART, 1991](#)).

O trânsito é outro exemplo. Quem mora em cidades suficientemente grandes, já observou que há dias em que o congestionamento é maior. É bem provável que essa situação tenha sido causado por um acidente, uma mudança climática repentina, ou uma empresa dispensou os seus funcionários mais cedo e houve um fluxo maior num cruzamento, ou outras situações semelhantes. Veja que o número de variáveis para "prever" um trânsito tranquilo ou não é muito grande, e mesmo que pudéssemos mensurá-las, nunca teríamos seu total controle, uma vez que podem mudar a qualquer instante ([FILHO, 2008](#)).

A Teoria do Caos tem assegurado que sistemas de grande interesse social e diferentes entre si, como a meteorologia ou o cérebro humano, são caóticos em sua essência, e apesar de não apresentar soluções para o problema da previsão, mostra os limites para que possamos lidar com eles. Dessa forma, ela esclarece os mecanismos por trás desses comportamentos, e norteia a compreensão das dinâmicas dos sistemas ([JÚNIOR, 1993](#)).

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta parte do trabalho iremos aprofundar alguns conceitos apresentados no capítulo anterior e utilizar mais alguns modelos físicos para apresentar algumas ideias fundamentais para o entendimento de sistemas dinâmicos. Além disso, destacamos no fim deste capítulo, uma sessão de apresentação do *tracker* como ferramenta de videoanálise.

4.1 Espaço de Fase e Seção de Poincaré

O espaço de fase é uma representação gráfica de uma função de variáveis que descrevem um sistema a medida que o mesmo evolui com o tempo. Esta é uma ferramenta bastante útil, pois permite que a dinâmica do sistema seja avaliada de forma qualitativa.

A análise da trajetória do espaço de fase é uma das principais ferramentas para compreensão do comportamento dos sistemas, pois permite identificar os pontos onde o comportamento é linear, não linear ou caótico. A medida que o tempo avança, o ponto que descreve o estado do sistema se moverá ao longo de um determinado caminho de fase, sendo que para cada condição inicial, haverá um caminho de fase diferente (THORNTON; MARION, 2011).

Compreender o espaço de fase de um sistema dinâmico é importante para caracterizarmos a evolução do seu movimento, identificando características importantes como a periodicidade, estabilidade ou instabilidade. A seguir, descreveremos um espaço de fase de um sistema linear para melhor entendimento inicial.

Vamos utilizar o Oscilador Harmônico Simples como exemplo de sistema dinâmico linear para ilustrar o seu espaço de fase. Num sistema massa mola, temos pela segunda Lei de Newton:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (4.1)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (4.3)$$

Onde ω_0 é a frequência do oscilador.

Logo a solução pode ser dada por:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (4.4)$$

$$\dot{x}(t) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (4.5)$$

Podemos eliminar o t , se dividirmos 4.5 por ω_o e em seguida somarmos os quadrados de 4.4 e 4.5, de forma que teremos:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega_o^2} = 1 \quad (4.6)$$

Se comparamos a equação 4.6 com a equação da elipse centrada na origem dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.7)$$

Concluimos que ela forma uma família de elipses, cujas dimensões dos eixos vertical e horizontal podem ser reescritas em função da energia total do oscilador dada por:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (4.8)$$

Utilizando a frequência da Equação 4.3, podemos escrever a equação do espaço de fase do OHS como:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (4.9)$$

Como trata-se de um sistema conservativo, cuja a energia é constante, cada caminho de fase corresponde a energia total definida do oscilador. Então o espaço de fase é representado segundo a Figura 12, onde temos o diagrama em função da posição e velocidade. Observamos que os caminhos não se cruzam porque, caso contrário, para cada conjunto de valores iniciais de posição e velocidade, o movimento poderia ocorrer em caminhos de fases diferentes. Entretanto, isso é impossível pois a solução da equação diferencial é única, como vimos no início da seção (THORNTON; MARION, 2011).

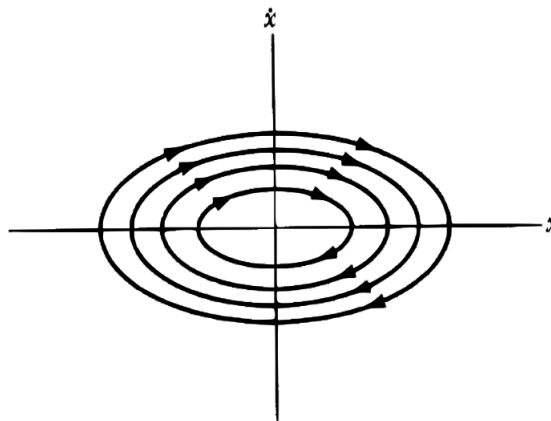


Figura 12: Espaço de fase de um oscilador harmônico simples. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)

Devemos observar que as linhas do caminho de fase para o OHS são fechadas, e indicam que o movimento é periódico. Esse caminho fechado é chamado de ciclo, conceito que veremos mais adiante.

Atentamos ainda para o fato de que a dimensionalidade do espaço de fases normalmente não é a mesma que a dimensionalidade espacial do sistema. No espaço de fases a dimensionalidade é determinada pelo número de variáveis necessárias para descrever o estado dinâmico do sistema. No exemplo do nosso oscilador, temos um movimento unidimensional, mas o espaço de fases como vimos, é bidimensional (posição *versus* velocidade) (HILBORN, 2000).

Nas sessões anteriores a essa, demonstramos o espaço de fase do modelo de Lorenz para determinados parâmetros da variável r . Na Figura 9(d), temos uma espaço de fase complexo e tridimensional, descrito pelas variáveis X , Y e Z .

Com relação ao espaço de fase, existem basicamente quatro conceitos muito importantes, são eles: Sumidouros, Fonte, Pontos de Sela e Ciclo Limite. A Figura 13 representa um fluxo hipotético através de linhas curvas numa evolução temporal de coordenadas com vários pontos iniciais. A orientação dos caminhos de fase indicam a direção do movimento com a passagem do tempo (STEWART, 1991). Os quatro conceitos citados inicialmente serão descritos a seguir conforme ilustra a Figura 13.

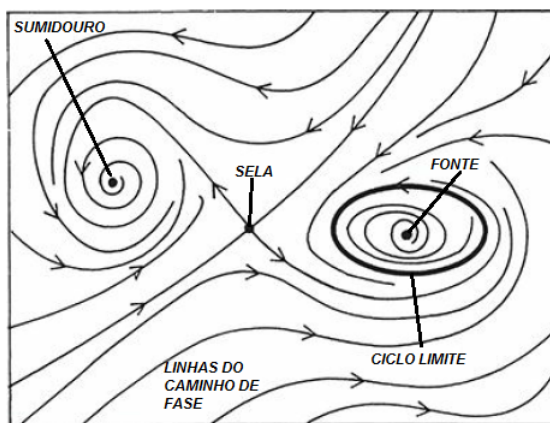


Figura 13: Espaço de fase de um fluxo hipotético num plano. Fonte (STEWART, 1991)

Vamos analisar o primeiro conceito de sumidouro. Um sumidouro, é o lugar para o qual a linha de fluxo é atraída, tornando-se um único ponto (Ponto fixo) para onde todos os pontos vizinhos fluem. Se iniciarmos o sistema num ponto central de sumidouro, nada acontecerá, ou seja, permanece num estado estacionário. Em contra partida, se iniciarmos o sistema em um ponto próximo ao sumidouro, ele irá convergir para esse ponto. Um exemplo é modelo de Lorenz para valores de $r < 1$, os caminhos de fase convergem para o ponto zero, como mostra os gráficos da Figura 7. Portanto, eles podem ser considerados como estados estacionários estáveis (STEWART, 1991).

O ponto mediano da Figura 13 é o chamado ponto de Sela. Ele pode ser considerado um ponto de estabilidade ou instabilidade, dependendo da direção em que é observado. O Ponto de sela tem esse nome porque separa o caminho pelo qual fluem pontos próximos. Os caminhos de fase que separam um movimento localmente limitado de um ilimitado são chamados de separatrizes. Uma separatriz sempre passa por um ponto de instabilidade, logo, o movimento próximo a ela é extremamente sensível as condições iniciais, uma vez que os pontos em qualquer lado da separatriz detém trajetórias diferentes (THORNTON; MARION, 2011).

A Figura 14 exemplifica os pontos de selas para o diagrama de fase de um pêndulo plano, dado em função da posição θ e velocidade $\dot{\theta}$. O pêndulo plano é um sistema não-linear que pode executar movimentos circulares na vertical. O diagrama de fase dele é composto por caminhos de fase semelhante ao OHS e pontos de instabilidade (pontos de sela) que podemos entender como se ele estivesse na posição vertical para cima.

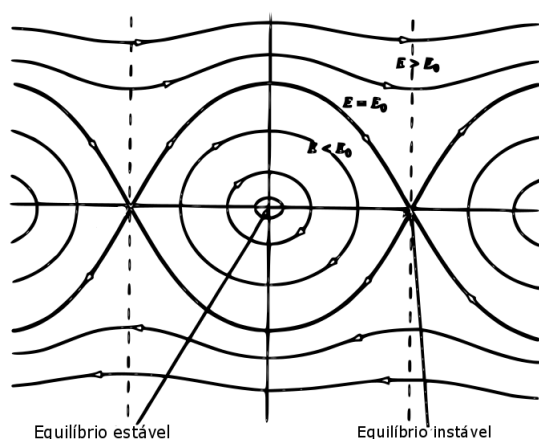


Figura 14: Espaço de fase do Pêndulo Plano. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)

As fontes e o ciclo limite estão representados mais a direita da figura 13. A fonte pode ser entendida como o contrario do sumidouro, também são estados estacionários no qual os pontos vizinhos tendem a se afastar. Os ciclos limites são determinados por caminhos de fase fechados, apresentando um movimento periódico incessante e que não muda ao longo do tempo (STEWART, 1991).

