



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS PARNAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

AUGUSTO TADEU PIMENTEL DE ARAUJO

MODELAGEM COMPUTACIONAL USANDO PYTHON PARA O ENSINO
DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

PARNAÍBA

2024

AUGUSTO TADEU PIMENTEL DE ARAUJO

MODELAGEM COMPUTACIONAL USANDO PYTHON PARA O ENSINO DE
CIRCUITOS ELÉTRICOS

Trabalho de conclusão de curso (monografia)
apresentado ao Instituto Federal de Educa-
ção, Ciência e Tecnologia do Piauí – *Campus*
Parnaíba, como requisito para obtenção do
título de licenciado em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa
Nascimento

Coorientador:

Prof. Dr. Kristian Pessoa dos Santos

PARNAÍBA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Araujo, Augusto Tadeu Pimentel de

A663m Modelagem computacional usando Python para o ensino de circuitos elétricos /
Augusto Tadeu Pimentel de Araujo. — 2024.
63 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Instituto
Federal do Piauí, Campus Parnaíba, 2024.

Orientador: Profº. Prof. Dr. Alexandro das Chagas de
Sousa Nascimento.

Coorientador: Profº. Dr. Kristian Pessoa dos Santos.

1. Física - Circuitos elétricos. 2. Modelagem computacional. 3. Plataforma
Jupyter Notebook. 4. Linguagem de programação - Python. I.Título.

CDD - 530

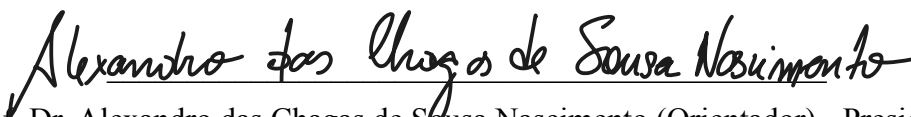
Elaborado por Micheline Angélica Aragão Gouveia CRB 3/1244

MODELAGEM COMPUTACIONAL USANDO PYTHON PARA O ENSINO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Augusto Tadeu Pimentel de Araujo

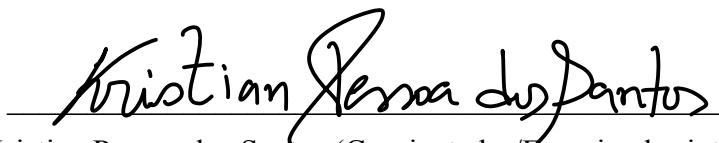
Aprovado em 17/01/2024

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Física do IFPI/*Campus* Parnaíba, aprovado pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Alexandre das Chagas de Sousa Nascimento (Orientador) - Presidente

IFPI/*Campus* Parnaíba-PI



Prof. Dr. Kristian Pessoa dos Santos (Coorientador/Examinador interno - IFPI)

IFPI/*Campus* Parnaíba-PI



Prof. Dr. Francisco Ronan Viana Araújo (Examinador interno - IFPI)

IFPI/*Campus* Piripiri-PI



Prof. Me. Francisco Angelo da Silva Neto (Examinador externo)

SEDUC-PI

Parnaíba - PI

2024

Dedico este trabalho as três maiores forças que reconheci na vida, minha avó Maria das Brotas Pimentel de Araujo(*in memoriam*), minha tia Teresinha de Jesus Pimentel de Araujo e a minha mãe Maridea Pimentel de Araujo que nunca mediu esforços para a minha educação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento pela orientação e suporte que contribuíram para esse trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Kristian Pessoa dos Santos pelos trabalhos realizados, pela disponibilidade, pelos muitos anos de parceria, generosidade e confiança.

Agradeço ao Prof. Me. Bruno Sombra pelas várias disciplinas ministradas, pelas excelentes notas de aula, pelo compromisso verdadeiro de ensinar física, agradeço por todas as contas abertas, por sua organização em sala de aula, por seu quadro que me ensinou muito e ainda agradeço sua generosidade.

Agradeço à minha Mãe, Maridea Pimentel de Araujo, que, como mãe solteira em uma sociedade tradicional, resolveu ter um filho, assumi-lo e amá-lo. Agradeço ainda pela minha formação humana e pelos investimentos na minha educação. Enfim, por ter dedicado a sua vida à minha.

Agradeço à tia Tetê por todo o apoio sempre constante, e junto com minha mãe, me ensinaram o valor do trabalho, da dedicação e da família.

Agradeço à minha esposa, Adelaide, por ter acrescentado uma boa dose de suavidade nessa jornada, pelo seu sorriso maravilhoso e eficiente em dissolver a minha expressão sisuda. Obrigado, meu amor. Vicente tem sorte de ter você como Mãe.

Ainda não posso esquecer das pessoas que fizeram parte da minha formação em física nos tempos da aquecida capital. Meus colegas e amigos, como Wando Lenno, Antônio Jorge, Rômulo Madeira, Túlio Brasil, Renata da Hora, João Victor Moura e Núbia Ribeiro, contribuíram significativamente em dias muito difíceis.

Agradeço aos meus amigos que construí ao longos desses anos no IFPI.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“A natureza é um enorme jogo de xadrez disputado por deuses, e que temos o privilégio de observar. As regras do jogo são o que chamamos de física fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta”
(Richard Feynman)

RESUMO

A linguagem matemática aliada a uma estratégia de modelagem computacional para fins didáticos e uso de tecnologias de informação e comunicação (TICs) podem contribuir de forma significativa para o ensino de Física. Neste contexto, apresentamos uma proposta didática para o ensino de circuitos elétricos com resistores (R), indutores (L) e capacitores (C) voltados para o ensino de física básica que utiliza a plataforma Jupyter Notebook e a linguagem de programação Python para tornar o aprendizado mais interativo, prático e eficaz. A proposta didática foi dividida nos seguintes momentos: (i) fundamentos teóricos - onde são introduzidos os conceitos fundamentais dos circuitos RC, RL, LC e RLC; (ii) ambiente de desenvolvimento que é a etapa de configuração do ambiente de programação no Jupyter Notebook usando Python e principais bibliotecas tais como NumPy, SciPy e Matplotlib para análise dos dados e visualização; (iii) exemplos resolvidos - apresentação de exemplos práticos de resolução passo a passo para o entendimento de circuitos RLC, incluindo a aplicação de métodos analíticos e numéricos. Essa etapa permite aos estudantes a visualização dos resultados por meio de gráficos; (iv) atividades práticas - fase de implementação do algoritmo para análise desses circuitos; (v) avaliação - para avaliar o progresso dos alunos, serão realizados testes práticos e exercícios em projetos individuais ou em grupo que apliquem os conceitos aprendidos. Discussões em fóruns online ou em sala de aula promoverão a colaboração e o aprendizado mútuo. Essa proposta didática oferece uma abordagem inovadora e eficaz para o ensino de circuitos elétricos RLC combinando teoria, programação e aplicação prática, preparando os alunos para enfrentar desafios reais e modernos em suas futuras carreiras.

Palavras-chaves: circuitos RLC; ensino de física; python; jupyter notebook.

ABSTRACT

Mathematical language combined with a computational modeling strategy for teaching purposes and using information and communication technologies (ICTs) can contribute significantly to the teaching of Physics. In this context, we present a didactic proposal for teaching electrical circuits with resistors (R), inductors (L), and capacitors (C) aimed at teaching basic physics that uses the Jupyter Notebook platform and the Python programming language to make more interactive, practical and effective learning. The didactic proposal was divided into the following moments: (i) theoretical foundations - where the fundamental concepts of the RC, RL, LC and RLC circuits are introduced; (ii) development environment, which is the stage of configuring the programming environment in Jupyter Notebook using Python and main libraries such as NumPy, SciPy and Matplotlib for data analysis and visualization; (iii) solved examples - presentation of practical examples of step-by-step resolution for understanding RLC circuits, including the application of analytical and numerical methods. This step allows students to visualize the results through graphs; (iv) practical activities - implementation phase of the algorithm for analyzing these circuits; (v) assessment - to assess students' progress, practical tests, and exercises will be carried out in individual or group projects that apply the concepts learned. Discussions in online forums or classes will promote collaboration and mutual learning. This didactic proposal offers an innovative and effective approach to teaching RLC electrical circuits, combining theory, programming, and practical application, preparing students to face real-world challenges in their future careers.

Keywords: RLC circuits; physics teaching; python; jupyter notebook.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Queda de tensão V em um (a) resistor e em um (b) capacitor. (c) Circuito RC em série alimentado por uma fonte de fem $\mathcal{E}$	25
Figura 2 – Corrente de carga de um capacitor em função do tempo para o circuito RC.	26
Figura 3 – Circuito RL.	26
Figura 4 – Corrente em função do tempo para o circuito RL.	27
Figura 5 – Circuito LC.	28
Figura 6 – Circuito RLC.	28
Figura 7 – Comportamento da corrente com o tempo para o circuito RLC.	29
Figura 8 – Método aproximado de Euler.	33
Figura 9 – Solução de uma EDO com o método numérico (linha vermelha tracejada) e exata (linha preta contínua).	36
Figura 10 – Interface do Google Colab destacando o ambiente textual e o código implementado.	37
Figura 11 – Cálculo numérico via aproximação de Euler da (a) tensão no capacitor e (b) da corrente no indutor.	44
Figura 12 – Corrente no circuito RLC para o caso (a) $\gamma = R/L = 10$ e (b) $\gamma = R/L = 10^{-2}$	46
Figura 13 – Amortecimento crítico.	47
Figura 14 – Curva dos termos oscilante e exponencial.	49
Figura 15 – Curva do termo oscilante e da corrente amortecida.	50
Figura 16 – Curvas oscilante, exponencial e a amortecida.	52

LISTA DE CÓDIGOS

3.1.1 Método Euler implementado para uma EDO de segunda ordem.	35
4.1.1 Código em Python usando o método de Euler para o circuito RLC em série.	42
4.2.1 Código em Python para solução exata do termo oscilatório e do termo exponencial para da corrente no circuito RLC em série.	48
4.2.2 Código em Python para soluções amortecidas e não amortecidas.	49
4.2.3 Código em Python para plotar gráficos de partes da solução e seu resultado final.	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Principais dificuldades conceituais relacionada aos circuitos com resistor, capacitor e indutor.	31
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFPI:	Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí.
ED:	Equações Diferenciais.
EDO:	Equações Diferenciais Ordinárias.
EDP:	Equações Diferenciais Parciais.
SD:	Sequência Didática.
TICs:	Tecnologias de Informação e Comunicação.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	OBJETIVO GERAL	16
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
1.3	ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA	18
2.2	MODELAGENS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE FÍSICA	20
2.2.1	A linguagem de programação python e ambientes de desenvolvimento interativo	21
2.2.1.1	Jupyter Notebook	22
2.2.1.2	Google Colab (Colaboratory)	23
2.3	EMBASAMENTO TEÓRICO DIDÁTICO SOBRE CIRCUITOS ELÉ- TRICOS.	23
2.3.1	Circuito RC	25
2.3.2	Circuito RL	26
2.3.3	Circuito LC	27
2.3.4	Circuito RLC	28
2.4	DIFICULDADES RELACIONADAS A APRENDIZAGEM SOBRE CIRCUITOS ELÉTRICOS	30
3	METODOLOGIA	32
3.1	IMPLEMENTAÇÃO EM PYTOHN.	32
3.1.1	Método de Euler para equações diferenciais de segunda ordem	32
3.1.2	Implementação do código no Google Colab	37
3.2	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	42
4.1	Resultados numéricos do circuito RLC	42
4.1.1	Caso subamortecido	45
4.1.2	Caso de amortecimento crítico e sobreamortecido	46
4.2	Resultados analíticos do circuito RLC	47
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	REFERÊNCIAS	54

	APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EDO DO CIRCUITO RLC	56
A.1	Oscilador harmônico amortecido	56
A.1.1	Raízes complexas	56
A.1.2	Raízes reais e distintas	58
A.1.3	Raízes reais e iguais	59
	ANEXO A – PRODUTO	60
A.1	Arquivo exportado do Jupyter Notebook	60

1 INTRODUÇÃO

O eletromagnetismo representa uma interação fundamental na natureza, com influência em escalas tanto macroscópicas quanto microscópicas. É responsável pela estrutura da matéria e por grande parte dos fenômenos físicos presentes em nossa vida cotidiana, os quais possuem natureza elétrica. Na evolução da física, a teoria clássica da interação eletromagnética, proposta por Maxwell (1831-1879), desempenha um papel central ao unificar conceitos com a ótica, revelando a natureza ondulatória da luz como uma manifestação do campo eletromagnético. Durante o século XVIII, os conhecimentos sobre eletricidade e magnetismo eram rudimentares em laboratórios, mas no início do século XIX, ocorreram avanços significativos, como os trabalhos de Faraday sobre fenômenos de indução eletromagnética e a formulação das renomadas equações do eletromagnetismo clássico de Maxwell.

As teorias de circuitos elétricos e eletromagnetismo são os dois pilares fundamentais sobre os quais se apoiam, por exemplo, todos os campos da engenharia elétrica. Muitos ramos desta área da engenharia, como geração de energia, máquinas elétricas, controle, eletrônica, comunicações e instrumentação, têm como base a teoria dos circuitos. Na área das instalações prediais e industriais todas as cargas elétricas, também conhecidas como consumidores de energia na literatura técnica de engenharia, são basicamente compostas por resistências, capacitâncias e indutâncias. O estudo e análise da influência de cada uma dessas grandezas elétricas é crucial para o uso consciente de energia, conservação de recursos, segurança no trabalho e economia.

Para uma compreensão abrangente do comportamento dinâmico da tensão e corrente, é necessário realizar a modelagem matemática de um circuito, ou seja, transformar um circuito elétrico em uma representação matemática que possa ser estudada teórica e computacionalmente. Portanto, a teoria de circuitos elétricos é de extrema importância para estudantes dentro desse campo, representando um ponto de partida excelente para quem está ingressando na área. Além disso, tais conhecimentos também se estendem aos estudantes que se especializam em outras áreas das ciências físicas, pois os circuitos servem como um excelente modelo para o estudo de sistemas de energia em geral, englobando matemática aplicada, física e topologia em seu escopo (ALEXANDER; SADIKU, 2013; BOYLESTAD, 2012; OGATA; SEVERO, 2010).

Vários livros básicos da área de engenharia (ALEXANDER; SADIKU, 2013) e física básica (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016; NUSSENZVEIG, 2015) discutem circuitos elétricos com componentes resistivos (R), capacitivos (C) e indutivos (L) dispostos em série e em paralelo. Quando o circuito é composto pelos três componentes, denominamos de circuito RLC que também pode ser constituído por dois desses elementos, tais como

circuito RC e RL.

A compreensão e análise desses circuitos são essenciais para o projeto e a otimização de sistemas eletrônicos. Eles são amplamente utilizados em áreas como eletrônica de potência, sistemas de comunicação, controle de processos e circuitos de rádio, TV e outros.

