



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ANA ALICE DE SOUSA VIANA

**GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: potencialidades para o ensino da
matemática**

TERESINA

2024

ANA ALICE DE SOUSA VIANA

GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: potencialidades para o ensino da
matemática

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção do
diploma do Curso de Licenciatura Plena em Matemática
do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Piauí, Campus Teresina Central.

Orientador: Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves

TERESINA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Viana, Ana Alice de Sousa

V614g Geometria fractal no ensino médio : potencialidades para o ensino da
matemática / Ana Alice de Sousa Viana. - 2024.
60 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina
Central, 2024.

Orientador : Prof Dr. Ezequias Matos Esteves .

1. Ensino Médio. 2. Currículo de Matemática. 3. Fractais de
autossemelhança exata. I.Título.

CDD - 510

Elaborado por Maria Rosismar Farias CRB 3/631

ANA ALICE DE SOUSA VIANA

GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: potencialidades para o ensino da
matemática

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção do
diploma do Curso de Licenciatura Plena em Matemática
do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Piauí, Campus Teresina Central.

Aprovada em: 25/09/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Antonio Evangelista Ferreira Filho
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Profª. Dra. Luzia Áurea Bezerra Albano Barbosa
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Para Sherlock, meu amigo felino, que me ensinou sobre dedicação e responsabilidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao corpo docente e servidores do IFPI Campus Teresina Central por todas as contribuições a minha formação profissional. Agradeço também às minhas colegas e aos meus colegas de curso e de instituição por todo o apoio e incentivo ao longo desses anos.

RESUMO

A Geometria Fractal é um campo recente da matemática que se propõe a estudar a geometria da natureza, considerada "sem forma" pela Geometria Euclidiana, que recebe maior ênfase no currículo da Educação Básica. Caracterizando-se como qualitativa de caráter exploratório, a presente pesquisa objetivou analisar como a Geometria Fractal pode ser abordada no Ensino Médio e contribuir para o ensino de conteúdos já previstos no currículo. A partir de levantamento bibliográfico acerca da evolução da Geometria Fractal, suas características e aspectos dos fractais de autossimilaridade exata Conjunto de Cantor, Poeira de Cantor, Curva e Ilha de Koch, Esponja de Menger, e Triângulo e Tapete de Sierpinski, foram evidenciadas características destes que se relacionam com conteúdos previstos no currículo de Matemática e suas Tecnologias, e elaborando, por fim, sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas em turmas de Ensino Médio. Dentre as habilidades previstas para a etapa do Ensino Médio na área de matemática, foram identificadas quatro habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que abrem margem para o estudo da Geometria Fractal. Além disso, evidenciou-se que os fractais de autossimilaridade exata destacados nesse estudo são construídos a partir de figuras e sólidos da Geometria Euclidiana, o que permite o seu estudo partindo de conhecimentos prévios dos alunos. Dessa forma, é possível estudar as relações geométricas dos fractais de autossimilaridade exata (comprimento, perímetro, área e volume) a partir de conhecimentos que os alunos já construíram a respeito de objetos euclidianos. O estudo da Geometria Fractal, quando assim realizado, oportuniza a revisão e reforço de conteúdos da etapa do Ensino Fundamental e o desenvolvimento de um pensamento matemático mais complexo, objetivo da etapa do Ensino Médio como estabelece a BNCC. Nessa perspectiva, a Geometria Fractal tende a potencializar o ensino da matemática, aguçando o pensar matemático dos alunos e os sensibilizando à abrangência dessa área do conhecimento.

Palavras-chave: ensino médio; currículo de matemática; fractais de autossimilaridade exata.

ABSTRACT

Fractal Geometry is a recent field of mathematics that aims to study the geometry of nature, considered "formless" by Euclidean Geometry, which receives greater emphasis in the Basic Education curriculum. Characterized as qualitative and exploratory in nature, this research aimed to analyze how Fractal Geometry can be approached in High School and contribute to the teaching of contents already provided in the curriculum. From a bibliographic survey on the evolution of Fractal Geometry, its characteristics and aspects of the exact self-similarity fractals Cantor Set, Cantor Dust, Koch Curve and Island, Menger Sponge, and Sierpinski Triangle and Carpet, characteristics of these that relate to contents provided in the Mathematics and its Technologies curriculum were highlighted, and finally, suggestions of activities that can be developed in High School classes were elaborated. Among the skills expected for the High School stage in the area of mathematics, four skills from the National Common Curricular Base (BNCC) were identified that open up space for the study of Fractal Geometry. Furthermore, it was shown that the fractals of exact self-similarity highlighted in this study are constructed from figures and solids of Euclidean Geometry, which allows their study based on students' prior knowledge. In this way, it is possible to study the geometric relations of self-similarity fractals (length, perimeter, area and volume) based on knowledge that students have already constructed regarding Euclidean objects. The study of Fractal Geometry, when carried out in this way, provides an opportunity to review and reinforce content from the Elementary School stage and to develop a more complex mathematical thinking, which is the objective of the High School stage as established by the BNCC. From this perspective, Fractal Geometry tends to enhance the teaching of mathematics, sharpening students' mathematical thinking and making them aware of the scope of this area of knowledge.

Keywords: high school; mathematics curriculum; self-similarity fractals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Romanesco.....	19
Figura 2	– Raios elétricos.....	20
Figura 3	– Floco de Neve.....	20
Figura 4	– Esponja de Menger.....	21
Figura 5	– As cinco primeiras etapas da Curva de Koch.....	23
Figura 6	– As cinco primeiras etapas da Ilha de Koch.....	24
Figura 7	– As quatro primeiras etapas da Esponja de Menger.....	25
Figura 8	– As quatro primeiras etapas do Conjunto de Cantor.....	27
Figura 9	– As cinco primeiras etapas da Poeira de Cantor.....	27
Figura 10	– As cinco primeiras etapas do Triângulo de Sierpinski.....	28

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Relações geométricas do Conjunto de Cantor.....	36
Tabela 2	–	Relações geométricas da Poeira de Cantor.....	37
Tabela 3	–	Relações geométricas da Ilha de Koch.....	39
Tabela 4	–	Relações Geométricas da Esponja de Menger.....	40
Tabela 5	–	Relações Geométricas do Triângulo de Sierpinski.....	42
Tabela 6	–	Relações Geométricas do Tapete de Sierpinski.....	43

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

U.A. Unidade de área

U.C. Unidade de comprimento

U.V. Unidade de volume

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	JUSTIFICATIVA.....	15
1.2	OBJETIVOS.....	15
1.2.1	Objetivo geral.....	15
1.2.2	Objetivos específicos.....	16
1.3	METODOLOGIA.....	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1	EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL	18
2.2	CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS.....	19
2.2.1	Autossemelhança	20
2.2.2	Dimensão fractal.....	21
2.2.3	Complexidade infinita.....	22
2.3	EXEMPLOS DE FRACTAIS DE AUTOSSEMELHANÇA EXATA.....	23
2.3.1	Curva e Ilha de Koch.....	23
2.3.2	Esponja de Menger.....	25
2.3.3	Conjunto e Poeira de Cantor.....	26
2.3.4	Triângulo e Tapete de Sierpinski.....	28
2.4	GEOMETRIA FRACTAL NA SALA DE AULA.....	29
2.4.1	Geometria Fractal no Ensino Médio.....	31
3	ANÁLISE TEÓRICA E DISCUSSÃO	33
3.1	A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO DE ACORDO COM A BNCC.....	33
3.2	RELAÇÕES ENTRE FRACTAIS DE AUTOSSEMELHANÇA EXATA E	34

	O CURRÍCULO DO ENSINO MÉDIO DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS.....	
3.3	RELAÇÕES GEOMÉTRICAS DE FRACTAIS DE AUTOSSEMELHANÇA EXATA A PARTIR DE ELEMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA.....	36
3.3.1	Relações geométricas do Conjunto e da Poeira de Cantor.....	36
3.3.2	Relações geométricas das Curvas de Koch.....	38
3.3.3	Relações geométricas da Esponja de Menger.....	40
3.3.4	Relações geométricas do Triângulo e do Tapete de Sierpinski.....	41
3.4	PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA.....	44
3.4.1	Sequência didática de Geometria Fractal.....	45
3.4.2	Aula de introdução à Geometria Fractal.....	45
3.4.3	Atividades com o Conjunto e a Poeira de Cantor.....	46
3.4.4	Atividades com as Curvas de Koch e o Triângulo de Sierpinski.....	46
3.4.5	Atividades com o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger.....	46
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
	REFERÊNCIAS.....	49
	APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE GEOMETRIA FRACTAL.....	50
	APÊNDICE B – ATIVIDADE 01 – COMPRIMENTO DO CONJUNTO DE CANTOR.....	54
	APÊNDICE C – ATIVIDADE 02 – ÁREA DA POEIRA DE CANTOR.....	55
	APÊNDICE D – ATIVIDADE 03 – PERÍMETRO DA ILHA DE KOCH.....	56
	APÊNDICE E - ATIVIDADE 04 – ÁREA DO TRIÂNGULO DE	57

SIERPINSKI.....

APÊNDICE F - ATIVIDADE 05 - ÁREA DO TAPETE DE 58
SIERPINSKI.....

APÊNDICE G - ATIVIDADE 06 - VOLUME DA ESPONJA DE 59
MENGER.....

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa tem como tema o ensino de Geometria Fractal na disciplina de matemática. A Geometria Fractal é um objeto de estudo recente na matemática, surge propriamente formalizada no fim do século XX, e ainda não chegou aos cursos de formação inicial de professores, que trabalham majoritariamente a Geometria Euclidiana.

A Geometria Fractal, conhecida como a geometria da natureza, está presente em diversos padrões, como nas estruturas das plantas, nas ramificações dos raios elétricos, na fisiologia animal, nas formações de nuvens e nas ramificações de bacias hidrográficas, entre outros. Essa área da matemática se propõe a estudar formas que a Geometria Euclidiana tradicionalmente considera como “sem forma”. A inclusão da Geometria Fractal no ambiente escolar é uma abordagem enriquecedora, pois fomenta o espírito investigativo dos estudantes, estimula sua sensibilidade e criatividade, além de reforçar a compreensão de que a matemática está intimamente ligada à realidade, oferecendo explicações para seus diversos aspectos.

Dessa forma, surge a seguinte questão: como a Geometria Fractal pode ser abordada na educação básica, com ênfase no ensino médio, e de que forma essa abordagem pode contribuir para o estudo de conteúdos já estabelecidos no currículo dessa etapa educacional?

Seguindo essa perspectiva, a Geometria Fractal como objeto de estudo pode se estabelecer como uma forma de enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, garantindo um maior engajamento dos estudantes para aproximá-los da disciplina e incentivá-los a se dedicarem ao seu estudo.