Há três tipos básicos de ciclo limite: o estável, no qual os pontos próximos se movem em direção a ele, o instável no qual há o afastamento, e o chamado ciclo de sela, que atrai as trajetórias de um lado e repele do outro. A existência de um ciclo limite, implica necessariamente na existência de uma fonte. Assim, se numa dada região do espaço de fase não existir nenhum foco, podemos garantir que nessa região não existe nenhum ciclo limite (HILBORN, 2000).

As soluções de um sistema dinâmico contínuo no espaço de fase, nunca se podem cruzar, e esse princípio é útil para descobrir ciclos limite. Tomamos como exemplo o espaço

de fase apresentado na figura 13, as soluções que saem do foco na origem não se podem cruzar com as soluções que entram pelas fronteiras do diagrama, logo, deve existir um ciclo limite que absorve as soluções. Eles são mais difíceis de serem detectados do que as selas, sumidouros e fontes, pois é preciso analisar uma região considerável, não apenas nas proximidades de um ponto. Uma das principais aplicações é o ciclo limite de Van der Pol, utilizado nas primeiras transmissões via rádio (VILLATE, 2011).

Apresentamos até então, espaços de fases de fácil entendimento e representatividade, entretanto, dependendo do fenômeno eles podem se tornar bastante complexos, como no caso do espaço de fase do modelo de Lorenz na Figura 9. Sobre isso, Poincaré criou uma técnica para simplificar essas representações, através de cortes transversais paralelos, com intervalos iguais ao longo dos caminhos de fase. Essa técnica ficou conhecida como Seção de Poincaré. As seções de Poincaré também são utilizadas para definir a instabilidade e estabilidade dos ciclos limites.

Para explicar essa técnica, vamos tomar como exemplo um espaço de fase tridimensional, de um pêndulo amortecido e acionado com coordenadas definidas por $y(= \dot{x} = \dot{\theta})$ frequência angular, *versus* $x(= \theta)$ ângulo teta, *versus* $z(= \omega t')$ fase da força motora, segundo mostra a Figura 15. É possível notar que a principal vantagem de utilização dessa técnica, é a redução de um espaço com N dimensões em um $N - 1$ dimensões (THORNTON; MARION, 2011).

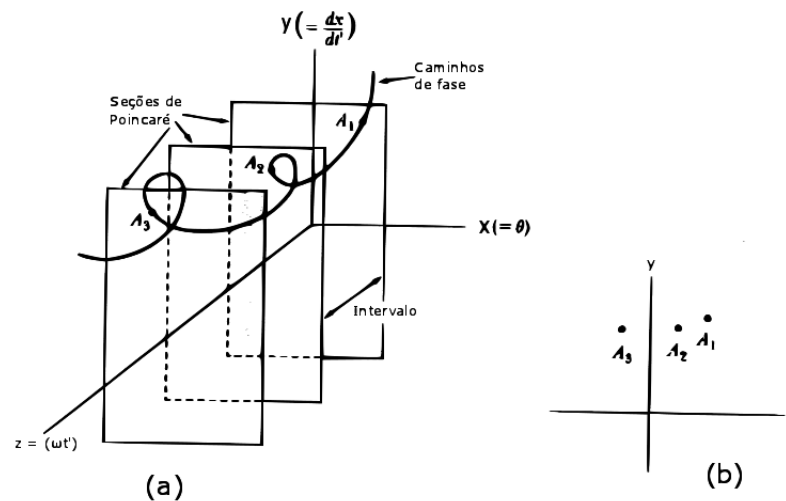


Figura 15: (a) Representação da Seção de Poincaré, identificando os cortes transversais nos caminhos de fase. (b) Os pontos A_1, A_2 e A_3 são as interseções dos caminhos de fase com as seções, projetadas no plano $y-x$. Fonte (THORNTON; MARION, 2011)

A Figura 16 trás os três diagramas a respeito do movimento do pêndulo forçado e amortecido, onde a partir deles podemos concluir que: para o movimento onde a força é 0,4 e 0,8 o movimento é periódico, e sempre retorna a mesma posição quando passa por 2π , logo a seção de Poincaré nos dá somente um ponto projetado no plano $y - x$. Para

os valores de F igual a 0,5; 0,9 e o movimento é um pouco mais complexo, apresentando dois e três pontos. Entretanto, para valores de F igual a 0,6; 0,7 e 1, o movimento passa a ser caótico, e a sua representação se dá por uma determinada área do gráfico, devido a grande variação de pontos quando o tempo tende ao infinito. Mesmo apresentando um comportamento caótico, a seção de Poincaré é rica em estrutura para descrevê-lo (THORNTON; MARION, 2011).

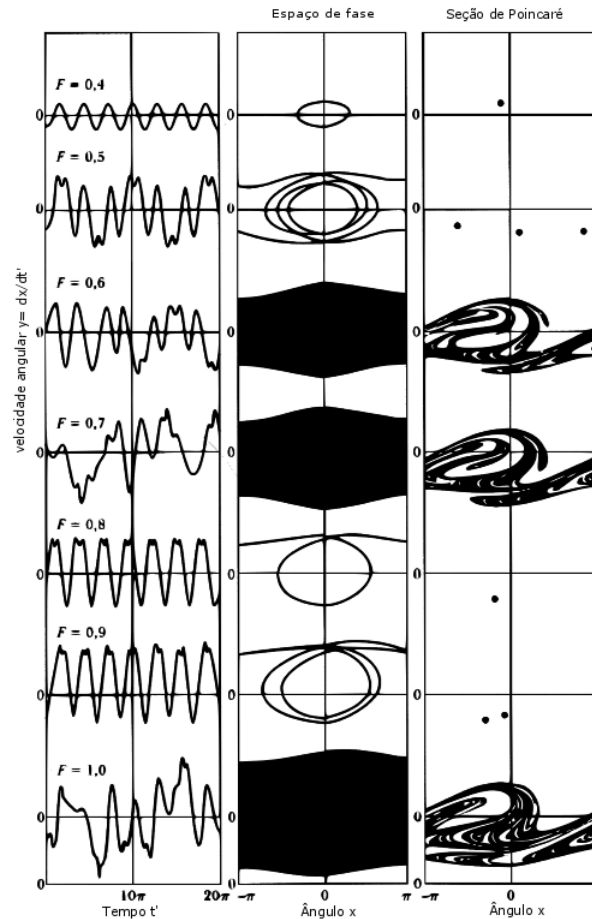


Figura 16: A esquerda temos o gráfico do pêndulo amortecido forçado, para alguns valores de força motora. No centro, a representação da projeção do espaço de fase a direita temos a Seção de Poincaré para cada caso. (THORNTON; MARION, 2011).

Outra aplicação da Seção de Poincaré é identificar a estabilidade de ciclos limites. Se consideramos um ciclo limite em um espaço de fase bidimensional, basta que tracemos um segmento de reta interceptando o ciclo limite, essa reta será nossa sessão de Poincaré de acordo com a Figura 17(a).

Se iniciarmos uma trajetória no espaço de fases próximo do ciclo limite, representado pelo ponto P_1 , e observarmos que a evolução do sistema faz com que as interseções se aproximem do ponto P , conforme a Figura 17(b), concluímos que as trajetórias estão se aproximando do meu ciclo limite, logo ele é estável e um consequente atrator de sistema. Caso contrário, o ciclo limite instável, ou repelente. Para o caso dele repelir por um lado

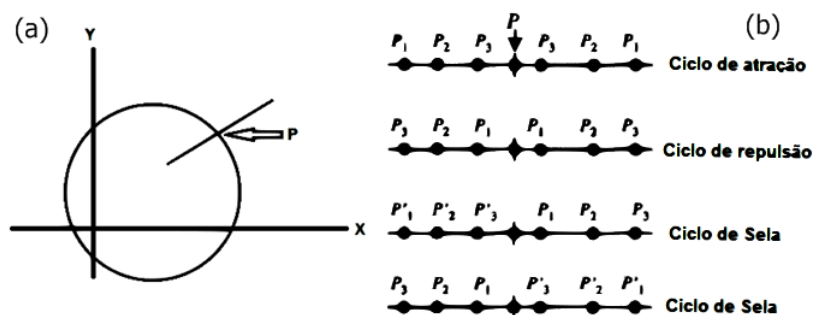


Figura 17: Em (a) temos a representação de como traçar a Seção de Poincaré numa condição hipotética de um ciclo limite num espaço bidimensional. Em (b) temos as possíveis situações que limite (HILBORN, 2000).

caraterizam a estabilidade do ciclo

e atrair do outro, temos um ciclo de sela.

4.2 Os Atratores

Um dos conceitos fundamentais para a Teoria do Caos é o de Atrator. Um atrator pode ser entendido como um conjunto de comportamentos característicos para o qual um sistema dinâmico evolui independentemente do ponto de partida. Eles são identificados a partir do espaço de fases, podendo ser simples pontos, ou ainda, adquirir geometrias complexas. Basicamente eles dividem-se em dois grupos: não caóticos ou caóticos. Os atratores não caóticos são previsíveis e de trajetória regular, enquanto os atratores caóticos ou atratores estranhos, apresentam um comportamento que não é aleatório, nem oscilatório, aparecendo apenas após o começo do caos (ALVES, 2011).