Os circuitos do tipo RLC são descritos por equações diferenciais que levam em conta as condições iniciais de carga nos elementos de armazenamento de energia em função do tempo. O estudo e análise do comportamento geral desses circuitos são complexos e exigem conhecimentos sólidos em números complexos, teoria de circuitos elétricos, técnicas de primitivação, equações diferenciais ordinárias e, em algumas situações, equações diferenciais parciais. Em alguns casos, podemos ter sistemas que são modelados por equações diferenciais que são muito complicadas de serem resolvidas analiticamente ou mesmo, requerem soluções tediosas que consomem muito tempo para serem resolvidas.

Assim, métodos aproximados podem ser aplicados e resolvidos computacionalmente. A solução numérica é uma ferramenta poderosa para explorar diferentes cenários e analisar o comportamento dos circuitos RLC em condições variadas, possibilitando estudar os efeitos de parâmetros diferentes, como valores de componentes, frequências de entrada e condições iniciais. Além disso, a simulação de tais sistemas nos permite visualizar os resultados e obter uma visão intuitiva do comportamento dos circuitos.

Os métodos numéricos aproximados geralmente envolvem procedimentos iterativos que encontram suas soluções mais diretas por meio da aplicação de linguagens matemáticas ou de programação. Nos últimos anos a linguagem de programação Python tem atraído atenção notável devido à sua simplicidade e adaptabilidade. Python tem sido amplamente utilizado no desenvolvimento de uma ampla gama de soluções de *software* científico devido a sua vasta biblioteca (LANGTANGEN, 2008).

Tendo em vista a importância do estudo de circuitos RLC e aplicações, aliado a um certo grau de dificuldade de aprendizagem nesse tópico, reportadas por exemplo, no trabalho de Dorneles, Araujo e Veit (2008), o presente trabalho propõe a análise matemática de circuitos elétricos do tipo RLC, demonstrando que através de uma aplicação simples, mas eficaz, por meio de um método numérico (método de Euler) pode ser usada e implementada via da linguagem de programação Python para fins de modelagem de circuitos RL, RC e RLC. O estudo detalhado desses circuitos permitirá uma compreensão aprofundada de seu comportamento, incluindo a relação entre a corrente, a tensão e os elementos R, L e C. Python é uma linguagem de programação de código aberto e sua ampla adoção na comunidade científica permite que pesquisadores e estudantes compartilhem seus resultados e desenvolvam colaborações mais facilmente, ainda mais quando se utiliza uma interface gráfica como é o Jupyter Notebook.

Dessa forma, propomos uma alternativa viável para mitigar dificuldades conceituais

relacionadas aos circuitos RLC. Dentro do ambiente Jupyter Notebook será construído um produto educacional destinado a discentes no ensino superior relacionadas as áreas de ciências e tecnologias ou até mesmo estudantes de nível técnico.

Por mais que os estudantes nesse nível não tenham contato com método numérico, é importante enfatizar que análise gráfica é o suficiente para o entendimento. O produto de código aberto, implementado no Jupyter Notebook, oferecerá uma melhor abordagem visual, muito fácil de utilizar permitindo, assim, escrever, executar e depurar códigos interativamente. Com ele, além de criar textos em formato LaTeX e anexar figuras, é possível experimentar e testar os códigos em células individuais, visualizando os resultados à medida que eles avançam. A utilização de simulações em Python no ensino de física permite aproveitar esses recursos tecnológicos disponíveis, tornando o aprendizado mais envolvente e relevante para os estudantes.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral do presente trabalho é explorar e desenvolver simulações em Python para o ensino de circuitos RLC baseado soluções numéricas simples de equações diferenciais e propor um produto educacional potencialmente significativo desenvolvido no ambiente Jupyter Notebook, usando linguagem de programação Python, visando aprimorar a compreensão dos estudantes e promover a aprendizagem ativa e significativa de acordo com Ausubel (2003).

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar os conceitos-chave relacionados aos circuitos RLC no currículo de física, de acordo com o nível de ensino alvo;
- Desenvolver simulações interativas em Python que permitam a visualização e a interação com os circuitos RLC, levando em consideração os conceitos-chave identificados;
- Validar as simulações à luz da teoria de modo a garantir a adequação dos conteúdos e a eficácia pedagógica do material;
- Elaborar um produto educacional com ambiente Jupyter Notebook de utilização das simulações em Python, contendo orientações para professores sobre como incorporar as praticas computacionais no ensino de circuitos RLC, bem como sugestões de atividades e práticas pedagógicas;

1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. No presente capítulo, contextualizou-se o recorte da pesquisa por meio da seleção de aspectos que oferecem um panorama geral sobre o tema circuitos elétricos e modelagem computacional no ensino de física, os objetivos geral e específicos a serem alcançados. O Capítulo 2 consiste na fundamentação teórica pelo qual apresentamos a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel, que direciona a proposta da nossa sequência didática, a modelagem computacional usando Python e o embasamento teórico envolvendo circuitos elétricos com resistor, indutor e capacitor. No Capítulo 3 descrevemos os procedimentos metodológicos adotados para alcançar os objetivos propostos, apresentando os procedimentos realizados para compor o corpus da pesquisa e as técnicas de análise da mesma. Em seguida, no Capítulo 4, apresentamos resultados da pesquisa, com a análise e discussão da sequência didática, buscando responder à questão de pesquisa e os objetivos alcançados, além de analisar comportamento das propriedades físicas dos circuitos propostos. Por fim, no Capítulo 5, fazemos as considerações finais da pesquisa, apontando contribuições, limitações e sugestões para pesquisas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo iremos discutir brevemente a teoria de aprendizagem significativa, abordaremos o uso de simulações computacionais no ensino de física, mais especificamente com a utilização da linguagem de programação Python e discutiremos sobre a teoria matemática dos circuitos dos tipos RC, RL, LC e RLC assim como o comportamento físico dos mesmos.

2.1 TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A aprendizagem significativa é um conceito proposto por David Ausubel (1918-2008), um psicólogo americano, em 1963 (AUSUBEL, 1963). Ele destaca a importância de relacionar novos saberes com os conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Em seu estudo, ele acredita que a aprendizagem é mais eficaz quando novas informações são integradas de forma significativa ao que o aluno já conhece.

A aprendizagem significativa contrasta com a aprendizagem memorística, na qual os alunos apenas memorizam informações sem realmente compreendê-las ou conectá-las ao seu conhecimento existente. Ausubel (1963) argumenta que a aprendizagem significativa ocorre quando o novo material é relacionado de maneira substantiva aos conceitos, proposições e atitudes já presentes na estrutura cognitiva do indivíduo.

Pode-se sintetizar as principais características da aprendizagem significativa de Ausubel:

1. *Subsunçores*: Ausubel introduz o conceito de “subsunnçores”, que são ideias fundamentais já existentes na mente do aprendiz. A aprendizagem significativa ocorre quando novas informações são relacionadas e ancoradas a esses subsunnçores.
2. *Organização do material de ensino*: O material de ensino deve ser organizado de maneira lógica e clara, facilitando a identificação de relações com os conhecimentos prévios do aluno. Isso ajuda na construção de pontes entre o novo e o conhecido.
3. *Aprendizagem por descoberta*: Ausubel encoraja a aprendizagem por descoberta, na qual os alunos são incentivados a explorar e descobrir conceitos por si mesmos, conectando essas descobertas aos seus conhecimentos existentes.
4. *Atenção à recepção e à aprendizagem ativa*: Ausubel destaca a importância de prestar atenção à recepção, ou seja, à forma como os estudantes são expostos ao material, e também enfatiza a aprendizagem ativa, na qual os estudantes são envolvidos ativamente no processo de aprendizagem.

5. *Transferência de aprendizagem*: A aprendizagem significativa favorece a transferência de conhecimento para novas situações, uma vez que os conceitos são compreendidos de maneira profunda e conectados a estruturas cognitivas mais amplas.

Ao implementar a teoria da aprendizagem significativa, os educadores buscam criar ambientes de aprendizagem que estimulem a reflexão, a conexão e a compreensão profunda dos conceitos, permitindo que os alunos construam uma base sólida de conhecimento.

De acordo com Moreira (1983), a aprendizagem significativa ocorre quando ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não arbitrária com o conhecimento prévio do aprendente. Moreira (1983) ainda esclarece que substantiva significa não literal e que não arbitrária indica um conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito, denominado por Ausubel, como subsunçor ou ideia-âncora.

A razão pela qual essa aprendizagem é considerada significativa reside no fato de que é esse conhecimento específico, presente na estrutura de conhecimentos do sujeito, que confere significado a novos conhecimentos, seja por mediação ou pela própria inferência do aprendente. Segundo Moreira (1983), “É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não literal e não arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos ganham significado para o sujeito, e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva”.

É crucial destacar que aprendizagem significativa não implica aprendizagem alinhada ao conhecimento formal e validado. Para Ausubel, atribuir significados a um conhecimento a partir da interação com conhecimentos prévios constitui aprendizagem significativa, independentemente da aceitação desses significados no contexto do aprendente. Portanto, o fato de o conhecimento prévio ser a variável fundamental para a aprendizagem significativa, conforme concebido por Ausubel, não assegura que seja uma variável facilitadora para a aquisição do conhecimento escolar. Pelo contrário, pode até ser uma variável bloqueadora, caso os significados dos conhecimentos prévios estejam ancorados em conhecimentos e concepções derivadas, por exemplo, do senso comum.

Ao analisar a estrutura cognitiva, Ausubel estabeleceu as seguintes condições para a ocorrência da aprendizagem significativa:

- a) O material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo;
- b) O aprendiz deve ter predisposição para aprender.

O material de aprendizagem é considerado potencialmente significativo uma vez que a atribuição de significado é uma responsabilidade do sujeito. Portanto, não há aula, estratégia ou livro intrinsecamente significativos. O material potencialmente significativo é aquele capaz de dialogar de maneira apropriada e relevante com o conhecimento prévio

do estudante.

Assim, tanto o material quanto a mediação são fundamentais, uma vez que o estudante pode não possuir conhecimentos prévios adequados para atribuir significados aceitos no contexto do conteúdo. Por um lado, essa condição reforça a necessidade da predisposição para aprender, que, como esclarece Moreira (1983), não se trata apenas de motivação ou identificação com o conteúdo, mas sim da disposição para relacionar-se com novos conhecimentos atribuindo significados. Por outro lado, essa condição instiga o docente a acolher as ideias prévias dos estudantes, mesmo que insatisfatórias, para construir situações de aprendizagem que promovam a atribuição de significados aos temas tratados. É por meio dessa negociação de significados que a aprendizagem significativa se diferencia da aprendizagem mecânica - quando novas informações são aprendidas sem interação com conceitos relevantes que existem na estrutura cognitiva (PELIZZARI et al., 2002), pois o conhecimento prévio interage com o novo conhecimento, modificando e enriquecendo a estrutura cognitiva prévia, o que permite a atribuição de significados ao conhecimento.

Contudo, não podemos afirmar que a aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica sejam formas de aprendizado antagônicas. De acordo com Ausubel (1963), elas são contínuas. No entanto, outros autores esclarecem que a aprendizagem significativa tende a ser mais duradoura. Isso ocorre porque, na memorização da aprendizagem mecânica, as informações não interagem com o conhecimento prévio e não se ancoram. O saber construído nessa situação só é aplicável a situações conhecidas, ou seja, ao significado transmitido no conteúdo (MOREIRA, 2019).

2.2 MODELAGENS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE FÍSICA

Os docentes de física frequentemente enfrentam inúmeros desafios ao tentar transmitir conceitos abstratos e teorias matemáticas complexas em cenários do mundo real. Para superar tais obstáculos e aprimorar o processo de aprendizado dos alunos, as simulações ou modelagens computacionais surgem como uma ferramenta poderosa e eficaz, pois possibilitam que os estudantes explorem fenômenos físicos, realizem experimentos virtuais, visualizem conceitos abstratos e interajam ativamente com o conhecimento científico (MEDEIROS; MEDEIROS, 2002).

Segundo Veit e Araujo (2005), a aplicação da modelagem computacional a problemas de física delega aos computadores a responsabilidade de realizar os cálculos, sejam eles numéricos ou algébricos. Isso proporciona aos estudantes um tempo mais substancial para contemplar as hipóteses assumidas, interpretar as soluções, analisar o contexto de validade dos modelos e considerar possíveis generalizações ou expansões que possam ser implementadas no modelo.

A incorporação de simulações computacionais no ensino de física proporciona uma significativa interação dos estudantes com a tecnologia, auxiliando no desenvolvimento de habilidades cruciais, como resolução de problemas e pensamento crítico, necessárias para enfrentar os desafios do mundo real. Além disso, a vivência com simulações prepara os alunos para o uso comum de ferramentas computacionais e modelagem em diversas áreas científicas e tecnológicas, promovendo uma integração efetiva entre teoria e prática de forma interdisciplinar.

É amplamente reconhecido que a computação e as pesquisas científicas no campo da física mantêm laços estreitos. Em várias áreas da pesquisa em física, o uso de simulações é uma prática frequente e vital. Na ciência dos materiais, por exemplo, os físicos teóricos enfrentam desafios computacionais consideráveis ao processar vastos conjuntos de dados originados de simulações das propriedades de diversos materiais em uma, duas e três dimensões. Na engenharia, as aplicações de simulações de modelos físicos são numerosas, enquanto na educação, a proliferação de simulações e animações disponíveis na internet tem atendido, em certa medida, às necessidades de muitos professores que buscam abordar suas aulas de maneira mais dinâmica em comparação ao ensino tradicional.

Um modelo matemático implementado no computador representa uma interpretação simplificada da realidade ou de um fragmento de um sistema físico, seguindo uma estrutura de conceitos mentais ou experimentais. A intenção subjacente à modelagem matemática é criar condições propícias para a aquisição de conhecimento em um ambiente de investigação.

2.2.1 A linguagem de programação python e ambientes de desenvolvimento interativo

Dentre as inovações tecnológicas disponíveis, as linguagens de programação emergiram como uma categoria que se multiplicou consideravelmente nas últimas décadas. Atualmente, uma das linguagens mais amplamente adotadas é o Python (TORRES, 2021). Essas linguagens constituem a base dos softwares utilizados diariamente, inclusive na construção de páginas da internet. A programação possibilita a criação de programas simples e complexos, atendendo às diversas necessidades. No âmbito do ensino de física, em particular, há diversas aplicações para a programação.

Lançada por Guido van Rossum em 1991, a linguagem Python apresenta várias vantagens em relação a outras linguagens de alto nível. Um destaque é a execução imediata dos códigos, dispensando a etapa de compilação e proporcionando maior agilidade aos programadores. Além disso, a portabilidade dos códigos permite sua execução sem problemas em diversos sistemas operacionais. Os scripts em Python possuem uma notável capacidade de comunicação e integração com aplicativos e ferramentas desenvolvidos em outras linguagens, graças à diversidade de módulos e bibliotecas disponíveis. A evolução da linguagem ocorre de forma comunitária, embora seu criador mantenha um papel central

nas decisões relacionadas a ela. Python é uma linguagem interpretada, de script, orientada a objetos, com formatação indentada e tipagem dinâmica, além de contar com uma extensa coleção de módulos para diversos propósitos (LUTZ, 2013).

