



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
ESPECIALIZAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

LEANDRO CAMPOS DA CUNHA

**MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO CONTEXTO DO ENSINO DE GEOMETRIA
EUCLIDIANA**

TERESINA

2024

LEANDRO CAMPOS DA CUNHA

MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO CONTEXTO DO ENSINO DE GEOMETRIA
EUCLIDIANA

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Especialização do Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina Central.

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Maria Lima da Costa.

TERESINA
2024

MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO CONTEXTO DO ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Leandro Campos da Cunha¹
Claudia Maria Lima da Costa²

RESUMO

Professores e alunos podem se beneficiar da praticidade da utilização de materiais manipuláveis para ensinar e aprender Geometria Plana. Razão pela qual o estudo da geometria deve enfatizar o cotidiano dos alunos de modo que seja possível a visualização da matemática como uma área implícita na e sobre a vida humana em todos os contextos. Neste cenário, objetivou-se descrever como o ensino de geometria pode ser otimizado através da utilização de materiais manipuláveis. A natureza do estudo é qualitativa, em relação ao propósito do método, é um estudo exploratório. A metodologia utilizada foi a revisão bibliográfica e para coleta de dados elencou-se como critérios de busca: trabalhos realizados nos últimos cinco anos e que em seu *corpus* contivessem experiências com materiais manipuláveis quanto ao conteúdo de Geometria Plana. Considera-se que a utilização de materiais manipuláveis, quando organizada de acordo com o nível de conhecimento dos alunos, é eficaz para o ensino de Geometria Plana, tornando os alunos mais críticos e ativos quanto ao próprio aprendizado, e que ao se estimular a manipulação dos materiais, proporciona-se perspectivas diferentes do mesmo objeto, bem como a socialização do uso de recursos diferenciados. Vale dizer que o uso do material manipulável como finalidade única não cumpre os pressupostos didático-pedagógicos significativos, sendo necessário que o professor esteja preparado intencional e propositivamente para o planejamento, execução, avaliação, replanejamento, execução, reavaliação *ad infinitum*, em um círculo virtuoso.

Palavras-chave: materiais manipuláveis; geometria plana; método de ensino.

ABSTRACT

Teachers and students can benefit from the practicality of using manipulative materials to teach and learn Plane Geometry. This is why the study of geometry should emphasize students' daily lives so that it is possible to see mathematics as an implicit area in and about human life in all contexts. In this scenario, the objective was to describe how geometry teaching can be optimized through the use of manipulative materials. The nature of the study is qualitative, in relation to the purpose of the method, it is an exploratory study. The methodology used was a bibliographic review and for data collection the following search criteria were listed: works carried out in the last five years and that in their corpus contained experiences with manipulative materials regarding the content of Plane Geometry. It is considered that the use of manipulative materials, when organized according to the students' level of knowledge, is effective for teaching Plane Geometry, making students more critical and active in their own learning, and that by encouraging the manipulation of materials, different perspectives of the same object are provided, as well as the socialization of the use of differentiated resources. It is worth mentioning that the use of manipulative materials as a sole purpose does not fulfill the

¹ Aluno do curso Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio. *Campus Teresina Central*.
ldrocampos@hotmail.com.

² Profa. IFPI – *Campus Teresina Central*. prodadraclaulima@gmail.com.

significant didactic-pedagogical assumptions, and it is necessary for the teacher to be intentionally and purposefully prepared for planning, execution, evaluation, replanning, execution, reevaluation ad infinitum, in a virtuous circle.

Keywords: manipulative materials; plane geometry; teaching method.

Data de aprovação: 13/12/2024

1 INTRODUÇÃO

Analisando-se com mais atenção os lugares frequentados é possível encontrar retas e curvas em formas comuns do cotidiano, por exemplo, em cadeiras, paredes, ruas, comida etc. Denotando que a geometria se constitui como uma área da Matemática que cerca o ser humano, presente em todos os contextos, implicando na vida diária, bem como na resolução de problemas no dia a dia (Crescenti, 2005).

Encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999) que

Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas (Brasil, 1999, p. 123).

A utilização das formas geométricas como possibilidade de se acessar partes do mundo real coloca o ensino e aprendizagem da matemática como meio de interligar a matemática do cotidiano com a matemática da academia, o que pode requerer formas diversas de mediação pedagógica (Marques; Fonseca; Mendes, 2018).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio, apontam que

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de figuras geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida (Brasil, 2006, p. 75).

Ou seja, o estudo da geometria deve enfatizar o cotidiano dos alunos de modo que seja possível a visualização da matemática como uma área implícita na e sobre a vida humana.

Para isso, é preciso considerar os conhecimentos prévios dos alunos a fim de lhes proporcionar uma visão mais ampla do conteúdo estudado, a interface com outras áreas do

conhecimento (Pivatto, 2014); alcançando-se aprendizagens mais eficientes e condizentes com as questões humanas.

Os estudos sobre a geometria outorgam o desenvolvimento de capacidades cognitivas e humanitárias, de envolvimento com as diversas formas de resoluções de problema; podendo-se afirmar que o conteúdo de geometria tem meios de tornar os alunos mais críticos e propositivos dentro da sociedade (Brasil, 2006).

O termo geometria tem sentido de "medida de terra", isto devido a sua utilização no passado, em que se fazia a divisão das terras devido às enchentes que eram geradas pelo rio Nilo. Sua origem data de muito antes dessa época, mesmo antes da escrita (3500 a.C.). Os egípcios sabiam como calcular a área de figuras planas, sem curvatura nos lados, utilizando triângulos para calcular essas áreas, o que fez a data de início da geometria significar o início dessa civilização (Crescenti, 2005).

Euclides de Alexandria (Sec. IV a.C.) reuniu conhecimentos geométricos já existentes em sua época e produziu a obra "Os elementos", divididos em 13 volumes, estabelecendo a ordem lógica e o detalhamento acentuado das propriedades – postulados, definições, proposições etc. (Eves, 2004).

Essas propriedades são ensinadas, atualmente, em sala de aula das mais diversas maneiras (Crescenti, 2005). Neste sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como documento de caráter normativo voltado para aprendizagens essenciais da Educação Básica, dentre suas atribuições para a Matemática, apresenta a competência cinco, como:

[...] um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo (Brasil, 2017, p. 540).