O trabalho com Geometria Fractal pode influenciar direta e positivamente na motivação dos alunos para se engajarem com tópicos já presentes no currículo se abordada em contraposição às propriedades da Geometria Euclidiana. Pode também ser estudada em caráter interdisciplinar junto a outras disciplinas como a Física e a Biologia. Espera-se que ao entrar em contato com os chamados “casos patológicos” e “monstros da matemática”, os fractais, os estudantes possam aprimorar a própria visão de mundo, não só desenvolvendo a habilidade de lidar com o aspecto lógico e rigoroso da matemática, mas também estando, a partir de então, atentos e preparados para identificar os padrões e características das diversas manifestações da natureza, consolidando uma experiência significativa que deverá não somente ter influência dentro do contexto próprio da formação acadêmica de cada um, mas também nos mais diversos âmbitos de suas vidas.

Neste trabalho, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre a evolução da

Geometria Fractal, de suas características e propriedades elementares, além de um estudo dos fractais de autossimilaridade exata Conjunto e Poeira de Cantor, Curva e Ilha de Koch, Esponja de Menger, Triângulo e Tapete de Sierpinski para evidenciar aspectos que se relacionam com o currículo de matemática do Ensino Médio. A partir desse estudo, foram elaboradas sugestões de atividades para o ensino médio, que tem como objeto os fractais anteriormente citados e trabalham conteúdos já previstos no currículo desse nível de ensino.

1.1 JUSTIFICATIVA

A Geometria Fractal é um campo de estudo relativamente novo. Caracteriza-se como uma geometria que se configura em um nível de complexidade totalmente diferente daquele da Geometria Euclidiana, pois estuda os padrões encontrados nas manifestações da natureza e nas construções que por muito tempo foram consideradas “casos patológicos” e “monstros da matemática” e rejeitadas.

A abordagem da Geometria Fractal quando feita na última etapa da Educação Básica tem o potencial para motivar os estudantes a se dedicarem ao estudo da matemática por conta de suas características singulares e, por seu objeto de estudo se constituir de manifestações que podem ser vistas e, muitas vezes, manipuladas, para promover mudanças na percepção de mundo dos alunos, desenvolvendo suas capacidades de investigação e de identificação de padrões matemáticos.

Dessa forma, esta pesquisa foi realizada na perspectiva de contribuir para a divulgação da Geometria Fractal, para que mais docentes possam conhecê-la e integrá-la às suas práticas. Tal integração tem potencial para promover um impacto positivo na formação dos discentes ao motivá-los no estudo da matemática, aprimorando suas visões de mundo, desenvolvendo suas capacidades investigativas e de identificação de padrões, habilidade matemática tão estimada, e contribuindo para o aprimoramento da qualidade do ensino público e consequentemente da vida em sociedade.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Analisar como a Geometria Fractal pode ser abordada no ensino médio e como pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos previstos no currículo.

1.2.2 Objetivos específicos

- Realizar levantamento bibliográfico sobre a Geometria Fractal, suas características e as propriedades elementares dos fractais de autossimilaridade exata Conjunto e Poeira de Cantor, Curva e Ilha de Koch, Esponja de Menger, Triângulo e Tapete de Sierpinski;
- Evidenciar aspectos dos fractais de autossimilaridade exata que se relacionam com conteúdos previstos no currículo de Matemática e suas Tecnologias da Base Nacional Comum Curricular;
- Sugerir atividades de Geometria Fractal que podem ser desenvolvidas no Ensino Médio;
- Contribuir para a divulgação das potencialidades do ensino de Geometria Fractal no ensino básico no meio acadêmico.

1.3 METODOLOGIA

A presente pesquisa teve por intuito descobrir como a Geometria Fractal pode ser abordada no Ensino Médio de forma a trabalhar conteúdos já previstos no currículo dessa etapa de ensino. Para isso, a pesquisa se faz em três etapas: primeiro, fez-se um levantamento bibliográfico da história, das propriedades e características da Geometria Fractal; segundo, a partir das informações pesquisadas, realizou-se uma análise dos fractais de autossimilaridade exata Conjunto e Poeira de Cantor, Curva e Ilha de Koch, Triângulo e Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger, citados por Mandelbrot em seu livro de 1975 e construídos a partir de objetos da Geometria Euclidiana, para evidenciar características que se relacionam com competências e habilidades do currículo de Matemática e suas Tecnologias da Base Nacional Comum Curricular; e, por fim, a partir da análise de tais fractais, elaboraram-se propostas de atividades para o Ensino Médio que têm como objeto de estudo a Geometria Fractal.

As atividades com Geometria Fractal deverão ser capazes de contribuir para o fortalecimento da noção de que a matemática pode explicar a realidade em seus múltiplos aspectos, sensibilizando os alunos e aguçando sua criatividade, promovendo uma visão mais ampla e integral da matemática e seus objetos de estudo. Deverão também contribuir para uma aprendizagem significativa, que encorajará os estudantes a continuarem seus estudos, despertando o interesse pela matemática e pelas outras ciências.

A presente pesquisa se caracteriza como de abordagem qualitativa pois se ocupa de

“aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais” (Gerhardt & Silveira, 2009), uma vez que se propõe a investigar as características dos fractais e relacioná-las com os conteúdos previstos no currículo de Matemática e suas Tecnologias (BNCC) para o Ensino Médio. Além disso, possui caráter exploratório, pois se apoia em trabalhos científicos já publicados e se preocupa em compreender aspectos da realidade, buscando proporcionar maior familiaridade com o tema da pesquisa (Gil, 2008).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL

A Geometria Fractal, diferente da Geometria Euclidiana, que foi organizada pelo matemático grego Euclides na sua obra *Os Elementos*, escrita em Alexandria cerca de 2300 anos atrás, foi formalizada no ano de 1975 por Benoit B. Mandelbrot (1924-2010). Contudo, algumas das formas de fractais estudadas hoje já eram vistas há muito tempo (Mandelbrot et al, 1988, pp. 2).

Segundo Filho (2015, pp. 20-31), George Cantor apresentou o conjunto que leva seu nome em 1883, considerado como "uma das mais antigas construções denominadas patológicas encontradas na matemática". Em 1890, Giuseppe Peano apresentou uma curva que "preenche o plano e passa por todos os pontos de uma determinada área". Para outro exemplo, em 1891, David Hilbert publicou uma curva de preenchimento quadrangular. Já em 1904, Niels Fabian Helge Von Koch publicou a Curva e a Ilha que levam o seu nome, sendo a ilha construída a partir de um triângulo equilátero a partir do padrão usado para construir a Curva. Podemos também citar Karl Menger, que em 1926 apresentou a Esponja de Menger, explorando o conceito de dimensão topológica, entre outros.

A mais recente contribuição — e talvez a mais importante — para a evolução da Geometria Fractal, é a de Mandelbrot, já citado anteriormente. O matemático francês foi o responsável por cunhar o termo “fractal” e por agregar as características dos fractais em uma obra, o livro *The Fractal Geometry of Nature* de 1975. Em seu livro, ele discorre sobre a dimensão, simetria e divergência dos fractais, além dos objetos fractais de Cantor, Peano, Koch, Sierpinski e Menger, entre outras ideias afins.

Para Mandelbrot (1983), vários padrões da Natureza são tão irregulares e fragmentados, que, comparados com a Geometria Euclidiana, a Natureza exhibe não um nível mais alto, mas sim todo um nível diferente de complexidade.

A existência desses padrões nos desafia a estudar aquelas formas que a Geometria Euclidiana deixa de lado como "sem forma", para investigar a morfologia dos "amorfos". Os matemáticos têm desprezado esse desafio, contudo, e cada vez mais escolhido se afastar da natureza estudando teorias sem relação com nada que podemos ver ou sentir (Mandelbrot, 1983, pp.40, tradução própria).

Para o autor, os fractais se apresentam como um desafio pois vão na contra-mão dos objetos da Geometria Euclidiana e isso desencoraja seu estudo por parte dos matemáticos. De fato, os fractais possuem características que levam a uma total reconsideração das mais elementares noções estabelecidas pela Geometria Euclidiana e esses aspectos em vez de incitar a curiosidade podem, pelo contrário, desencorajar o seu estudo.

2.2 CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS

O neologismo "fractal", cunhado por Mandelbrot em 1975, vem do adjetivo *fractus* do Latim. Tem como correspondente o verbo *frangere*, que significa "quebrar, criar fragmentos irregulares" (Mandelbrot, 1983, pp. 48, tradução própria). Em um sentido técnico “um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original” (Miranda et al, 2008, pp.1).

Os fractais podem ser encontrados na natureza, como no padrões das nuvens, nos raios elétricos, na fisiologia animal, nos padrões de flocos de neve, entre outras manifestações naturais. Ademais podem ser artificialmente construídos através de sequências como o Conjunto de Cantor, a Curva e a Ilha de Koch e a Esponja de Menger, entre outros. As Figuras 1, 2 e 3 abaixo apresentam, respectivamente, um Romanesco, que possui padrões fractais, raios elétricos captados na natureza e flocos de neve.

Figura 1 – Romanesco



Fonte: Site Garden Mania.¹

¹ Disponível em: <<https://www.gardenmania.com.br/sementes-de-couve-flor-romanesco-meia-estacao>>. Acesso em: 20 set. 2024.

Figura 2 – Raios elétricos



Fonte: Site Sistel Energia Confiável.²

Figura 3 - Flocos de Neve



Fonte: Fotografia de Aaron Burden (2016).³

As principais características que determinam um objeto como fractal são a autossemelhança, a dimensão fractal e a complexidade infinita.

2.2.1 Autossemelhança

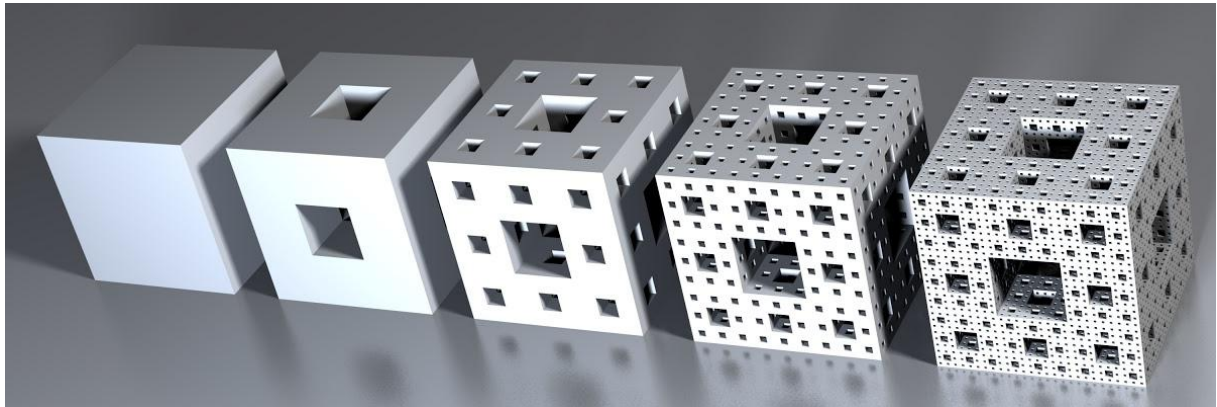
A autossemelhança dos fractais é a ideia chave trazida no seu conceito técnico. É

² Disponível em: <<https://sistelenergiaconfiavel.com.br/raios-como-protoger-sua-casa-e-equipamentos/>>. Acesso em: 20 set. 2024.