A análise computacional de equações diferenciais é uma abordagem crucial no estudo de fenômenos físicos e engenharia. Tradições como MATLAB, MAPLE e MATHEMATICA (ÇENGEL; PALM III, 2014) têm sido amplamente empregadas para essas análises. Contudo, essas ferramentas são licenciadas e dispendiosas, dificultando o acesso para muitos estudantes e pesquisadores. Diante desse cenário, este trabalho propõe o uso do Python como uma alternativa acessível e poderosa para a análise e estudo de equações diferenciais presentes na maioria dos problemas físicos.

Os códigos em Python podem ser executados em diversos ambientes que irá depender das necessidades e preferências como, por exemplo, em ambientes de desenvolvimento integrados (IDEs, do inglês *Integrated Development Environment*) que podem ser baixadas e instaladas diretamente no computador. Após a instalação, é possível usar o interpretador Python no terminal ou scripts Python e executá-los localmente.

Uma alternativa mais interessante e viável para os propósitos educacionais é o uso de ambientes interativos, tais como o Google Colab e o Jupyter Notebook, que permitem criar e compartilhar documentos contendo código, texto e elementos visuais. Além da educação, ambos são amplamente utilizados em ciência de dados, aprendizado de máquina e pesquisa acadêmica. Vamos entender melhor cada um deles:

2.2.1.1 Jupyter Notebook

O Jupyter Notebook é uma aplicação web que viabiliza a criação e o compartilhamento de documentos contendo código interativo e textos explicativos. Utilizando uma linguagem simples para a formatação de texto, a plataforma suporta diversas linguagens de programação, incluindo Python (KLUYVER et al., 2016). É altamente recomendado para a execução interativa de código, sendo amplamente empregado em processamento exploratório de dados, simulações numéricas, modelagens estatísticas e aprendizado de máquina.

Através dos blocos de texto, é possível fornecer explicações textuais da teoria física aplicada ao problema em questão, apresentando passo a passo a implementação do código, incluindo gráficos e figuras, todos visualizados em uma mesma tela devido ao template multifuncional do Jupyter Notebook, em outras palavras, é possível comentar o código para facilitar a sua compreensão. Essa característica possibilita a criação de uma ferramenta pedagógica para facilitar a compreensão da teoria física, da matemática e do código, especialmente para aqueles que estão aprendendo a programar em Python. A capacidade do Jupyter Notebook de executar código e realizar anotações o torna uma ferramenta didática e totalmente gratuita.

2.2.1.2 Google Colab (Colaboratory)

O Google Colab é uma plataforma gratuita baseada em nuvem que utiliza a infraestrutura do Google para execução de notebooks Jupyter. Ele oferece recursos adicionais, como a capacidade de usar GPUs e TPUs (unidades de processamento tensorial) fornecidas pelo Google. Permite o armazenamento e compartilhamento de notebooks diretamente no Google Drive, que é uma de suas grande vantagens, possibilitando a execução de código em nuvem, o que é útil para tarefas computacionalmente intensivas sem exigir hardware poderoso localmente.

O Google Colab é uma versão hospedada na nuvem, fornecendo recursos adicionais e facilidade de colaboração, enquanto o Jupyter Notebook é uma aplicação que você pode executar localmente em seu computador. Ambos são ferramentas poderosas e flexíveis para desenvolvedores, cientistas de dados e educadores que desejam criar documentos interativos combinando código, texto e visualizações. Ao utilizar esses ambientes interativos, estudantes e pesquisadores têm a oportunidade de explorar as funcionalidades da linguagem Python para resolver problemas físicos e realizar análises computacionais.

A linguagem Python oferece uma extensa biblioteca de módulos científicos, como NumPy, SciPy e SymPy, que proporcionam ferramentas poderosas para manipulação de dados, cálculos numéricos e simbólicos, além de visualização de resultados. Desta forma, este trabalho busca contribuir para a disseminação do uso de Python como uma ferramenta acessível e robusta para a análise computacional de diversos problemas físicos aliada aos ambientes interativos. Ao promover o uso desta linguagem, almeja-se ampliar o acesso e estimular a participação de mais pessoas no estudo e pesquisa nessa área, fornecendo um recurso para a formação de uma base sólida e sua utilização como ferramenta de ensino em cursos superiores de física e engenharia, contribuindo para o avanço do conhecimento científico e tecnológico. A parte metodológica envolverá a análise e discussão do código construído.

2.3 EMBASAMENTO TEÓRICO DIDÁTICO SOBRE CIRCUITOS ELÉTRICOS.

A abordagem matemática de circuitos elétricos pode ser analisada de forma aplicável à área técnica (ALEXANDER; SADIKU, 2013; BOYLESTAD, 2012; OGATA; SEVERO, 2010) ou um pouco mais científica, como pode ser encontrada nos livros-textos tradicionais usados em cursos dentro das ciências exatas (NUSSENZVEIG, 2015; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016). Um circuito elétrico é basicamente uma interconexão de elementos elétricos, de modo que formem pelo menos um caminho fechado para a corrente elétrica. Podemos ter circuitos elétricos compostos por diversos componentes que são utilizados para as mais variadas finalidades. Nas instalações elétricas prediais e industriais, por exemplo, todos os equipamentos elétricos podem ser representados por componentes

básicos organizados de forma a ser possível a sua análise.

Nas instalações elétricas prediais e industriais, por exemplo, todos os equipamentos elétricos podem ser representados por componentes básicos constituídos de resistores (R), capacitores (C) e indutores (L). Veremos que tais sistemas são modelados por equações diferenciais (EDs) e considera, dentre outros, as condições iniciais de carregamento dos elementos armazenadores de energia em função do tempo. A expressão “equação diferencial” é utilizada desde 1676 idealizada pelo matemático Leibniz e, desde então, são amplamente utilizadas por cientistas e engenheiros como ferramenta na resolução de diversos problemas que vão de cálculos de volume e cálculos astrofísicos de grande complexidade (ÇENGEL; PALM III, 2014). E que tem se tornado uma ferramenta cada vez mais sofisticada para a investigação de fenômenos naturais com grande progresso nas aplicações em várias áreas do conhecimento.

Em relação ao tipo, podemos classificar as equações diferenciais como ordinárias (EDO) ou parciais (EDP). De modo geral, podemos apresentar uma EDO da seguinte forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \quad (2.1)$$

onde o coeficiente $a_n(x)$ não é identicamente nulo, x é a variável independente e $y(x)$ é a única função de x . A ordem de uma equação diferencial é determinada pela ordem da maior derivada presente na equação. Isto é, uma equação diferencial ordinária é de ordem n se $n \in \mathbb{N}$ é a maior derivada.

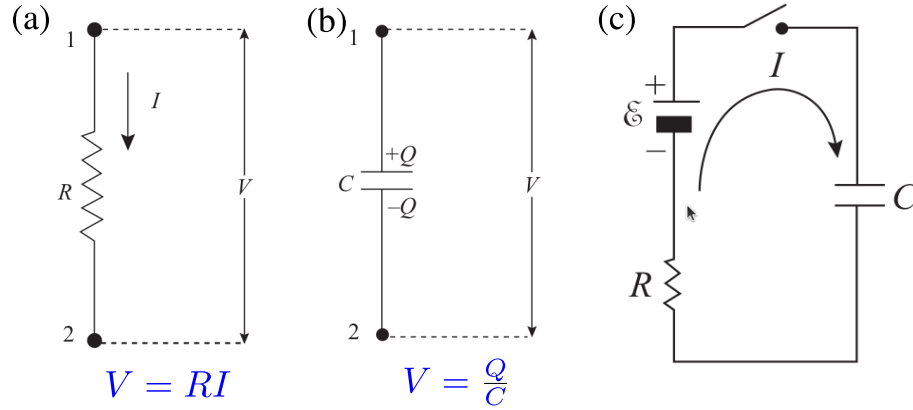
O estudo e análise do comportamento geral do circuito exige conhecimentos sólidos de números complexos, teoria de circuitos elétricos, integrais, técnicas de primitivação, EDOs e, em alguns casos, EDPs (OGATA; SEVERO, 2010). As equações diferenciais diferenciam-se das equações algébricas porque envolvem uma ou mais derivadas em sua estrutura (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Uma equação algébrica, como uma equação quadrática, é resolvida com um valor ou conjunto de valores, já uma equação diferencial vai além disso, sua solução é uma função ou classe de funções. Importante destacar que o tratamento feito aqui para os circuitos elétricos podem ser estendidos para outros tópicos da física. Assim, EDs são uma importante ferramenta matemática, pois permitem descrever processos, modelar e resolver problemas, bem como compreender e analisar fenômenos.

Para compreensão geral do comportamento dinâmico da tensão e corrente nos circuitos elétricos que apresentem esses elementos, é necessário modelar um circuito matematicamente, ou seja, transformar um circuito elétrico em uma representação matemática que pode ser estudada teoricamente e computacionalmente. Vamos discutir a seguir alguns circuitos básicos e verificar quais equações diferenciais estão envolvidas em cada caso.

2.3.1 Circuito RC

Denominamos circuito RC, um circuito que tem como elementos um resistor e um capacitor. Assim, é importante entender como cada elemento desse se comporta à passagem de uma corrente elétrica. Iniciamos com o resistor, representado na Fig. 2(a). Quando uma corrente I atravessa um resistor com resistência R , temos uma queda de potencial V no sentido da corrente dada pela lei de Ohm $V = RI$. Para o capacitor, Fig. 2(b), temos um acúmulo de cargas Q em cada placa do capacitor. Considerando que Q varie no tempo de forma quase estacionária, a queda de potencial V entre as placas é dada por $V = Q/C$, onde C é a capacitância do capacitor.

Figura 1 – Queda de tensão V em um (a) resistor e em um (b) capacitor. (c) Circuito RC em série alimentado por uma fonte de fem $\mathcal{E}$.



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (2015).

Considerando um capacitor inicialmente descarregado e ligado a uma fem (força eletromotriz) $\mathcal{E}$ e a um resistor em série, como mostrado na Fig. 2(c), a primeira lei de Kirchhoff leva a

$$\mathcal{E} - I(t)R - \frac{q(t)}{C} = 0, \quad (2.2)$$

onde $I(t) = dq/dt$ e $q(t)$ são a corrente e a carga instantânea em um tempo t . Assim, tomando a derivada no tempo da Eq. (2.2), teremos uma EDO da seguinte forma

$$R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{\tau} = 0, \quad (2.3)$$

em que definimos $\tau \equiv RC$ como uma constante de tempo.

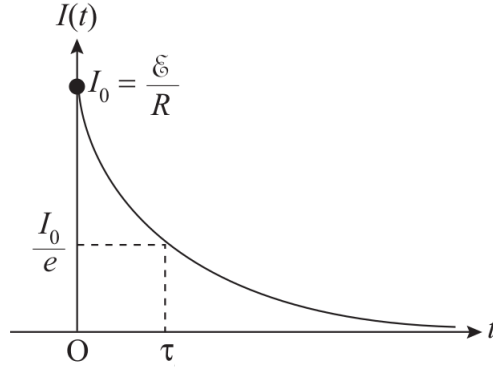
Podemos integrar a Eq. (2.3) no tempo e, considerando as condições iniciais ($Q = 0$ e $I(0) = \mathcal{E}/R$), determinamos sua solução:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.4)$$

A interpretação de τ pode ser vista como o tempo em que a corrente leva para cair de $1/e \approx 37\%$ do seu valor inicial I_0 . Assim, à medida que o tempo passa, a corrente

do circuito decai exponencialmente e tende a zero, indicando que o capacitor se carrega completamente, como está mostrado na Fig 2.

Figura 2 – Corrente de carga de um capacitor em função do tempo para o circuito RC.

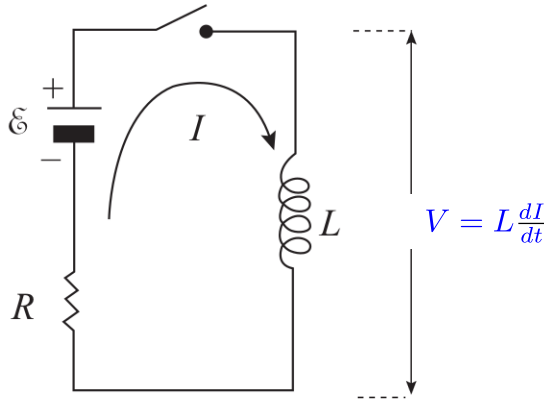


Fonte: Adaptada de Nussenzveig (2015).

2.3.2 Circuito RL

Substituindo o capacitor por um indutor, elemento de confinamento de campo magnético, temos o circuito RL, mostrado na Fig. 3. A queda de potencial nos terminais do indutor com indutância L surge quanto existe uma variação de corrente, ou seja, $V = L \frac{dI}{dt}$.

Figura 3 – Circuito RL.



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (2015).

Assim como fizemos no circuito RC, aplicando a primeira lei de Kirchhoff para o circuito RL, temos que

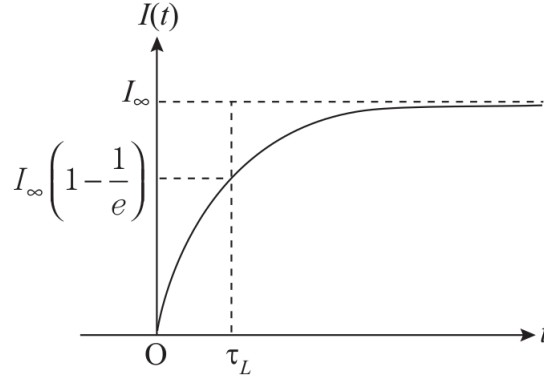
$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI(t)}{dt} + \tau_L I(t) = \frac{\mathcal{E}}{L}, \quad (2.5)$$

onde definimos $\tau_L \equiv L/R$ como sendo a constante de tempo. A Eq. (2.5) é uma EDO de primeira ordem não-homogênea e tem como solução

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right). \quad (2.6)$$

A equação mostra como a corrente muda com o tempo, dependendo dos valores de resistência e indutância. À medida que o tempo cresce, o segundo termo entre parênteses torna-se insignificante devido ao sinal negativo dentro da função exponencial. Essa é a razão pela qual o valor saturado para a intensidade da corrente é igual a $\mathcal{E}/R$. O gráfico da corrente em função do tempo para o circuito RL é mostrado na Fig. 4.

Figura 4 – Corrente em função do tempo para o circuito RL.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2015).

A constante de tempo τ_L representa o tempo necessário para que a corrente atinja cerca de 63,2% de seu valor final I_∞ . Notamos que para ambos os circuitos, RC e RL, a corrente apresenta um comportamento exponencial que são típicos de efeitos transientes. De modo geral, a solução estacionária se estabelece para tempos muito maiores que as constantes de tempo.