Os sumidouros e os ciclos limites são atratores, pois apresentam um conjunto de características estacionárias e/ou movimentos periódicos ao longo do tempo no espaço de fase. A seção de Poincaré pode ser utilizada para identificar esses atratores. Nas sessões anteriores podemos identificar exemplos de atratores, como no modelo de crescimento populacional biológico. Notamos que para o valor do parâmetro $A < 1$ a população em estudo se extinguiu, ou seja, o atrator do sistema era um ponto fixo em zero.

A Figura 8 traz o espaço de fase do modelo de Lorenz para o parâmetro $r = 2$, onde observamos que o sistema evolui para um ponto fixo diferente de zero, ou seja, o atrator para esse caso indica um estado de circulação do fluido. Quando o mesmo parâmetro assume valores maiores que um, verificamos três pontos fixos, onde a origem torna-se uma fonte, e os outros dois pontos fixos fora da origem, atratores.

A o gráfico inferior direito da Figura 9 traz o espaço de fase tridimensional do modelo de Lorenz, para o parâmetro $r = 160$, em que temos a figura que ganhou grande repercussão mundial pelo formato assemelhar-se a uma borboleta. Esse é o chamado Atrator de Lorenz, cujo caminhos de fase não apresenta periodicidade, porém obedecem

a um certo "padrão", "estabilizado" dentro desse contorno em forma de "borboleta".

4.3 Rotas para o Caos e o Expoente de Lyapunov

Descreveremos três Rotas que levam ao comportamento Caótico, segundo Hilborn (2000). A primeira Rota, chamada de Rota do Período de Duplicação, está associada a duplicação de período devido a um ciclo limite no sistema. Assumindo um ciclo limite periódico que gere um único ponto na Seção de Poincaré, temos que esse ao se tornar instável pode permanecer periódico, entretanto, a Seção de Poincaré para o novo movimento apresenta agora dois pontos (um de cada lado do ponto original), ou seja, o período passa a ser duas vezes maior que o original. A medida que temos alterações no parâmetro de controle, o período de dois ciclos pode se tornar instável dando origem a um período de quatro ciclos, e quatro pontos na Seção de Poincaré. As duplicações para esse caso podem continuar até um período infinito, logo, a trajetória nunca vai se repetir. Podemos considerar então que a trajetória seguida pelo sistema é caótica.

A segunda Rota está associada a quase periodicidade. Ela é conhecida por Ruelle-Takens após D. Ruelle e F. Takens, em 1971 lançarem pela primeira vez a possibilidade teórica da sua existência. Um movimento quase-periódico ocorre quando a proporção entre a mudança do primeiro ciclo para o segundo não é uma razão racional, como na situação anterior. Dessa forma, essa Rota nos diz que um sistema que também tem um começo num ciclo limite, pode se tornar caótica quando inserida a terceira frequência devido a mudança nos parâmetros de controle. Em alguns casos, o comportamento caótico pode surgir após o segundo período.

Um esquema proposto pelo físico L. Landau em 1944, buscava explicar a produção de turbulência em fluidos à medida em que se afastavam da posição de equilíbrio. Landau imaginou que esse complexo modelo, poderia ser descrito por uma infinita sequência de bifurcações de Hopf, cada uma delas levaria a um nova frequência (incomensurável), a medida que os parâmetros de controle fossem alterados. Entretanto, o cenário quase periódico leva ao caos.

A terceira Rota é denominada Rota de Intermitência. A Intermitência é o fenômeno que ocorre sempre que o comportamento de um sistema parece alternar entre dois estados qualitativamente diferentes, mesmo que os parâmetros de controle sejam constantes e os ruídos externos sejam desprezíveis. Ela pode caracterizar-se de diferentes formas, entretanto, na Rota de Intermitência temos uma dinâmica de comportamento caótico ocorrendo irregularmente, intercalados com intervalos de comportamento aparentemente periódico. Novamente com a mudança nos parâmetros de controle do sistema, as explosões caóticas tornam-se mais longas e ocorrem com mais frequência até que, eventualmente, o registro do tempo inteiro seja caótico.

Existe um método que é utilizado para identificar a existência de sensibilidade as condições iniciais, ele é chamado de Expoente de Lyapunov, nome dado em homenagem ao matemático russo A. M. Lyapunov (1857-1918). O expoente de Lyapunov λ representa o coeficiente do crescimento exponencial médio por unidade de tempo entre os dois estados, em outras palavras, ele identifica expansão ou contração das trajetórias no espaço de fase (THORNTON; MARION, 2011).

Se consideramos um sistema com dois estados iniciais muito próximos, de forma que podemos escrever a diferença entre eles da forma:

$$d_0 = x_i - x_j \quad (4.10)$$

$$d_1 = x_{i+1} - x_{j+1} \quad (4.11)$$

$$d_2 = x_{i+2} - x_{j+2} \quad (4.12)$$

$$\vdots \quad (4.13)$$

$$d_n = x_{i+n} - x_{j+n} \quad (4.14)$$

Após n iterações, é suposto que d_n aumente exponencialmente, dessa forma temos:

$$d_n = d_0 e^{n\lambda} \quad (4.15)$$

Com isso, o expoente de Lyapunov pode ser definido como:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{d_n}{d_0} \quad (4.16)$$

Se o expoente calculado for um valor negativo, as trajetórias convergem e se o valor for positivo, as trajetórias divergem e o movimento é caótico. No caso de $\lambda = 0$, $d_n = d_0$, ou seja não há alterações nos caminhos de fase. Em espaços de fases com duas (ou mais) dimensões, podemos associar um Expoente de Lyapunov com a taxa de expansão ou contração de trajetórias para cada uma das direções do espaço de fases .

Quantificar o comportamento caótico é importante para que em princípio, possamos diferenciá-lo do comportamento ruidoso provocado por influências aleatórias, externas. Além disso, podemos verificar como o comportamento caótico do sistema muda à medida que os parâmetros do sistema são alterados (HILBORN, 2000).

4.4 O Pêndulo Duplo

Em Física, os sistemas oscilantes desempenham um papel fundamental na compreensão da natureza. Fenômenos de grande importância ligados ao Eletromagnetismo e

à mecânica Quântica foram inicialmente compreendidos com base nos conceitos desenvolvidos a partir do estudo de sistemas oscilantes ([MACHADO, 2004](#)).

Na prática, qualquer sistema em que tenhamos uma força restauradora que seja uma função da posição exibirá algum tipo de comportamento oscilatório. Em primeira aproximação, isso pode ser visto pelo fato de podermos expandir uma função contínua em série de Taylor:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} (x-a)^n = F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right) \Big|_{x=0} + \frac{1}{2!} x^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right) + \frac{1}{3!} x^3 \left(\frac{d^3 F}{dx^3} \right) + \dots \quad (4.17)$$

Onde $f^{(n)}$ denota a n -ésima derivada ([NUSSENZVEIG, 2014](#)).

Para valores pequenos de x um sistema como esse irá se comportar como um oscilador harmônico simples, pois teremos, em primeira aproximação:

$$|F(x)| = kx \quad (4.18)$$

onde $k = \frac{dF}{dx}$.

O pêndulo simples é um exemplo de oscilador harmônico simples quando sofre pequenos deslocamentos em relação a sua posição de equilíbrio. No caso de ausência de forças externas, a força restauradora é devida à gravidade que faz com que o pêndulo tenda a voltar a sua condição de equilíbrio.

O pêndulo físico, também chamado de pêndulo composto, caracteriza-se como sendo qualquer pêndulo real, ou seja, diferente do pêndulo simples, temos uma distribuição da massa. Logo, ele consiste em um corpo rígido (que pode assumir qualquer formato) suspenso em um ponto O e que pode girar livremente (sem atrito) em torno desse ponto ([NUSSENZVEIG, 2014](#)).

Quando temos o acoplamento entre dois ou mais pêndulos físicos, podemos verificar que eles se influenciam mutuamente. Esta influência é observada na alteração das trajetórias do sistema composto com relação à situação mais simples (de apenas um pêndulo), bem como pela troca de energia entre eles. Entender a dinâmica de um sistema como esse, requer primeiramente o entendimento das equações de movimento que compõem o sistema, porém determinar as equações de movimento deste tipo de sistema pode não ser uma tarefa fácil principalmente se tentarmos utilizar as tão conhecidas Leis de Newton.

Para este tipo de problema, a descrição do sistema é significativamente simplificada se utilizamos as equações de Euler-Lagrange¹. O Lagrangiano de um sistema clássico com

¹ Uma boa introdução ao tema pode ser encontrada em ([THORNTON; MARION, 2011](#)).

n graus de liberdade pode ser definido como:

$$\mathcal{L} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t\} = T - V \quad (4.19)$$

Onde T e V são as energias cinética e potencial do sistema, respectivamente, q_n é a coordenada generalizada do sistema, t é o tempo e $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

E a partir da equação Euler-Lagrange, definida por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (4.20)$$

Podemos encontrar as equações de movimento do sistema pêndulo físico duplo, uma vez que θ_1 e θ_2 são as coordenadas generalizadas, e L_1 e L_2 são os respectivos comprimentos das barras, de acordo com o esquema da Figura 18.