³ Autor: Aaron Burdern. Licenciado por Unplash. Disponível em: <<https://unsplash.com/pt-br/fotografias/foto-focada-de-um-floco-de-neve-5AiWn2U10cw>>. Acesso em: 21 set. 2024.

exatamente a invariância na forma do objeto mesmo com a mudança da escala utilizada para a sua análise, ou seja, independente da complexidade da figura sua estrutura ainda será idêntica à original. Na figura 4 abaixo, são apresentadas as quatro primeiras etapas da construção da Esponja de Menger, que é construída a partir de um cubo.

Figura 4 - Esponja de Menger



Fonte: Site Epsilones.⁴

Além disso, como aponta Daga (2017, pp. 8), existem dois tipos de autossemelhança para os fractais: a aproximada e a exata. A autossemelhança aproximada é a que encontramos nas manifestações da natureza, pois por mais que os elementos da estrutura sejam idênticos, quando ampliados para análise se percebe que não são réplicas perfeitas; enquanto que a autossemelhança exata é aquela alcançada apenas através de algoritmos.

2.2.2 Dimensão Fractal

Para entender a dimensão dos fractais, é interessante partir de uma noção já bem conhecida — as dimensões da Geometria Euclidiana (comprimento, largura e altura). A ideia mais intuitiva da dimensão na Geometria Euclidiana corresponde ao número mínimo de coordenadas que são necessárias para se especificar a localização de cada ponto de um objeto. Nesta geometria, um ponto tem dimensão 0, uma linha tem dimensão 1, uma superfície tem dimensão 2 e um espaço tem dimensão 3; que são números inteiros positivos. Isso não acontece na Geometria Fractal, que pode apresentar não só números inteiros como também números fracionários, que determinam o nível de rugosidade de um fractal.

⁴ Disponível em: <<https://www.epsilones.com/material/curvas/035-esponja-menger-sec-m.jpg>>. Acesso em: 21 set. 2024.

De acordo com Daga (2017, pp. 9-10), utilizando-se a relação de Hausdorff-Besicovitch, é possível realizar o cálculo da dimensão dos objetos fractais através da seguinte fórmula:

$$D = \frac{\log n}{\log \frac{1}{R}}$$

Nessa equação, D representa a dimensão de Hausdorff-Besicovitch do fractal, $\log n$ é o logaritmo natural de n , que é o número de partes geradas no fractal, seu nível de complexidade e $\log \left(\frac{1}{R}\right)$ é o logaritmo do inverso de R , que é o fator de redução do fractal, ou seja, o número de vezes em que o padrão do fractal foi repetido.

Esta definição de dimensão para fractais é uma generalização para o conceito que temos de dimensão da Geometria Euclidiana. Por exemplo, se um segmento de reta de comprimento L é dividido em n pedaços iguais de comprimento h , temos que o número de partes geradas n é $n = \frac{L}{h}$ e o fator de redução R é $R = \frac{h}{L}$. Consequentemente, pela definição dada acima, uma reta tem dimensão $D = \frac{\log n}{\log \left(\frac{1}{R}\right)} = \frac{\log \left(\frac{L}{h}\right)}{\log \left(\frac{L}{h}\right)} = 1$, como seria de se esperar. De forma análoga, mostra-se que a dimensão de um quadrado é 2 e de um cubo é 3. Portanto, para figuras geométricas usuais a definição dada acima coincide com o conceito intuitivo de dimensão euclidiana. Mas ela tem a grande vantagem de ser utilizável em situações menos usuais e intuitivas.

2.2.3 Complexidade infinita

A complexidade infinita dos fractais diz respeito à sua construção. Aos objetos fractais, é possível adicionar infinitos detalhes através da repetição do mesmo procedimento.

[...] o processo de geração de uma figura, definida como fractal decorre da mesma figura encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado. Vale esclarecer que no caso da construção iterativa de um fractal matematicamente definido, dispõe-se de um número infinito de procedimentos a serem executados gerando-se assim uma estrutura infinitamente complexa. (Filho, 2015, pp. 50-51)

Em suma, o detalhamento da estrutura de um fractal não diminui, é sempre possível torná-lo mais complexo.

2.3 EXEMPLOS DE FRACTAIS DE AUTOSSEMELHANÇA EXATA

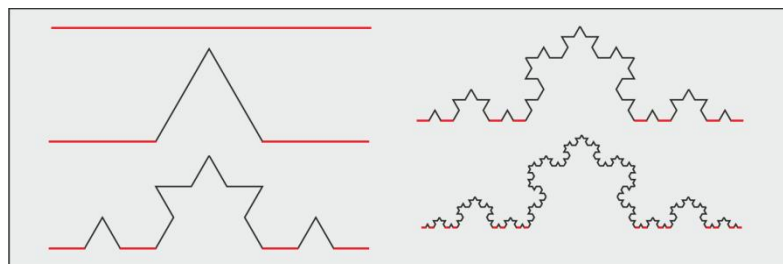
No livro *The Fractal Geometry of Nature* (1975), Mandelbrot se ocupa não somente de apresentar as características dessa nova geometria, como também de discutir trabalhos de outros matemáticos que apresentam autossemelhança, dimensão fractal e complexidade infinita. Dentre os fractais trazidos pelo autor, se destacam aqueles que são construídos a partir de objetos da Geometria Euclidiana: Curva e Ilha de Koch, Esponja de Menger, Conjunto e Poeira de Cantor e Triângulo e Tapete de Sierpinski.

Como exposto anteriormente na seção 2.2.1, fractais de autossemelhança exata são aqueles que são construídos a partir de padrões artificiais, ou seja, de algoritmos. Os fractais que serão apresentados a seguir possuem autossemelhança exata e são construídos a partir de objetos da Geometria Euclidiana.

2.3.1 Curva e Ilha de Koch

Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924), matemático sueco, publicou as curvas que levam seu nome em 1904. A primeira delas é chamada Curva de Koch e tem como ponto de partida um segmento de reta qualquer, com medida considerada unitária. Esse segmento é então dividido em 3 segmentos congruentes e, utilizando-os como marcadores, construímos um triângulo equilátero em cada segmento central suprimindo a base. Repete-se o processo para cada novo segmento como mostrado na figura 5 abaixo.

Figura 5 – As cinco primeiras etapas da Curva de Koch



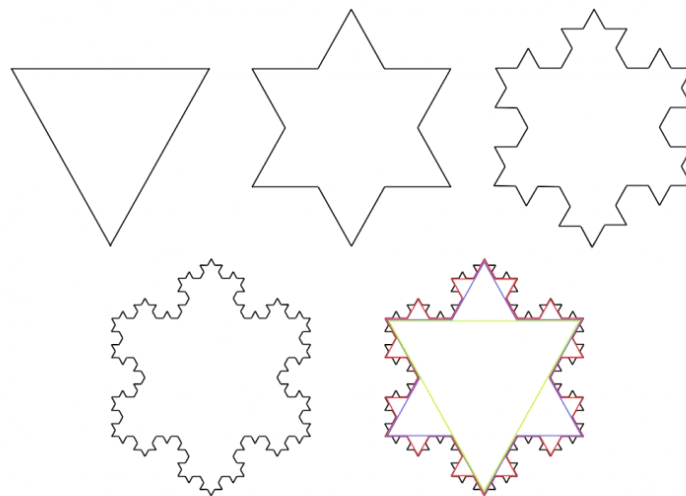
Fonte: Página “Koch curve from Cantor sets (paradox)” no site Mathematics Stack Exchange.⁵

⁵ Disponível em: <<https://math.stackexchange.com/questions/3005409/koch-curve-from-cantor-sets-paradox>>. Acesso em: 21 set. 2024.

É fácil calcular a dimensão da Curva de Koch, graça à sua autossimilaridade. Como em cada etapa, cada parte é transformada em $n = 4$ partes e o fator de redução é $R = \frac{1}{3}$, então pela fórmula de Hausdorff-Besicovitch para dimensão do fractal concluímos que a dimensão da Curva de Koch é $D = \frac{\log n}{\log \left(\frac{1}{R}\right)} = \frac{\log (4)}{\log (3)} \cong 1,26$. Note que a dimensão não é um número inteiro positivo.

A Ilha de Koch, também chamada de Floco de Neve de Koch, tem um ponto de partida diferente da Curva. Para construí-la, começamos com um triângulo equilátero, estabelecendo com antecedência que os lados tenham 1 unidade de medida. Divide-se então cada lado do triângulo em 3 segmentos congruentes, posteriormente construindo triângulos equiláteros que tenham o segmento central de cada lado, segmentos que medem $\frac{1}{3}$ do lado, como base, suprimindo-o em sequência. Repete-se o processo com cada triângulo equilátero formado e está construída a Ilha de Koch, como mostrado na figura 6 abaixo.

Figura 6 - As cinco primeiras etapas da Ilha de Koch



Fonte: Site NRICH Millenium Mathematics Project.⁶

As especificidades da Ilha de Koch permitem a análise das relações entre o número correspondente a cada etapa da construção, o número de lados, a medida de cada lado e o perímetro total.

Na primeira etapa, a etapa de número zero, se tem um triângulo equilátero e determina-se que a medida de seus lados seja unitária. Na segunda etapa, etapa de número 1,

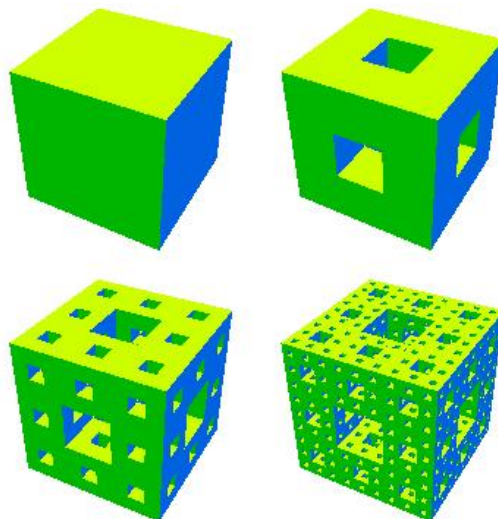
⁶ Disponível em: <<https://nrich.maths.org/problems/koch-snowflake>> Acesso em: 21. set. 2024.

constroem-se triângulos equiláteros de lado com medida $\frac{1}{3}$, e a cada lado é adicionado um novo triângulo resultando em 4 novos lados substituindo cada lado do triângulo original. Assim, para a etapa de ordem n , tem-se que o número de lados é dado pelo produto de 3 pela potência de 4 elevado a n e a medida do comprimento de cada lado é dada pela divisão de 1 pela potência de 3 elevado a n . O perímetro - ou o comprimento - da Ilha é dado pelo produto do número de lados pela medida de cada lado, que são iguais, uma vez que todos os lados são congruentes. Veja seção 3.3.1 que trata das relações geométricas das Curvas de Koch.

2.3.2 Esponja de Menger

Karl Menger apresentou a Esponja que leva seu nome em 1926. A construção da esponja começa a partir de um cubo totalmente sólido/preenchido, que pode ter lado medindo 1 unidade de comprimento, denominada fase 0, com nenhuma parte fractal gerada. Conforme ilustrado na Figura 7 abaixo, a primeira etapa consiste de dividir cada face do cubo em nove quadrados e retirar todos os cubos centralizados em cada face e o cubo central. A nova figura desta primeira fase é formada por 20 cubos menores resultante da retirada dos 7 cubos do total dos 27 formados da decomposição do cubo original.

