

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ

RODRIGO DA COSTA MOREIRA

TRÊS FORMAS NATURAIS DE ENCONTRAR O NÚMERO DE EULER e

URUÇUI - PI

2019

RODRIGO DA COSTA MOREIRA

TRÊS FORMAS NATURAIS DE ENCONTRAR O NÚMERO DE EULER e

Artigo apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, como um dos requisitos para a obtenção de título de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.

Professor Me. Gabriel dos Santos Pinto

URUÇUÍ – PI

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Moreira, Rodrigo da Costa

M838t Três formas naturais de encontrar o número de Euler / Rodrigo da Costa
Moreira. - 2019.
22 p.: il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Uruçuí Licenciatura em
Matemática, 2019.

Orientador : Prof Me. Gabriel dos Santos Pintos.

1. Número de Euler. 2. Juros compostos. 3. Taxas de mudanças e
crescimento. I. Título.

CDD - 510

Elaborado por Aldeide Costa dos Santos Sousa CRB 3/1423

RODRIGO DA COSTA MOREIRA

TRÊS FORMAS NATURAIS DE ENCONTRAR O NÚMERO DE EULER e

Artigo apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, como um dos requisitos para a obtenção de título de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.

Professor Me. Gabriel dos Santos Pinto

Data da apresentação 26 / 06 / 2019

BANCA EXAMINADORA

Gabriel dos Santos Pinto

Professor Orientador

Professor Me. Gabriel dos Santos Pinto

Marcus Vinicius de Oliveira Lima

Professor Avaliador 1:

Professor Me. Marcus Vinicius Oliveira Lima

Erivan Silva Costa

Professor Avaliador 2:

Professor Erivan Silva Costa

TRÊS FORMAS NATURAIS DE ENCONTRAR O NÚMERO DE EULER e ¹

THREE NATURAL WAYS TO FIND THE EULER'S NUMBER e

Rodrigo da Costa Moreira²

RESUMO

O número de Euler (e) ao contrário de outros números irracionais como o Pi (π), não está associado a geometria, mas sim, a taxas de mudanças e crescimento de determinados fenômenos. Nesse contexto, o presente estudo tem como objetivo expor três formas de encontrar o número de Euler (e) naturalmente, para tal, o estudo utilizou de pesquisa exploratória de cunho qualitativo, mais especificamente uma pesquisa bibliográfica. Essas formas se dão tanto capitalizando continuamente juros compostos, quanto pelo fatiamento de um quadrado de área igual a 1 em infinitos retângulos menores e distribuindo-os sob a curva da hipérbole $y = 1/x$ no intervalo de $x = 1$ para $x = x_0$, e até mesmo em jogos usando poliedros regulares e cartas de baralho.

Palavra-chave: Número de Euler (e). Juros compostos. Taxas de mudanças e crescimento.

ABSTRACT

The Euler's number (e), unlike other irrational numbers such as Pi (π), is not associated with geometry, but rather with rates of change and growth of certain phenomena. In this context, the present study aims at exposing three ways of finding the Euler number (e) naturally, for this purpose, the study used qualitative exploratory research, more specifically a bibliographical research. These forms occur either by continually compounding compound interest, or by slicing a square of area equal to 1 into infinite smaller rectangles and distributing them under the hyperbola curve $y = 1/x$ in the interval from $x = 1$ to $x = x_0$, and even in games using regular polyhedra and playing cards.

Keywords: Euler's number (e). compound interest. rates of change and growth.

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos estudos acadêmicos depara-se com alguns números curiosos, por exemplo, se calcularmos a proporção entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência temos um número “estranho” chamado Pi (π) que vale aproximadamente 3,14. Por sua vez, os pitagóricos depararam-se com outro número “bizarro”: a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$), que trata-se do comprimento da diagonal de um quadrado cujo o comprimento dos lados é igual a 1, algo aproximado para 1,41. Tais números são chamados de irracionais, e possuem características bem curiosas, como por exemplo, não podem ser representados como uma fração irredutível, são infinitos e não periódicos.

¹ Artigo apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática como um dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo IFPI – Campus Uruçuí - PI, com orientação do professor Mestre Gabriel dos Santos Pinto. E-mail: gabriel.pinto@ifpi.edu.br

² Formando em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI – Uruçuí. E-mail: rodrigo@4rcm.com

Outro número curioso, é o número de Euler (e), conhecido principalmente por estudantes de cálculo pela facilidade em derivar e integrar a função $y = e^x$, contudo, sem muito detalhes históricos. Mas afinal de onde vem esse número? Como esse número surgiu? Como ele aparece naturalmente em diferentes áreas da matemática?

Objetiva-se com esta pesquisa apresentar de forma sucinta formas de encontrar o número de Euler (e) naturalmente, e de forma breve um pouco da sua história, suas características e tem como público principal alunos, professores e interessados pelo universo matemático do número e .

O presente estudo utilizou de pesquisa exploratória de cunho qualitativo, mais especificamente uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório-descritivo que segundo Galvão (2010) permite observar falhas em estudos realizados, evita duplicação de pesquisas, desenvolve estudos que cobrem lacunas na literatura, e trazem a real contribuição para a área do conhecimento.

Para o alcance do objetivo, utilizou-se de artigos, textos, teses e vídeos a fim de obter o maior número de informações sobre o número de Euler, para isso foram realizadas leituras exploratórias e seletivas dos documentos.