2.3.3 Circuito LC

Capacitores e indutores são elementos de armazenamento de energia elétrica e magnética, respectivamente. Se considerarmos um circuito com apenas esses elementos (desprezando R) a energia inicialmente armazenada no circuito irá se conservar, ou seja, não haverá dissipação por efeito Joule. Um circuito LC, com o capacitor inicialmente carregado, está representado na Figura. 5. A primeira lei de Kirchhoff, aplicada à malha, leva a seguinte equação

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} = 0. \quad (2.7)$$

Derivando essa equação no tempo, e considerando que $I = dQ/dt$, temos

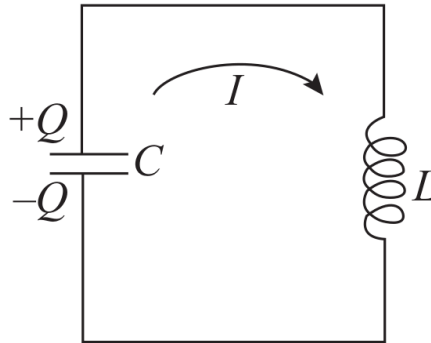
$$\frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \omega_0^2 I(t) = 0, \quad (2.8)$$

onde definimos $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ como a frequência angular de oscilação do circuito LC.

Pode-se verificar que agora temos uma EDO de segunda ordem, cuja solução é dada por

$$I(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.9)$$

Figura 5 – Circuito LC.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2015).

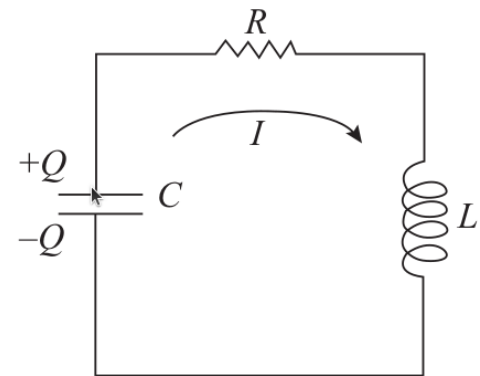
em que A e φ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do problema. Assim, a corrente oscila com o tempo e a energia oscila entre energia elétrica (no capacitor) e energia magnética (no indutor), mantendo constante a energia total.

Percebe-se que as equações diferenciais estão evidentemente entrelaçadas nos saberes de circuitos elétricos. A carga elétrica, assim como a massa, são propriedades intrínsecas da matéria, sendo esta, a grandeza mais elementar no estudo de circuito elétrico. A carga elétrica pode ser determinada a partir de $I(t)$.

2.3.4 Circuito RLC

Incluindo agora todos os elementos em único circuito, teremos o circuito RLC que está representado na Figura. 6. Essa é a situação mais realista para diversos sistemas elétricos.

Figura 6 – Circuito RLC.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2015).

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff para esse sistemas, iremos obter a seguinte equação:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q}{C} = 0. \quad (2.10)$$

Tomando a derivada em relação ao tempo da Eq. (2.10) e dividindo todos os termos por L , chegamos à seguinte equação diferencial homogênea de segunda ordem

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = 0 \quad (2.11)$$

que descreve as oscilações LC amortecidas. Se fizermos $R = 0$ na Eq. (2.11), iremos recair na Eq. (2.8), que descreve oscilações LC não amortecidas.

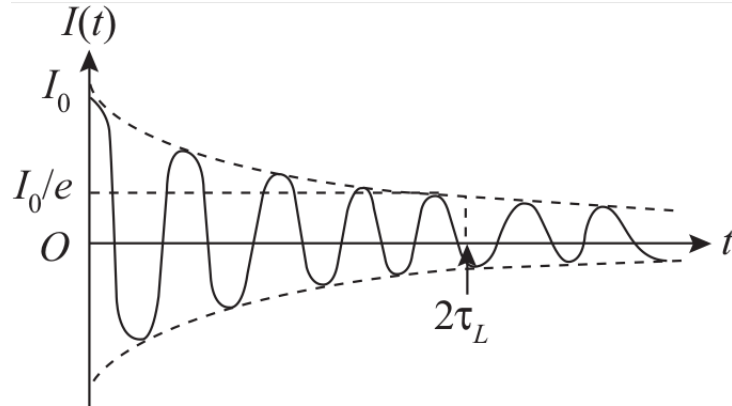
É importante enfatizar que todas as equações diferenciais obtidas para os circuitos analisados podem ser equivalentes a problemas mecânicos, bastando substituir as grandezas elétrica por grandezas mecânicas ($Q \rightarrow x; L \rightarrow m; 1/C \rightarrow k$) como apontado em Nussenzveig (2015, p.187).

A solução detalhada para a Eq. (2.11) encontra-se no Apêndice (A.1) e pode ser escrita da seguinte forma

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} [\cos(\omega_1 t + \phi)] \quad (2.12)$$

Podemos ver que a corrente é composta de uma parte exponencial e uma parte oscilatória. Assim, a corrente oscila, mas com amortecimento exponencial de constante de tempo $2/\gamma = 2\tau_L$, onde $\gamma \equiv R/L$. A Fig 7 mostra o comportamento dessa corrente com o tempo.

Figura 7 – Comportamento da corrente com o tempo para o circuito RLC.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2015).

Por ser o sistema mais geral, iremos concentrar nossa atenção ao desenvolvimento da solução numérica para esse tipo de sistema (circuito RLC) via linguagem de programação Python com o uso de ambientes interativos. Para finalizar esse capítulo, a seguir mostrarmos as principais dificuldades relacionadas à aprendizagem sobre circuito elétricos de modo a embasar nossa proposta didática.

2.4 DIFICULDADES RELACIONADAS A APRENDIZAGEM SOBRE CIRCUITOS ELÉTRICOS

As dificuldades enfrentadas pelos alunos ao compreender os conteúdos de circuitos elétricos são variadas e podem decorrer de uma série de fatores intrínsecos à complexidade desse tema. Os circuitos elétricos analisados na seção anterior frequentemente representam um desafio para os estudantes devido à sua natureza abstrata e à necessidade de compreensão de princípios físicos e matemáticos interligados.

Uma das dificuldades mais comuns reside na compreensão dos conceitos fundamentais, como a diferença de potencial, a corrente elétrica e a resistência. Muitos alunos têm dificuldade em visualizar esses fenômenos abstratos e entender como eles se manifestam no contexto de um circuito. A falta de familiaridade com as grandezas elétricas e suas unidades pode levar a equívocos conceituais que se refletem nas etapas mais avançadas do aprendizado.

Além disso, a análise de circuitos elétricos frequentemente exige habilidades matemáticas, incluindo o uso de leis como a Lei de Ohm e a Lei de Kirchhoff. Os alunos podem enfrentar obstáculos na aplicação desses princípios, especialmente quando a abordagem matemática é combinada com a interpretação física do circuito. A transição entre a teoria e a prática, muitas vezes, é um ponto crítico para a compreensão, uma vez que os alunos precisam conectar os conceitos abstratos aos experimentos práticos.

A falta de recursos visuais adequados e de experiências práticas também pode contribuir para as dificuldades. Circuitos elétricos são, por natureza, sistemas dinâmicos, e a compreensão completa muitas vezes exige uma abordagem prática e experimental. Sem a oportunidade de manipular componentes elétricos reais e observar diretamente os efeitos das mudanças, os alunos podem lutar para internalizar os conceitos abstratos apresentados em sala de aula.

Para superar essas dificuldades, é crucial adotar estratégias de ensino que envolvam métodos variados, como simulações virtuais, experimentos práticos, resolução de problemas contextualizados e atividades de grupo. A interdisciplinaridade também pode ser explorada, conectando os circuitos elétricos a outras disciplinas, como física e matemática. Além disso, abordagens pedagógicas que valorizem a construção gradual do conhecimento e a conexão com a vida cotidiana dos alunos podem contribuir para tornar os conceitos de circuitos elétricos mais acessíveis e significativos.

na Tabela 1, apresentamos as principais concepções alternativas e uma síntese das dificuldades de natureza específicas relacionadas aos conceitos de corrente elétrica, diferença de potencial e resistência elétrica levantadas por Dorneles (2008).

Dentro desse contexto, propomos uma abordagem alternativa em que o aluno possa aprender tanto a propriedades matemáticas dos circuitos que envolvem resistor, capacitor

Tabela 1 – Principais dificuldades conceituais relacionada aos circuitos com resistor, capacitor e indutor.

	Conceitos	Dificuldades
Circuitos RC	Corrente elétrica	Compreender que durante os processos de carga e descarga a intensidade da corrente elétrica decai exponencialmente. Considerar a conservação espacial da corrente elétrica.
Circuitos RC	Carga elétrica	Compreender os processos de carga e descarga do capacitor. Entender a relação entre carga elétrica e corrente elétrica.
Circuitos LC e RLC	Carga elétrica e corrente elétrica	Relacionar a intensidade da corrente elétrica com a quantidade de carga elétrica armazenada no capacitor em função do tempo. Identificar o sentido das linhas de campo magnético no indutor, durante os processos de carga e descarga do capacitor.
Circuitos LC e RLC	Campo eletromagnético	Compreender o comportamento das energias elétrica, magnética e eletromagnética, durante uma oscilação completa.

e indutor, como aplicar métodos de resolução numérica para resolver e levantar dados a respeito desses tipos de circuitos e mitigar essas dificuldades.

3 METODOLOGIA

O trabalho de pesquisa será desenvolvido de modo a obter os objetivos propostos seguindo as seguintes etapas:

(i) Desenvolvimento de modelos matemáticos - com base nos conhecimentos adquiridos, serão desenvolvidos modelos matemáticos precisos para representar circuitos RLC.

(ii) Implementação em Python - utilizando as bibliotecas e ferramentas apropriadas, os modelos matemáticos serão implementados em Python e testados em ambientes interativos (Jupyter Notebook ou Google Colab);

(iii) Validação das simulações - os resultados numéricos serão analisados com base nos cálculos analíticos de modo a garantir a adequação dos conteúdos e a eficácia pedagógica da proposta.

(iv) Produto educacional - será elaborado um material didático com a parte teórica integrada às simulações em Python dentro do ambiente Jupyter Notebook, contendo orientações para professores sobre como incorporar as simulações no ensino de circuitos RLC, bem como sugestões de atividades e práticas pedagógicas.

3.1 IMPLEMENTAÇÃO EM PYTHON.

3.1.1 Método de Euler para equações diferenciais de segunda ordem

O Método de Euler é uma técnica numérica utilizada para resolver EDOs de primeira ordem. A equação diferencial para o circuito RLC que estamos interessados é de segunda. No entanto, podemos transformar uma equação diferencial de segunda ordem em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem. Vamos descrever então esse procedimento para aplicar no nosso sistema, mas antes vamos entender o método de Euler aplicado a uma EDO de primeira ordem.

Dada uma EDO genérica de primeira ordem

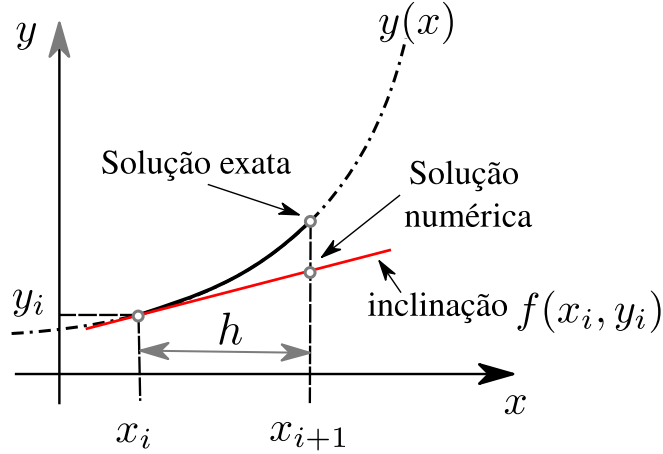
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.1)$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$, podemos identificar a inclinação a partir da própria equação diferencial, ou seja,

$$\text{inclinação} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i). \quad (3.2)$$

O método de Euler assume que, em uma pequena distância h na vizinhança de (x_i, y_i) , a função $y(x)$ tem uma inclinação constante e igual à inclinação em (x_i, y_i) , como é mostrado na Fig. 8.

Figura 8 – Método aproximado de Euler.



Fonte: Autoria própria.

O ponto subsequente da solução numérica (x_{i+1}, y_{i+1}) é calculado da seguinte forma

$$x_{i+1} = x_i + h \quad \text{e} \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (3.3)$$

Dado uma condição inicial, $y(x_0) = y_0$, usamos essa condição para obter a solução numérica para a função $y(x)$ no ponto $y(x_0 + h)$. De posse desse valor, calculamos o ponto $y(x_0 + 2h)$, e assim sucessivamente. Com isso, conseguimos dados numéricos aproximados à função $y(x)$. Esse é o método de Euler. Quanto menor o valor de h , melhor será a aproximação, e maior o número de cálculos, sendo também maior o tempo necessário para realizá-los.

Verificando agora uma EDO de segunda ordem genérica,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}), \quad (3.4)$$

podemos reescrever como um sistema de duas equações de primeira ordem introduzindo uma variável auxiliar $v(x) = y'(x)$,

$$\begin{cases} y'(x) = v(x) \\ v'(x) = f(x, y, v). \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim, com o sistema de duas EDOs de primeira ordem, podemos aplicar o método de Euler obedecendo as seguintes etapas:

1. **Condições Iniciais:** Definimos as condições iniciais $y(x_0) = y_0$ e $v(x_0) = v_0$ para um ponto inicial x_0 .

2. Parâmetros relacionados ao passo:

- Definimos o tamanho do passo h : aqui definimos o valor do intervalo entre cada ponto de amostragem.
- Número Total de Passos N : definimos quantos passos o método deve realizar, após esse valor, o código é interrompido.

3. Iteração:

- Para cada passo i de 1 até N :
 - Calculamos a derivada $\frac{dy}{dx}$ em $x_i, y_i, \frac{dy}{dx_i}$: $f(x_i, y_i, \frac{dy}{dx_i})$.
 - Usamos a fórmula de Euler para calcular os próximos valores de y e $\frac{dy}{dx}$:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{dy}{dx_i} \quad (3.6)$$

$$\frac{dy}{dx_{i+1}} = \frac{dy}{dx_i} + h \cdot f(x_i, y_i, \frac{dy}{dx_i}) \quad (3.7)$$
 - Atualizamos x_{i+1} usando $x_i + h$.
 - Armazenamos os valores calculados nas listas x , y , e $\frac{dy}{dx}$.
- A iteração irá prosseguir até alcançar o ponto final desejado ou um número específico de iterações.