Pressupõe-se que para atender o ciclo de aprendizagens essenciais para a matemática é preciso investir na operacionalização do ensino e os materiais concretos, manipuláveis devem ser utilizados como meios e recursos de aprendizagem visto que o manuseio proporciona perspectivas diferenciadas, onde o aluno visualiza as características geométricas dos objetos (Santos, 2014).

Para Lucena (2017), materiais manipuláveis são:

[...] materiais didáticos que permitem a manipulação tátil do aluno, permitindo realizar construções e deformações de objetos geométricos, cálculos de forma concreta através de jogos (por exemplo), ajudando a perceber conceitos e propriedades de elementos matemáticos, bem como o

desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, que é determinante na resolução de problemas matemáticos do seu cotidiano (Lucena, 2017, p. 27).

No caso do ensino da geometria, supera-se a aplicação de fórmulas sem relação com o contexto do aluno, além do quê a manipulação por parte do aluno, pode alcançar a evolução do pensamento geométrico na construção e avaliação das próprias hipóteses (Brasil, 1999).

Diante do que vem sendo exposto até o presente momento, a aprendizagem dos estudos de geometria requer recursos didáticos importantes para o ensino e aprendizagem. Ferramentas que podem levar à prática reflexiva, analítica e propositiva. São exemplos os jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais (Brasil, 1997).

Uma novidade em sala de aula pode gerar uma curiosidade no aluno, fazendo com que ele tenha mais atenção na explicação do conteúdo (Araújo, 2023). Para Colli (2022), os recursos didáticos proporcionam ao aluno a visualização, manuseio e exploração das diversas formas geométricas, entendendo-se suas definições e aplicações.

Os materiais manipuláveis oferecem vários benefícios para a aprendizagem dos alunos, nos quais proporcionam um ambiente agradável para a aprendizagem, pois o aluno fica entretido com a nova abordagem metodológica. A internalização do conteúdo fica mais acentuada, tornando-se mais prática e significativa para o educando (Sarmiento, 2010).

A utilização de metodologias de ensino alternativas, além da expositiva, pode contribuir para uma melhor aprendizagem, já que incentivam a investigação (Pereira, 2014). Dentre essas metodologias, existe a de materiais manipuláveis, onde o aluno pode realizar uma melhor associação da teoria com a prática (Rodrigues, F. C.; Gazire, E. S, 2012).

Partindo-se do que o aluno já conhece de sua vivência, através do lúdico, com proposições para uma melhor investigação sobre o assunto abordado, no contexto em que indivíduo está inserido, é possível que este alcance posicionamento singular nas discussões, sendo crítico e ativo do seu aprendizado (Pereira, 2014).

Além disso,

O material e as atividades a serem com ele realizadas devem passar por um criterioso processo de seleção para que se possa alcançar o objetivo proposto e que sua manipulação se adeque à representação interna dos conceitos envolvidos. Por isso, a exploração de todas as possibilidades do material escolhido deve ser feita antes da aplicação da atividade, para que não aconteçam imprevistos na sua aplicação (Ottesbach; Pavanello, 2007, p. 4).

Ou seja, a utilização de materiais manipuláveis como um fim em si mesmo não garante a aprendizagem, pois é imprescindível a verificação de todos os parâmetros possíveis: o assunto que será abordado, o material para manipulação e o nível de conhecimento prévio dos alunos;

sobretudo, a análise intencional e pedagógica antes da aplicação do material, caso contrário, o educando pode concebê-lo somente como um brinquedo (Rodrigues, F. C.; Gazire, E. S, 2012).

A natureza dos materiais manipuláveis é a proposição do ensino de qualquer conteúdo de forma mais atrativa, auxiliando na elaboração organizada de conhecimentos já adquiridos (Turrioni, 2004). A execução por sua vez prevê um estudo mais contextualizado com a realidade do aluno, com a exposição dos porquês de se estudar certos assuntos (Brasil, 2010). A utilização de recursos manipuláveis atrelados com a vivência do aluno pode facilitar procedimentos de compreensão de suas representações (Fonseca, 2017).

Em se tratando do ensino de Geometria Plana, propor ao educando a manipulação de materiais e a visualização de suas características, pode ser significativo para o entendimento geométrico dele. A utilização de materiais manipuláveis cria um paralelo com a realidade dos alunos, mostrando-se que o mundo ao redor é a aplicação prática de conhecimentos específicos abordados em sala de aula (Brasil, 2010).

Contrapondo-se a essa ideia, fazer a utilização apenas do material manipulável não é garantia de que se tenham todos os objetivos propostos para a atividade alcançados. Com isso, deve-se levar em consideração o conteúdo e o planejamento adequado para a turma, pois, com o auxílio deste recurso, os alunos, por meio da manipulação, podem ter sua curiosidade acerca do conteúdo de geometria despertada, buscando investigar suas características (Santos, 2014).

Uma característica dos materiais manipuláveis é a obtenção tridimensional de um sólido que antes era representado com duas dimensões em uma folha, o que não possibilita uma melhor assimilação de definições e conceitos do conteúdo de geometria. Para Becker (1994, p. 73), “o conhecimento é algo que se desperta no aluno; isto é, ele já está aí, mas faltou ocasião para manifestar-se”.

Com isso, apresenta-se as considerações produzidas no trabalho intitulado “Materiais manipuláveis e o ensino de geometria plana”, que partiu do problema de pesquisa: como os materiais manipuláveis otimizam o ensino de geometria?

Para a consecução dos estudos, elencou-se como objetivo geral: Descrever a otimização do ensino de geometria através do uso de materiais manipuláveis. E como objetivos específicos: Apresentar alguns pressupostos teóricos de geometria, discutir os materiais manipuláveis como recursos didático-pedagógicos, qualificar em trabalhos bibliográficos a otimização do ensino de geometria através de materiais manipuláveis.