Os dados obtidos na investigação foram selecionados, organizados e dispostos na seguinte ordem: Uma breve história do número de Euler, sua importância nos dias atuais, curiosidades e formas com que o número de Euler (e) aparece naturalmente.

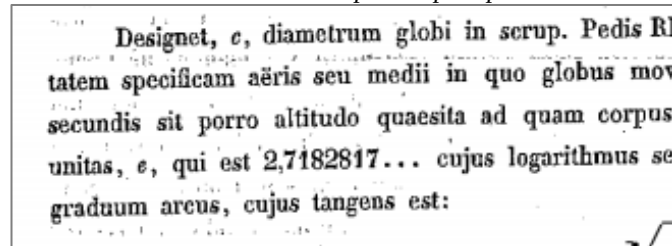
2 UMA BREVE HISTÓRIA DE (e) E SUA IMPORTÂNCIA NOS DIAS ATUAIS

O nascimento do número que conhecemos como o número de Euler (e) remota ao século XVII. Maor (2008) cita que uma explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos e que alguém não se sabe quem ou quando deve ter notado o comportamento peculiar da expressão $(1 + 1/h)^h$ quando h torna-se muito grande. Stewart (2015) por sua vez cita que esse número foi discutido pela primeira vez por Jacob Bernoulli (1655 - 1705) em 1683 em problemas de juros compostos.

Contudo, e aparece de forma implícita na tradução de Edward Wright da obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de John Napier (1550-1617) sobre logaritmos em 1618 e no problema da quadratura da hipérbole retangular $y = 1/x$ de Gregorius de Saint-Vincent (1584-1667), onde seu aluno Alfonso Anton (1618-1667) escreveu uma função $A(t) = \log(t)$ que retorna a área num certo intervalo sob a curva da hipérbole, mas sem definir uma base para a função logarítmica, que como é conhecido hoje é exatamente e .

A primeira aparição explícita do número de Euler ocorreu em 1690 em uma carta de Gottfried Leibniz (1646 - 1716) enviada para Christiaan Huygens (1629 - 1695), nela e é representado pela letra b . Contudo, a atual notação utilizando o caractere e , aparece em um manuscrito *Meditatio in experientia explosione...* de Leonhard Euler (1707-1783) em 1727 mas, só fora publicada em 1862. Para James Stewart (2013) Euler escolheu esta notação provavelmente porque é o primeiro caractere da palavra exponencial.

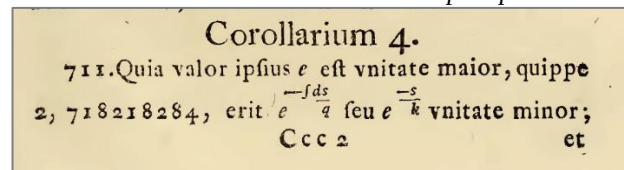
Figura 1 – parte do manuscrito *Meditatio* onde e aparece pela primeira vez como sendo igual a 2,7182...



Fonte: Mathematical Association of America (2019)

Ao público, esta notação aparece pela primeira vez em 1736 em uma publicação do livro *Mechanica, sive, Motus scientia analytice exposita* de Leonhard Euler. (Figura 2).

Figura 2 –pág-387 de *Mechanica* onde e é mencionando e pela primeira vez apresentado ao público



Fonte: www.worldcat.org (2019)

Em outro livro *Introduction to the Analysis of the Infinite volume 1* publicado em 1748 Euler escreve e como sendo a somatória da série infinita:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} + \frac{1}{5.4.3.2.1} + \dots$$

Também foi Euler que provou a irracionalidade de e em 1737, no entanto, somente em 1873 foi provado por Charles Hermite (1822-1901) que e é um número transcendental, ou seja, uma equação polinomial com coeficientes inteiros não pode ter o número e com solução.

Mas afinal, qual a real importância do número de Euler (e) para a matemática e outras ciências? Como e está diretamente relacionado com o crescimento e a taxa de mudança de diversos fenômenos, tais como, o crescimento populacional, aquecimento e resfriamento de corpos, a quantidade de radiação que uma substância radioativa emite, a intensidade das ondas sonoras quando viajam por qualquer meio, etc. Logo a função exponencial $y = e^x$ tem um papel fundamental no estudo desses fenômenos. Para Maor (2008) qualquer fenômeno em

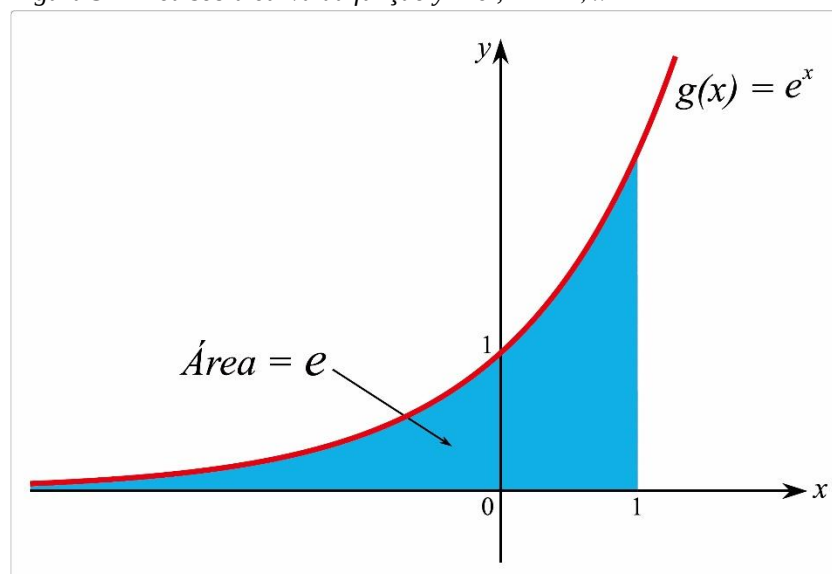
que a taxa de mudança de alguma quantidade é proporcional à própria quantidade será governado pela equação diferencial $dy/dx = ay$ que tem como solução $y = c.e^{k.x}$.