Figura 7 - As quatro primeiras etapas da Esponja de Menger



Fonte: Site de Robert Dickau.⁷

⁷ Autor: Robert Dickau. Disponível em: <<https://www.robertdickau.com/sponge.html>>. Acesso em: 22. set. 2024.

O processo segue indefinidamente, conforme mostrada nas duas etapas seguintes apresentadas na Figura 7 acima. Em relação ao volume de cada cubo, a cada etapa cada novo cubo tem $\frac{1}{27}$ do volume dos cubos anteriores. O volume total da Esponja, que tende a zero, é resultado do produto do número de cubos pelo volume unitário dos cubos, já que são todos congruentes.

Para a primeira etapa, o cubo sólido original passa a ser formado por 27 cubos menores e desses são removidos o cubo central de cada face e o cubo central do cubo maior, retirando-se 7 no total, restando 20 cubinhos. Na segunda etapa, cada cubo anterior se transforma em $27 - 7$ cubos e assim por diante. Em relação ao volume de cada cubo, a cada etapa, cada novo cubo tem $\frac{1}{27}$ do volume do cubo anterior. O volume da Esponja em cada fase é resultado do produto do número de cubos pelo volume unitário dos cubos, já que são todos congruentes. O volume total da esponja tende a zero quanto mais avançada a fase.

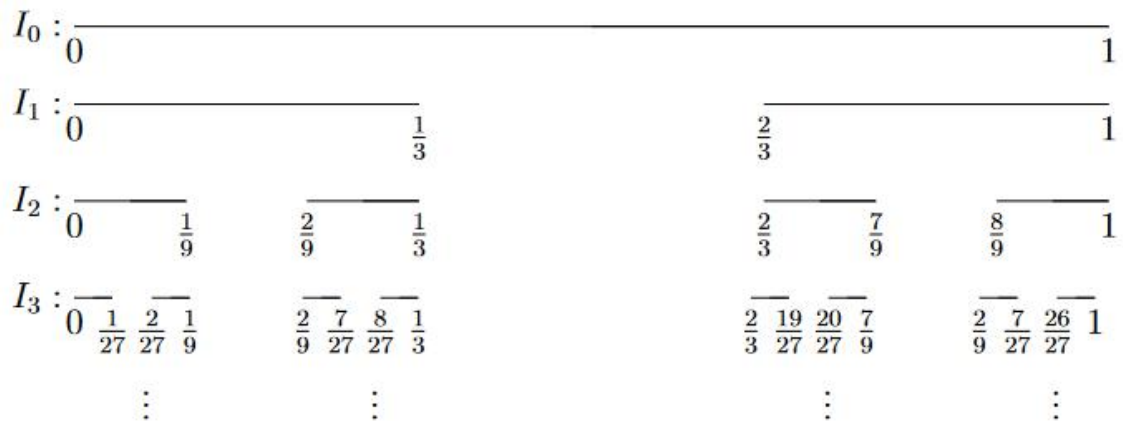
2.3.3 Conjunto e Poeira de Cantor

O russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) apresentou dois objetos que são construídos a partir objetos da Geometria Euclidiana, mas que possuem características fractais. Esses objetos são o Conjunto de Cantor e a Poeira de Cantor.

O Conjunto de Cantor é construído a partir de um segmento de reta com 1 unidade de comprimento (fase 0 de geração do fractal). Para a fase 1 de geração, o segmento é dividido em 3 segmentos menores congruentes (de mesma medida) e o segmento central (terço médio) é retirado da construção. Com esse processo, restam na figura dois segmentos que têm comprimento igual a $\frac{1}{3}$ cada, fazendo, assim, com que a figura tenha comprimento igual a $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Na fase seguinte (fase 2), os dois segmentos gerados na fase anterior são subdivididos em três segmentos congruentes menores e o terço médio de cada um é retirado. Cada novo segmento tem medida igual a $\frac{1}{3}$ do segmento anterior, portanto, $\frac{1}{9}$. Como são ao todo quatro segmentos na fase 2, nessa fase a figura tem medida igual a $4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

A cada nova etapa, o Conjunto perde parte de seu comprimento e, a medida em que fica mais complexo, tem seu comprimento cada vez mais próximo de zero. A figura 8 abaixo apresenta as quatro primeiras etapas do Conjunto de Cantor.

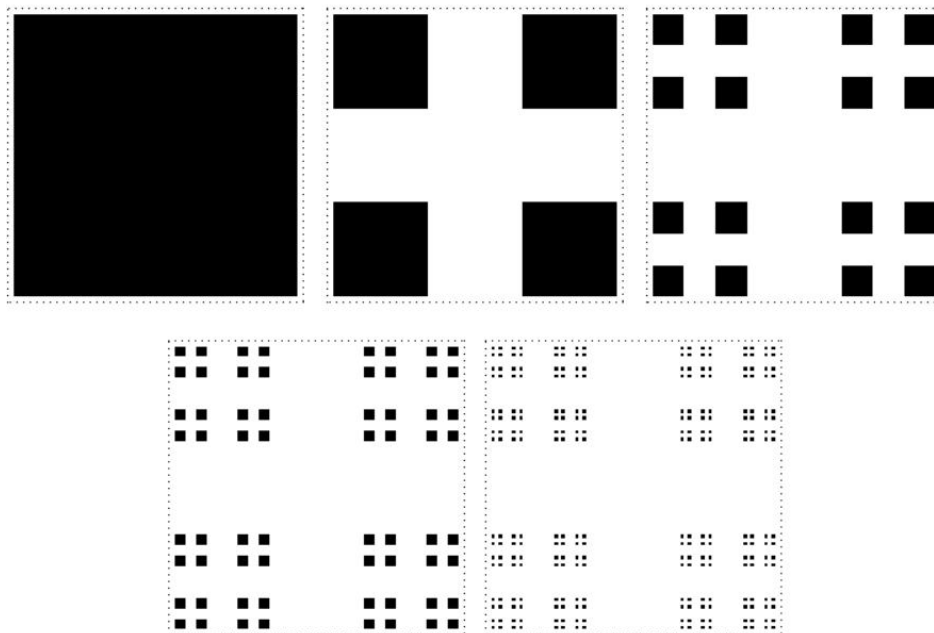
Figura 8 - As quatro primeiras etapas do Conjunto de Cantor



Fonte: Souza (2018).

A Poeira de Cantor, por sua vez, é construída a partir de um quadrado, também objeto conhecido da Geometria Euclidiana. A fase 0 é um quadrado de lado com medida igual a 1 unidade de comprimento, logo possui 1 unidade de área. Quando gerada a fase 1, o quadrado da fase 0 é dividido em 9 quadrados menores congruentes, sendo retirados o 2º, o 4º, o 5º, o 6º e o 8º, restando apenas os quadrados localizados nos cantos da figura. A figura 9 apresenta as cinco primeiras etapas da Poeira de Cantor.

Figura 9 - As cinco primeiras etapas da Poeira de Cantor



Fonte: Site de Robert Dickau.⁸

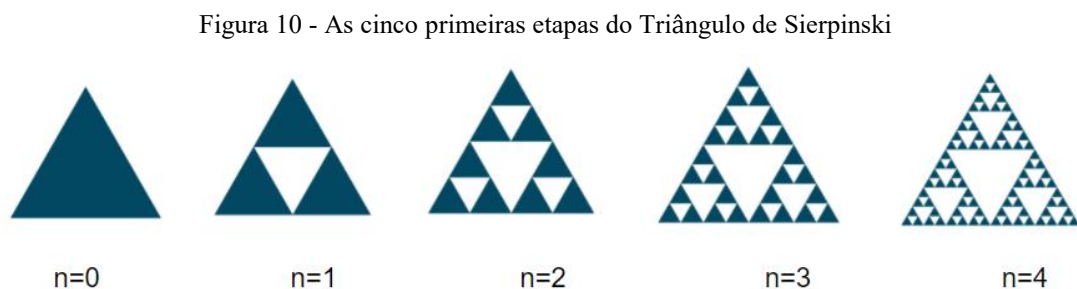
⁸ Disponível em: <<https://www.robertdickau.com/cantor.html>>. Acesso em: 22. set. 2024.

Cada novo quadrado tem medida de área igual a $\frac{1}{9}$ da medida da área do quadrado da fase anterior pois o lado mede um terço do lado do quadrado da etapa anterior. Semelhante ao que acontece com a Esponja de Menger, esse fractal tem a medida de sua área tendendo a zero à medida em que se torna mais complexo.

2.3.4 Triângulo e Tapete de Sierpinski

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) concebeu e apresentou dois objetos fractais que levam o seu nome e são construídos a partir de objetos da Geometria Euclidiana: o Triângulo e o Tapete de Sierpinski.

O Triângulo de Sierpinski, semelhante à Ilha de Koch, é construído a partir de um triângulo equilátero, porém em vez de se ocupar com os lados do triângulo, a construção é realizada retirando-se partes da superfície da figura. A construção começa com um triângulo de lado medindo 1 unidade de comprimento e área igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$ unidades de área⁹. Para a fase 1, o triângulo original terá os lados divididos pela metade e quatro novos triângulos serão formados a partir dessas divisões e o triângulo central será retirado, restando os três triângulos dos vértices do triângulo da fase anterior. Cada novo triângulo terá $\frac{1}{4}$ da área do triângulo anterior. As cinco primeiras etapas de construção do Triângulo de Sierpinski podem ser observadas na figura 10.



Fonte: Página “Fractalize: Modelagem Fractal nas Ciências e Engenharias” do site da Universidade Federal de Juiz de Fora.¹⁰

⁹ A área de um triângulo equilátero é dada pela fórmula $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde l é a medida do lado do triângulo.

¹⁰ Disponível em: <<https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/22/triangulo-de-sierpinski/>>. Acesso em: 22 set. 2024.

O Tapete de Sierpinski é o fractal que se obtém aplicando o padrão da Esponja de Menger em um quadrado. Dessa forma, esse fractal é construído a partir de um quadrado de lado medindo 1 unidade de comprimento e com área medindo 1 unidade de área, consequentemente. Para a fase 1 de geração do fractal, o quadrado da fase 0 será dividido em 9 quadrados menores congruentes, desses 9 o central será retirado, restando 8 quadrados. A área dos novos quadrados será igual a $\frac{1}{9}$ da área do quadrado da fase anterior. Esse processo se repete em cada novo quadrado e a cada fase a superfície da figura diminui, ou seja, a área da figura diminui indefinidamente, semelhante ao volume da Esponja. A construção desse fractal pode ser observada nas faces da Esponja de Menger na figura 7.

2.4. GEOMETRIA FRACTAL NA SALA DE AULA

A Geometria Fractal é um dos campos da matemática que estuda aquilo que a Geometria Euclidiana desconsidera. Nos momentos iniciais de qualquer curso de Geometria Euclidiana, as figuras não convexas e/ou não regulares são descartadas como objetos de estudo. A Geometria Euclidiana é a que está no currículo da educação básica e é também a que se estuda de forma majoritária nos cursos de formação inicial de professores.