Como exemplo, vamos usar uma equação específica que será similar à equação diferencial para o circuito RLC, para mostrar a implementação no código computacional. Consideremos então a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\gamma \frac{dy}{dx} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.8)$$

com γ e ω_0 duas constantes arbitrárias. Definimos uma nova quantidade $v(x)$, tal que $v(x) = dy/dx$ e $dv/dx = d^2y/dx^2$. Nossa equação diferencial será então reescrita como

$$\frac{dv(x)}{dx} + 2\gamma v(x) + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.9)$$

Finalmente, temos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dy}{dx} = v(x) \quad (3.10)$$

$$\frac{dv}{dx} = -2\gamma v(x) - \omega_0^2 x. \quad (3.11)$$

Após aplicar o método de Euler descrito anteriormente para cada equação, teremos:

$$y[i + 1] = y[i] + h \cdot v[i] \quad (3.12)$$

$$v[i + 1] = v[i] - h(2\gamma \cdot v[i] - \omega_0^2 \cdot y[i + 1]). \quad (3.13)$$

Essas equações são resolvidas simultaneamente e como são mutuamente dependentes ($v[i]$ está presente em ambas), podemos nos referir como sistema de equações acopladas. Para nossos propósitos futuros, usaremos $2\gamma = R/L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$.

A solução exata para a Eq. (3.8) é dada pela seguinte função:

$$y(x) = Ae^{-\gamma x} \cos(\omega x - \delta), \quad (3.14)$$

onde $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ e A é uma constante.

O Código 3.1.1 fornece um exemplo, implementado em Python, para a solução da Eq. (3.8) usando o método de Euler e comparando com a solução exata, Eq. (3.14) (linha 34 do Código 3.1.1). Os valores de constante usadas foram $\gamma = 0,5$, $\omega_0 = 25$ (que fornece $\omega = 5,0$), $\delta = 0$ e $A = 2,0$. As condições iniciais foram ajustadas como $y_0 = 0$ e $v_0 = 2$.

Código 3.1.1 – Método Euler implementado para uma EDO de segunda ordem.

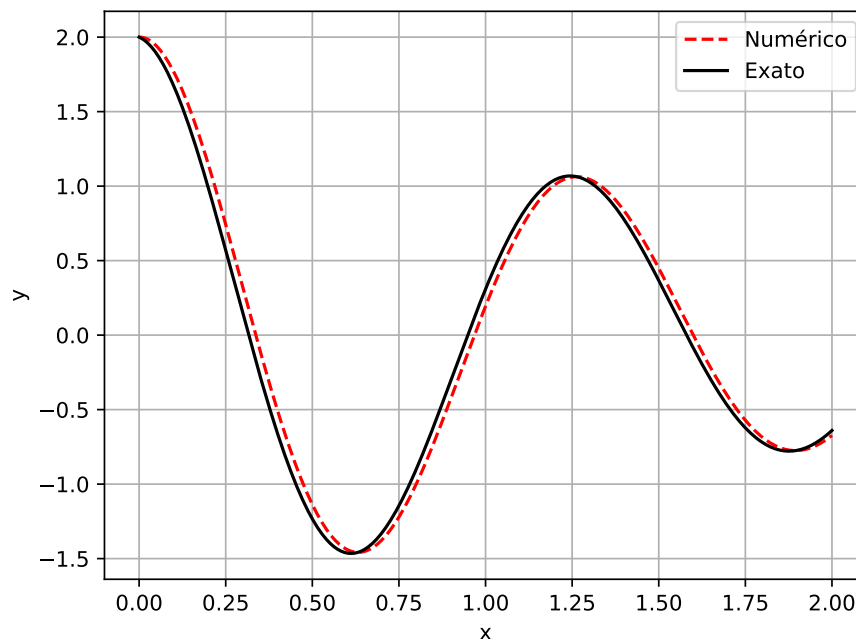
```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  #constantes da EDO
5  R = 20
6  L = 20
7  C = 0.002
8  gamma = 0.5
9  omega = 4.97  #omega^2 = omega_0^2 - b^2
10
11
12 #Condições iniciais
13 x0 = 0.0
14 y0 = 2.0
15
16 #incremento h
17 xf = 2
18 n = 1001
19 h = (xf-x0)/(n-1)
20
21 #listas com as variáveis x, y e dy/dx=v
22 x = np.linspace(x0,xf,n)
23 y = np.zeros(n)
24 v = np.zeros(n)
25
26 #Método de Euler para EDO segunda ordem
27 for j in range(0,n-1):
28     v[0] = 0.0
29     y[0] = y0
30     y[j+1] = y[j] + h*(v[j])
31     v[j+1] = v[j] - h*(v[j])*(R/L) - h*(1/(L*C))*y[j+1]
```

```
32
33 #Solução exata da EDO
34 y_exato = 2*np.exp(-gamma*x)*np.cos(omega*x)
35
36 #Plot resultado numérico e exato
37 plt.plot(x,y,"--r", label="Numérico")
38 plt.plot(x,y_exato,"-k", label="Exato")
39 plt.legend(loc="upper right")
40 plt.xlabel('x')
41 plt.ylabel('y')
42 plt.grid()
43 plt.show()
```

As linhas finais do Código 3.1.1 (linhas 37-43) plotam os gráficos da função $y(x)$ de forma numérica e exata. Os resultados são apresentados na Fig. 9, onde podemos ver que a solução da EDO usando a aproximação de Euler (curva vermelha tracejada) é aproximadamente a mesma da solução exata (curva contínua preta). Assim, podemos afirmar que o método de Euler, apesar de sua simplicidade, apresenta resultados satisfatórios para o nossos propósitos.

Figura 9 – Solução de uma EDO com o método numérico (linha vermelha tracejada) e exata (linha preta contínua).



Fonte: Autoria própria.

É importante destacar que o método de Euler pode não ser tão preciso para certos tipos de equações diferenciais ou quando o tamanho do passo é muito grande.

Existem métodos mais avançados, como o método de Runge-Kutta, que podem fornecer resultados mais precisos em algumas situações. Portanto, a escolha do método depende das características específicas do problema que está sendo abordado.

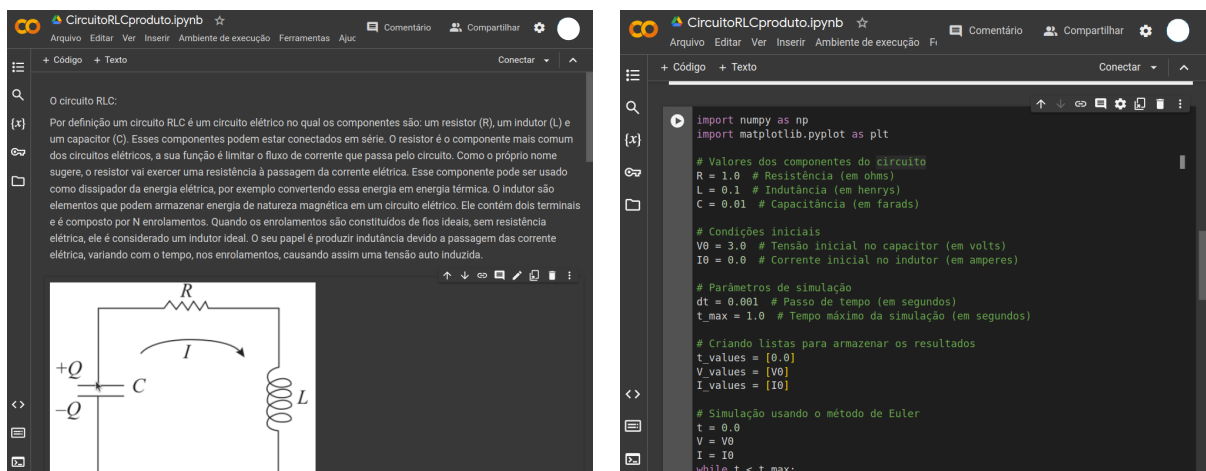
3.1.2 Implementação do código no Google Colab

Como descrevemos no capítulo anterior, o Colab permite que qualquer pessoa escreva e execute código Python arbitrário pelo navegador e é especialmente adequado para aprendizado de máquina, análise de dados e educação. Mais tecnicamente, o Colab é um serviço de notebooks hospedados do Jupyter que não requer nenhuma configuração para usar e oferece acesso sem custo financeiro a recursos de computação como Unidade de Processamento Gráfico. Esse ambiente interativo é um produto do Google Research, área de pesquisas científicas do Google.

O Jupyter é o projeto de código aberto em que o Colab se baseia. O Colab permite que você use e compartilhe notebooks do Jupyter com outras pessoas, sem precisar fazer nenhum download, instalação nem executar nada. Os notebooks do Colab são armazenados no Google Drive ou podem ser carregados pelo GitHub. Os notebooks do Colab podem ser compartilhados da mesma forma que Documentos ou Planilhas Google, isso o torna muito adequado para aplicações educacionais.

A Fig. 10 mostra interface gráfica do ambiente interativo do Google Colab, onde podemos ver ambiente textual que também pode carregar imagens (esquerda) e o código implementado em python (direita). Assim como os demais produtos Google compartilhados em nuvem, esse ambiente possibilita o trabalho colaborativo entre os membros envolvidos no projeto.

Figura 10 – Interface do Google Colab destacando o ambiente textual e o código implementado.



Fonte: Google Colab.

3.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Sequência didática (SD) são estratégias planejadas por etapa pelo docente, de modo que o entendimento do conteúdo proposto para o aprendiz seja alcançado. Pode-se afirmar que a sequência didática também é uma forma com que os professores e os entendidos em educação encontram, para fortalecer o entendimento do aprendiz em relação ao que é assimilado, fazendo com que esse conhecimento seja contínuo e relevante, de modo a criar condições satisfatórias para que o aprendiz tenha uma aprendizagem significativa e contrapondo-se ao secular modelo tradicional de ensino.

Estratégia adotada pela teoria educacional de (AUSUBEL, 2003) afirmando que para aquisição e retenção da aprendizagem significativa o professor deve identificar os conhecimentos prévios dos alunos, elaborar um material potencialmente significativo e aplicá-lo, dando início ao ciclo de interações entre os novos conteúdos e estrutura cognitiva do aluno em que se dá a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora e, posteriormente, buscando assim observar se há indício de aprendizagem significativa.

O público discente dessa sequência didática são alunos que tem algum conhecimento prévio de circuitos simples, pois pretendemos usar esse conhecimentos como âncora para conduzi-los aos novos conhecimentos, que são os conteúdos de linguagem de programação Python, cálculo numérico e circuitos elétricos do tipo RLC.

Nos tópicos seguintes, serão apresentados os conteúdos programáticos e objetivos sugeridos para as aulas a serem implementadas nesta sequência didática. Totalizando um total de 5 aulas somando pouco mais de 4 h de duração.

Sequência Didática:

Aula 1

Duração: 50 minutos.

1. Conteúdo:

- Habilidades de programação em Python, utilizando o ambiente interativo do Jupyter Notebooks;
- Conceitos fundamentais de programação.

2. Objetivos:

- Conhecer a aplicação Jupyter notebook;
- Compreender os conceitos básicos de programação em Python;
- Familiarizar-se com bibliotecas Python populares, como NumPy e Matplotlib.

3. Recursos necessários:

- Laboratório de informática, Data show, pincel e quadro.

4. Metodologia:

- Nos primeiros quinze minutos o professor deve apresentar a aplicação Jupyter notebook, mostrando sua interatividade de comando e interface gráfica, conduzindo ao primeiro acesso e primeiros comandos, blocos de notas, compilação e etc. Em seguida uma explicação dos princípios da programação: algoritmos, variáveis, tipos de dados levando para uma introdução à sintaxe básica do Python: variáveis, entrada/saída. E por fim exercícios práticos simples para aplicar os conceitos apresentados.

Aula 2

Duração: 50 minutos.

1. Conteúdo:

- Introduzir os estudantes aos conceitos fundamentais e características dos circuitos elétricos RLC, destacando a interação entre resistores (R), indutores (L) e capacitores (C).

2. Objetivos:

- Compreender as características individuais de resistores, indutores e capacitores;
- Analisar o comportamento de circuitos RLC em regime transitório e permanente;
- Aplicar as leis fundamentais da eletricidade na resolução de problemas em circuitos RLC.
- Explorar aplicações práticas dos circuitos RLC na eletrônica.

3. Recursos necessários:

- Laboratório de informática, Data show, pincel e quadro.

4. Metodologia:

- Em uma aula expositiva o professor deve usar os conhecimentos prévios dos alunos sobre circuitos simples para introduzir os novos conceitos de circuito do tipo RLC. Essa aula o professor pode usar de metodologia tradicional para mostrar os comportamentos do circuito RLC usando equações diferenciais ordinárias.

Aula 3

Duração: 50 minutos.

1. Conteúdo:

- Breve introdução do método de Euler.

2. Objetivos:

- Método de Euler na resolução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias.
- Ensinar os alunos a implementar o Método de Euler em ambientes computacionais, como Python.

3. Recursos necessários:

- Laboratório de informática, Data show, pincel e quadro.

4. Metodologia:

- O professor em aula expositiva tradicional deve explorar o passo a passo da derivação na fórmula do Método de Euler aplicando o método resolução numérica de problemas práticos, relacionados ao campo de estudo dos alunos. Promover a discussão sobre o significado de cada termo na fórmula. Por fim realizar exercícios práticos de derivar o método para diferentes EDOs simples.

Aula 4

Duração: 50 minutos.

1. Conteúdo:

- Modelar e resolver o circuito RLC.

2. Objetivos:

- Realização da modelagem de Circuitos RLC em Python no ambiente Jupyter notebook.

3. Recursos necessários:

- Laboratório de informática, Data show, pincel e quadro.

4. Metodologia:

- O professor deve conduzir os alunos no passo a passo da simulação de circuitos elétricos, para que os discentes possam visualizar e analisar o comportamento de circuitos RLC virtualmente. O professor deve agir como mediador para criar um ambiente em que os discentes atuem de maneira ativa e integrada com os colegas na construção do código a tecnologia para tornar o aprendizado mais visual e interativo, facilitando a compreensão dos conceitos. Isso proporciona uma compreensão mais profunda das interações entre os componentes.

Aula 5

Duração: 50 minutos.

1. Conteúdo:

- Análise de dados e gráficos.

2. Objetivos:

- Interpretação dos dados e dos gráficos.
- Reconhecer os parâmetros físicos.
- Estudar e discutir os comportamentos dinâmicos da corrente e carga no decorrer do tempo.

3. Recursos necessários:

- Laboratório de informática, Data show, pincel e quadro.

4. Metodologia:

- O professor deve sugerir variações nos parâmetros físicos dos problemas, fazendo os alunos pensarem em prever o comportamento do sistema. Usando perguntas simples em primeiro momento. Por exemplo:
 - O que acontece com a corrente do circuito se aumentarmos a tensão na fonte?
 - É necessário quanto tempo até o sistema amortecer totalmente?
 - O que acontece com a corrente do circuito se foi reduzida a resistência elétrica?