A função exponencial $y = e^x$ apresenta algumas curiosidades, como já mencionado, esta é a única função cuja derivada é ela própria. (Fórmula 1)

$$y = e^x \quad \text{logo,} \quad \frac{dy}{dx} = e^x \quad (1)$$

Outra curiosidade que não poderia deixar de ser mencionada é o fato de que a área sob a curva da função exponencial $y = e^x$ no intervalo de $x = -\infty$ para $x = 1$ é igual a e . (Figura 3).

Figura 3 – Área sob a curva da função $y = e^x$, $x = -\infty$, $x = 1$



Fonte: próprio autor (2019)

Uma das mais belas fórmulas da matemática descoberta por Leonhard Euler como destacada por Maor (2008) liga os quatros grandes ramos da matemática clássica: aritmética, representadas pelo 0 e pelo 1; a álgebra representada pelo i ; a geometria pelo π e a análise pelo e . Fórmula (2).

$$e^{\pi.i} + 1 = 0 \quad (2)$$

3 TRÊS FORMAS NATURAIS DE ENCONTRAR O NÚMERO EULER e

3.1 MATEMÁTICA FINANCEIRA - JUROS COMPOSTOS

No momento em que é solicitado empréstimos ou feito investimentos, é pago ou recebidos juros sobre o total recebido/investido. Será simulado um empréstimo em um banco para pagar contas que estão em atraso. Por exemplo, será solicitado um valor de R\$ 1.000,00 com taxa de juros de 10% a.a. e prazo de 1 ano para pagar a dívida. Como é conhecido sobre juros compostos, será efetuado uma simulação usando a fórmula de juros compostos.

$$M = C_o \cdot (1 + i)^n \quad (3)$$

$$M = 1000 \cdot (1 + 0,1)^1 = \text{R\$ } 1.100,00 \quad (4)$$

Ao final de 1 ano o valor do débito passa a ser R\$ 1.100,00, contudo, é possível verificar alguns cenários de capitalização, como por exemplo, capitalizar a cada 6 meses com taxa de 5% a. semestre ou capitalizar mais vezes com taxas cada vez menores. A seguir será criado uma tabela para verificar se o cenário é vantajoso ou não. A taxa i será mantida em porcentagem para que o leitor visualize melhor.

Tabela 1 – simulação de empréstimo com vários períodos de capitalização

Capitalização	Empréstimo R\$ 1.000,00	Valor total do débito ao final de 1 ano	
anual	taxa de 10% a.a.	$M = 1000 \cdot (1 + \frac{10\%}{1})^1$	R\$ 1.100,00
	n = 1 capitalização		
semestral	taxa de 5% a.s.	$M = 1000 \cdot (1 + \frac{10\%}{2})^2$	R\$ 1.102,50
	n = 2 capitalizações		
mensal	taxa de 0,83% a.m.	$M = 1000 \cdot (1 + \frac{10\%}{12})^{12}$	R\$ 1.104,71
	n = 12 capitalizações		
diariamente	taxa de 0,027% a.d.	$M = 1000 \cdot (1 + \frac{10\%}{365})^{365}$	R\$ 1.105,15
	n = 365 capitalizações		
hora	taxa de 0,00114% a.h.	$M = 1000 \cdot (1 + \frac{10\%}{8760})^{8760}$	R\$ 1.105,17
	n = 8760 capitalizações		
minuto	taxa de 0,000019% a.min.	$M = 1000 \cdot (1 + \frac{10\%}{525600})^{525600}$	R\$ 1.105,171
	n = 525600 capitalizações		

Fonte: próprio autor (2019)

Como é possível verificar na tabela 1, capitalizar mais de uma vez em um determinado período de tempo não é vantajoso para quem solicita um empréstimo, só seria útil no caso de uma aplicação financeira. Como consequência imediata pode-se reescrever a fórmula (3) para os casos em que é preciso ter vantagens sobre um empréstimo ou aplicação.

$$M = C_o \cdot (1 + \frac{i}{n})^n \quad (5)$$

Donde M é o valor final a pagar ou receber dependendo da operação, C_o é o valor inicial emprestado ou aplicado, i é a taxa de juros aplicada para um determinado período e n é o número de capitalização. Será efetuado então pequenas manipulações algébricas na fórmula (3) para trabalhar apenas com a capitalização e de forma independente da taxa. Será verificado então o que acontece quando juros são capitalizados a todo momento.

Chama-se i/n de $1/h$. Fórmula (6).

$$\frac{i}{n} = \frac{1}{h} \quad (6)$$

$$n = i \cdot h \quad \leftrightarrow \quad h = \frac{n}{i} \quad (7)$$

Como ocorreu uma mudança de variável, verifica-se o limite de h em (7) a medida que o número n de capitalização aumenta.