[...] durante séculos os conceitos da Geometria Euclidiana e de toda a filosofia que envolve a matemática, foram os que melhor descreviam o mundo, porém, esses conceitos sempre esbarravam em situações que a geometria clássica não conseguia mensurar. Só com o advento da Geometria de Mandelbrot é que foi possível estruturar objetos que até então estavam à margem da geometria Euclidiana. (Filho, 2015, pp. 40)

Os fractais de autossimilaridade exata apresentam muitas características que podem ser abordadas na educação básica, trabalhando elementos dos diversos tópicos do currículo. Podem ser realizadas atividades que exploram os algoritmos para determinar área, perímetro e volume de objetos fractais de autossimilaridade exata, pode-se abordar sequências e progressões, também a própria geometria euclidiana no Floco de Neve de Koch, por exemplo, e até mesmo a introdução da noção de limite com o volume da Esponja de Menger, que à medida que se torna mais complexa, perde volume gradativamente, ou seja, seu volume tende a zero, entre outras possibilidades.

Para Carvalho (2005), a Geometria Fractal não pode ser classificada especificamente em nenhuma das diversas tendências em educação matemática e tentar fazê-lo seria limitar o potencial que ainda se está a explorar, pois é um campo de grande abrangência.

[...] a Geometria Fractal possui um caráter local e global ao mesmo tempo. Esta dualidade se revela quando é explorada para tentar facilitar/favorecer a aprendizagem de um tópico em específico, revelando sua acepção micro. Por outro lado, pode estar imbricada em/por entre um todo maior, uma espécie de "pano de fundo", assim como um tema transversal que deixa as especialidades livres para se intercomunicar em uma acepção macro. (Carvalho, 2005, pp. 77)

O autor ainda defende que é preciso considerar a matemática como uma ciência que avança junto com a sociedade, sendo para isso necessária uma constante reavaliação das prioridades para o seu ensino e desenvolvimento. Além disso, é essencial tornar o ensino tangível para os estudantes, de forma que assuma significado não somente no momento em que primeiro se engajam com o estudo, mas em qualquer que seja o nível de ensino em que estejam e também fora do contexto escolar, ao longo de suas vidas.

Uma geometria como a Fractal, presente em várias manifestações da natureza, apresenta uma miríade de possibilidades de abordagens, incentiva à continuidade dos estudos e promove uma mudança na percepção de mundo dos estudantes. Uma vez que tenham entrado em contato com os fractais e suas características, nunca mais olharão uma nuvem, um raio ou a imagem das ramificações da bacia de um rio da mesma maneira.

Dessa forma, a abordagem da Geometria Fractal, em sala de aula, em qualquer nível da educação básica, possui o potencial para instigar o interesse dos estudantes pela matemática e seus aspectos próprios, enquanto ciência, e pelas suas aplicações no mundo concreto, o que vai ao encontro do que a BNCC estabelece como 2ª competência geral da educação básica:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (Brasil, 2018, pp. 9).

O estudo da Geometria Fractal é um campo fértil para o desenvolvimento das competências estabelecidas na BNCC, ao passo que possibilita aos alunos o acesso a um

campo de estudo que se contrapõe às ideias convencionais da geometria e favorece o contato com figuras que instigam a curiosidade e desafiam os padrões lógicos estabelecidos, como, por exemplo, figuras espaciais com volume nulo.

2.4.1 Geometria Fractal no Ensino Médio

O Ensino Médio é a última etapa da educação básica, visando o preparo para a inserção na vida adulta, se volta para o aperfeiçoamento das habilidades e o desenvolvimento dos estudantes em diferentes aspectos. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9.394/96, define como finalidades do Ensino Médio: a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental; a preparação básica para o trabalho e a cidadania; o aprimoramento do educando como pessoa humana e a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos.

Na Educação Matemática de Ensino Médio

[...] os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (Brasil, 2018, pp. 47)

Essa etapa de ensino requer que o estudante amadureça a capacidade de abordar e encarar o mundo com uma atitude de caráter científico, com sensibilidade e criatividade. Aprendendo a aprender para levar a cabo o próprio contínuo processo de aperfeiçoamento enquanto pessoa humana.

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (Brasil, 1997, pp. 40)

Nestas perspectivas preconizadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela BNCC, o estudo da Geometria Fractal favorece o desenvolvimento de uma visão da matemática e da realidade além das possibilitadas pela Geometria Euclidiana. Favorece investigar padrões encontrados nas mais diversas manifestações da natureza e, ao mesmo tempo, possibilita a articulação dos conhecimentos já estudados na matemática com outras áreas do conhecimento, sempre despertando a curiosidade, a imaginação e a criatividade dos estudantes.

Em relação às características estritamente técnicas da Geometria Fractal, é possível trabalhar sequências e progressões geométricas, perímetro e áreas de figuras planas, logaritmos e introduzir a noção de limite entre outros conteúdos exigidos no currículo do Ensino Médio. Ademais, por conta de sua ampla abrangência,

A Geometria Fractal pode ser trabalhada de forma interdisciplinar nas escolas junto com as disciplinas de Matemática, Biologia, Geografia, Ciências Naturais e Artes com a finalidade de contextualizar os temas abordados em sala de aula. (Daga, 2017, pp. 7)

Dessa forma, trabalhar a Geometria Fractal na Educação Básica torna possível a aproximação das disciplinas através de atividades conjuntas, promovendo uma educação mais integrada e completa para os alunos. A abordagem interdisciplinar da Geometria Fractal pode fazê-los perceber que as disciplinas não são fechadas e acabadas em si mesmas, mas sim parte de um todo maior e que elas dialogam entre si.

3 ANÁLISE TEÓRICA E DISCUSSÃO

3.1 A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO DE ACORDO COM A BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da área de Matemática e suas Tecnologias, referente ao Ensino Médio, estabelece que essa etapa deve consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens desenvolvidas na etapa anterior. Para isso, se propõe a abordar os conhecimentos estudados no Ensino Fundamental de forma mais inter-relacionada, permitindo que os estudantes desenvolvam uma visão mais integrada da Matemática ainda em uma perspectiva de aplicação à realidade. (Brasil, 2018)

Diferente da etapa do Ensino Fundamental, essa etapa não tem suas habilidades organizadas por ano (6º ao 9º) e sim por suas relações com cada uma das cinco competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio:

Quadro 1 – Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias

1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
---	--

Fonte: Brasil (2018).

A Matemática do Ensino Médio deve se comprometer em aproveitar todo o potencial já constituído pelos estudantes no Ensino Fundamental, ampliando o letramento matemático¹¹. Para isso, novos conhecimentos específicos devem ser incorporados de forma a estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, dando sustentação para que os estudantes formulem e resolvam problemas de maneira mais autônoma utilizando diferentes recursos matemáticos (Brasil, 2018).

Nessa perspectiva, a BNCC preconiza que os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas para concretizar os propósitos anteriormente citados. Durante o processo de desenvolvimento dessas habilidades, os estudantes deverão ter como referência as habilidades já desenvolvidas no Ensino Fundamental, no que diz respeito ao raciocínio, à representação, à comunicação e argumentação, para atingirem novos níveis de complexidade do pensamento e do fazer matemático, sempre tendo como referência a realidade.

3.2 RELAÇÕES ENTRE FRACTAIS DE AUTOSSEMELHANÇA EXATA E O CURRÍCULO DO ENSINO MÉDIO DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

A Geometria Fractal não está explicitamente presente como objeto de conhecimento no currículo da Educação Básica em comparação com a Geometria Euclidiana, porém pode ser explorada de forma a desenvolver habilidades já previstas na Base Nacional Comum Curricular, em especial aquelas da área de Matemática e suas Tecnologias.

Os fractais gerados por algoritmos que os permitem atingir uma autossemelhança exata apresentam características que podem ser estudadas a partir de noções e fórmulas já desenvolvidas a partir do estudo da Geometria Euclidiana. Tal estudo pode explorar as noções de perímetro, área de figuras e volume de sólidos, além de reforçar o domínio das

¹¹ A BNCC define *Letramento Matemático* como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (Brasil, 2018).

propriedades da potenciação e operações com frações.

As habilidades da BNCC que podem justificar o estudo da Geometria Fractal são as habilidades EM13MAT105, EM13MAT307, EM13MAT309 e a EM13MAT313.

A habilidade EM13MAT105 diz respeito à construção de figuras e análise de elementos da natureza e de produções humanas e se destaca dentre as demais por explicitar a possibilidade de se estudar objetos fractais para desenvolvê-la (Brasil, 2018). Para essa habilidade pode-se considerar a construção (tanto plana quanto espacial) dos fractais clássicos para analisar seus elementos e características à luz dos conteúdos da Geometria Euclidiana, que são familiares aos alunos. Como os fractais que atingem uma autossimilaridade exata, é possível estudar seus perímetros e áreas além de seus volumes utilizando fórmulas conhecidas, bastando apenas subdividi-los em figuras ou sólidos já conhecidos.

A habilidade EM13MAT307 complementa a anteriormente citada, pois se refere ao emprego de diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície e dedução de expressões de cálculo (fórmulas) para aplicá-las em situações reais (Brasil, 2018). Dessa forma, pode ser realizado um trabalho para deduzir fórmulas que forneçam o perímetro, a área ou o volume de um objeto fractal independentemente da quantidade de partes fractais que foram geradas.

Na sequência, a habilidade EM13MAT309 indica a resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados) (Brasil, 2018). Para tanto, é possível explorar objetos que se assemelhem aos fractais para cálculo de materiais a serem utilizados em sua construção.

Por último, a habilidade EM13MAT313, tem por intenção utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro (Brasil, 2018). Esta pode ser desenvolvida a partir de problemas que envolvam o cálculo de perímetros, áreas ou volumes de fractais com grande número de partes fractais geradas em que seja necessário expressar tais medidas em notação científica por apresentarem muitas casas decimais.

Tendo em vista o exposto, é possível perceber que o currículo da área de Matemática e suas Tecnologias abre espaço para que se explore a Geometria Fractal na etapa do Ensino Médio. O trabalho com essa área da matemática pode ser um desafio interessante para os alunos, além de uma boa oportunidade para revisar e reforçar conteúdos vistos na etapa do

Ensino Fundamental, o que vai ao encontro do que preconiza a BNCC.

3.3 RELAÇÕES GEOMÉTRICAS DE FRACTAIS DE AUTOSSEMELHANÇA EXATA A PARTIR DE ELEMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Os fractais de autossimilaridade exata apresentam em suas constituições figuras e sólidos da Geometria Euclidiana. Para realizar seu estudo é interessante considerá-los como a união de triângulos, quadrados, cubos, entre outros.

3.3.1 Relações geométricas do Conjunto e da Poeira de Cantor

O Conjunto e a Poeira de Cantor são dois objetos fractais construídos a partir de figuras da Geometria Euclidiana. O primeiro é construído a partir de um segmento e o segundo a partir de um quadrado. Com esses dois fractais é possível explorar as noções de comprimento e área de figuras. A tabela 1 explora as relações geométricas do Conjunto de Cantor, enquanto que a tabela 2 explora as relações geométricas da Poeira de Cantor.