Propôs-se este estudo por dificuldades encontradas por mim quando estudava no ensino médio e não conseguia associar o conteúdo abordado com algo prático da realidade. Atrelado a

isso, a metodologia aplicada pelos professores era, basicamente, a expositiva, onde tinham como recursos didáticos o quadro, pincel e exercícios dos livros.

Além disso, na graduação, quando estava no estágio supervisionado no Ensino Médio, percebia a dificuldade dos alunos nos trabalhos e avaliações, relacionados ao conteúdo de Geometria Plana, onde perdiam o foco na explicação rapidamente após poucos minutos. Com isso, as notas referentes ao conteúdo de Geometria Plana não eram satisfatórias.

Para situar este estudo entre as produções acadêmicas já realizadas, acessou-se a Base Institucional Acadêmica do Instituto Federal do Piauí com o descritor “materiais manipuláveis” e “Geometria Plana” sendo encontrado um trabalho de conclusão de curso: “Matemática recreativa através de materiais manipuláveis” (Dantas, 2017). Assim como esta pesquisa, o autor buscou verificar como o ensino pode ser otimizado através da utilização de materiais manipuláveis, abordando conteúdos além da Geometria Plana, a Geometria Espacial e Análise Combinatória.

Espera-se que as considerações suscitadas nesta pesquisa venham contribuir para outras discussões no âmbito do Instituto Federal do Piauí e outros contextos; bem como que outros autores possam refutar as ideias, ou aprofundá-las, bem como pode subsidiar alguma discussão no contexto das disciplinas de matemática: Análise Combinatórias, Geometria Plana, Geometria Espacial, Trigonometria entre outras, aprimorando-se metodologias para o ensino e aprendizagem da matemática.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Esta pesquisa configurou-se como de natureza qualitativa, pois buscou enfatizar questões particulares, subjetivas dos contextos sob investigação, bem como, possibilitou que o investigador se posicionasse crítica e intencionalmente (Minayo, 2007).

Quanto ao propósito, caracterizou-se como pesquisa exploratória. Conforme Gil (2019, p. 22) “pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato”.

Para a produção de dados elencou-se a pesquisa bibliográfica. Segundo Gil (2019), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de materiais já produzidos; sendo que “a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que se poderia pesquisar diretamente” (Gil, 2019, p. 45).

Para Lakatos e Marconi (2003) a pesquisa bibliográfica compreende oito fases: escolha do tema; elaboração do plano de trabalho; identificação; localização; compilação; fichamento;

análise; interpretação e redação. Para este estudo utilizou-se: escolha do tema, baseado nos interesses pessoal e de percurso formativo do autor (vide justificativa); a localização que teve a ver com os locais de repositório dos estudos escolhidos; fichamento das informações consoante o problema e objetivo da pesquisa; análise, interpretação e redação como fases de consecução e consolidação do artigo científico.

Para a coleta de dados considerou-se como critérios de busca: trabalhos realizados nos últimos cinco anos e que em seu *corpus* contivessem experiências com materiais manipuláveis para o ensino do conteúdo de Geometria Plana.

Acessou-se a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações com os seguintes descritores "materiais manipuláveis" AND "geometria plana", tendo sido encontrados três trabalhos datados de 2012, 2013, 2017, 2020 e 2022; sendo escolhidos apenas os dos anos 2020 e 2022 conforme quadro a seguir:

Quadro 1 O desenvolvimento do pensamento geométrico nos anos iniciais do ensino fundamental a partir da teoria de Van Hiele: contribuições de um curso de formação de professores

Base	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)
Autor/ano	Colli, M. D. / 2022
Tipo de trabalho	Dissertação
Materiais manipuláveis	Sugestões de materiais manipuláveis na aplicação dessas tarefas, como: Tangram, geoplano, sólidos geométricos, entre outros
Conteúdo matemático	Geometria plana e espacial
Objetivo do trabalho	Investigar as contribuições de um curso de formação continuada abordando o desenvolvimento do pensamento geométrico de acordo com a Teoria de Van Hiele, para a prática pedagógica de docentes que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Fonte: autores, 2024.

Quadro 2: Análise de erros em resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos: uma experiência em uma turma de segundo ano do Ensino Médio da rede pública

Base	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)
Autor/ano	Costa, M. V. S. / 2020
Tipo de trabalho	Dissertação
Materiais manipuláveis	Cubo, cilindro, cone, pirâmide, octaedro
Conteúdo matemático	Geometria espacial
Objetivo do trabalho	Analisar os principais tipos de erros, cometidos por alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio da rede pública, na resolução de problemas de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos.

Fonte: autores, 2024.

Os trabalhos acima selecionados têm em comum a abordagem dos conteúdos de Geometria Plana e Espacial e a aplicação de materiais manipuláveis como recurso didático-pedagógico visando o protagonismo dos alunos em relação à construção autônoma de aprendizagem dos alunos.

Para a interpretação dos dados já produzidos, aplicou-se o método de análise temática que consiste em descobrir os “núcleos de sentido” que compõem a comunicação e cuja presença, ou frequência de aparição pode resultar significado para as respostas do problema de pesquisa (Minayo, 2007).

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 O desenvolvimento do pensamento geométrico nos anos iniciais do ensino fundamental a partir da teoria de van Hiele: contribuições de um curso de formação de professores

Colli (2020) considera a Matemática como importante para a construção da cidadania, empregabilidade e interação social. No campo do ensino, considera que a matemática estimula o pensamento lógico na aplicação de questões. Assim, o ensino deve ser baseado em situações significativas para o aluno, na utilização de materiais manipuláveis e na vida cotidiana dos alunos.

No cenário do que se propôs a estudar, Colli (2022) descreve que a geometria gera curiosidade nos educandos, pois permite observar as formas geométricas de maneira detalhada. Com isso, segundo a autora, inserir os materiais manipuláveis na formação docente pode estimular ainda mais o ensino da geometria, pois os alunos podem ficar mais envolvidos na aprendizagem que este recurso pode ser utilizado para começar o conteúdo. Amparada por Rodrigues e Gazire (2012), apresenta que estes materiais podem favorecer um ensino e aprendizagem mais compreensíveis, pois cria um contato maior entre a teoria com a prática por meio da manipulação. Isso vai de acordo com Turrioni (2004), sendo que a utilização dos materiais manipuláveis torna o ensino mais atrativo, com o aluno organizando seus conhecimentos geométricos.