Tabela 2 – Calculando h a partir do número de capitalização e da taxa $i = 0,1$

n	$h = \frac{n}{i}$
1	10
100	1.000
1.000	10.000
∞	∞

Fonte: Próprio autor (2019)

Substituindo (6) e (7) na fórmula (5) tem-se,

$$M = C_o \cdot \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{i \cdot h} \quad (8)$$

Usando a propriedade de potenciação, potência de potência, pode-se reescrever a fórmula (8) onde a taxa i é uma potência.

$$M = C_o \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \right]^i \quad (9)$$

Em (9) será analisado apenas a expressão entre colchetes, uma vez que se for aumentado o período de capitalização n , h também aumentará como visto na tabela (2). A seguir é apresentada uma tabela para verificar o comportamento da expressão entre colchetes à medida que h se torna muito grande.

Tabela 3 – Calculando a expressão para valores muito grande de h

h	$\left[\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \right]$
1	2
2	2,25
3	2,3703
5	2,488319
10	2,59374246
100	2,7048138294
1 000	2,7169239322355
10 000	2,7181459268249255
100 000	2,7182682371744896680
1 000 000	2,7182804693193768838197

Fonte: Próprio autor (2019)

Fica evidente na tabela 3 que para valores muito grande de h , a expressão $(1 + 1/h)^h$ tende a um certo número, que vale aproximadamente 2,71828, esse número é conhecido como o número de Euler (e).

Para Maor (2008) não é conhecido quem primeiro notou o comportamento peculiar da expressão $(1 + 1/h)^h$ à medida que h tende ao infinito, por isso a data exata do nascimento do número que mais tarde seria denotado por e permanece obscura.

Logo, é possível definir o número de Euler como sendo:

$$e = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h} \right)^h \quad (10)$$

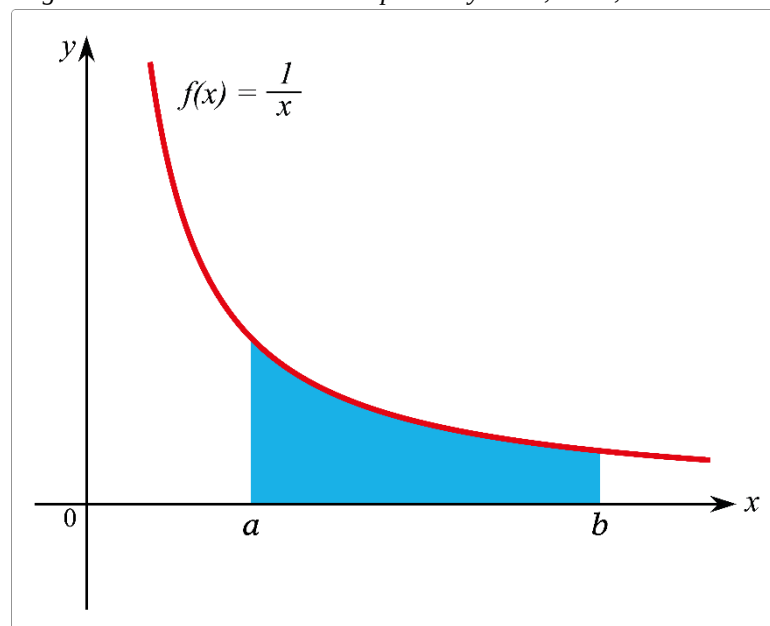
Portanto, se for desejável obter maior lucro sobre um empréstimo, tem-se que capitalizar a todo momento, para tanto basta reescrever a fórmula (9).

$$M = C_o \cdot e^i \quad (11)$$

3.2 A QUADRATURA DA HIPÉRBOLE - ÁREA SOB A CURVA $y = 1/x$

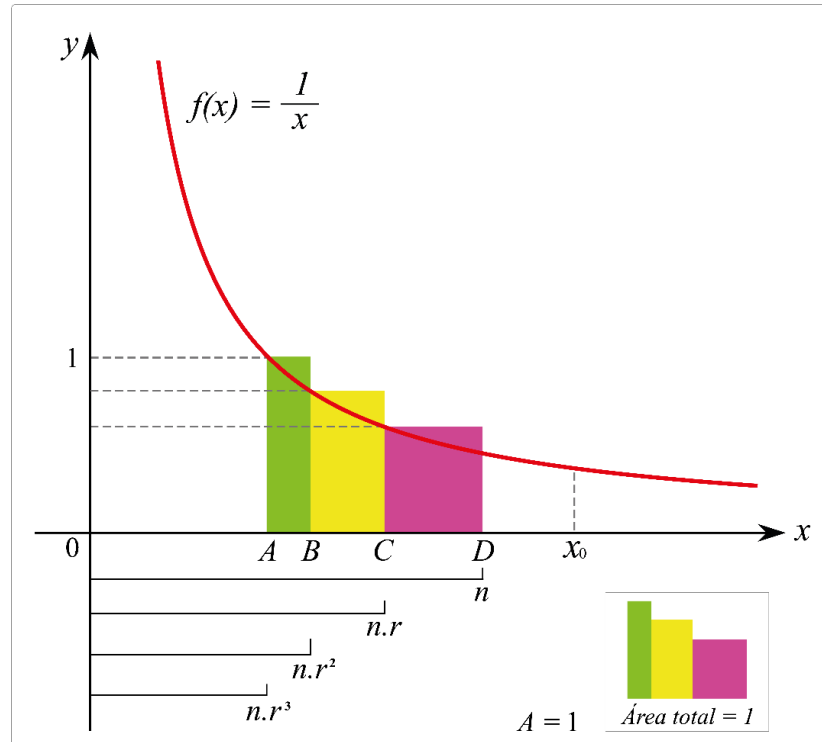
A quadratura da hipérbole foi um problema matemático que persistiu por milênios sem solução, Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) na Grécia antiga e matemáticos do século XVII como Pierre de Fermat (1607 - 1665) e René Descartes (1596-1650) tentaram resolver o problema de forma independente, mas sem sucesso. O problema consiste em encontrar uma função $A(a,b)$ que retorne a área para um dado intervalo sob a curva da hipérbole $y = 1/x$, (figura 4).