O professor deve mediar uma breve discussão em cada uma das perguntas estimulando que anotem suas respostas. Em seguida, os alunos devem colocar em prática as variações dos parâmetros sugeridas nas questões, onde eles mesmos devem realizar as alterações no código e compilar. Feito a compilação dos códigos os alunos devem interpretar e comparar com as suas respostas (predições) que fizeram antes. Verificando suas assertivas ou corrigindo quando necessário.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesse capítulo apresentamos os resultados numéricos que modelam o circuito RLC série. Além disso, fazemos uma discussão física variando alguns parâmetros para destacar o comportamento desse tipo de circuito e obter determinados resultados que podem ser discutidos em sala de aula. Ressaltamos que os métodos numéricos não geram uma fórmula para a solução da equação diferencial do circuito RLC. Em vez disso, geram uma sequência de aproximações ao valor da solução em pontos especificados. Além disso, se usarmos um número suficiente de pontos e unirmos com segmentos de linha reta, podemos obter uma aproximação geral da curva de solução correspondente à solução do valor inicial para um dado problema. É assim que as curvas de solução aproximadas serão geradas aqui por meio de um código em Python.

4.1 RESULTADOS NUMÉRICOS DO CIRCUITO RLC

Abaixo apresentamos o código fonte Python na íntegra (Código 4.1.1) que implementa o método de Euler à equação do circuito RLC série. Os valores para as grandezas associadas a cada componente R , L e C são determinados nas linhas 5-7. Estabelecemos também valores iniciais para a tensão no capacitor, V_0 , e corrente no indutor, I_0 (linhas 10 e 11, respectivamente). O tempo de simulação é limitado por $t_{\text{máx}}$ (linha 14) com intervalos de tempo de $dt = 10^{-3}$ s, linha 15. Quanto menor o valor de dt , que é o paço de iteração, mais ajustada a curva do cálculo numérico vai estar da solução exata. A Fig. 11 apresenta os resultados a partir do Código 4.1.1 para o circuito RLC série, onde destacamos a variação da tensão no capacitor e da corrente no indutor em termos do tempo.

Código 4.1.1 – Código em Python usando o método de Euler para o circuito RLC em série.

```

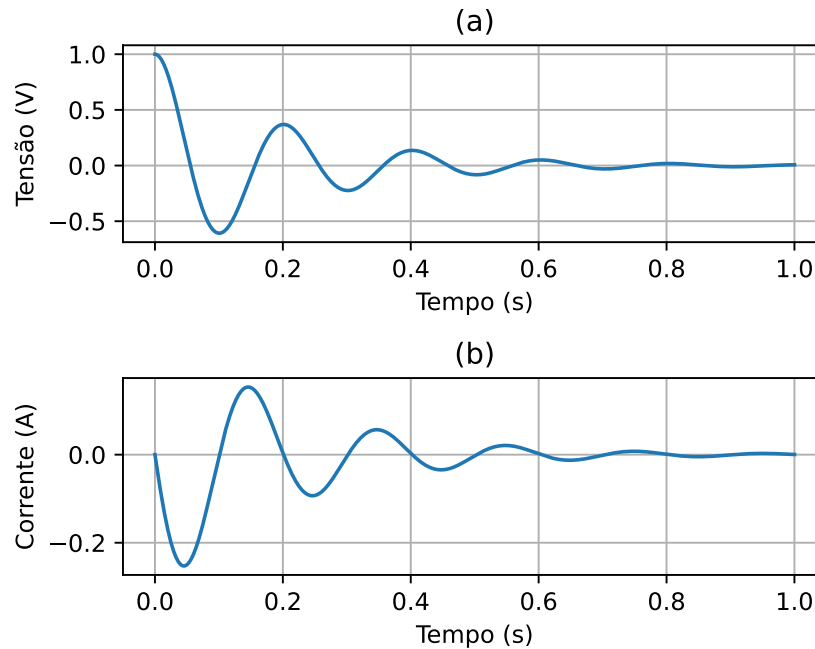
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  #tensão no capacitor e corrente no indutor.
4  # Valores dos componentes do circuito
5  R = 1.0  # Resistência (em ohms)
6  L = 0.1  # Indutância (em henrys)
7  C = 0.01 # Capacitância (em farads)
8
9  # Condições iniciais
10 V0 = 1.0 # Tensão inicial no capacitor (em volts)
11 I0 = 0.0 # Corrente inicial no indutor (em amperes)
12
13 # Parâmetros de simulação

```

```
14 t_max = 1.0 # Tempo máximo da simulação (em segundos)
15 dt = 0.0001 # Passo de tempo (em segundos)
16
17 # Criando listas para armazenar os resultados
18 t_values = [0.0]
19 V_values = [V0]
20 I_values = [I0]
21
22 # Simulação usando o método de Euler
23 t = 0.0
24 V = V0
25 I = I0
26 while t < t_max:
27     # Calcular as taxas de mudança das grandezas
28     dVdt = (1.0 / C) * I
29     dIdt = (-1.0 / L) * V - (R / L) * I
30
31     # Atualizar as grandezas usando o método de Euler
32     V += dVdt * dt
33     I += dIdt * dt
34     t += dt
35
36     # Armazenar os valores atuais
37     t_values.append(t)
38     V_values.append(V)
39     I_values.append(I)
40
41 # Plotar os resultados
42 plt.figure(figsize=(5, 4))
43 plt.subplot(2, 1, 1)
44 plt.plot(t_values, V_values)
45 plt.title('(a)')
46 plt.xlabel('Tempo (s)')
47 plt.ylabel('Tensão (V)')
48 plt.grid(True)
49
50 plt.subplot(2, 1, 2)
51 plt.plot(t_values, I_values)
52 plt.title('(b)')
53 plt.xlabel('Tempo (s)')
54 plt.ylabel('Corrente (A)')
55 plt.grid(True)
56
57 plt.tight_layout()
58 plt.show()
```

Nessa situação, como a resistência está presente no circuito (o que é geralmente encontramos na realidade), temos uma oscilação amortecida. A energia do circuito está armazenada inicialmente no capacitor que está carregado e tem tensão inicial de $V_0 = 1,0$ V. Como não temos fontes externas, no transcorrer do tempo o capacitor começa a descarregar através do indutor gerando uma corrente nesse último, fazendo a energia armazenada crescer a partir de zero. Ao mesmo tempo, a descarga no capacitor reduz a sua energia armazenada. Uma parte da energia é dissipada pelo resistor de tal modo que a energia total não permanece constante e notamos o decréscimo na amplitude tanto da diferença de potencial no capacitor como da corrente no indutor, como podemos ver nos resultados da Fig. 11 que são geradas pelo Código 4.1.1.

Figura 11 – Cálculo numérico via aproximação de Euler da (a) tensão no capacitor e (b) da corrente no indutor.



Fonte: Autoria própria.

Embora os alunos de nível básico geralmente não tenham habilidades matemáticas para poder resolver equações diferenciais relativamente complicadas, suas habilidades de programação podem facilmente permitir lidar numericamente com certos tipos de problemas. No entanto, vale a pena discutir aqui os resultados de forma mais precisa com análise das soluções analíticas e o comportamento esperado para a mudança nos parâmetros do sistema.

A equação diferencial do circuito RLC, Eq. (2.11), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0, \quad (4.1)$$

onde definimos

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{R}{L} \quad (4.2)$$

como sendo a frequência angular das oscilações livres e o fator de amortecimento nesse circuito, respectivamente. O fator de amortecimento γ descreve a taxa com que as oscilações do sistema diminuem ao longo do tempo devido ao efeito da resistência no circuito. A frequência natural ω_0 é uma característica intrínseca do circuito RLC que descreve a frequência de oscilação do sistema quando não há amortecimento presente.

Como demonstrado no Apêndice A, a solução para a Eq. (4.1) é dada por

$$I(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (4.3)$$

sendo A e φ constantes a serem definidas pelas condições iniciais do sistema e

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (4.4)$$

é a frequência de oscilação resultante no sistema. Ela descreve a taxa efetiva de oscilação após o amortecimento ser considerado.

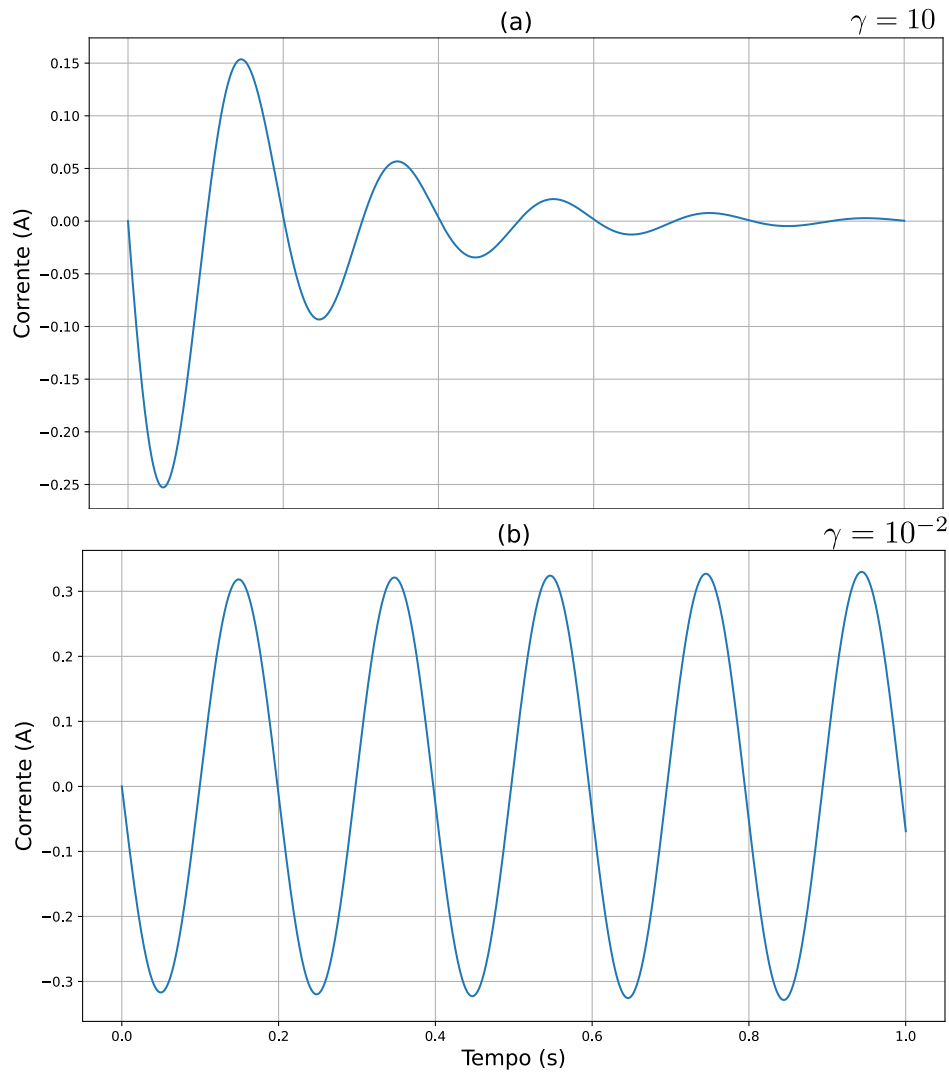
Variando os parâmetros do sistema (R , L e C) podemos analisar três casos de interesse para compreensão do comportamento gráfico da corrente elétrica $I(t)$, são eles: subamortecido, amortecimento crítico e sobreamortecido. Vamos discuti-los brevemente a seguir:

4.1.1 Caso subamortecido

O movimento subamortecido é o apresentado para a corrente no gráfico da Fig. 11 que é descrito pela Eq. (4.3), onde temos $\omega_1 > 0$ na Eq. (4.4), ou seja, $\omega_0 > \gamma/2$. Essa frequência é conhecida como frequência angular do oscilador amortecido, no entanto, é importante destacar que não podemos definir uma frequência na presença de amortecimento, pois o movimento não é periódico. Entretanto, definindo um tempo τ (tempo entre dois pontos adjacentes em $I(t) = 0$) com $\omega_1 \equiv 2\pi/\tau$, a frequência angular ω_1 faz sentido para um determinado período de tempo. A frequência ω_1 é menor que a frequência ω_0 (a frequência do oscilador na ausência de amortecimento). O gráfico na Fig. 12(a) mostra a oscilação da corrente para $\omega_1 < \omega_0$, onde fizemos $\gamma = 10$, ou seja, $R = 10L$. Esse resultado é o mesmo que aparece na Fig. 11.

Para o amortecimento pequeno, ou seja, $\gamma \rightarrow 0$, teremos $\omega_1 \approx \omega_0$. Fazer $\gamma \rightarrow 0$ é tomar R muito pequeno em relação a L . Dessa forma, consideramos o valor $\gamma = 10^{-2}$ que é equivalente a usar $R = 10^{-2}L$ e plotamos o gráfico da Fig. 12(b). Nesse caso teremos uma curva senoidal do movimento não amortecido com amplitude praticamente constante e frequência bem definida ω_0 .

Figura 12 – Corrente no circuito RLC para o caso (a) $\gamma = R/L = 10$ e (b) $\gamma = R/L = 10^{-2}$.



Fonte: Autoria própria.

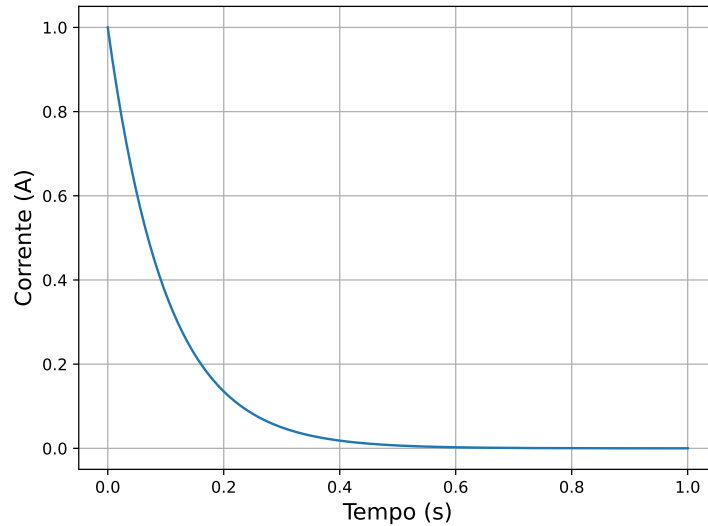
Os resultados na Fig. 12, podem ser extremamente importante como discussão na sala de aula, uma vez que variando esses parâmetros, o aluno percebe o efeito do valor da resistência R dentro do circuito RLC e sua influência no amortecimento da corrente no circuito. Aqui também vale a pena discutir sobre a conservação da energia, pois ao contrário do oscilador harmônico simples, a energia do oscilador amortecido não é constante no tempo. Em vez disso, a energia é continuamente fornecida ao meio de amortecimento (resistor) e dissipada como calor por efeito joule.

4.1.2 Caso de amortecimento crítico e sobreamortecido

Quando o fator de amortecimento é relativamente grande, ou seja, $\gamma > \omega_0$, o sistema não apresenta movimento oscilatório. A corrente se reduz monotonamente do seu valor inicial até se anular. O caso do amortecimento crítico ocorre justamente quando $\gamma = \omega_0$.

A Fig. 13 apresenta o resultado para a curva de corrente para o amortecimento crítico com corrente inicial $I(0) = 1,0$ A. Para um determinado conjunto de condições iniciais, um oscilador criticamente amortecido se aproximará do equilíbrio a uma taxa mais rápida do que aquela de um oscilador sobreamortecido.