Para Colli (2022) o ensino de geometria deve abordar métodos alternativos que utilizem materiais manipuláveis, em que o próprio aluno pode realizar a sua construção, sendo que isso pode ajudar na aplicação de um ensino contextualizado com a realidade, mostrando também que as figuras espaciais estão nos diversos lugares. Baseada em Motta (2008), aborda que a Matemática deve estimular o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos no aluno. Assim, corrobora com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999), em que as figuras geométricas apresentadas devem ser contextualizadas, sendo expostas no dia a dia.

A partir de Santos e Gualandi (2016), pondera que o ensino de geometria pode ser potencializado com a utilização dos materiais manipuláveis, sendo que a aplicação destes materiais seja planejada conforme o conteúdo. Assim, apresenta que o conteúdo de Geometria

pode ser abordado de forma mais ampla e com esses materiais, além disso, que o professor deve buscar por metodologias de ensino diferentes da expositiva. O que vai de acordo com Brasil (2010), referente ao planejamento adequado dos materiais, e com Sarmento (2021), em que uma nova abordagem do conteúdo pode tornar o aprendizado mais significativo para os alunos.

Para Colli (2022) o ensino de geometria deve abordar métodos alternativos que utilizem materiais manipuláveis, em que o próprio aluno pode realizar a sua construção, sendo que isso pode ajudar na aplicação de um ensino contextualizado com a realidade, mostrando também que as figuras espaciais estão nos diversos lugares. Baseada em Motta (2008), aborda que a Matemática deve estimular o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos no aluno. Assim, corrobora com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999), em que as figuras geométricas apresentadas devem ser contextualizadas, sendo expostas no dia a dia.

Colli (2020) para desenvolver seu estudo partiu da Teoria de Van Hiele enquanto método e metodologia para demonstrar como o aluno nos anos iniciais do ensino fundamental pode apreender geometria tendo como cenário a formação continuada de professores, interlocutores.

A Teoria de Van Hiele enquanto metodologia de ensino e aprendizagem proporciona ao docente ferramentas para verificar em qual nível o aluno está em relação aos conhecimentos geométricos e, com isso, produzir atividades de acordo com tal nível.

Van de Walle (2009) como organizador da teoria pressupõe esse modelo em cinco níveis: pensamento geométrico, no nível 1 (visualização), o aluno identifica o formato das formas, suas semelhanças e diferenças, mas sem o rigor matemático em suas definições, ele entende de acordo com sua observação do cotidiano.

No nível 2 (análise), já consegue aplicar as definições e propriedades das figuras, mesmo ainda não aceitando a inserção de novas nomenclaturas. Para o nível 3 (ordenação das propriedades geométricas), o educando consegue distinguir entre propriedades similares, relacionando logicamente os conceitos, estando preparado para explicar como construiu a resolução de um questionamento.

Ao atingir o nível 4 (dedução formal), o aluno já é capaz de entender teoremas, axiomas, provas, deduções, analisa as figuras além de suas propriedades. E, finalizando os níveis, no nível 5 (rigor), o aluno passa a agir acentuadamente no campo do abstrato, não necessitando de modelos concretos para compreender o assunto, além disso, realiza demonstrações das propriedades utilizando axioma (Colli, 2020).

Referente ao ensino de matemática, apoiando-se em Fiorentini (2013), a autora diz que essa formação pode relacionar professores que atuam em diferentes níveis de ensino, pois,

amparada por Ciríaco, Morelatti e Ponte (2017), diz que a prática reflexiva é fundamental para o aperfeiçoamento do docente, oportunizando também a socialização entre os pares, buscando estratégias para um ensino de matemática mais prazeroso, tendo o aluno como ativo no seu aprendizado. Colli (2022) reforça que o contato entre os professores pode ajudar no desenvolvimento de metodologias diferentes para o ensino, uma vez que são trocadas experiências.

A discussão que Colli (2022) faz sobre prática pedagógica do docente parte do entendimento de que esta, é aperfeiçoada ao longo de toda sua profissão, acentuando que ele não deve se prender aos métodos já aplicados anteriormente. Baseia-se em Motta, Basso e Kalinke (2019) para expor que a formação continuada proporciona ao docente mais recursos para tornar o ensino e a aprendizagem mais eficazes, possibilitando a relação entre o conteúdo teórico com a prática.

Essa formação continuada é importante, pois a formação inicial não é suficiente para ensinar a disciplina de Matemática no Ensino Fundamental (Colli, 2022). A partir disso, apoiado em Motta e Silveira (2012), reforça que a graduação é insuficiente para uma formação adequada. Com isso, fica evidente a necessidade de uma formação continuada para agregar ao professor mais ferramentas metodológicas.

Alude que a formação continuada é essencial para o desenvolvimento do professor, em relação ao ensino de matemática, informa que essa formação proporciona inovação das práticas pedagógicas nas aulas, percebendo como o ensino deve ser direcionado em cada turma (Colli, 2022). Parte de Patto (1990) para explicar que os alunos possuem ritmos de aprendizagem diferentes, o que ocasiona mais um obstáculo no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.

Amparou-se em Machado e Boruchovitch (2015) para dizer que a formação continuada proporciona uma nova visão sobre a metodologia utilizada, relacionando-a com a realidade atual da sociedade. Apoia-se em Chimentão (2009) para definir formação continuada como sendo um desenvolvimento permanente da vida docente, isso sendo após a formação inicial. Com isso, parte de Kaminski (2019) para apresentar o objetivo da formação continuada, sendo este o de pensar sobre a prática em sala de aula, buscando inovar e gerar interesse aos educandos, considerando seus saberes, além disso, estimular a utilização de materiais didáticos nas aulas.

Colli (2022) diz que essa colaboração pode ajudar na superação de dificuldades identificadas pelos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, estimulando a criatividade, dando segurança e motivando na abordagem de metodologias que chamem a

atenção dos alunos. Além disso, diz que essa colaboração oportuniza a verificação de quais metodologias e materiais tiveram bons desempenhos aplicados por outros docentes.