Figura 4 – área sob a curva da hipérbole $y = 1/x$, $x = a$, $x = b$



Fonte: próprio autor (2019)

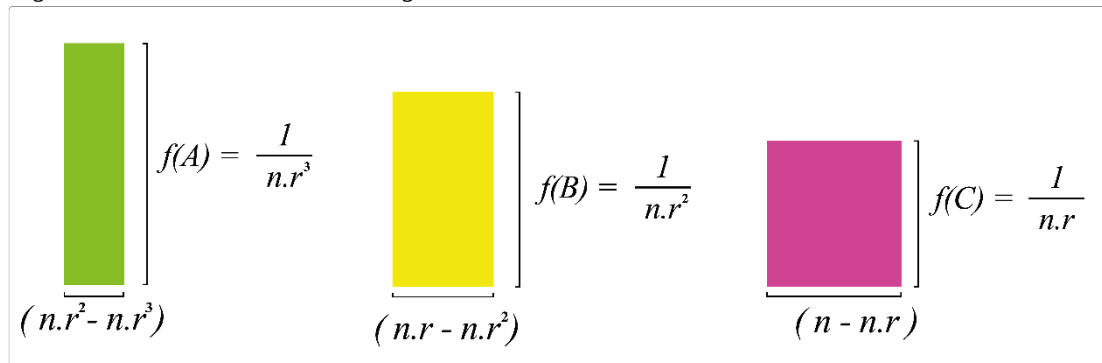
Figura 6 – distribuição de retângulos sob a curva $y = 1/x$



Fonte: próprio autor (2019)

Note que as bases dos retângulos formam uma progressão geométrica no sentido inverso. O que Gregorius percebeu é que as áreas dos retângulos são iguais quando as bases são uma progressão geométrica. A seguir a análise dos três retângulos, (Figura 7).

Figura 7 – cálculo de área dos retângulos



Fonte: próprio autor (2019)

A área de cada retângulo é igual a;

$$\text{Área} = \frac{1}{r} - 1 \quad (14)$$

Como a somatória das três áreas é igual a 1, logo, multiplicando (14) por 3, tem-se.

$$\text{Área Total} = 3 \cdot \left(\frac{1}{r} - 1 \right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{r} - 1\right) = \frac{1}{3}$$

Somando 1 em ambos os lados da igualdade, tem-se.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{3} + 1 \\ \frac{1}{r} &= \frac{4}{3} \\ r &= \frac{3}{4}\end{aligned}\tag{15}$$

Como é conhecida a razão r , é possível encontrar o valor de n , para tanto basta verificar o ponto A da figura 6.

$$A = n.r^3 = 1\tag{16}$$

Substituindo (15) em (16), tem-se;

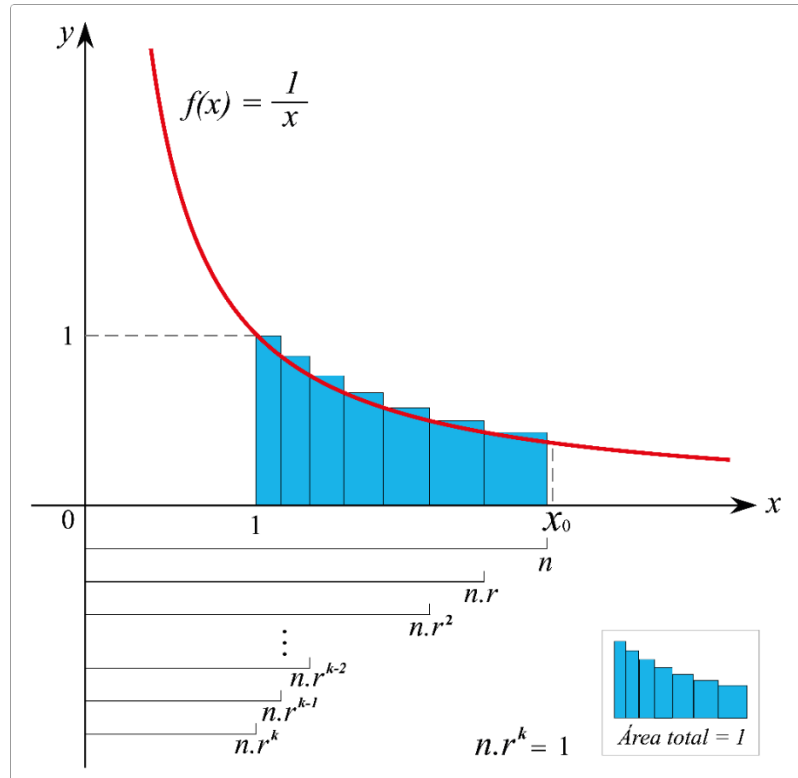
$$\begin{aligned}n.\left(\frac{3}{4}\right)^3 &= 1 \\ n.\left(\frac{27}{64}\right) &= 1 \\ n &= \frac{64}{27} \\ n &= 2,37037\end{aligned}$$

Fica evidente que a medida que é aumentado o número de retângulos, n tende a ∞ . E o que fica evidente sobre a progressão geométrica é que r é a razão entre a quantidade de retângulos e o número de pontos.