Figura 13 – Amortecimento crítico.



Fonte: Autoria própria.

Aqui pode ser discutido aplicações do uso de osciladores nesse regime. Esta característica é importante no desenvolvimento de projetos práticos, como por exemplo, um galvanômetro (um dispositivo eletromecânico usado para detectar e medir correntes elétricas), quanto o sistema retornar ao equilíbrio o mais rápido possível.

Por fim, o comportamento sobreamortecido é quando o parâmetro de amortecimento γ é ainda maior do ω_0 . De modo geral, a escolha do tipo de amortecimento em um circuito RLC depende das necessidades específicas para determinada aplicação. O amortecimento crítico, por exemplo, é útil quando é necessário um rápido retorno ao estado de repouso sem oscilações. O subamortecimento, por sua vez, é adequado quando oscilações amortecidas são desejadas, enquanto o sobreamortecimento é preferido quando a supressão rápida de oscilações é necessária.

4.2 RESULTADOS ANALÍTICOS DO CIRCUITO RLC

Uma alternativa à aplicação do cálculo numérico usando a aproximação simplificada de Euler, é estudar as soluções analíticas e plotar os gráficos diretamente. Vamos apresentar aqui alguns códigos com a análise da solução exata da Eq. (4.1) discutindo alguns termos das equações e suas contribuições no resultado final. O Código 4.2.3 plota os termos exponencial e oscilante da Eq. (4.1). O resultado é apresentado na Fig. 14.

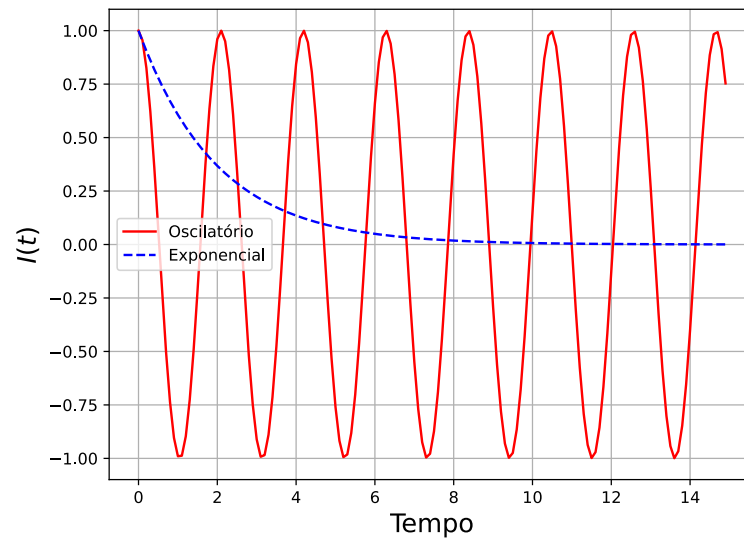
Código 4.2.1 – Código em Python para solução exata do termo oscilatório e do termo exponencial para da corrente no circuito RLC em série.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 #Curvas oscilante e exponencial
4 # Termo oscilatório
5 def termo_oscilatorio(t, frequencia_angular):
6     return np.cos(frequencia_angular * t)
7
8 # Termo exponencial
9 def termo_exponencial(t, fator_amortecimento):
10    return np.exp(-fator_amortecimento * t)
11 resistencia = 0.5
12 capacitancia = 1.0
13 indutancia = 0.5
14 # Parâmetros
15 frequencia_angular = 3.0
16 fator_amortecimento = 0.5
17
18 # Valores de tempo de 0 a 5 segundos com intervalo de 0.1 segundo
19 tempo = np.arange(0, 15, 0.1)
20
21 # Calcula os termos oscilatório e exponencial
22 oscilatorio = termo_oscilatorio(tempo, frequencia_angular)
23 exponencial = termo_exponencial(tempo, fator_amortecimento)
24
25 # Plota os resultados
26 plt.plot(tempo, oscilatorio, 'r-', label='Oscilatório')
27 plt.plot(tempo, exponencial, 'b--', label='Exponencial')
28
29 # Configurações do gráfico
30 plt.xlabel('Tempo')
31 plt.ylabel('$i(t)$')
32 plt.grid(True)
33 plt.legend()
34
35 # Exibe o gráfico
36 plt.show()
```

Aqui o docente pode explorar sobre a combinação desses termos, suscitando a construção da solução amortecida na mente do aluno devido à presença da resistência R .

Da mesma forma aqui é mostrado o código do circuito RLC em que plota os comportamentos oscilante e amortecida, para que os alunos possam fazer análises separadamente.

Figura 14 – Curva dos termos oscilante e exponencial.



Fonte: Autoria própria.

Código 4.2.2 – Código em Python para soluções amortecidas e não amortecidas.

```

1  #curvas oscilante e amortecida separadamente.
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  # Função para a resposta amortecida do circuito RLC
6  def resposta_amortecida(t, fator_amortecimento, frequencia_angular):
7      return np.exp(-fator_amortecimento * t) * np.cos(frequencia_angular * t)
8  resistencia= 3
9  indutancia= 3
10 capacitancia= 0.01
11 # Parâmetros do circuito RLC amortecido
12 fator_amortecimento = 0.5
13 frequencia_angular = 3.0
14
15 # Valores de tempo de 0 a 5 segundos com intervalo de 0.1 segundo
16 tempo = np.arange(0, 10, 0.1)
17
18 # Calcula as respostas amortecida e nãoamortecida
19 resp_amortecida = resposta_amortecida(tempo, fator_amortecimento,
20 frequencia_angular)
21 resposta_nao_amortecida = np.cos(frequencia_angular * tempo)
22
23 # Plota os resultados
24 plt.plot(tempo, resp_amortecida, 'b--', label='Amortecido')
25 plt.plot(tempo, resposta_nao_amortecida, 'r-', label='Não Amortecido')

```

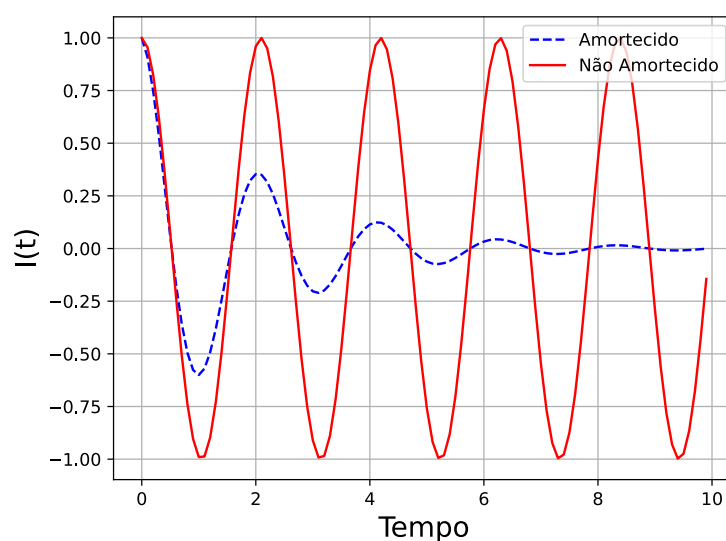
```

26
27 # Configurações do gráfico
28 plt.xlabel('Tempo', size=16)
29 plt.ylabel('I(t)', size=16)
30 plt.grid(True)
31 plt.legend()
32
33 # Exibe o gráfico
34 plt.show()

```

Já na Fig. 15 a linha pontilhada azul indica a influencia (ação de amortecimento) do fator exponencial sobre o senoide indicado na linha vermelha, assim podemos explorar a relação entre as duas curvas, fazer como que o aluno perceba que o fator de amortecimento pode ser aumentado ou diminuído, fazendo as curvas ficarem mais semelhantes ou distintas em relação ao comportamento amortecimento e o oscilante.

Figura 15 – Curva do termo oscilante e da corrente amortecida.



Fonte: Autoria própria.

Por fim, é apresentado o código do circuito RLC, no qual são plotados ambos os comportamentos, permitindo que os alunos os analisem separadamente.

Código 4.2.3 – Código em Python para plotar gráficos de partes da solução e seu resultado final.

```

1 #curvas oscilante, exponencial e amortecida.
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Termo oscilatório
6 def termo_oscilatorio(t, frequencia_angular):
7     return np.cos(frequencia_angular * t)