Tabela 1 - Relações Geométricas do Conjunto de Cantor

Fase de geração do fractal (n)	Nº de segmentos gerados	Comprimento de cada segmento (u. c)	Comprimento total do fractal (u. c)
0	1	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
...	...	...	...
n	2^n	$\frac{1}{3^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Fonte: autoria própria.

No Conjunto de Cantor, o número de segmentos a partir da fase 1 será sempre um múltiplo de 2, pois como cada segmento é subdividido em três segmentos menores e desses três retira-se o segmento central, sempre sobram dois segmentos. Assim, na fase 1 são gerados dois segmentos, na fase 2 são gerados quatro segmentos, na fase 3 são gerados oito segmentos e assim sucessivamente. Dessa forma, o número de segmentos na fase n é dado por 2^n . O comprimento dos segmentos em cada fase será dado pela fórmula $\frac{1}{3^n}$, pois cada novo segmento terá comprimento igual a $\frac{1}{3}$ do segmento anterior. Para conseguir a fórmula que fornece o comprimento total do Conjunto de Cantor basta multiplicar a expressão que fornece o número de segmentos na fase n pela expressão que fornece o comprimento de cada segmento na mesma fase, ou seja, $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Tabela 2 - Relações Geométricas da Poeira de Cantor

Fase de geração do fractal (n)	Nº de quadrados gerados	Área dos quadrados (u.a)	Área total do fractal (u.a)
0	1	1	1
1	4	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	16	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{81}$
3	64	$\frac{1}{729}$	$\frac{64}{729}$
...	...	...	...
n	4^n	$\frac{1}{9^n}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^n$

Fonte: autoria própria.

A Poeira de Cantor é construída a partir de um quadrado de lado medindo 1 unidade de comprimento. Quando construída a fase 1, o quadrado da fase 0 é dividido em 9 quadrados

congruentes e retiram-se os quadrados do centro de cada linha e cada coluna, inclusive o quadrado central, restando somente os quatro quadrados adjacentes aos vértices do quadrado anterior. Assim, cada quadrado se tornará quatro novos quadrados quando ocorrer a mudança de fase. Na fase 0, temos um quadrado; na fase 1, temos 4 quadrados; na fase 2, temos 16 quadrados e assim sucessivamente, ou seja, o número de quadrados em uma determinada fase será dado pela enésima potência de 4 (4^n).

Como cada quadrado é dividido em nove quadrados congruentes, a área de cada novo quadrado gerado será igual a $\frac{1}{9}$ da área do quadrado anterior. Dessa forma, na fase 1, a área de cada quadrado será igual a $\frac{1}{9}$ unidades de área; na fase 2, a área de cada quadrado será $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ e assim por diante. Em suma, a área de cada quadrado será dada pela expressão $\frac{1}{9^n}$.

Para expressar a relação que fornece a área total do fractal na enésima fase de geração, basta multiplicar a expressão que fornece o número de quadrados gerados pela expressão que fornece a área de cada um deles na enésima fase, ou seja, $4^n \cdot \frac{1}{9^n} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

3.3.2 Relações geométricas das Curvas de Koch

Como exposto anteriormente, as Curvas (ou Ilha) de Koch são figuras planas que são construídas a partir de triângulos equiláteros. A construção se inicia a partir de um único triângulo equilátero. Para gerar o primeiro nível basta dividir cada um dos lados do triângulo em três segmentos congruentes, e, então, tomar cada um dos segmentos centrais de cada lado como o lado de um novo triângulo equilátero, menor que o anterior. Esse procedimento pode ser repetido indefinidamente e a cada nova repetição, a Ilha se assemelha cada vez mais a um floco de neve.

Esse fractal é formado a partir de uma figura conhecida da Geometria Euclidiana, o que permite o estudo de suas relações geométricas. Na tabela 1 abaixo, são detalhadas as quatro primeiras fases da Ilha e, a partir delas, identificada a regularidade para o número de lados, suas medidas e perímetro da Ilha, apresenta-se uma fórmula matemática que pode determinar cada uma dessas relações para qualquer fase do fractal.

Tabela 3 - Relações Geométricas da Ilha de Koch

Fase da geração do fractal (n)	Número de lados	Medida do lado (u.c)	Perímetro/comprimento total da Ilha (u.c)
0	3	1	3
1	12	$\frac{1}{3}$	4
2	48	$\frac{1}{9}$	$48 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$
3	192	$\frac{1}{27}$	$192 \cdot \frac{1}{27} = \frac{64}{9}$
...	...	...	...
n	$3 \cdot 4^n$	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{4^n}{3^{n-1}}$

Fonte: autoria própria.

Para esse fractal em específico, o número de lados sempre será um múltiplo de 3, pois constrói-se a partir de um triângulo, também será um múltiplo de 4, pois cada lado transforma-se em quatro novos lados à medida que a figura se torna mais complexa. De forma geral, o número de lado sempre será dado por uma potência de 4 multiplicada por 3, ou seja, $3 \cdot 4^n$. Em relação à medida de cada lado, temos que cada um deles será dividido em três segmentos congruentes, então da fase 0 para a fase 1 o lado original será dividido em segmentos de $\frac{1}{3}$ de unidade de comprimento, da fase 1 para a fase 2, o que antes era um segmento de $\frac{1}{3}$ serão três segmentos de $\frac{1}{9}$ de unidade de comprimento e assim por diante. Dessa forma, a medida do lado em qualquer uma das fases será dada pelo inverso de uma

potência de 3, ou seja, $\frac{1}{3^n}$.

Por fim, para determinar o perímetro da Ilha, basta multiplicar o número de lados pela respectiva medida em cada fase e tendo como referência as duas fórmulas anteriores, temos:

$$3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{3 \cdot 4^n}{3^n} = \frac{4^n}{3^{-1} \cdot 3^n} = \frac{4^n}{3^{n-1}}$$

3.3.3 Relações geométricas da Esponja de Menger

A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo, um sólido geométrico euclidiano. Quando estudando suas relações geométricas, é possível analisar a regularidade no cubo, sólido da Geometria Euclidiana. O estudo da Esponja considera o número de cubos, o volume de cada um e o volume total do fractal.

Na Tabela 4 são apresentadas as relações geométricas da Esponja de Menger, onde são correlacionados a fase de geração do fractal com a quantidade de cubos gerados, o volume de cada cubo e o volume total do fractal.

Tabela 4 – Relações geométricas da Esponja de Menger

Fase da geração do fractal (n)	Número de cubos	Volume dos cubos (u.v)	Volume total da Esponja (u.v)
0	1	1	1
1	20	$\frac{1}{27}$	$\frac{20}{27}$
2	400	$\frac{1}{729}$	$\frac{400}{729}$
3	8000	$\frac{1}{19683}$	$\frac{8000}{19683}$

...	...	...	...
n	20^n	$\frac{1}{3^{3n}}$	$\frac{20^n}{3^{3n}} = \left(\frac{20}{27}\right)^n$

Fonte: autoria própria.

A Esponja de Menger surge a partir de um cubo, a cada fase, o cubo é dividido em nove cubos menores e retiram-se o cubo menor central e os cubos menores centrais de cada face. Na sequência, o processo é repetido em cada novo cubo. O cubo da fase 0 é dividido em 27 cubos menores dos quais se retiram 7, sobram 20. Cada um dos 20 é dividido em 27 cubos menores dos quais se retiram 7, sobrando 20, então cada cubo será substituído por 20 cubos menores. Assim, o número de cubos de uma fase qualquer será dado por uma potência de 20, ou seja, 20^n .

Quando da passagem de uma fase para a outra, cada cubo é dividido em 27 cubos menores. O volume unitário da fase 0 é 1 unidade de volume, na fase 1 é $\frac{1}{27}$, na fase 2 é $\frac{1}{27 \cdot 27} = \frac{1}{729}$ e assim sucessivamente. Deste modo, pode-se concluir que o volume unitário de cada cubo em uma determinada fase será dado pelo inverso de uma potência de 27, sendo a expressão que fornece esse volume como mostrado a seguir:

$$\frac{1}{27^n} = \frac{1}{(3^3)^n} = \frac{1}{3^{3n}}$$

Por fim, o volume total da Esponja em cada fase será dado pelo produto do número de cubos pelo volume de uma unidade:

$$\frac{20^n}{3^{3n}} = \left(\frac{20}{27}\right)^n$$

3.3.4 Relações geométricas do Triângulo e do Tapete de Sierpinski

Os fractais de autossimilaridade exata de Sierpinski são construídos respectivamente a partir de um triângulo equilátero e de um quadrado, que são objetos da Geometria Euclidiana.

Na tabela 5 são apresentadas as relações geométricas do Triângulo de Sierpinski, em que se relaciona a fase de geração do fractal com o número de triângulos gerados, a medida do lado dos triângulos, a área dos triângulos e a área total do fractal.

Tabela 5 - Relações Geométricas do Triângulo de Sierpinski

Fase de geração do fractal	Nº de triângulos gerados	Medida do lado dos triângulos (u.c)	Área dos triângulos (u.a)	Área total do fractal (u.a)
0	1	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$
2	9	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	$\frac{9\sqrt{3}}{64}$
3	27	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{256}$	$\frac{27\sqrt{3}}{256}$
...	...	...	...	...
n	3^n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$	$\frac{3^n\sqrt{3}}{4^{n+1}}$

Fonte: autoria própria.

O Triângulo de Sierpinski, como exposto anteriormente, é construído a partir de um triângulo equilátero. Na fase 1, o triângulo da fase 0 é subdividido em quatro triângulos equiláteros congruentes e retira-se o triângulo central. Como cada triângulo se torna em três

triângulos menores a cada fase, o número de triângulos em cada fase a partir da fase 1 será um múltiplo de 3, especificamente uma potência de 3. Na fase 1, temos 3 triângulos; na fase 2 temos $3 \cdot 3 = 9$ triângulos; na fase 3, temos $9 \cdot 3 = 27$ triângulos; e assim indefinidamente, ou seja, na n -ésima fase, teremos 3^n triângulos.

Cada novo triângulo tem $\frac{1}{4}$ da área do triângulo anterior. Nesse sentido, na fase 1, a área de cada triângulo será um quarto de $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (ver nota de rodapé na página 28 que apresenta a fórmula da área de um triângulo equilátero), ou seja $\frac{\sqrt{3}}{16}$; na fase 2, será $\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{64}$; e assim sucessivamente. Portanto, é fácil notar que a área de cada triângulo será dada pela fórmula $\frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$.

No que diz respeito à área total do fractal, basta multiplicar a expressão que fornece o número de triângulos pela expressão que fornece a área de cada um deles na n -ésima fase:

$$3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} = \frac{3^n \sqrt{3}}{4^{n+1}}$$

A tabela 6 apresenta as relações geométricas do Tapete de Sierpinski, destacando, em cada fase, o número de quadrados gerados, a área de cada quadrado e a área total do fractal.

Tabela 6 - Relações geométricas do Tapete de Sierpinski

Fase da geração do fractal (n)	Número de quadrados gerados	Área dos quadrados gerados (u.a)	Área total do tapete (u.a)
0	1	1	1
1	8	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
2	64	$\frac{1}{81}$	$\frac{64}{81}$
3	512	$\frac{1}{729}$	$\frac{512}{729}$

...	...	...	...
n	8^n	$\frac{1}{9^n}$	$\frac{8^n}{9^n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

Fonte: autoria própria.