Para Colli (2022) o professor deve entender como o educando aprende a disciplina de Geometria, quais recursos é utilizado pelo aluno, e, a partir disso, abordar mais detalhadamente o conteúdo. Com isso, perceber que os alunos podem estar em níveis diferentes referente ao domínio do conteúdo, o que pode causar dificuldades na aprendizagem (Colli, 2022).

Assim, como uma forma de amenizar essa e outras dificuldades que os alunos possam ter, baseando-se por Souza, Oliveira e Attie (2017), a autora diz que o trabalho colaborativo proporciona a construção de materiais que podem ajudar na relação entre o conteúdo estudado dentro de sala de aula e dia a dia do aluno.

A autora, coloca o aluno no centro de sua aprendizagem, esperando que este seja capaz de associar os conteúdos estudados com seu dia a dia, sendo o professor um mediador. Sendo assim, a partir de Lorenzato (1995), diz que um objetivo importante do aprendizado de Geometria é proporcionar ao educando a visualização, no seu cotidiano, do conteúdo estudado. O que vai de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que o ensino deve proporcionar investigação e construção de argumentos com o apoio dos materiais manipuláveis.

Utiliza Lucena (2017) para definir materiais didáticos manipuláveis, sendo que estes possibilitam a construção de objetos geométricos e sua deformação, servindo como apoio na visualização das propriedades desses objetos e ajudando na compreensão de problemas matemáticos. Além disso, amparada por Santos e Gualandi (2016), diz que os materiais manipuláveis podem desenvolver habilidades de análise e compreensão. Sendo assim, os materiais manipuláveis podem alavancar o desenvolvimento do educando de forma ampla, especialmente no ensino de Geometria.

Colli (2022) diz que os alunos devem ter ativos na manipulação, que eles não devem somente ficar observando o professor. A partir de Rêgo e Rêgo (2006) apresenta um modelo de como pode ser aplicado o material manipulável, sendo necessário planejar, organizar e discutir com os alunos a forma ideal de aplicação, proporcionando a ação manipulativa por parte dos alunos.

Com isso, a autora diz que os materiais manipuláveis proporcionam ao professor recursos para incentivar os alunos com a manipulação, investigando as propriedades dos materiais, desenvolvendo o pensamento geométrico. A partir de Rodrigues e Gazire (2012) diz que essa manipulação proporciona a transição entre o concreto e o abstrato. Corroborando Brasil (2010), em que os materiais manipuláveis proporcionam a compreensão que o conteúdo estudado está de forma prática aplicado no dia a dia.

Assim, de acordo com Colli (2022), o conhecimento prévio do educando, atrelado a uma boa metodologia do professor, é importante para o ensino de geometria, sendo que este ramo da matemática é fundamental para a ampliação do raciocínio lógico e para resolução de problemas do cotidiano. Amparada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), diz que os conhecimentos geométricos são importantes desde a Educação Infantil, que ajudam a solucionar problemas das diversas áreas, proporcionando a construção de argumentações sólidas referente a determinado assunto geométrico, além disso, o educando deve aprender no início do Ensino Fundamental a identificar as formas tridimensionais e bidimensionais e suas propriedades, sabendo relacionar as formas com suas planificações, que a introdução do conteúdo de simetrias deve ser a partir de materiais manipuláveis.

Com isso, foi aplicado o modelo de Van Hiele em um curso de formação continuada com dez professoras do Ensino Fundamental, sendo docentes da rede privada de Apucarana, Norte do Paraná.

Foram divididos grupos para a construção de atividades conforme os níveis da Teoria de Van Hiele, sendo abordado teoricamente o conteúdo de Geometria, assim, estimulando a colaboração entre as docentes, gerando um aprendizado mútuo (Colli, 2022). As atividades, que foram desenvolvidas para os alunos do Ensino Fundamental, tinham o objetivo de proporcionar o avanço para o próximo nível (Colli, 2022). Não houve a construção ou utilização de materiais manipuláveis nos encontros, somente de forma digital. Amparada por Passos (2006) diz que o trabalho colaborativo proporciona o compartilhamento de experiências, buscando metodologias que associam a teoria com a prática, juntamente com a criação de materiais manipuláveis, discutindo e refletindo os resultados anteriores.

As professoras discutiram sobre quais materiais manipuláveis iriam utilizar, sendo mencionado o Tangram, geoplano, sólidos geométricos. Além disso, foi decidido qual seria o objetivo de cada atividade, isso conforme a Teoria de Van Hiele. Com os dados obtidos, houveram discussões sobre os resultados de cada docente, proporcionando a socialização e o aprendizado de novas abordagens metodológicas.

Observou-se na pesquisa de Colli (2020) que, antes da aplicação do curso de formação continuada, que as professoras possuem algum tipo de barreira para o ensino de Matemática, isso sendo devida a falta de domínio da disciplina, da falta de atualização de novas metodologias de ensino e de aplicação de materiais capazes de aprimorar o aprendizado dos alunos Colli (2022). Amparado por Matos e Jardimino (2016) diz que as pessoas percebem o meio em que estão e agem de acordo com seus ideais. Conforme Becker (1994), caso tenha oportunidade, o

conhecimento emerge, o que mostra que as professoras tiveram poucas ocasiões para um desenvolvimento matemático satisfatório.

Colli (2022) apresenta que as professoras participantes, após a formação inicial, não se sentiam confiantes para ensinar matemática, sendo que procuravam explorar o conteúdo da turma em que atuavam, não de anos mais avançados. Isso ocasionado pela formação inicial, que abordou de forma breve conhecimentos básicos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental (Colli, 2022). A partir de Nacarato, Mengali e Passos (2009), diz que, na formação inicial, o foco são as metodologias, não sendo abordado de forma ampla os conteúdos matemáticos.