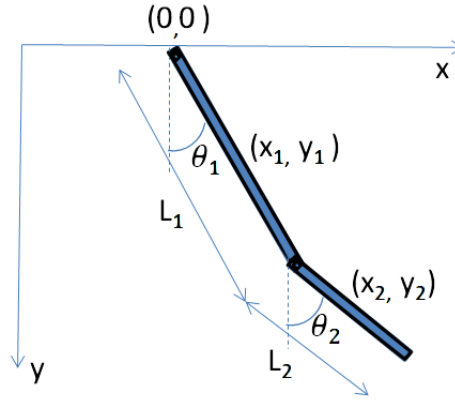


Figura 18: Esquema de um pêndulo físico duplo, cujo movimento está sob efeito apenas da gravidade. Fonte: Elaboração do autor

Como podemos ver, temos um pêndulo duplo formado por duas barras de comprimentos diferentes. Como estamos tratando de pêndulos físicos, convém utilizarmos as coordenadas do centro de massa de cada uma das barras, de forma que teremos:

$$x_1 = \frac{L_1}{2} \sin \theta_1 \quad (4.21)$$

$$y_1 = -\frac{L_1}{2} \cos \theta_1 \quad (4.22)$$

$$x_2 = L_1 \sin \theta_1 + \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 \quad (4.23)$$

$$y_2 = -L_1 \cos \theta_1 - \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 \quad (4.24)$$

As energias cinética e potencial podem ser escritas como:

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{I_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \quad (4.25)$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (4.26)$$

Onde I_1 e I_2 são os momentos de inércia de cada barra², e g é a gravidade. Substituindo x e y pelas coordenadas generalizadas θ_1 e θ_2 , e os respectivos momentos de inércia de cada barra, podemos escrever a lagrangiana do sistema como:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2}{6} + \frac{m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2}{6} + \frac{m_2}{2} L_1^2 L_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) L_1 g \cos \theta_1 - \frac{L_2}{2} m_2 g \cos \theta_2 \quad (4.27)$$

Utilizando a equação 4.20 obtemos as duas equações do movimento do nosso sistema, são elas:

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) L_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2}{2} L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{m_2}{2} L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{m_2}{3} L_2^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{m_2}{2} L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{m_2}{2} L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_2}{2} g L_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (4.29)$$

Essas equações representadas em 4.28 e 4.29, não levam em consideração perdas de energias. Elas são equações não-lineares cujas soluções são obtidas por métodos numéricos. A Figura 19 exemplifica o resultado obtido por meio de simulação, do espaço de fase (posição e velocidade) de um oscilador que perde energia ao longo do tempo. Embora ele não represente as soluções das equações mencionadas, ele serve para fins de comparação com os resultados obtidos através da experimentação, que serão discutidos posteriormente.

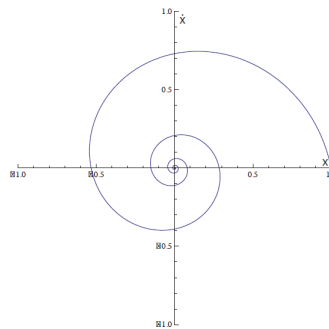


Figura 19: Espaço de fase da posição e velocidade de um oscilador harmônico amortecido. O atrator do sistema é ponto zero. Diferentemente dos osciladores harmônicos simples de energia constante, antes de fechar o ciclo, o oscilador já não possui a mesma energia. Logo, o formato de espiral é devido a essa perda de energia. Fonte: (DAVIDSON, 2011)

² O momento de inércia da barra é dado por $I = \frac{1}{12} m L^2$, onde m e L correspondem a massa e o comprimento da barra respectivamente.

4.5 Sobre o *Tracker*

O *Tracker* é um software gratuito de análise de imagem e vídeo, possui código aberto, e seu desenvolvimento é fruto da parceria entre a equipe do professor Douglas Brown, do Cabrillo College situado na Califórnia, nos Estados Unidos e pelo Open Source Physics, um projeto financiado pela *National Science Foundation* e pelo Davidson College, uma comunidade de visibilidade mundial, que busca o uso de ferramentas e bibliotecas de código aberto para o ensino de Física (OLIVEIRA, 2014).

A biblioteca do *tracker* está na linguagem de programação Java6 e seu licenciamento em General Public License7 (GNU). Isso garante licenças dos softwares livres, e possibilita aos usuários uma certa liberdade para editar, usar e compartilhar programas de computador sob sua licença. Esse programa é baseado em plataforma Java, o que é uma vantagem, pois, programas que utilizem essa plataforma podem ser utilizados em praticamente qualquer sistema operacional (OLIVEIRA, 2014).

O procedimento básico mediado pelo uso do *tracker* consiste basicamente em três etapas, são elas: organização do experimento, filmagem do movimento de interesse e transferência do arquivo de vídeo para o programa previamente instalado no computador, para o início das análises³.

Para entender como funciona o *tracker*, é importante entender inicialmente como funciona um vídeo. Ao contrário do que somos levados a acreditar pela nossa vivência diária, o olho humano não detecta imagens instantaneamente. As imagens que vemos levam um tempo para se formarem na retina e serem processadas pelo cérebro. Se uma nova imagem é projetada antes do completo desaparecimento da imagem que já está em nosso olho, teremos a impressão de continuidade. Esse fato é utilizado para a criar a impressão de movimento a partir de conjunto de imagens estáticas. Se a taxa de reprodução dessas imagens superar a taxa de 16 por segundo será interpretada como algo contínuo.

Dessa forma, podemos entender um vídeo como uma sequência de "fotos" denominadas frames (quadros) capturadas e reproduzidas em um determinado intervalo de tempo. Normalmente os aparelhos de TV's atuais reproduzem vídeos na taxa de 60 fps (frames por segundo), já as câmeras fotográficas dos smartphones populares, capturam à uma taxa de 30 fps. Essa taxa de fps pode variar de acordo com a tecnologia e, de modo geral podemos dizer que quanto maior essa taxa mais suave será o vídeo (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011).

Sabendo desse fato, podemos utilizar um software que faz o caminho inverso, ou seja, "desmonta" o vídeo em um conjunto de fotos que estão separadas por um determinado intervalo de tempo para avaliar por exemplo a velocidade de um objeto neste vídeo.

³ Para acesso as instruções de instalação do *tracker* visite a página < <http://physlets.org/tracker/> > acessado em 28/03/2018

Esta é a ideia principal da videoanálise. Quanto maior a taxa de frames, mais pontos teremos para analisar e mais próximo estaremos da ideia de continuidade.

A videoanálise utiliza essa estrutura de fps para examinar os vídeos. Basicamente, o software primeiramente apresenta um frame por vez, e em cada um deles, ele destaca os aspectos importantes do fenômeno em análise, como por exemplo, a posição do objeto rastreado. Dessa forma, o programa coleta dados e constrói gráficos com as variáveis escolhidas pelo usuário. A Figura 20 mostra a interface do *tracker*.

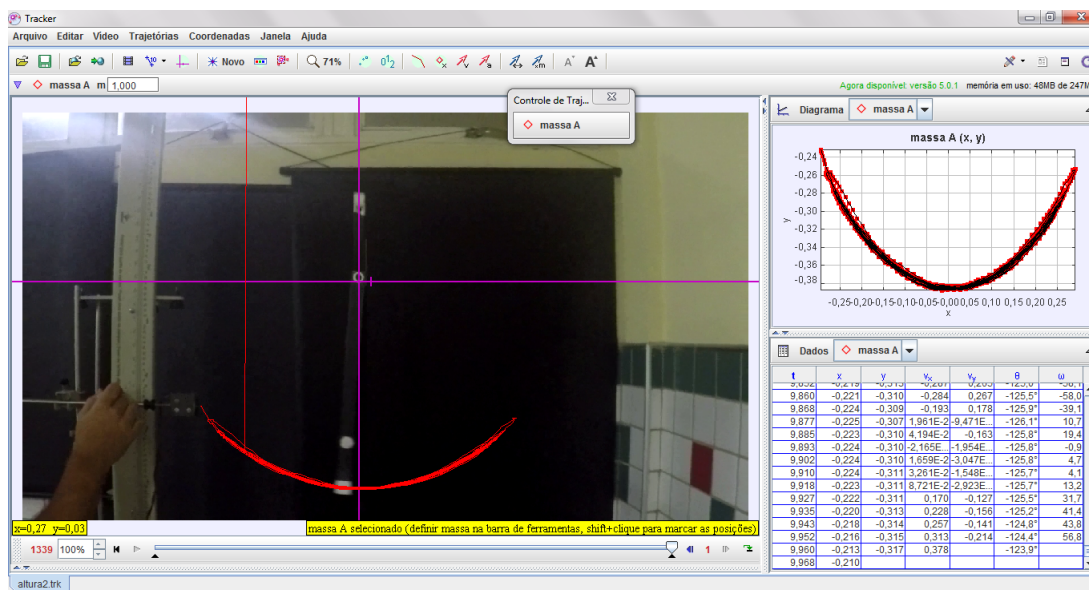


Figura 20: Interface do programa Tracker. Do lado esquerdo, temos o vídeo do pêndulo já em análise. Observe que temos a opção de marcar a trajetória do pêndulo no vídeo. A direita, temos a construção do gráfico de posição xy e uma tabela dos pontos obtidos a partir do referencial estabelecido, destacado em lilás. Fonte: Elaboração do autor

As principais vantagens da utilização do *tracker* são: a facilidade de interação, pois possui uma interface organizada e autoexplicativa, e a quantidade de informações que ele disponibiliza sobre o sistema a ser analisado. Observe que temos na Figura 20, uma tabela com os pontos das variáveis desejadas e o gráfico das coordenadas escolhidas. Ambos são coletados simultaneamente a partir da análise dos frames⁴.