No Tapete de Sierpinski, a construção se inicia a partir de um quadrado de lado medindo 1 unidade de comprimento (u. c). O quadrado é dividido, então, em nove quadrados menores e deles retira-se o do centro. O processo é repetido em cada um dos novos quadrados menores.

Para determinar o número de quadrados em cada fase, basta perceber que cada quadrado será sempre dividido em nove quadrados menores e desses será retirado um quadrado, sobrando 8. O número de quadrados será sempre um múltiplo de 8, mais especificamente uma potência de 8 (8^n), pois da fase 0 para a fase 1 teremos 8 quadrados, da fase 1 para a 2 teremos $8 \cdot 8 = 64$ e assim sucessivamente.

No diz respeito à área de cada quadrado, basta dividir a área anterior pela quantidade de quadrados gerados, e como a quantidade de quadrados gerada é múltipla de 9, teremos que a expressão será o inverso de uma potência qualquer de 9 ou seja, $\frac{1}{9^n}$.

A área total de cada fase do fractal será dada pelo produto do número de quadrados gerados pela respectiva área do quadrado da fase. Dessa forma, a expressão da área total do fractal será:

$$8^n \cdot \frac{1}{9^n} = \frac{8^n}{9^n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

3.4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

As relações geométricas levantadas anteriormente podem ser trabalhadas em sala de aula com alunos de nível médio. Nessa etapa, os alunos devem ter a capacidade de identificar a regularidade em cada um dos objetos fractais e generalizá-las através de fórmulas atendendo ao que preconiza a BNCC, que determina que o Ensino Médio deve ser uma etapa para maior abstração e reflexão. Essa atividade também serve para revisar e reforçar conteúdos da etapa anterior (Ensino Fundamental).

3.4.1 Sequência didática de Geometria Fractal

A Geometria Fractal não está prevista como objeto de conhecimento na BNCC, ainda que seja citada em uma das habilidades previstas no currículo de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT105). A partir do levantamento e análise teórica realizada nesta pesquisa, elaborou-se como proposta de atividade uma sequência didática de Geometria Fractal voltada para o Ensino Médio. A sequência é iniciada com uma aula introdutória sobre essa geometria, abordando sua evolução e características dos seus objetos de estudo, seguida por 6 aulas de estudo de fractais de autossimilaridade exata divididas em três momentos: estudo do Conjunto e da Poeira de Cantor; estudo do Triângulo de Sierpinski e da Ilha de Koch; e estudo do Tapete de Sierpinski e da Esponja de Menger. A ideia central dessa sequência didática é possibilitar que os alunos aprendam Geometria Fractal a partir do que já conhecem da Geometria Euclidiana à medida em que evidenciam as semelhanças e as diferenças entre as duas.

As atividades foram organizadas por nível de dificuldade, trabalhando primeiro comprimento de segmentos e área de quadrados, depois perímetro de figuras e área de triângulos equiláteros e, por último, área de quadrados e volume de cubos. Em especial, optou-se por trabalhar o Tapete de Sierpinski com a Esponja de Menger porque o padrão de construção dos dois fractais é o mesmo.

3.4.2 Aula de introdução à Geometria Fractal

Antes de iniciar o estudo dos fractais clássicos propriamente ditos, é imprescindível que a Geometria Fractal seja apresentada para os alunos. A aula introdutória deve apresentar a evolução histórica desta geometria, as contribuições dos estudiosos envolvidos em seu avanço e as características específicas que os fractais possuem. Em especial, essa introdução deve ser feita comparando a Geometria Fractal com a Geometria Euclidiana para que os alunos percebam os aspectos em que elas divergem, pois o estudo deve ser realizado partindo de algo familiar e já bastante explorado por eles.

A aula introdutória não precisa necessariamente ser sucedida no mesmo dia pelas aulas seguintes, pode ser realizada em um primeiro encontro e as demais em outro momento.

3.4.3 Atividades com o Conjunto e a Poeira de Cantor

As atividades com o Conjunto e com a Poeira de Cantor devem ser feitas em duas aulas, preferencialmente em sequência, no mesmo dia. As folhas de atividades a serem entregues aos alunos foram disponibilizadas nos Apêndices B e C, respectivamente.

Primeiramente, os alunos deverão construir as 4 primeiras etapas de cada um dos fractais para entenderem como funcionam as etapas de construção e possam perceber qual regularidade rege cada grandeza apresentada na tabela. Em posse dessas informações, deverão, então, preencher as lacunas nas tabelas para conseguir traduzir tais regularidades em expressões matemáticas que forneçam as informações destacadas para qualquer fase de geração dos fractais.

3.4.4 Atividades com as Curvas de Koch e o Triângulo de Sierpinski

As atividades com a Ilha de Koch e com o triângulo de Sierpinski podem ser feitas em duas partes, desenvolvidas em duas aulas preferencialmente, no mesmo dia e em sequência. As folhas de atividades a serem entregues aos alunos estão detalhadas nos Apêndices D e E.

No primeiro momento, os estudantes deverão construir as 4 primeiras etapas da Ilha para que se familiarizem com o objeto, identificando sua regularidade. Depois, na sequência, deverão coletar informações a respeito do número de lados, as medidas desses lados e o comprimento/perímetro total da Ilha e identificar o padrão dessas relações e a partir dele desenvolver uma fórmula para cada uma delas e que sirva a qualquer etapa da Ilha.

Com o Triângulo de Sierpinski não é diferente. Os alunos deverão construir as quatro primeiras etapas do fractal para aprender sobre sua regularidade e o padrão que rege cada uma das grandezas apresentadas na tabela de relações geométricas. A partir disso, deverão ser capazes de traduzir tais regularidades em expressões matemáticas que fornecerão os valores para qualquer fase de construção do fractal.

3.4.5 Atividades com o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger

A proposta de atividade com o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger é semelhante às atividades anteriores. Essa atividade também será em 2 partes, em duas aulas, preferencialmente em sequência. As folhas de atividades propostas estão detalhadas nos Apêndices F e G.

Na primeira parte, os estudantes deverão construir as 4 primeiras etapas do Tapete de Sierpinski. Na sequência, deverão coletar informações a partir das construções que realizaram e preencher uma tabela que pede as relações entre cada etapa e o número de quadrados correspondente a quantidade de quadrados, a área desses quadrados e a área total do fractal; feito isso deverão identificar o padrão presente em cada uma das relações e a partir dele desenvolver uma fórmula para cada uma delas e que sirva a qualquer etapa do Tapete.

Para a segunda parte, os alunos podem receber uma impressão com imagens da Esponja de Menger ou podem construir as primeiras fases e, a partir disso, perceberem a regularidade de construção da Esponja. Com essas regularidades em mente, os alunos deverão preencher a tabela de relações geométricas da Esponja de Menger e realizar uma generalização das expressões que encontraram para as fases.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria Fractal é uma geometria que começou a ser estudada muito recentemente em contraposição à Geometria Euclidiana, que é estudada desde a antiguidade e está prevista no currículo da Educação Básica. A primeira se caracteriza como a geometria da natureza, se propondo a estudar objetos que a Euclidiana descarta por serem “sem forma”.

Os fractais são objetos de complexidade infinita e autossimilaridade, apresentando uma regularidade específica que se repete indefinidamente. Em especial, em relação a esta última, existem os fractais de autossimilaridade não exata, os encontrados na natureza, e os de autossimilaridade exata, que são determinados a partir de algoritmos. Essa geometria chama a atenção e tem potencial para sensibilizar a percepção de quem se propõe a estudá-la e pode ser um trunfo no ensino de matemática no Ensino Médio.

A Base Nacional Comum Curricular não traz os elementos da Geometria Fractal como objeto de conhecimento, mas algumas habilidades podem ser desenvolvidas a partir do estudo dessa geometria, em especial as habilidades EM13MAT105, EM13MAT307, EM13MAT309 e a EM13MAT313 do currículo de Matemática e suas Tecnologias (etapa do Ensino Médio).

Alguns fractais de autossimilaridade exata (Conjunto e Poeira de Cantor, Curva e Ilha de Koch, Esponja de Menger, Triângulo e Tapete de Sierpinski entre outros) são compostos por formas da Geometria Euclidiana e esse aspecto possibilita o seu estudo a partir destas. Como no processo de aprendizagem é interessante partir de conhecimentos prévios para se iniciar a construção de novos conhecimentos, é possível estudar as relações geométricas de fractais de autossimilaridade exata a partir de formas euclidianas em sala de aula. O estudo quando assim realizado oportuniza a revisão e reforço de conteúdos da etapa do Ensino Fundamental e o desenvolvimento de um pensamento matemático mais complexo, objetivo da etapa do Ensino Médio como estabelece a BNCC.

Nessa perspectiva, a Geometria Fractal tende a potencializar o ensino da matemática, aguçando o pensar matemático dos alunos e os sensibilizando à abrangência dessa área do conhecimento.

A presente pesquisa se preocupou em analisar como a Geometria Fractal pode ser abordada no Ensino Médio e como pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos previstos no currículo, porém o estudo sobre o ensino dessa geometria não se encerra com ela. Outras pesquisas podem ser realizadas investigando a abordagem no Ensino Fundamental dentro do currículo da própria matemática ou de outras disciplinas ou até mesmo de forma interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. **Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. 2. ed. Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica: Brasília, 1997, pp. 40.
- CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005, pp. 64-78.
- DAGA, M. S. **Uma Análise da Geometria Fractal**. 2017. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Ciências Naturais) - Faculdade UnB Planaltina, Universidade de Brasília, Brasília, 2017, pp. 8-12.
- FILHO, J. R. F. **Geometria fractal: da natureza para a sala de aula**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2015, pp. 20-31, 50-51.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009, pp. 32.
- MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. 3. ed. Nova Iorque: W.H. Freeman and Company, 1983, pp. 40, 48.
- MANDELBROT, B. B. et al. **The Science of Fractal Images**. 1. ed. Nova Iorque: Springer-Verlag New York Inc, 1988, pp. 2.
- MIRANDA, J. G. V. et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, 2008, pp.1.
- SOUZA, P. E. **Um Estudo do Conjunto de Cantor e Aplicações**. 2018. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2018.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE GEOMETRIA FRACTAL

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: GEOMETRIA FRACTAL

Tema: As semelhanças e diferenças entre Geometria Euclidiana e Geometria Fractal.

Série: 1º ano do Ensino Médio.

Conteúdos Prévios: Elementos de Geometria Euclidiana (plana e espacial): elementos e propriedades de polígonos, cálculo de área de polígonos, elementos e propriedades de sólidos, cálculo de volume de sólidos.

Conteúdos: Evolução histórica da Geometria Fractal; características dos fractais (autossemelhança, dimensão fractal e complexidade infinita); fractais de autossemelhança exata de destaque.