Outro ponto significativo observado, antes do curso de formação continuada, foi sobre a preparação dos docentes para lecionar Geometria, sendo apresentado que as próprias professoras disseram não estavam preparadas adequadamente, além disso, que não só ensinavam Geometria Plana, não fazendo ligação com a Geometria Espacial. Parte de Cruz e Monteiro (2013) para explicar que muitos professores acham que irão dominar os aspectos metodológicos para ensinar Geometria somente com a formação inicial, o que gera frustração e uma limitação ao ensinar matemática. Colli (2022) diz que os docentes devem buscar o conhecimento necessário para sanar as dúvidas dos alunos sempre que surgir uma situação adversa sobre o conteúdo. Assim, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), o professor deve oferecer aos alunos recursos para uma aprendizagem reflexiva, analítica e propositiva.

Após o curso de formação continuada, as professoras disseram que sentiram dificuldades para identificar os níveis dos alunos, segundo a Teoria de Van Hiele, gerando obstáculos na construção das atividades conforme o nível observado, o que levou as professoras a refletirem, buscando formas de aplicar as atividades considerando os conhecimentos dos alunos (Colli, 2022). Assim, de acordo com Santos (2014), o professor deve levar em consideração a turma e o material que será utilizado para instigar nos alunos a curiosidade sobre o conteúdo de Geometria.

Foi observado que, referente aos níveis dos alunos, corroborando a Teoria de Van Hiele, estavam em níveis diferentes sobre os conhecimentos geométricos Colli (2022). Com isso, conforme Ottesbach e Pavanello (2007), antes da aplicação dos materiais manipuláveis, deve ser feito um estudo acentuado sobre o conhecimento dos alunos acerca do conteúdo de Geometria, isso para propor uma abordagem sem imprevistos.

Colli (2022) apresenta que, após a conclusão do curso de formação continuada, as professoras acreditam poder proporcionar o pensamento geométrico em suas turmas, além disso, identificar, especificamente, cada nível de pensamento do método Van Hiele.

Sendo assim, foi consolidada a Teoria de Van Hiele com a utilização de materiais manipuláveis, pois ficou evidente que as professoras, com os questionários analisados, conseguiram identificar em qual nível de pensamento geométrico os educandos estavam, a partir disso, passaram a planejar as aulas de acordo com os níveis observados da turma, considerando quais recursos poderiam ser utilizados para sua progressão no próximo nível, assim, sendo observado o aprendizado por parte deles (Colli, 2022). As professoras reconheceram a importância de entender que os alunos podem estar em níveis diferentes de aprendizado, que o professor deve perceber isso e propor abordagens alternativas. Isso vai de acordo com Marques, Fonseca e Mendes (2018), no qual o professor deve possuir metodologias de ensino diferenciadas para amparar os alunos em possíveis dificuldades no conteúdo de Geometria.

Arelado a isso, as professoras disseram que o ensino de Geometria deve ser com a utilização de materiais manipuláveis, pois os alunos ficam mais interessados, curiosos e críticos, além disso, que também é importante entender que nas turmas podem ter alunos em diferentes níveis sobre os conhecimentos geométricos (Colli, 2022). As professoras consideram que a utilização dos materiais manipuláveis é importante para ter um ensino mais significativo para os alunos, pois eles têm interação com o objeto, estimulando os sentidos e a construção de ideias para consolidar o aprendizado dos conceitos geométricos, sendo que a manipulação facilita a assimilação (Colli, 2022).

Para as professoras, o ensino de Geometria deve abordar o cotidiano dos alunos, proporcionando reflexão sobre os saberes geométricos, reforçando a manipulação de materiais, sendo o professor um mediador nesse aprendizado (Colli, 2022). Com isso, conforme Pivatto (2014), o professor deve levar em consideração o que alunos já sabem sobre o conteúdo.

Sobre a relevância da Teoria de Van Hiele, as professoras disseram que é importante, pois fica sendo possível observar em qual nível o aluno está e, a partir disso, melhorar na abordagem do conteúdo de Geometria ou reforçar conceitos anteriores (Colli, 2022). Segundo Pereira (2014) utilizar metodologias pedagógicas diferentes pode ajudar na aprendizagem dos alunos, pois estimula a investigação.

Colli (2022) descreve que, após encerrar o curso de formação continuada, as professoras concluíram que o docente deve ter cuidado ao aplicar determinada atividade, pois vai depender do quanto ele domina o conteúdo e de como irá aplicá-la, visto que os materiais manipuláveis

utilizados podem não ser suficientes para o aprendizado dos alunos. O que vai de acordo com Rodrigues e Gazire (2012), no qual deve ser realizada uma análise antes da aplicação do material manipulável, isso para ele não se tornar um brinquedo para os alunos. A partir de Spinillo (2014) diz que os erros que ocorrem nas aulas de Matemática podem ajudar os docentes na identificação da causa e na melhor forma de solução do problema.

Todas as professoras consideram que o curso de formação continuada foi importante para a construção de um ensino de Geometria com qualidade, que somente a formação inicial não supre todas as necessidades de uma sala de aula (Colli, 2022).

Nas aulas das professoras, com o aparato do curso, o ensino de geometria ficou sendo abordado com situações do cotidiano, inserindo o material manipulável, o que leva ao desenvolvimento do pensamento abstrato por associação, sendo esse pensamento, para as professoras do curso de formação, um grande desafio ao para os alunos sobre a disciplina de Geometria (Colli, 2022). Parte de Lorenzato (1995) para dizer que a Geometria está na vida da criança em diversas situações, que ela já entende algumas formas geométricas. Logo, é necessário verificar previamente o quanto os alunos dominam a disciplina (Colli, 2022). Com isso, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999), a manipulação dos materiais, por parte dos alunos, proporciona o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos.

O curso de formação continuada teve como produto um material didático para utilização nas aulas. Intitulado “O pensamento geométrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: formação de professores e tarefas exploratórias”, no qual o professor tem acesso a Teoria de Van Hiele e também com atividades para estimular a aprendizagem de Geometria por parte dos alunos, sendo estas aplicadas pelas professoras participantes do curso de formação continuada (Colli, 2022).

As considerações da pesquisa mostram que houve uma mudança significativa nas aulas referente ao pensamento geométrico, conforme a Teoria de Van Hiele, que as professoras mudaram sua forma de ensinar Geometria Plana e Espacial, buscando cada vez mais a associação entre a teoria e a prática, deixando a Matemática em si mais agradável e compreensível. Isso reforça a necessidade dos cursos de formação continuada, ainda mais sobre a aplicação da Teoria de Van Hiele para o ensino de Geometria. Parte de Libâneo (2004) para dizer que a formação continuada é uma continuação da formação inicial, que o professor deve estar sempre em aperfeiçoamento.