Devemos ressaltar que embora o *tracker* apresente opções vantajosas, ele é limitado quando a velocidade do movimento no vídeo em questão é muito alta (da ordem de dezenas

⁴ Tutoriais sobre como utilizar as ferramentas do *tracker* estão disponíveis em:

- <<http://www.if.ufrgs.br/cref/uab/lab/tracker.html>> acessado em 28/03/2018;
- <<http://paginapessoal.utfpr.edu.br/lenz/tracker/ManualTrackerdetalhado.pdf>> acessado em 28/03/2018;
- Canal no youtube do professor Douglas Brown <<https://www.youtube.com/channel/UCnh-8DQM3Tm2a1pj05Fb4Uw>> acessado em 02/04/2018;
- Mais informações podem ser encontradas na referência (OLIVEIRA, 2014), (BROWN; COX, 2009).

de metros por segundo ou maiores), e a câmera possui taxa de captura de 30 fps. Nesse caso, as imagens podem ficar borradas, pois o objeto percorre espaços consideráveis nos intervalos em que a câmera registra os quadros do movimento. Isso dificulta o registro das posições nos intervalos de tempo no modo automático, forçando o usuário a fazer a coleta de pontos de forma manual (JR et al., 2012).

Em suma, o *Tracker* tem várias atribuições que contrinuem significativamente no processo de ensino-aprendizagem da física, pois, ele permite o acompanhamento da evolução das grandezas físicas em tempo real, libertando o experimentador das limitações experimentais estabelecidas em roteiros de laboratórios. Talvez a maior contribuição dessa é ferramenta seja permitir aos usuários a oportunidade de ser agente ativo na construção, customização e adequação do programa às suas realidades (FILHO, 2000).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Até o presente momento foram apresentados vários conceitos inerentes ao estudo de sistemas dinâmicos caóticos. Este capítulo é destinado a apresentação dos resultados obtidos com a realização do experimento e ajuda da videoanálise feita com o *tracker*, sob a luz dos conceitos abordados no decorrer de todo o trabalho.

5.1 Preparação do Experimento

O sistema montado para este trabalho consiste de um pêndulo duplo formado por duas barras de ferro de tamanhos 30cm e 10cm. Elas foram conectadas entre si por parafusos que permitem um movimento de 360 graus (Figuras 22 e 23).



Figura 21: Eletroímã e Fonte. Fonte: Elaboração do autor

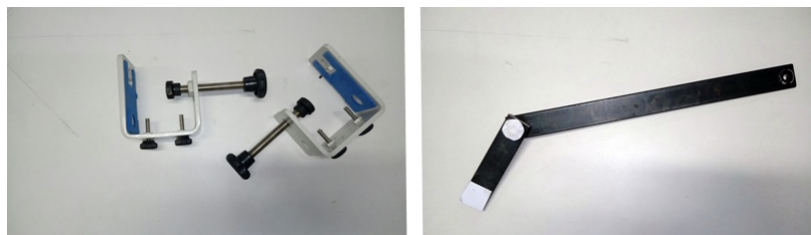


Figura 22: Fixadores e pêndulo duplo Fonte: Elaboração do autor

Para garantir que as condições iniciais do movimento pudessem ser sempre as mesmas, e que não houvesse interação com agentes externos (pessoas no caso), o pêndulo foi abandonado das seis posições previamente estabelecidas (a Tabela 1 traz os valores das alturas pre-estabelecidas), utilizando um eletroímã posicionado próximo a régua de marcações. A Figura 23 traz a montagem finalizada do experimento.

Para a captura das imagens utilizamos uma câmera filmadora GoPro HERO4 Silver, representada na Figura 24, muito utilizada por esportistas. O uso deste tipo de câmera, se mostrou a melhor opção em função da necessidade de uma boa taxa de captura de imagens (Frames Per Second - FPS). Os primeiros testes de filmagens foram realizados



Figura 23: Experimento montado. Fonte: Elaboração do autor



Figura 24: Câmera Hero4 Silver utilizada para gravação dos vídeos Fonte: disponível em <<http://www.detonablog.com.br/gopro-hero4-silver-vs-hero4-session/>>

com a câmera dos Smartphones e da CanonT6, entretanto, devido a baixa taxa de fps elas não foram suficientes.

Após a montagem do experimento, demos início a filmagem do movimento do pêndulo, para cada uma das seis posições. Como mencionado, o programa *tracker* rastreia a posição do objeto desejado. No nosso caso, rastreamos o movimento do ponto inferior do pêndulo livre, e a partir dos dados coletados pela vídeo análise, fizemos um levantamento com respeito ao movimento, através de gráficos que envolvem as posições (x, y) , velocidades (v_x, v_y) , ângulo de rotação (θ) , tempo (t) e frequência (ω) .

5.2 Captura de Imagens

As filmagens foram realizadas utilizando uma taxa de captura de 120 fps. Para melhorar o contraste, utilizamos um fundo preto e o ponto do pêndulo branco durante as gravações. A câmera foi mantida sempre na mesma posição para que não houvesse diferença nas proporções dos vídeos capturados.

Antes de iniciarmos as gravações, estabelecemos seis pontos para os quais o pêndulo seria abandonado. Eles estão representados na tabela 1. As alturas foram denotadas por

h , onde h_0 corresponde ao nível zero de energia potencial gravitacional.

Tabela 1: Medidas das alturas em que o pêndulo foi liberado

Pontos das alturas	Medidas
h_0	0
h_1	20cm
h_2	28cm
h_3	35cm
h_4	40cm
h_5	44cm
h_6	48cm

Os vídeos tiveram uma duração média de 15 segundos, tendo em vista que o movimento é amortecido, ou seja, há perda de energia por meio do atrito entre as peças. Logo, para um tempo muito longo, o movimento tende a cessar.

Após a captura, os vídeos foram transferidos para um computador para então serem analisados. Essa análise foi feita por meio do programa *tracker*, e será discutida na próxima sessão.

5.3 Análise dos Vídeos com o Tracker

Com o desenvolvimento desse experimento, tivemos a intenção de detectar o comportamento caótico com a mudança dos parâmetros do sistema. Nesse caso, como o pêndulo estava sujeito apenas a gravidade e às forças de resistência (atrito), a mudança de comportamento deve ser observada a partir da variação do ângulo de rotação e por conseguinte, da energia potencial gravitacional.

Os gráficos que serão mostrados nessa sessão foram obtidos a partir dos pontos gerados pela videoanálise feita no *tracker*. Para as três primeiras análises obtivemos os resultados descritos pelas Figuras 25, 26, 27.

Essas três situações, para h_1 , h_2 , h_3 trazem algumas informações sobre a dinâmica do movimento, em conformidade com os conceitos que foram abordados ao longo do trabalho. Vamos explorar cada um dos gráficos (a), (b), (c) e (d) para cada uma das três situações representadas pelas Figuras 25, 26, 27.

Os Gráficos em (a), em cada uma dessas situações, representam o movimento da posição θ com o tempo. Como nosso modelo proposto dissipa energia a medida que o tempo evolui, podemos observar uma diminuição na amplitude ao longo do tempo. Devido a isso, restringimos as observações a curtos intervalos de tempo, uma vez, que a evolução temporal leva a perda de energia, cessando o movimento. Para essas três alturas, nenhum comportamento caótico foi detectado.

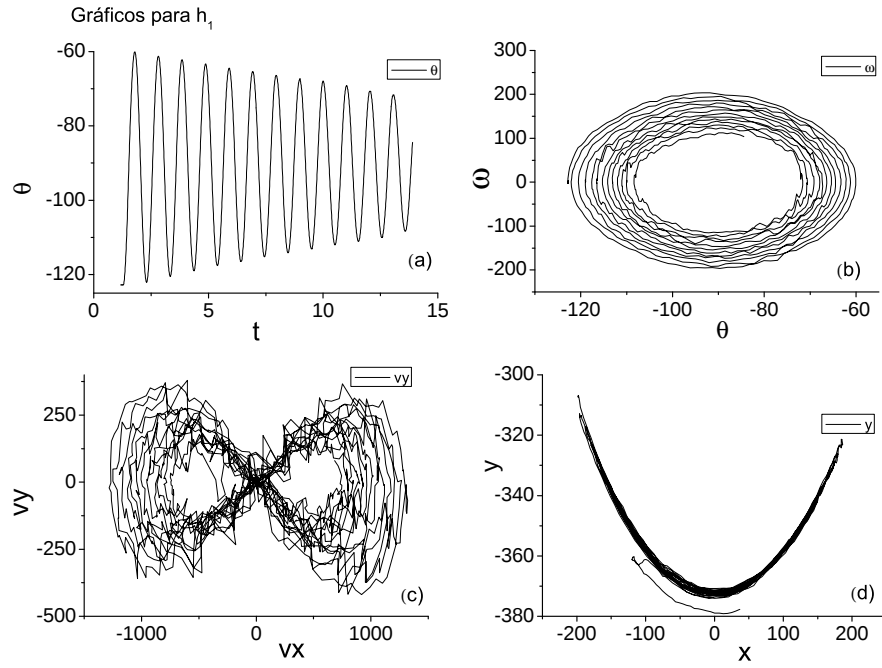


Figura 25: Para h_1 temos em (a) Gráfico de θ (ângulo de rotação) em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor

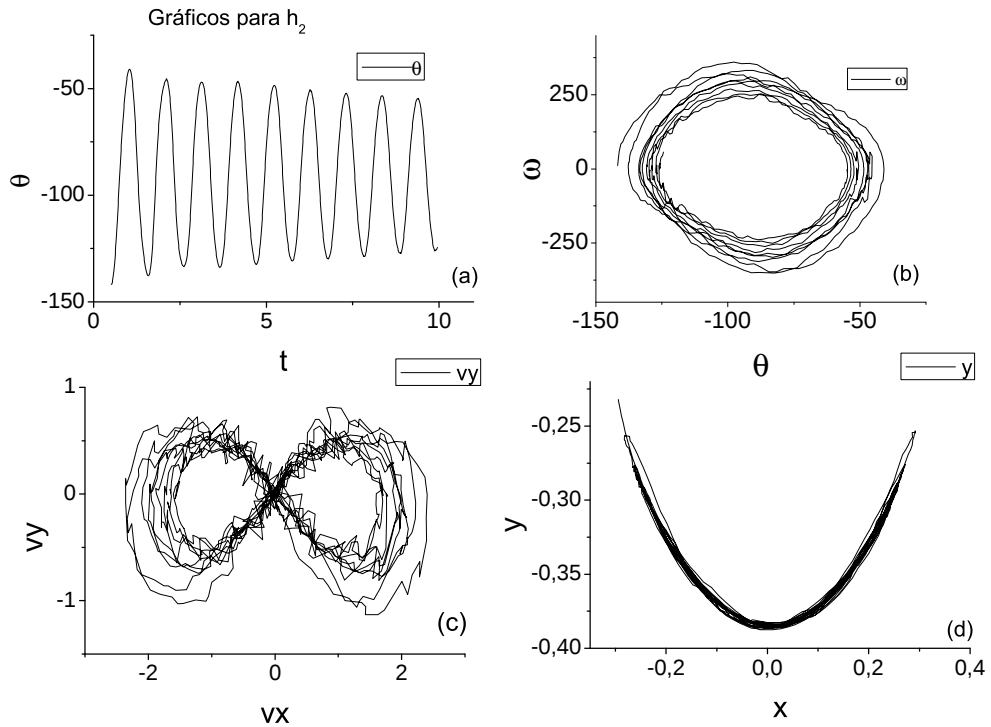


Figura 26: Para h_2 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor

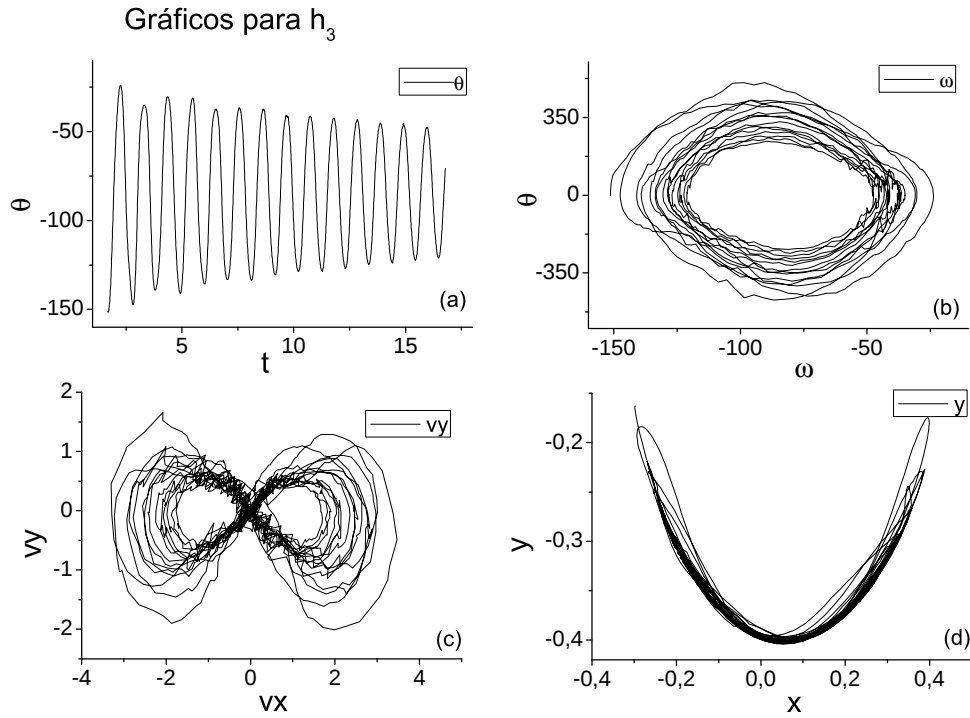


Figura 27: Para h_3 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor

Os Gráficos em (b), trazem o espaço de fase do ângulo de rotação com a frequência angular. Para os três casos, temos uma situação similar de uma espiral que converge para o atrator do sistema, ou seja, o ponto de energia potencial igual a zero. Caso a energia não fosse dissipada, ciclos limites (ciclos fechados) seriam formados para cada uma das três situações, e esses seriam os atratores do sistema. Note que esses resultados estão em conformidade com os da simulação representados na Figura 19, do pêndulo amortecido.

Para os Gráficos (c) trazem a relação entre as velocidades de x e y . Nos três gráficos, é possível ver uma estrutura que se assemelha ao atrator de Lorenz, representado na Figura 1. Nele, temos dois pontos de atração das trajetórias e um de repulsão. O ponto de repulsão, que corresponde ao ponto de sela, é o de maior energia potencial. O leitor pode identificar que o ponto de sela é exatamente o ponto de maior alcance do pêndulo. No instante imediatamente posterior ao de maior alcance, sua energia potencial começa a decrescer até passar pelo ponto de energia zero, onde torna a crescer até chegar novamente a outra extremidade. Esse ciclo seria indefinido se o sistema não dissipasse energia, e os caminhos de fase, seriam apenas uma curva (um formato de "infinito").

A representação em (d) mostra o movimento do pêndulo em função das coordenadas x e y . Para esses valores de energia potencial, o movimento se assemelha ao pêndulo simples nas três situações, nada diferente ocorre nos três casos. Esse gráfico denota o rastro que o movimento do pêndulo deixa no plano xy , ou seja, a energia ainda não suficiente

para que ele dê voltas em torno do eixo de acoplamento.

Agora vamos analisar outras 3 situações representadas em 28, 29 e 30, que correspondem aos pontos h_4 , h_5 e h_6 respectivamente, e que tem energia potencial inicial superior aos três casos anteriores.

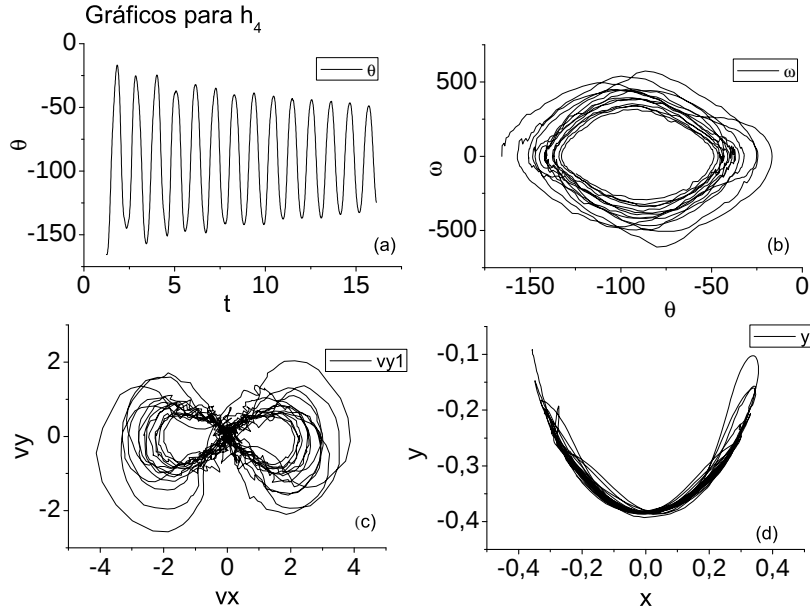


Figura 28: Para h_4 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$. (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico das posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor

Inicialmente, o ponto h_4 representado em 28 se assemelha ao comportamento dos três pontos anteriores de menor energia potencial. Ou seja, para esse ponto, o movimento permanece com características não caóticas.

Para o ponto de h_5 , observamos que o comportamento do sistema é sempre caótico, isso é evidenciado em todas os gráficos da Figura 29. As trajetórias xy diferem daquelas para um estado de menor energia inicial, pois o pêndulo tem energia suficiente para girar em torno da conexão com o pêndulo superior. Além disso, aparece uma duplicação de período em (a), evidenciada no Gráfico, antes de 5 segundos. Em (b) e (c) temos uma forma totalmente diferente das anteriores no início do movimento. Os caminhos de fase tendem para os padrões esperados no movimento não-caótico a medida que o sistema perde energia, por isso, ainda podemos visualizar o padrão de "espiral" e "infinito" em (b) e (c).