Habilidades BNCC:

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivos de aprendizagem:

- Compreender o processo histórico do desenvolvimento da Geometria Fractal;
- Identificar as características dos fractais (autossemelhança, dimensão fractal e complexidade infinita);
- Explorar as características do Conjunto e da Poeira de Cantor, das Curvas de Koch, do Triângulo e do Tapete de Sierpinski e da Esponja de Menger, fractais de autossemelhança exata;
- Perceber as diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Fractal e a importância destas para a Matemática e para a sociedade.

Organização da turma: Individual para a aula 1 e duplas para as demais.

Tempo de aula: 7 aulas de 50 minutos.

Recursos: Listas de atividades (Conjunto de Cantor, Poeira de Cantor, Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger), retroprojektor, slides para apresentação, quadro de acrílico, folhas A4, caderno, pincéis coloridos para folha de papel, régua, caneta e lápis para anotações.

Desenvolvimento:

Aula 1 (Introdução à Geometria Fractal):

1. Iniciar discussão sobre a geometria trabalhada na Educação Básica. Professor, questione a respeito do objeto de estudo dessa geometria, questione o quão abrangente ela é em relação aos fenômenos da realidade. Relembre os estudantes sobre regularidade e convexidade, características centrais no estudo da Geometria Euclidiana. Incentivar os alunos para que façam anotações das ideias abordadas nesta 1ª aula e nas seguintes.
2. Apresentar imagens de nuvens, folhas de plantas, bacias hidrográficas de rios, raios elétricos e flocos de neve entre outros. Questionar aos alunos se a geometria que eles conhecem estuda tais fenômenos da natureza. Peça aos alunos para que identifiquem as características semelhantes dos objetos das imagens.
3. Apresentar a definição de Geometria Fractal e abordar sua evolução histórica em comparação com a da Geometria Euclidiana, citando os matemáticos que a estudaram, incentivando a reflexão acerca do que caracteriza os fractais (autossemelhança, dimensão fractal e complexidade infinita). Para tratar da complexidade infinita, utilize imagens de algumas obras do artista holandês M. C. Escher, se assim o desejar. Exemplificar aplicações da Geometria Fractal: na medicina, na hidrografia, etc.
4. Questionar aos alunos se a autossemelhança nos fractais da natureza é exata e, caso concluam que não é, questioná-los se é possível alcançar autossemelhança exata a partir de algoritmos. Apresentar, então, os fractais clássicos a serem estudados: Curvas de Koch e Esponja de Menger.
5. Encerrar com uma síntese dos tópicos e ideias abordadas na aula e comentar a respeito das atividades que serão propostas nas aulas seguintes e que tem como objetivo fazer com os alunos percebam a diferença no nível de complexidade entre as duas geometrias.

Aulas 2 e 3:

1. Iniciar a aula apresentando as atividades propostas (Apêndice B e C que correspondem ao Conjunto e à Poeira de Cantor, respectivamente), estabelecendo contrato didático com os alunos para que estas sejam completamente realizadas até o fim da aula.
2. Relembrar os conceitos-chave da aula introdutória e iniciar discussão acerca das características, se semelhantes ou divergentes, das Geometrias Euclidiana e Fractal.
3. Distribuir as folhas A4 e as listas de atividades entre as duplas e orientar os alunos na realização da atividade.
4. Com as atividades realizadas, iniciar uma breve discussão acerca dos elementos de Geometria Fractal e dos elementos de Geometria Euclidiana que os alunos trabalharam na atividade e incentivá-los para que compartilhem suas percepções a respeito deles. Encerrar a aula com uma síntese do que foi trabalhado até o momento e comentar sobre a atividade da aula seguinte.

Aulas 4 e 5:

1. Iniciar a aula apresentando as atividades propostas (Apêndices D e E que correspondem à Ilha de Koch e ao Triângulo de Sierpinski, respectivamente), estabelecendo contrato didático com os alunos para que estas sejam completamente realizadas até o fim da aula.
2. Relembrar as discussões das aulas anteriores e explicar aos alunos que, semelhante às atividades das aulas anteriores, as atividades da aula trabalharão com perímetro e área de fractais, mas fractais construídos a partir de triângulos equiláteros.
3. Distribuir as folhas A4 e as listas de atividades entre as duplas e orientar os alunos na realização da atividade.
4. Encerrar com uma síntese dos tópicos e ideias abordadas na aula e comentar a respeito das atividades que serão propostas nas aulas seguintes.

Aulas 6 e 7:

1. Iniciar a aula relembrando as aulas anteriores, de como as noções e fórmulas da Geometria Euclidiana foram usadas para interpretar os fractais Conjunto e Poeira de Cantor, Ilha de Koch e Triângulo de Sierpinski.
2. Apresentar as atividades propostas (Apêndices F e G que correspondem ao Tapete de Sierpinski e à Esponja de Menger, respectivamente), estabelecendo contrato didático com os alunos para que estas sejam completamente realizadas até o fim da aula.

3. Relembrar as discussões das aulas anteriores e explicar aos alunos que as atividades da aula trabalharão com área e volume de fractais.
4. Distribuir as folhas A4 e as listas de atividades entre as duplas e orientar os alunos na realização da atividade.
5. Com a atividade completamente realizada, incentivar os alunos para que compartilhem suas impressões da atividade e também de todo o trabalho realizado com Geometria Fractal, avaliando o quão produtivo foi na visão deles.

Avaliação: A avaliação de aprendizagem deverá levar em conta aspectos qualitativos e quantitativos. Os aspectos qualitativos a serem considerados serão a participação nas discussões, comunicação aluno-aluno e aluno-professor e organização do trabalho em dupla, enquanto que os aspectos quantitativos serão a organização e a realização das atividades propostas.

Referências

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação: Brasília, 2018.

APÊNDICE B — ATIVIDADE 01 – COMPRIMENTO DO CONJUNTO DE CANTOR

ATIVIDADE DE GEOMETRIA FRACTAL — COMPRIMENTO DO CONJUNTO DE CANTOR

1. Construa manualmente as quatro primeiras etapas do Conjunto de Cantor com o material que foi disponibilizado.
2. Faça a análise da construção que você realizou para coletar a informações que preenchem as quatro primeiras linhas da tabela de Relações Geométricas do Conjunto de Cantor. Com as informações coletadas, você deverá identificar o padrão que rege cada uma dessas relações. Cada um desses padrões se traduz nas fórmulas que completam as lacunas da última linha. Observação: considere que o comprimento do segmento tem 1 unidade de medida de comprimento (1 u.c.).

Relações geométricas do Conjunto de Cantor

Fase da geração do fractal (n)	Número de segmentos gerados	Comprimento do segmento (unidades de comprimento)	Comprimento total do Conjunto (unidades de comprimento)
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			

APÊNDICE C — ATIVIDADE 02 – ÁREA DA POEIRA DE CANTOR

ATIVIDADE DE GEOMETRIA FRACTAL — ÁREA DA POEIRA DE CANTOR

1. Construa manualmente as quatro primeiras etapas da Poeira de Cantor com o material que foi disponibilizado.

2. Faça a análise da construção que você realizou para coletar a informações que preenchem as quatro primeiras linhas da tabela de Relações Geométricas da Poeira de Cantor. Com as informações coletadas, você deverá identificar o padrão que rege cada uma dessas relações. Cada um desses padrões se traduz nas fórmulas que completam as lacunas da última linha. Observação: considere que o lado do quadrado da fase 0 tem 1 unidade de medida de comprimento (1 u.c.).

Relações geométricas da Poeira de Cantor

Fase da geração do fractal (n)	Número de quadrados gerados	Área dos quadrados (unidades de área)	Área total do fractal (unidades de área)
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			

APÊNDICE D — ATIVIDADE 03 – PERÍMETRO DA ILHA DE KOCH

ATIVIDADE DE GEOMETRIA FRACTAL — PERÍMETRO DA ILHA DE KOCH

1. Construa manualmente as quatro primeiras etapas da Ilha de Koch com o material que foi disponibilizado.
2. Faça a análise da construção que você realizou para coletar a informações que preenchem as quatro primeiras linhas da tabela de Relações geométricas da Ilha de Koch. Com as informações coletadas, você deverá identificar o padrão que rege cada uma dessas relações. Cada um desses padrões se traduz nas fórmulas que completam as lacunas da última linha. Observação: considere que os lados do triângulo têm 1 unidade de medida de comprimento (1 u.c.).

Relações geométricas da Ilha de Koch

Fase da geração do fractal (n)	Número de lados	Medida dos lados (unidades de comprimento)	Perímetro/comprimento total da Ilha (unidades de comprimento)
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			

APÊNDICE E — ATIVIDADE 04 – ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

ATIVIDADE DE GEOMETRIA FRACTAL — ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

1. Construa manualmente o comportamento do Tapete de Sierpinski nas quatro primeiras etapas com o material que foi disponibilizado.
2. Faça a análise da construção que você realizou para coletar as informações que preenchem as quatro primeiras linhas da tabela de Relações Geométricas do Tapete de Sierpinski. Com as informações coletadas, você deverá identificar o padrão que rege cada uma dessas relações. Cada um desses padrões se traduz nas fórmulas que completam as lacunas da última linha. Observação: considere que os lados do tapete têm 1 unidade de medida de comprimento (1 u.c.).

Relações geométricas das faces da Esponja de Menger

Fase da geração do fractal (n)	Número de quadrados gerados	Área dos quadrados gerados (unidades de área)	Área total da face (unidades de área)
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			

APÊNDICE F — ATIVIDADE 05 – ÁREA DO TAPETE DE SIERPINSKI

ATIVIDADE DE GEOMETRIA FRACTAL — ÁREA DO TAPETE DE SIERPINSKI

1. Construa manualmente o comportamento do Tapete de Sierpinski nas quatro primeiras etapas com o material que foi disponibilizado.
2. Faça a análise da construção que você realizou para coletar as informações que preenchem as quatro primeiras linhas da tabela de Relações Geométricas do Tapete de Sierpinski. Com as informações coletadas, você deverá identificar o padrão que rege cada uma dessas relações. Cada um desses padrões se traduz nas fórmulas que completam as lacunas da última linha. Observação: considere que o lado do quadrado da fase 0 tem 1 unidade de medida de comprimento (1 u.c.).

Relações geométricas do Tapete de Sierpinski

Fase da geração do fractal (n)	Número de quadrados gerados	Área dos quadrados gerados (unidades de área)	Área total do Tapete (unidades de área)
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			

APÊNDICE G — ATIVIDADE 06 – VOLUME DA ESPONJA DE Menger

ATIVIDADE DE GEOMETRIA FRACTAL — VOLUME DA ESPONJA DE Menger

1. Construa manualmente as quatro primeiras etapas da Esponja de Menger com o material que foi disponibilizado.
2. Faça a análise da construção que você realizou para coletar a informações que preenchem as quatro primeiras linhas da tabela de Relações geométricas da Esponja de Menger. Com as informações coletadas, você deverá identificar o padrão que rege cada uma dessas relações. Cada um desses padrões se traduz nas fórmulas que completam as lacunas da última linha. Observação: considere que os lados do cubo têm 1 unidade de medida de comprimento (1 u.c.).

Relações geométricas da Esponja de Menger

Fase da geração do fractal (n)	Número de cubos	Volume dos cubos (unidades de volume)	Volume total da Esponja (unidades de volume)
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			