Portanto, a aplicação da Teoria de Van Hiele e a sugestão de materiais manipuláveis para o ensino de Geometria Plana e Espacial, foram capazes de proporcionar um curso de

formação de professores com vistas à obtenção do incentivo a investigação, o raciocínio lógico, a autonomia e a socialização dos conhecimentos adquiridos. Os alunos possuem necessidades específicas sobre os conteúdos, em especial os de Geometria, e devem criar uma relação entre o concreto e abstrato para uma melhor aprendizagem (Rodrigues e Gazire, 2012). Sendo assim, o professor é responsável por compreender em quais níveis os alunos estão e propor métodos adequados para tais situações. Além disso, o trabalho colaborativo foi importante para o planejamento das atividades, uma vez que contribui para a construção de aulas mais dinâmicas e produtivas (Colli, 2022).

3.2 Análise de erros em resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos: uma experiência em uma turma de segundo ano do ensino médio da rede pública

Costa (2020) defende a ideia de que a matemática possibilita habilidades de resolver problemas matemáticos, sendo basilar para se aprender qualquer coisa, e que construir uma solução a partir de ações estruturadas são importantes para a continuidade do aprendizado dos conteúdos; o que corrobora com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que prescreve o ensino de Matemática como um estímulo para a investigação e a construção de argumentação lógica (Brasil, 2018).

Reforça a partir de (1994), que o ensino deve ser interessante para o educando, e que a vontade de aprender matemática deve partir dele próprio, tendo em vista que o ensino dos conteúdos matemáticos é importante para a crescimento social; em contrapartida, afirma que o ensino dos conteúdos matemáticos tem se tornado um desafio devido aos resultados negativos por parte dos alunos, o que traz insatisfação e um índice considerável de notas baixas. Sendo necessário para uma melhor aprendizagem, que o docente oportunize situações para o despertar o conhecimento dos educandos.

Amparado em Moraes e Varela (2007); Araújo (2023) apresenta diferenciação entre motivação e interesse, sendo que a motivação é o que impulsiona a pessoa a atingir tal objetivo, gerando energia para romper as possíveis dificuldades que possam surgir, já o interesse, talvez, não seja suficiente para modificar comportamento e alcançar a meta pretendida: prende a atenção, mas pode não produzir o esforço para a ação. Sendo assim, o professor deve proporcionar um ambiente o mais favorável possível para se estimular a motivação, e a metodologia aplicada, se necessário.

Sobre o estudo de geometria, Costa (2020) reforça que deve ser realizada uma revisão antes de iniciar um assunto sobre o conteúdo, isso para se verificar o nível de conhecimento dos alunos sobre o domínio das propriedades. Considera ainda, que a escola tem o papel de fazer

com que os indivíduos tenham a capacidade de resolver problemas que envolvam Geometria Espacial, dentre outros conteúdos de Matemática; o que vai de encontro com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, de que os educandos devem desenvolver capacidades de resolver problemas do dia a dia com o aprendizado de Geometria (Brasil, 2006).

Costa (2020) sobre o tema Geometria faz uma discussão sobre trabalhos que utilizaram a metodologia de análise de erros com questões de Geometria concluindo que a metodologia aplicada auxilia para a nitidez de quais dificuldades os alunos estão enfrentando e, a partir disso, propor estratégias para amenização das mesmas; o que vai de acordo com Sarmiento (2010), no qual diz que o aprendizado pode ficar mais significativo com a utilização de uma metodologia alternativa.

Parte de Gerdes (1983) para explicar que o ensino baseado em conteúdo abstrato não supre as necessidades dos alunos e, além disso, conteúdos que não são baseados na realidade do educando tornam a associação entre concreto e abstrato cada vez mais complicada, o que reforça o pensamento de Pereira (2014), que defende que o ensino deve permear o contexto em que o aluno esteja inserido. Utiliza Perrenoud (2001) para expor o papel do professor, sendo que este deve estar sempre em constante evolução, aprendendo durante toda sua carreira.

Com o suporte em Polya (1978) o autor faz uma discussão sobre problema matemático e exercício matemático, no qual aponta que no exercício matemático o aluno fica condicionado a repetição de padrões, por exemplo, inserindo valores em fórmulas. Em contrapartida, o problema matemático busca a investigação acerca do procedimento a ser executado para se obter a resposta, podendo ser abordado diferentes conteúdos na mesma questão. Pivatto (2014), reforça esta ideia ao afirmar que compete ao professor proporcionar uma visão mais ampla do conteúdo trabalhado.

Quadro 3: Comparativo exemplificativo entre exercício e problema matemático

Exercício matemático	Problema matemático
Determine o valor de x ($x \in \mathbb{R}$), para a expressão: $x + 6 = 3 \cdot (x - 4)$	Em seis anos, Juca terá o triplo da idade que tinha há 4 anos. Qual sua idade atual?
Para a resolução da questão, aplica-se às propriedades algébricas, na qual é identificado o valor de 9 para x .	Como forma de partida para solucionar o problema, o aluno deve compreender o que está sendo solicitado, organizar as informações e partir com um plano para execução e, por fim, confirmar se o resultado pode ser a solução. Para a resolução do problema, chama-se a idade que deve ser encontrada por x . Depois de seis anos, a expressão fica $x+6$. Para o triplo da idade há 4 anos, a expressão é $3 \cdot (x - 4)$. Assim, igualando as expressões: $x + 6 = 3 \cdot (x - 4)$. Por fim, utilizando novamente as propriedades algébricas, o valor para x é 9. Depois de encontrar o valor de x , verifica-se a solução do problema. Se a idade atual de Juca é 9 anos, fica:

	• Há 4 anos, Juca tinha $9 - 4 = 5$ anos. • Daqui a 6 anos, Juca terá $9 + 6 = 15$ anos. O triplo da idade de Juca há 4 anos é $3 \times 5 = 15$, que é exatamente a idade que Juca terá em 6 anos. Isso mostra que a solução $x = 9$ está correta.
--	---

Fonte: Autores (2024)

Ao propor o método de resolução de problemas, no qual o aluno é incentivado ao pensamento analítico da questão, ampara-se em Polya (1978), que prevê o não condicionamento do aluno a aplicação de propriedades para a resolução do problema, ou seja: o aluno é estimulado a pensar sobre o que o enunciado solicita e, a partir disso, percorrer caminhos até sua resolução.