Em (15), r é exatamente a razão entre a quantidade de retângulos que é igual a 3 e o número de pontos (A, B, C, D) que é igual a 4. Denota-se k como sendo a quantidade de retângulos. Como a quantidade de pontos é uma unidade a mais que a quantidade de retângulos, logo:

$$r = \frac{k}{k+1} = \frac{\text{quantidade de retângulos}}{\text{quantidade de pontos}}\tag{17}$$

O último termo da progressão geometria invertida, na figura 6 é igual a $n.r^3$, note que, a potência é exatamente a quantidade de retângulos, que é igual a 3. Como foi definido a quantidade de retângulos como sendo igual a k , pode-se criar uma fórmula para verificar o valor de n para uma quantidade k de retângulos.

Figura 8 – Valor de n para um número k de retângulos

Fonte: próprio autor (2019)

Na figura 8 há k retângulos, todos com área igual a $(1/r - 1)$ para encontrar a área total ocupada pelos retângulos, basta multiplicar a expressão $(1/r - 1)$ por k .

$$\text{Área Total} = k \cdot \left(\frac{1}{r} - 1 \right) = 1 \quad (18)$$

$$\left(\frac{1}{r} - 1 \right) = \frac{1}{k}$$

Somando 1 em ambos os lados da igualdade,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} + 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{k+1}{k}$$

Elevando -1 em ambos os lados da igualdade, tem-se.

$$r = \frac{k}{k+1} \quad (19)$$

Como foi encontrada a razão r fica fácil encontrar o valor de n a partir do último termo da progressão geométrica.

$$n \cdot r^k = 1 \quad (20)$$

Substituindo (19) em (20), tem-se.

$$n \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = 1$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $\left(\frac{k}{k+1} \right)^k$, tem-se.

$$n = \frac{1}{\left(\frac{k}{k+1} \right)^k}$$

Invertendo o denominador.

$$n = \left(\frac{k}{k+1} \right)^{-k}$$

Usando a propriedade de potenciação, potência de potência, tem-se

$$\begin{aligned} n &= \left[\left(\frac{k}{k+1} \right)^{-1} \right]^k \\ n &= \left(\frac{k+1}{k} \right)^k \\ n &= \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \end{aligned} \quad (21)$$

É possível verificar o valor de n para qualquer quantidade de retângulos, a seguir uma tabela para verificar os valores de n .

Tabela 4 – Calculando n a partir da quantidade k de retângulos

k – quantidade de retângulos	$n = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k$
1	2,000
3	2,3703
10	2,59374
100	2,704813
1000	2,7169239
10 000	2,71814592
100 000	2,718268237
1 000 000	2,7182804690
10 000 000	2,71828169254
100 000 000	2,718281814897

Fonte: Próprio autor (2019)

A medida que k crescer, n tende a um certo número x_0 , mais uma vez depara-se com o número de Euler (e).

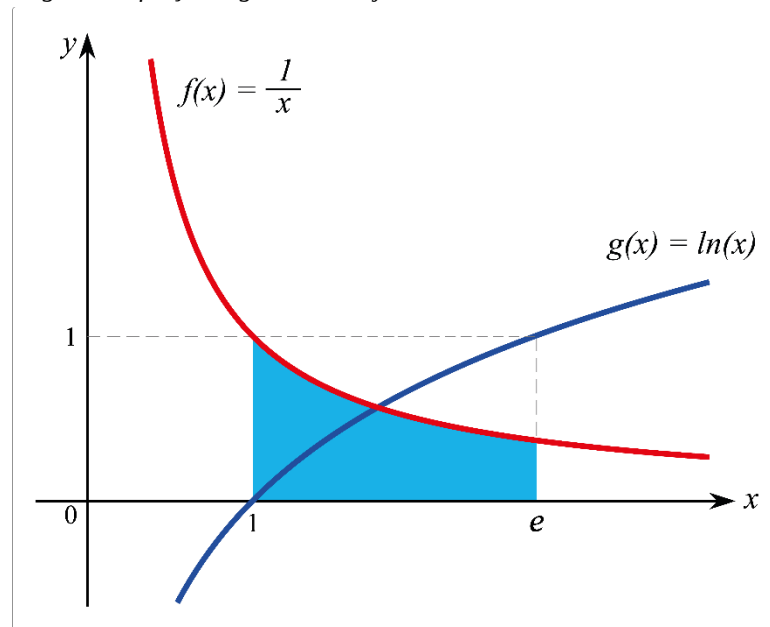
$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \quad (22)$$

Contudo, Gregorius de Saint-Vincent não chegou a encontrar o número e como foi feito acima fatiando um quadrado de área 1 em infinitos retângulos menores no intervalo de $x = 1$ para $x = x_0$. O processo de quadratura deixa claro que a relação entre a área e a distância é *logarítmica*, (figura 6). Em outras palavras a área no intervalo dado sob a curva da hipérbole $y = 1/x$ pode ser calculada pela função.

$$A(t) = \log(t) \quad (23)$$

Para Maor (2008) foi Alfonso Anton de Sarasa então aluno de Saint-Vincent que escreveu essa relação explicitamente, registrando uma das primeiras ocasiões em que se fez uso de uma função logarítmica, quando, até então, os logaritmos de John Napier eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo.

Figura 9 – função logarítmica cuja base é o número de Euler



Fonte: próprio autor (2019)

Contudo, Alfonso e Saint-Vincent não conseguiram definir uma base para a função logarítmica, que, como é conhecido hoje é exatamente o número de Euler (e).