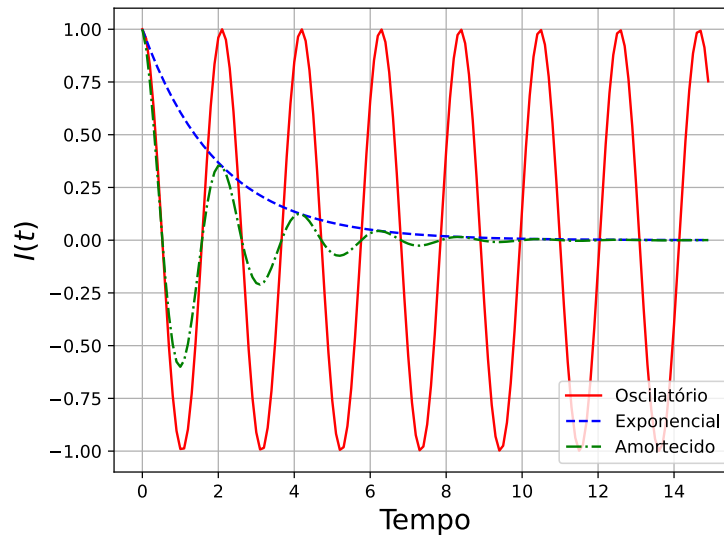
```

```
8
9 # Termo exponencial
10 def termo_exponencial(t, fator_amortecimento):
11     return np.exp(-fator_amortecimento * t)
12
13 # Termo amortecido
14 def termo_amortecido(t, fator_amortecimento, frequencia_angular):
15     return np.exp(-fator_amortecimento * t) * np.cos(frequencia_angular * t)
16
17 # Parâmetros do circuito
18 resistencia= 3
19 indutancia= 3
20 capacitancia= 0.01
21
22 # Parâmetros
23 frequencia_angular = 3.0
24 fator_amortecimento = 0.5
25
26 # Valores de tempo de 0 a 5 segundos com intervalo de 0.1 segundo
27 tempo = np.arange(0, 15, 0.1)
28
29 # Calcula os termos oscilatório, exponencial e amortecido
30 oscilatorio = termo_oscilatorio(tempo, frequencia_angular)
31 exponencial = termo_exponencial(tempo, fator_amortecimento)
32 amortecido = termo_amortecido(tempo, fator_amortecimento, frequencia_angular)
33
34 # Plota os resultados
35 plt.plot(tempo, oscilatorio, 'r-', label='Oscilatório')
36 plt.plot(tempo, exponencial, 'b--', label='Exponencial')
37 plt.plot(tempo, amortecido, 'g-.', label='Amortecido')
38
39 # Configurações do gráfico
40 plt.xlabel('Tempo', size=16)
41 plt.ylabel('$I(t)$', size=16)
42 plt.grid(True)
43 plt.legend()
44
45 # Exibe o gráfico
46 plt.show()
```

É interessante que a análise da Fig. 16 seja feita após as Figs. 14 e 15, para que aconteça uma construção prévia dos conceitos para contribuir na conclusão do aluno, pois na Fig. 16 é explorado as três curvas, exponencial, oscilante e amortecido. Aqui temos como objetivo pedagógico de reforçar a percepção do aluno sobre o comportamento da corrente, que é a combinação da curva oscilatória com a exponencial, gerando a solução

geral do circuito RLC para corrente elétrica.

Figura 16 – Curvas oscilante, exponencial e a amortecida.



Fonte: Autoria própria.

Nesse circuito colocamos um valor de resistência suficientemente pequeno, de modo que ainda aconteça a oscilação, contudo com a característica de movimento harmônico amortecido, ou seja, que indica que o comportamento da corrente elétrica é uma função senoidal mostrado pela curva linha vermelha na Fig. 14 e com um fator de amplitude que diminui exponencialmente como mostrado na Eq. (2.12), e na curva azul pontilhado na Fig. 14

Aqui apresentamos algumas possibilidades de levantamento de dados realizados pela resolução numérica, usando método de Euler, para o circuito RLC. Como esses gráficos o professor pode alterar os parâmetros de condições iniciais explícitos nos códigos e recompilar para gerar novos plots e estudar a variação nos comportamentos das curvas. Além disso, pode encorajar os alunos, de maneira ativa e independente, interajam com os códigos. Os códigos, aliado com as ferramentas interativas e a abordagem inovadora de aplicar um método numérico simples para resolver problemas físicos relacionados aos circuito, é de grande importância para a educação nos dias atuais, onde a tecnologia está cada vez mais presente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho destaca a viabilidade do desenvolvimento de uma ferramenta metodológica com aplicabilidade relevante em cursos superiores relacionados a Física e Engenharias. O produto educacional proposto visa servir como um primeiro contato para alunos, abordando habilidades essenciais, conteúdos e estratégias fundamentais na formação tecnológica.

A ênfase recai sobre a modelagem matemática de problemas físicos, uma habilidade indispensável na resolução de questões complexas. A capacidade de interpretar e transcrever tais problemas para a linguagem matemática é ressaltada, juntamente com a introdução do método numérico, especificamente o método de Euler, embora se reconheça a existência de limitações em suas aproximações.

Um aspecto crucial do trabalho é a incorporação de uma linguagem de programação de alta performance, como Python. Destaca-se a carência de materiais introdutórios que destaquem essa abordagem pedagógica de maneira direta, especialmente voltada para o ensino de física. Além disso, a introdução de ferramentas como Jupyter Notebook e Google Colab, ambas gratuitas e online, é apontada como auspiciosa para os iniciantes em tecnologia.

Portanto, os incrementos de aprendizado oferecidos pelo produto vão além das habilidades específicas, abrangendo a familiarização com linguagens de programação relevantes e ferramentas práticas disponíveis gratuitamente. O texto destaca a importância desses elementos para a formação tecnológica e a pedagogia inovadora no contexto dos cursos superiores em Física e Engenharias.

Considerando as perspectivas futuras, o presente trabalho abre caminho para uma série de desenvolvimentos e aprimoramentos. Primeiramente, é possível explorar a expansão do escopo do produto educacional para abranger não apenas cursos superiores de Física e Engenharias, mas também outras disciplinas tecnológicas e científicas. Isso permitiria uma aplicação mais abrangente e uma contribuição mais significativa para a formação acadêmica em diversas áreas.

Além disso, o aprimoramento do método numérico utilizado, como o método de Euler, poderia ser uma área de pesquisa futura. A investigação de métodos mais avançados e precisos poderia elevar a qualidade das simulações e das soluções numéricas, tornando o produto ainda mais eficaz e relevante.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. *Fundamentos de circuitos elétricos*. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013.
- AUSUBEL, D. *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune & Stratton, 1963.
- AUSUBEL, D. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- BOYLESTAD, R. L. *Introdução à Análise de Circuitos*. São Paulo: Editora Pearson, 2012.
- ÇENGEL, Y. A.; PALM III, W. J. *Equações diferenciais*. Porto Alegre: AMGH Editora, 2014.
- DORNELES, I. A. e. E. V. P. Simulação e modelagem computacionais no auxílio a aprendizagem significativa de conceitos básicos de eletricidade. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, p. 487–496, 2008.
- DORNELES, P. F.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Simulação e modelagem computacionais no auxílio à aprendizagem significativa de conceitos básicos de eletricidade. (Parte II): circuitos RLC. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 30, p. 3308–1, 2008.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física*. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 3.
- KLUYVER, T. et al. Jupyter notebooks-a publishing format for reproducible computational workflows. *Elpub*, v. 2016, p. 87–90, 2016.
- LANGTANGEN, H. P. *Python scripting for computational science*. Heidelberg: Springer, 2008.
- LUTZ, M. *Learning python: Powerful object-oriented programming*. Sebastopol: O'Reilly Media, Inc., 2013.
- MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. d. Possibilidades e limitações das simulações computacionais no ensino da física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 24, p. 77–86, 2002.
- MOREIRA, M. A. *Uma abordagem cognitivista ao ensino da Física*. Porto Alegre: Editora da Universidade, 1983.
- MOREIRA, M. A. *Aprendizagem significativa – breve discussão acerca do conceito*. 2019. Acesso: 05 jan. 2024. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/191-aprendizagem-significativa-breve-discussao-acerca-do-conceito>>.

- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Eletromagnetismo*. São Paulo: Editora Blucher, 2015. v. 3.
- OGATA, K.; SEVERO, B. *Engenharia de controle moderno*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- PELIZZARI, A. et al. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. *Revista PEC*, v. 2, n. 1, p. 37–42, 2002.
- TORRES, J. R. *Uma proposta didática para o ensino de Física através do uso de simulações desenvolvidas na linguagem de programação python e no aplicativo geogebra*. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021.
- VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. Modelagem computacional no ensino de física. In: *XXIII Encontro de Físicos do Norte Nordeste*. Maceió: SBF, 2005.

APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EDO DO CIRCUITO RLC

A.1 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

A equação diferencial do oscilador harmônico amortecido é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0 \quad (\text{A.1})$$

Trata-se de uma equação linear com coeficientes constantes que pode ser resolvida através da suposição

$$\begin{aligned} I &= e^{mt} \\ \frac{dI}{dt} &= me^{mt} \\ \frac{d^2 I}{dt^2} &= m^2 e^{mt}, \end{aligned}$$

que substituída na função diferencial resulta em

$$\begin{aligned} m^2 e^{mt} + 2\gamma m e^{mt} + \omega_0^2 e^{mt} &= 0 \\ m^2 + 2\gamma m + \omega_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

que é a equação característica. Suas raízes são dadas por

$$m = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2},$$

que se desdobra em

$$m_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (\text{A.2})$$

e

$$m_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (\text{A.3})$$

A raízes (A.2) e (A.3) podem ser complexas, reais e distintas, e reais e iguais, dependendo do valor do termo dentro da raiz quadrada. Assim, temos que separar esses três casos.

A.1.1 Raízes complexas

Se o termo $\gamma^2 - \omega_0^2$ for negativo, as raízes serão complexas. Para esse caso, podemos definir

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad (\text{A.4})$$

de modo que as raízes se tornem

$$m_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma + \sqrt{-\omega^2} = -\gamma + i\omega$$

e

$$m_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma - \sqrt{-\omega^2} = -\gamma - i\omega$$

e assim, a solução para a equação diferencial, nesse caso, é formado pelas funções:

$$e^{(-\gamma+i\omega)t} \quad \text{e} \quad e^{(-\gamma-i\omega)t}.$$

Para escrever a solução na senoidal, usamos a relação de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, como segue

$$e^{(-\gamma+i\omega)t} = e^{-\gamma t} e^{i\omega t} = e^{-\gamma t} (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)$$

e

$$e^{(-\gamma-i\omega)t} = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t} (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)$$

A formulação geral segue como

$$\begin{aligned} I &= a_1 e^{-\gamma t} (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + a_2 e^{-\gamma t} (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\ I &= e^{-\gamma t} [(a_1 + a_2) \cos \omega t + i(a_1 - a_2) \operatorname{sen} \omega t] \\ I &= e^{-\gamma t} [c_1 \cos \omega t + i c_2 \operatorname{sen} \omega t] \end{aligned}$$

com $c_1(c_2)$ constantes que podem ser definidas de forma conveniente como

$$\begin{aligned} c_1 &= A \cos \delta \\ c_2 &= A \operatorname{sen} \delta. \end{aligned}$$

Assim, teremos:

$$I = e^{-\gamma t} (A \cos \delta \cos \omega t + i A \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \omega t),$$

usando a propriedade trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$, teremos a solução final

$$I(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \delta). \quad (\text{A.5})$$

Nessa equação, temos o termo oscilante, dado por $\cos(\omega t - \delta)$ e um termo exponencial $e^{-\gamma t}$, no qual faz a amplitude diminuir com o tempo. O resultado é que a corrente oscila com uma amplitude cada vez menor até se anular. Esse é o caso do oscilador harmônico subamortecido ou, também, subcrítico.

A.1.2 Raízes reais e distintas

Se agora tivermos $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$, a raiz quadrada (A.4) dá um número real. Vamos definir, nesse caso,

$$\omega^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$$

e então as raízes ficam

$$m_1 = -\gamma + \omega$$

e

$$m_2 = -\gamma - \omega$$

e as funções que formam soluções são

$$e^{(-\gamma+\omega)t} \quad \text{e} \quad e^{(-\gamma-\omega)t}.$$

e a solução geral se torna

$$\begin{aligned} I(t) &= a_1 e^{(-\gamma+\omega)t} + a_2 e^{(-\gamma-\omega)t} \\ I(t) &= a_1 e^{-\gamma t} e^{\omega t} + a_2 e^{-\gamma t} e^{-\omega t} \\ I(t) &= e^{-\gamma t} (a_1 e^{\omega t} + a_2 e^{-\omega t}) \end{aligned}$$

Agora, definindo convenientemente as seguintes constantes

$$a_1 = \frac{A}{2} e^{-\delta} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{A}{2} e^{\delta},$$

teremos

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-\gamma t} \left(\frac{A}{2} e^{-\delta} e^{\omega t} + \frac{A}{2} e^{\delta} e^{-\omega t} \right) \\ I(t) &= \frac{A}{2} e^{-\gamma t} \left(e^{(\omega t - \delta)} + e^{-(\omega t - \delta)} \right). \end{aligned}$$

Usando agora a definição de cosseno hiperbólico, $\cosh \theta = (e^{\theta} + e^{-\theta})/2$,

$$I(t) = A e^{-\gamma t} \cosh(\omega t - \delta). \quad (\text{A.6})$$

Como essa função não é periódica, pois depende de $\cosh(\omega t - \delta)$, o sistema não chega a apresentar uma oscilação, como ocorre no amortecimento subcrítico. Nesse caso, como o amortecimento é muito forte, ele é chamado de sobreamortecido ou, também, supercrítico.

A.1.3 Raízes reais e iguais

Finalmente, quando temos $\gamma^2 = \omega_0^2$, temos o caso em que as raízes são reais e iguais, ou seja,

$$m_1 = m_2 = -\gamma$$

Portanto, uma das funções que formam a solução é

$$e^{-\gamma t} \quad \text{e} \quad te^{-\gamma t}.$$

A solução geral será:

$$I(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

ou ainda

$$I(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt). \quad (\text{A.7})$$

O decaimento nesse caso é um pouco mais lento, mas ainda não há uma oscilação. Trata-se de um caso limite entre duas situações diferentes, por isso é denominado oscilador harmônico crítico.

Essas soluções descrevem as características dinâmicas do circuito RLC em resposta a diferentes condições iniciais e podemos resumir como:

- Se o discriminante for negativo, teremos raízes complexas conjugadas e o sistema será sobreamortecido.
- Se o discriminante for positivo, teremos raízes distintas e o sistema será subamortecido.
- Se o discriminante for zero, teremos raízes iguais e o sistema será criticamente amortecido.

ANEXO A – PRODUTO

A.1 ARQUIVO EXPORTADO DO JUPYTER NOTEBOOK

A seguir, apresentamos o arquivo gerado a partir do ambiente interativo Jupyter Notebook. Para gerar esse arquivo, procedemos da seguinte forma:

1. Acessamos o Google Colab: - Abra o navegador e vá para [Google Colab](https://colab.research.google.com/).
2. Crie ou Carregue um Notebook: - Crie um novo notebook clicando em ‘Arquivo -> Novo notebook’ ou abra um existente clicando em ‘Arquivo -> Abrir notebook’.
3. Desenvolva o Código: - Escreva ou cole seu código nas células do notebook.
4. Salvar o Notebook: - Salve o notebook no Google Drive ou localmente clicando em ‘Arquivo -> Salvar uma cópia no Google Drive’ ou ‘Arquivo -> Fazer download -> Notebook (.ipynb)’.

Importar o arquivo IPython Notebook para Jupyter Notebook:

1. Instalar o Jupyter Notebook: - Se ainda não tiver o Jupyter Notebook instalado, você pode instalá-lo usando o comando ‘pip install notebook’ no terminal.
2. Abrir o Jupyter Notebook: - No terminal, navegue até o diretório onde você deseja salvar o notebook e execute o comando ‘jupyter notebook’.
3. Carregar o Notebook no Jupyter: - No navegador, o Jupyter Notebook será aberto. Clique em ‘Upload’ e selecione o arquivo ‘.ipynb’ que você baixou do Google Colab.
4. Abrir e Executar: - Abra o notebook recém-carregado e execute as células para verificar se tudo está funcionando conforme esperado.

Gerar um PDF a partir do Jupyter Notebook a partir da opção para Download.

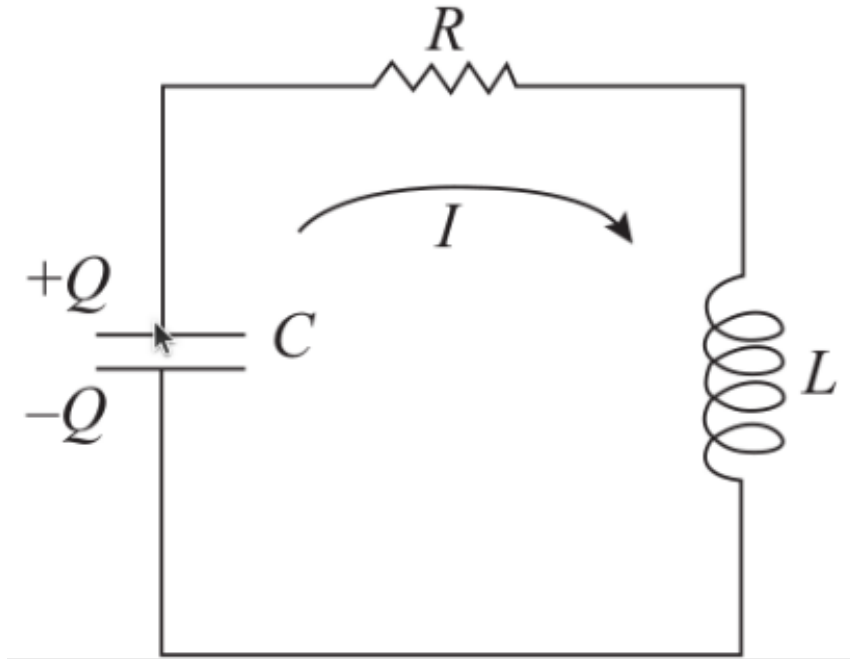
Este processo permite que você desenvolva seu código no Google Colab, faça o download do notebook (‘.ipynb’), importe-o para o Jupyter Notebook e, em seguida, converta-o para um arquivo PDF. Certifique-se de ter o Python e as dependências necessárias instaladas em seu ambiente.

Circuito RLC - Produto

January 15, 2024

O circuito RLC:

Por definição um circuito RLC é um circuito elétrico no qual os componentes são: um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C). Esses componentes podem estar conectados em série. O resistor é o componente mais comum dos circuitos elétricos, a sua função é limitar o fluxo de corrente que passa pelo circuito. Como o próprio nome sugere, o resistor vai exercer uma resistência à passagem da corrente elétrica. Esse componente pode ser usado como dissipador da energia elétrica, por exemplo convertendo essa energia em energia térmica. O indutor são elementos que podem armazenar energia de natureza magnética em um circuito elétrico. Ele contém dois terminais e é composto por N enrolamentos. Quando os enrolamentos são constituídos de fios ideais, sem resistência elétrica, ele é considerado um indutor ideal. O seu papel é produzir indutância devido a passagem da corrente elétrica, variando com o tempo, nos enrolamentos, causando assim uma tensão auto induzida.



Aplicando a primeira lei de Kirchhoff para esse sistemas, iremos obter a seguinte equação:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1)$$

Tomando a derivada em relação ao tempo dessa equação e dividindo todos os termos por L , chegamos à seguinte equação diferencial homogênea de segunda ordem

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (2)$$

que descreve as oscilações LC amortecidas. Se fizermos $R = 0$, recairemos na equação que descreve oscilações LC não amortecidas.

É importante enfatizar que todas as equações diferenciais obtidas para os circuitos analisados podem ser equivalentes a problemas mecânicos, bastando substituir as grandezas elétrica por grandezas mecânicas ($Q \rightarrow x; L \rightarrow m; 1/C \rightarrow k$).

A solução da EDO pode ser escrita da seguinte forma

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} [\cos(\omega_1 t + \phi)] \quad (3)$$

onde A e ϕ são constantes que satisfazem as condições iniciais. ω_1 é definido em termos da constante de amortecimento $\gamma = R/L$, ou seja

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (4)$$

```
[ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Valores dos componentes do circuito
R = 1.0 # Resistência (em ohms)
L = 0.1 # Indutância (em henrys)
C = 0.01 # Capacitância (em farads)

# Condições iniciais
V0 = 3.0 # Tensão inicial no capacitor (em volts)
I0 = 0.0 # Corrente inicial no indutor (em amperes)

# Parâmetros de simulação
dt = 0.001 # Passo de tempo (em segundos)
t_max = 1.0 # Tempo máximo da simulação (em segundos)

# Criando listas para armazenar os resultados
t_values = [0.0]
V_values = [V0]
I_values = [I0]

# Simulação usando o método de Euler
t = 0.0
V = V0
I = I0
while t < t_max:
```

```

# Calcular as taxas de mudança das grandezas
dVdt = (1.0 / C) * I
dIdt = (-1.0 / L) * V - (R / L) * I

# Atualizar as grandezas usando o método de Euler
V += dVdt * dt
I += dIdt * dt
t += dt

# Armazenar os valores atuais
t_values.append(t)
V_values.append(V)
I_values.append(I)

# Plotar os resultados
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_values, V_values)
plt.title('Tensão no Capacitor')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Tensão (V)')
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_values, I_values)
plt.title('Corrente no Indutor')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Corrente (A)')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

```