Como entre os pontos h_4 e h_5 o sistema muda o comportamento de não-caótico para caótico, logo, entre eles existe um ponto de bifurcação, ou seja, existe um ponto intermediário para o qual o sistema começa a se comportar de forma caótica. Devido o experimento não ser muito preciso, e pouco abrangente com relação aos pontos estabelecidos, não podemos distinguir exatamente o ponto de bifurcação, apenas identificar que

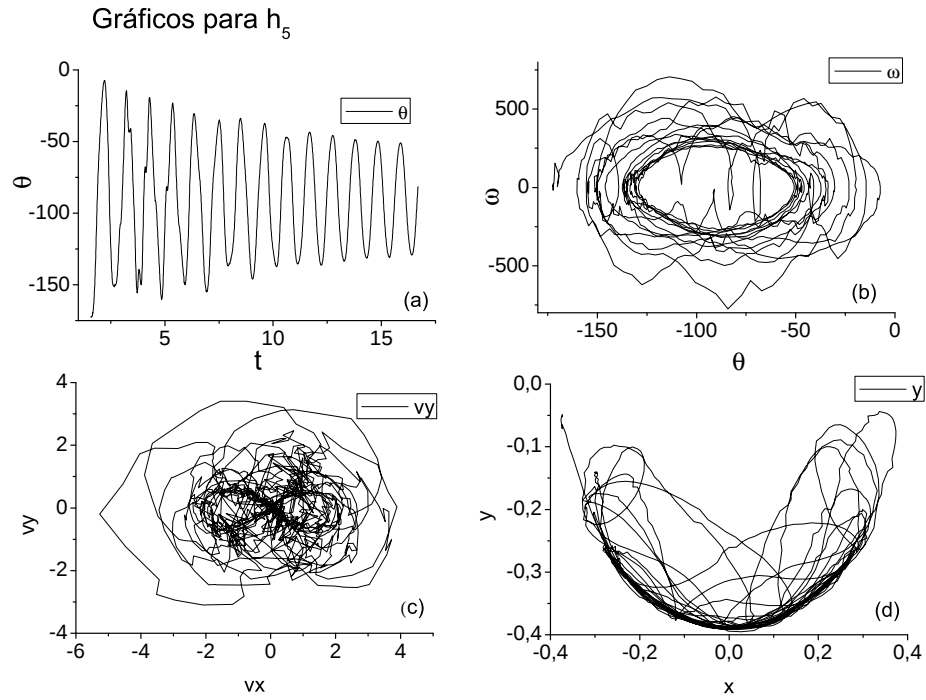


Figura 29: Para h_5 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor

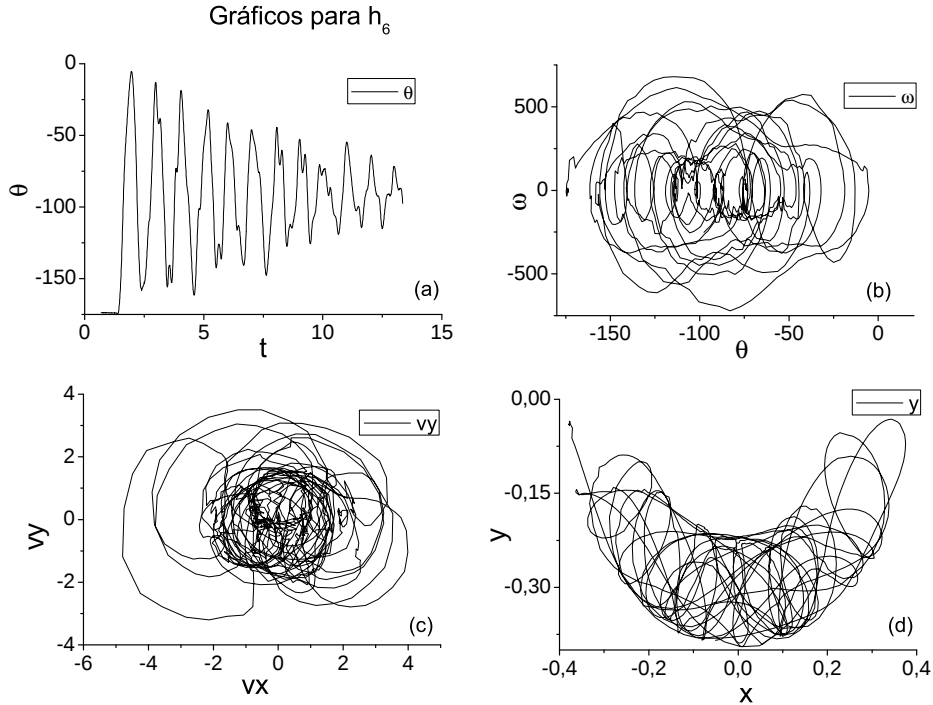


Figura 30: Para h_6 temos em (a) Gráfico de θ em função do tempo. (b) Espaço de fase $\theta\omega$ (ângulo de rotação e frequência angular). (c) Gráfico das velocidades v_x e v_y . (d) Gráfico de posições xy . "Rastro" do pêndulo no plano xy ao longo do movimento. Fonte: Elaboração do autor

essa é a faixa intermediária em que ele pode ser encontrado.

Para o ponto onde h_6 , também verificamos que o comportamento será sempre caótico, uma vez que o valor da energia potencial é maior que o ponto h_5 . Em (a), a trajetória da posição θ *versus* t diverge consideravelmente das anteriores após as primeiras oscilações. Da mesma forma para as situações anteriores, a redução da amplitude é devido a perda de energia para o atrito. Em (b) e (c) as trajetórias são totalmente diferentes, e perdemos o padrão de "infinito" e da "espiral", que até o ponto h_5 podia ser observado. Em (d) temos que o pêndulo rotaciona várias vezes de forma caótica em torno do eixo de acoplamento, como a energia é maior, ele consegue girar mais vezes do que em h_5 .

A Figura 31 traz uma análise comparativa de trajetórias para os três últimos pontos, h_4 , h_5 , h_6 respectivamente. Nela, podemos ver como a trajetória muda consideravelmente, com o aumento da energia potencial do sistema.

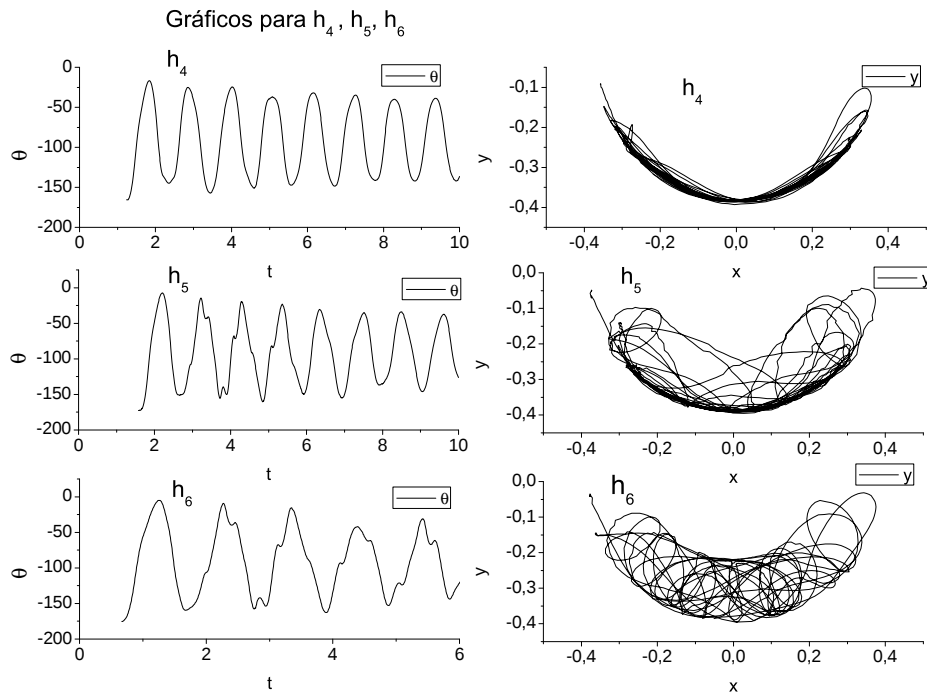


Figura 31: Gráficos do movimento angular θ em função do tempo e a correspondente trajetória xy para h_4 , h_5 , h_6 respectivamente.

Outro ponto que deve ser considerado, pois é uma das características do movimento caótico, é a divergência das trajetórias para pontos iniciais próximos, a medida que o tempo evolui. Para identificar esse comportamento, rastreamos em três vídeos diferentes o movimento do pêndulo para h_6 , uma vez que, para esse ponto sempre identificamos o comportamento caótico.

Se compararmos os três gráficos na Figura 32, é possível ver que mesmo tendo condições iniciais de movimento muito próximas, tendo em vista que cada situação foi rastreada tendo como ponto inicial h_6 , rapidamente as trajetórias divergem, tornando o

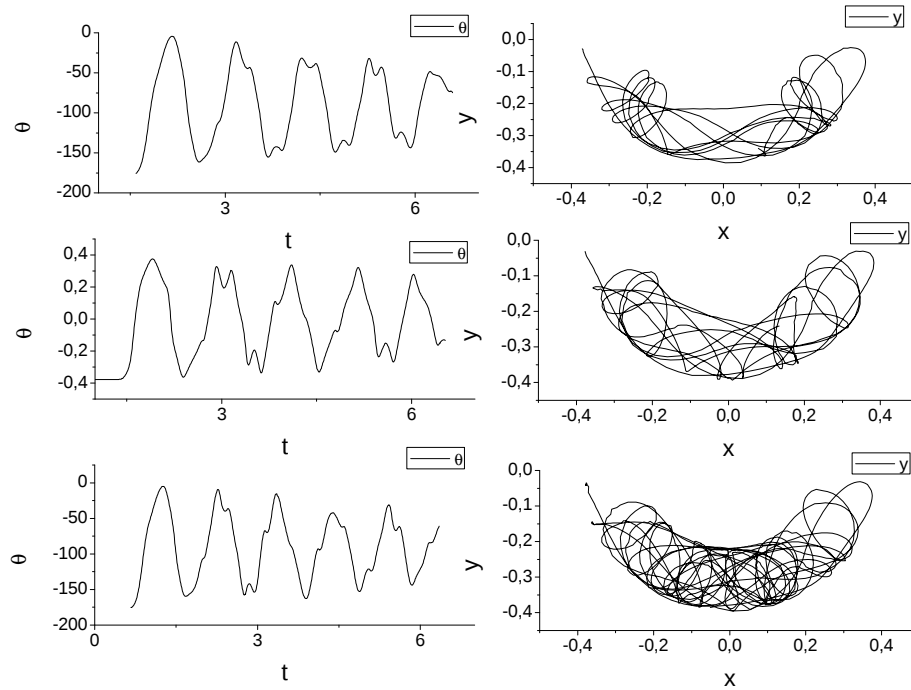


Figura 32: Gráficos da posição angular (θ) em função do tempo e das respectivas posições xy , obtidos a partir de três filmagens diferentes, tendo como ponto inicial h_6 . Fonte: Elaboração do autor

movimento imprevisível. Através dessa análise experimental foi possível verificar a sensibilidade das condições iniciais desse sistema.