3.3 PROBABILIDADE

Ao brincar com um dado lançando-o seis vezes, qual é a probabilidade de não tirar o número 2 em nenhum dos lançamentos?

A cada jogada há 83% de chances de não tirar o número 2, fazendo todas as seis jogadas há um pouco mais de 33% de chances de não tirar o número 2 em nenhuma das seis jogadas. Note que poderia ser qualquer um dos seis números, sendo que a quantidade de lançamentos é referente ao número de faces do poliedro escolhido, uma vez que no exemplo acima foi usado um cubo.

A brincadeira será então estendida para alguns poliedros regulares, em que suas faces estão numeradas de 1 até o número n de faces. Será criada também uma tabela para verificar a probabilidade de não tirar o número 1 em um determinado número de lançamentos, que muda de acordo com o número de faces do poliedro escolhido. Denotando $P(1)$ como sendo a probabilidade de não sair o número 1 em um determinado número de lançamentos. (Tabela 4).

Tabela 5 – Calculando a probabilidade de não tirar 1 em k lançamento de poliedros de n faces.

poliedro regular	n - número de faces	k - número de lançamentos	probabilidade de não tirar o número 1 $\rightarrow P(1)$	$\frac{1}{p(1)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}$
 Tetraedro	4	4	$P(1) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = 0,3164$ $= 31,64\%$	3,16
 Hexaedro - cubo	6	6	$P(1) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 = 0,3349$ $= 33,49\%$	2,98
 Octaedro	8	8	$P(1) = \left(1 - \frac{1}{8}\right)^8 = 0,3436$ $= 34,36\%$	2,91
 Dodecaedro	12	12	$P(1) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{12} = 0,3520$ $= 35,20\%$	2,84
 Icosaedro	20	20	$P(1) = \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{20} = 0,3584$ $= 35,84\%$	2,78
100-edro	100	100	$P(1) = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{1000}$ $= 0,3676 = 36,76\%$	2,7196
n -edro	n	k	$P(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 0,3678..$ $\approx 36,78\%$	2,718281...

Fonte: Próprio autor (2019)

Como é possível verificar na tabela 5, a probabilidade de não tirar o número 1 é sempre menor do que 37% algo aproximado para 0,3678, não importando o poliedro escolhido.

Como 36,78% na sua forma decimal é igual a 0,3678 e está compreendido entre 0 e 1, logo é possível reescrever $P(1)$ como sendo.

$$P(1) = \frac{1}{x}, \quad 0 < \frac{1}{x} < 1 \quad (24)$$

$$P(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \quad (25)$$

Para encontrar o valor de x , basta substituir (24) em (25), tem-se.

$$\frac{1}{x} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \quad (26)$$

Elevando -1 em ambos os lados da igualdade, tem-se.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)^{-1} \quad (27)$$

Logo pode-se reescrever (27).

$$x = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k} \quad (28)$$

Agora uma tabela para verificar o comportamento da expressão (28) para valores muito grande de n , (tabela 6).

Tabela 6 – Probabilidade de não sair o número 1 em k lançamentos de um poliedro de n faces

n – número de faces do poliedro	k – número de lançamentos	$x = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}$
4	4	3,1
6	6	2,98
8	8	2,910
12	12	2,8409
20	20	2,789509
1000	1000	2,7196422
100 000	100 000	2,718295419
1 000 000	1 000 000	2,71828318760
100 000 000	100 000 000	2,7182818420504

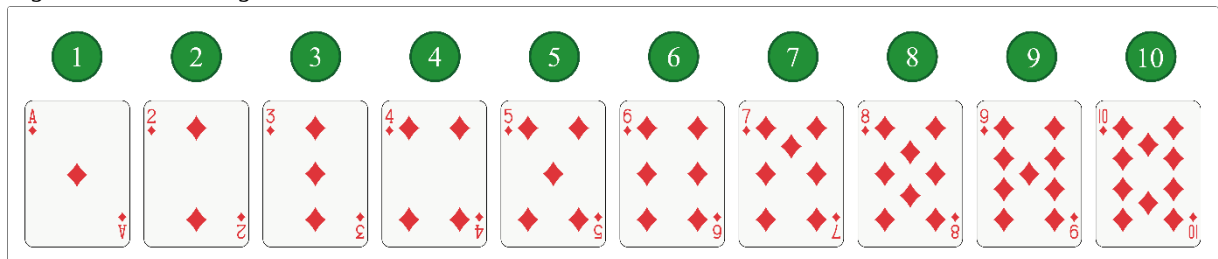
Fonte: Próprio autor (2019)

Como é possível observar na tabela 6, x tende a um certo número que é exatamente o número de Euler (e), logo a probabilidade de não sair o número 1 em k lançamentos de um poliedro de n faces é:

$$P(1) = \frac{1}{e} \quad (29)$$

Há diversas maneiras de encontrar o número de Euler (e) em problemas envolvendo permutações, por exemplo, pegue 10 cartas de um baralho, as dez primeiras, de 1 (ás) até 10 e coloque-as em ordem. (Figura 10).