Para finalizar essa discussão podemos levantar a seguinte questão: Qual das rotas mencionadas anteriormente conduz o pêndulo ao caos? Somos levados a inferir que é a rota de quase periodicidade, uma vez que ele aparenta um comportamento caótico, após a primeira duplicação de período. Entretanto, um estudo mais detalhado é necessário para responder a essa pergunta.

Através desse experimento que teve uma abordagem verificamos que um sistema simples, pode apresentar dinâmica caótica a medida que seus parâmetros são modificados. Ou seja, a Teoria do Caos pode ser aplicada em modelos que inicialmente apresentam dinâmica determinística, e não é exclusividade de fenômenos complexos.

Considerações Finais

Esse trabalho possibilitou uma visão mais ampla sobre a Teoria do Caos. De fato, o pouco contato que temos com esses tipos de fenômenos ao longo da graduação em Física, nos leva a falta de reflexão sobre a abordagem da Física Clássica. Como professores de Física, ter conhecimento sobre esses temas contemporâneos é fundamental para compreensão do mundo que nos cerca, pois dessa forma, conseguimos direcionar de forma correta o processo de ensino aprendizagem no âmbito acadêmico.

A história da Física contempla um universo de informações muito grande, desde os primeiros pensamentos científicos filosóficos, até as as mais modernas tecnologias já inventadas. Entretanto, nos restringimos a uma parte limitada de informações para conduzir de forma mais direta o rumo que deu início as primeiras ideias dos fenômenos caóticos.

Os modelos de dinâmica populacional e do estudo de gases atmosféricos, citados nesse trabalho, podem ser explorados de diversas formas, e apresentam uma variação de interpretações bem mais ampla do que aqui mostrada. Os exemplos qualitativos sobre onde o caos aparece teve como intenção despertar no leitor, situações reflexivas sobre a presença da Teoria do Caos nas nossas vidas

A experimentação foi importante para verificar os conceitos teóricos apresentados, como a duplicação de período, ponto de bifurcação e divergência de trajetórias com condições iniciais próximas. O recurso de videoanálise facilitou levantamento de dados, sendo um recurso relativamente barato e eficiente. Contudo, inicialmente tivemos algumas dificuldades com a preparação do sistema para estudo. Diversos testes tiveram que ser realizados até encontrarmos as condições "ótimas" para o experimento.

Atentamos para o fato de que esse experimento teve como intuito apenas de descrever a dinâmica caótica em um sistema simples. Em virtude disso, as análises foram feitas para curtos intervalos de tempo, uma vez que apesar da tentativa de redução do atrito, o sistema continuava a dissipar energia.

De forma geral, o objetivo do trabalho foi atingido. Essa abordagem dada ao experimento, pode servir de base para estudos futuros utilizando um sistema que possa repor as perdas de energia gerada pelo atrito (um pêndulo duplo forçado e amortecido, por exemplo).

Esperamos ter despertado o interesse inicial dos leitores por essa fascinante área da ciência, e contribuído para novas investigações dentro dessa área.

Referências

- ALVES, C. A. Teoria do caos e as organizações. *REA-Revista Eletrônica de Administração*, v. 6, n. 2, 2011. Citado na página [39](#).
- AMÂNCIO, A. R. Oscilador eletromagnético caótico. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2008. Citado na página [21](#).
- ANGOTTI, J. A. P. Conceitos unificadores e ensino de física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 15, n. 1, p. 191–198, 1993. Citado na página [16](#).
- AUBIN, D.; DALMEDICO, A. D. Writing the history of dynamical systems and chaos: longue durée and revolution, disciplines and cultures. *Historia mathematica*, Elsevier, v. 29, n. 3, p. 273–339, 2002. Citado na página [20](#).
- BIEZUNSKI, M. *História da física moderna*. [S.l.: s.n.], 1993. Citado 2 vezes nas páginas [19](#) e [20](#).
- BORGES, O. Formação inicial de professores de física: Formar mais! formar melhor! *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 2, p. 135–142, 2006. Citado na página [16](#).
- BROWN, D.; COX, A. J. Innovative uses of video analysis. *The Physics Teacher*, AAPT, v. 47, n. 3, p. 145–150, 2009. Citado na página [46](#).
- DAVIDSON, G. *The Damped Driven Pendulum: Bifurcation Analysis of Experimental Data*. Tese (Doutorado) — Reed College, 2011. Citado 2 vezes nas páginas [9](#) e [44](#).
- FERRARI, P. C. et al. Temas contemporâneos na formação docente a distância: uma introdução à teoria do caos. Florianópolis, SC, 2008. Citado 4 vezes nas páginas [15](#), [16](#), [17](#) e [20](#).
- FERREIRA, B. B.; PAULA, A. S. de; SAVI, M. A. Controle de caos na dinâmica dos ritmos cardíacos. 2010. Citado na página [31](#).
- FILHO, J. B. B. Causalidade,(in) determinismo e (im) previsibilidade. por que o conceito de causa é tao importante? *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 30, n. 3, p. 3304, 2008. Citado na página [32](#).
- FILHO, J. de P. A. Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático. *Caderno brasileiro de ensino de Física*, v. 17, n. 2, p. 174–188, 2000. Citado na página [47](#).
- GLEICK, J. et al. *Caos: a construção de uma nova ciência*. [S.l.: s.n.], 1989. Citado na página [31](#).
- HILBORN, R. C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2000. Citado 11 vezes nas páginas [8](#), [9](#), [23](#), [26](#), [28](#), [29](#), [30](#), [35](#), [36](#), [39](#) e [41](#).

HORIKAWA, A. Y. A formação de professores: Perspectiva histórica e concepções. *DOCENTE*, p. 11, 2015. Citado na página 15.

HOWESÝ, R. H. Desenvolvimento de uma força-tarefa nacional sobre educação em física na graduação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, n. 4, 2000. Citado na página 16.

JR, A. G. B. et al. Videoanálise com o software livre tracker no laboratório didático de física: movimento parabólico e segunda lei de newton. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 29, p. 469–490, 2012. Citado na página 47.

JR, O. P. Filosofia da física clássica. *Notas de aula da disciplina de Filosofia da Física, Universidade de São Paulo, 2014a*. Online: <http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/FiFi-14.htm>, 2010. Citado na página 19.

JÚNIOR, T. W. Caos: a criação de uma nova ciência? *RAE-Revista de Administração de Empresas*, v. 33, n. 4, p. 94–105, 1993. Citado na página 32.

LEITÃO, L. I.; TEIXEIRA, P. F. D.; ROCHA, F. S. d. A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, Buenos Aires, SciELO Argentina*, v. 6, n. 1, p. 18–21, 2011. Citado na página 45.

MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas à física*. [S.l.]: Editora UEPG, 2004. Citado na página 42.

MELLO, G. N. d. Formação inicial de professores para a educação básica: uma (re) visão radical. *São Paulo em perspectiva*, SciELO Brasil, v. 14, n. 1, p. 98–110, 2000. Citado na página 15.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: 2-Fluidos, oscilações e ondas, calor 5. ed.* [S.l.: s.n.], 2014. Citado na página 42.

OLIVEIRA, F. A. d. *Uso e divulgação do software livre Tracker em aulas de física do ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa "física moderna e contemporânea no ensino médio". *Investigações em ensino de ciências. Porto Alegre. Vol. 5, n. 1 (jan./abr. 2000)*, p. 23–48, 2000. Citado na página 16.

PATY, M. A noção de determinismo na física e seus limites. *Scientiae Studia*, v. 2, n. 4, p. 465–492, 2004. Citado na página 18.

PIRES, A. S. *Evolução das Idéias da Física*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

SHAW, G. O simples e o complexo na educação científica: da ciência à formação docente. *Revista de Educação do Vale do São Francisco-REVASF*, v. 1, n. 1, p. 65–a, 2010. Citado na página 17.

SILVEIRA, F. L. da. Determinismo, previsibilidade e caos. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 10, n. 2, p. 137–147, 1993. Citado na página 19.

STEWART, I. *Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos*. [S.l.]: Zahar, 1991. Citado 8 vezes nas páginas 8, 17, 18, 20, 31, 32, 35 e 36.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. Citado 11 vezes nas páginas 8, 9, 24, 25, 33, 34, 36, 37, 38, 41 e 42.

VANDERLEI, L. C. M. et al. Noções básicas de variabilidade da frequência cardíaca e sua aplicabilidade clínica. *Revista Brasileira de Cirurgia Cardiovascular/Brazilian Journal of Cardiovascular Surgery*, SciELO Brasil, v. 24, n. 2, p. 205–217, 2009. Citado na página 31.

VILLATE, J. E. Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com máxima. 2011. Citado na página 37.

ZABALA, A.; ARNAU, L. *Como aprender e ensinar competências*. [S.l.]: Penso Editora, 2015. Citado na página 15.