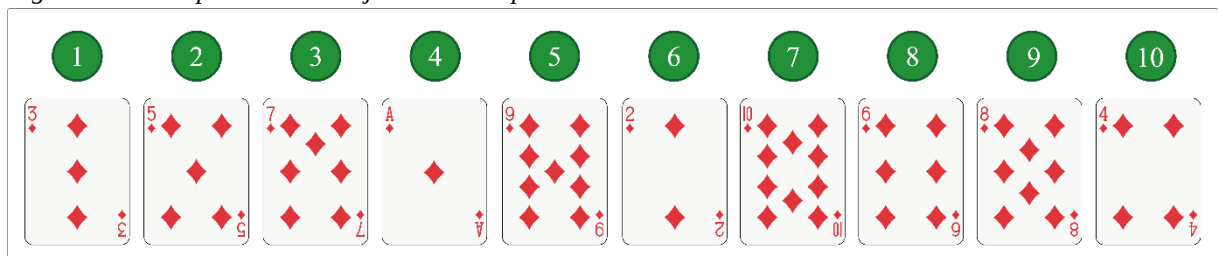
Figura 10 – cartas organizadas em ordem crescente



Fonte: Próprio autor (2019)

Embaralhe-as, e por último coloque-as em fila. Qual é a probabilidade de que nenhuma das cartas esteja em suas respectivas posições de início? Como no exemplo da figura 11.

Figura 11 – exemplo de desarranjo de cartas após serem embaralhadas



Fonte: Próprio autor (2019)

A resposta é simples, a chance de ganhar é de pouco mais de 36,78% com 10 cartas, contudo se for aumentada a quantidade de cartas a chance permanecerá a mesma.

Efetuada a permutação de n elementos, chama-se desarranjo ($!n$) o conjunto com todos os resultados em que nenhum dos elementos permaneça na sua posição de início como no exemplo da figura 11. Na tabela 6 é possível verificar a probabilidade de ganhar com um determinado número n de cartas.

Tabela 7 – probabilidade de ganhar o jogo com n cartas

n - número de cartas	$n!$	$!n$ - desarranjos	Probabilidade de ganhar o jogo $\frac{!n}{n!}$	$x = \frac{n!}{!n}$
4	24	9	$0,37500 \approx 37,50\%$	2,6666
5	120	44	$0,36666 \approx 36,66\%$	2,727272
6	720	265	$0,36805 \approx 36,80\%$	2,71698113
7	5040	1854	$0,36785 \approx 36,78\%$	2,7184466019
8	40320	14833	$0,36788 \approx 36,78\%$	2,718263331760
9	362880	133496	$0,367879 \approx 36,78\%$	2,71828369389344
10	3628800	1334961	$0,367879 \approx 36,78\%$	2,71828165766640373
n	$n!$	$!n$	$\frac{!n}{n!} = \frac{1}{e} = 0,3678... \approx 36,78\%$	e

Fonte: Próprio autor (2019)

Fica claro na tabela 7 que a probabilidade de ganhar no jogo com n cartas é aproximadamente $1/e$.

$$P(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{!n}{n!} \right] = \frac{1}{e} \quad (30)$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou identificar três formas nas quais o número de Euler aparece naturalmente, além de uma breve história sobre o mesmo, sendo importante para que o público interessado possa conhecer mais sobre esse número irracional que tão pouco tem essas características conhecidas. Com as três formas dando-se através dos juros compostos, quadratura da hipérbole $y=1/x$ e probabilidade através de jogos, alcançando assim o objetivo principal do estudo.

No ensino básico, conhecer as formas com que o número de Euler aparece naturalmente tem uma grande importância para que o aluno possa relacionar os números irracionais com situações vivenciadas por eles, contribuindo para o ensino-aprendizagem dos conteúdos que abordam esses números. Ainda para esse público o jogo de probabilidade vem como uma ferramenta ainda mais surpreendente, que desperta o interesse e a aprendizagem simultaneamente.

Enquanto que para ensino superior o trabalho contribui para preencher as lacunas deixadas pelos livros didáticos com relação ao número de Euler, facilitando assim a contextualização de tal. O cálculo da quadratura da hipérbole vem, neste contexto, contribuir

para o estudo de áreas sob determinadas famílias de funções e sua ligação com funções logarítmicas.

REFERÊNCIAS

- BURN, Bob. "Gregory of St. Vincent and the Rectangular Hyperbola." **The Mathematical Gazette**, vol. 84, no. 501, 2000, pp. 480–485. JSTOR. Disponível em: www.jstor.org/stable/3620779. Acesso em: 20 abr. 2019.
- FIGUEIRA, Ramon. **O número de Euler**. 2017. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.
- GALVÃO, Maria Cristiane Barbosa. **O levantamento bibliográfico e a pesquisa científica**. 2010. Disponível em: http://www2.eerp.usp.br/Nepien/DisponibilizarArquivos/Levantamento_bibliografico_CristianeGalv.pdf. Acesso em: 06 abr. 2019.
- KÉFERA, James. **Desarranjos - Numberphile**. 2017. (08m31s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pbXg5EI5t4c>. Acesso em: 10 abr. 2019.
- MAOR, Eli. **e: A história de um número**. Record LTDA, 2008.
- MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA. **Meditatio in experimenta explosione**. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/pages/E853.html>. Acesso em: 05 abr. 2019.
- STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**. [S.l.]: Zahar, 2015.
- STEWART, James. **Cálculo – Vol 1 -Tradução da 7ª edição norte-americana**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- Wolfram MathWorld. **Derangement (Desarranjo)**. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/Derangement.html>. Acesso em: 10 maio. 2019.
- WORLDCAT. **Mechanica, sive, Motus scientia analytice exposita**. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/pages/E853.html>. Acesso em: 06 abr. 2019.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, meu filho Kauã, minha esposa Klayriene, e a toda minha família.