A resolução de problemas tem base em situações abertas e sugestivas, sendo que o aluno deve ser ativo para procurar seus próprios resultados acerca do que foi solicitado e neste processo o professor deve ser capaz de identificar a causa de possíveis erros que os alunos tenham cometido, refletindo com a turma e procurando estratégias para uma melhor metodologia de ensino; corroborando com as ideias de Crescenti (2005) sobre considerar os conhecimentos prévios dos educandos.

Considera importante a identificação da causa dos erros cometidos pelos alunos, como advindo do processo de ensino adotado, da comunicação do professor, do currículo adotado pela instituição, e não propriamente a ignorância do aluno; situações que devem ser sistematizadas e analisadas (Costa, 2020).

Abalizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2007) defende para o tratamento dos erros dos alunos, que o professor identifique a origem desses erros e proporcione, junto com os alunos, a reflexão e superação de tais entraves. Ancora-se em Polya (1978) para acentuar as etapas utilizadas no método de resolução de problemas, no qual o educando deve compreender o problema e traçar estratégias para solucioná-lo, sendo que este pode perceber padrões de problemas já resolvidos anteriormente, além disso, verificar se é possível atingir o mesmo resultado partindo-se de outros procedimentos.

Para a definição do recurso didático material manipulável, utilizou-se de Vale (2014, p. 6), para conceituá-lo como sendo todo “material concreto, educacional ou do dia a dia (e.g. ábaco, polícubos, folhas de papel, bolas de gude), que represente uma ideia matemática, que durante uma situação de aprendizagem apele aos sentidos e que se caracteriza por um envolvimento ativo dos alunos”. Acentua que somente o material manipulável não garante uma aprendizagem satisfatória; o professor deve planejar bem as aulas conforme o conteúdo e o

nível do aluno, para o que, seguindo-se o pensamento de Rodrigues e Gazire (2012), faz-se necessário uma análise intencional e pedagógica antes da utilização do material manipulável.

Apresenta duas classificações para o material manipulável: estático e dinâmico. O material estático não permite sua transformação por meio da manipulação, fica disponível a visualização de suas propriedades; já o material dinâmico proporciona ao educando sua transformação a partir da manipulação, o que pode facilitar o entendimento das propriedades. Acrescenta que estes materiais podem ser produzidos pelos próprios alunos e que o professor deve considerar o conteúdo que será ministrado e o planejamento para uma melhor assimilação por parte dos alunos com o uso do tipo de material manipulável escolhido (Costa, 2020).

A metodologia de análise de erros foi aplicada por Costa (2020), amparando-se em Cury (2007), que busca identificar a origem dos erros realizados pelos alunos, entendendo sua causa e percebendo, assim, como os educandos aprendem determinado conteúdo. Ainda segundo Cury (2007), após identificar os erros, deve-se criar categorias desses erros de acordo com o objetivo do professor.

Com isso, apoiado em Dante (2010), apresenta seis tipos de problemas, sendo estes:

1. Exercícios de reconhecimento: servem para lembrar conteúdos anteriores;
2. Exercícios de algoritmo: tem o intuito de avaliar o educando sobre as execuções de determinadas etapas para a obtenção da resposta;
3. Problemas padrão: são problemas que dependem do entendimento do enunciado de forma matemática, sendo analisado do domínio das quatro operações matemáticas;
4. Problemas-processo ou heurísticos: requerem tempo para analisar a questão, planejar estratégias para alcançar a resposta, estimula a curiosidade e a criatividade;
5. Problemas de aplicação: são problemas que envolvem o dia a dia do aluno, inserindo-o na construção das perguntas; e
6. Problemas de quebra-cabeça: utilizam da esperteza do aluno para identificar algum padrão, sendo necessária a verificação detalhada de cada informação.

Dependendo do propósito do professor com a aplicação de questionários sobre o conteúdo, ele pode utilizar os mais diversos modelos de questões, entendendo sua importância e proporcionando ao aluno crescimento na sua aprendizagem.

Para aplicação da metodologia apoiou-se em materiais manipuláveis, sendo que foram feitas atividades com os alunos sobre as propriedades desses materiais, sua planificação e montagem com folha sulfite, as construções regulares feitas foram: cubo, tronco de cone, cilindro, pirâmide hexagonal e octaedro. Antes de iniciar as atividades o autor fez revisões sobre

áreas de figuras planas, volume de sólidos, esfera e cunha esférica. Com isso, após a aplicação das atividades, foi realizada a correção com a turma, fazendo-se discussões sobre as resoluções.

Partiu de Sarmento (2012) para corroborar com a metodologia, realizando a aplicação desses materiais manipuláveis para o aprendizado dos educandos, juntamente com a análise de erros, visto que podem proporcionar a eles uma aprendizagem mais significativa por meio da manipulação, gerando curiosidade e motivação para aprender o conteúdo. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 2º ano do Ensino Médio Regular de uma escola estadual, sendo do período noturno, no município do Rio de Janeiro (RJ). Sobre os alunos, a maioria já tinha mais de 18 anos e exercendo atividade remunerada.

Os materiais manipuláveis utilizados foram da própria escola, sendo sólidos em acrílico para explicar o conteúdo de planificação, área de uma superfície plana e volume dos sólidos. Com isso, foram apresentadas as figuras planificadas, para explicar as propriedades dos sólidos geométricos, como cubo, pirâmide, paralelepípedo, cilindro, cone, octaedro. Como recomenda Brasil (2010), procurou também situações do cotidiano desses estudantes, que pudessem ser representadas com essas propriedades, tornando as aulas mais lúdicas.

Utilizou ilustrações para representar a esfera e a cunha esférica, sendo a bola e um gomo de tangerina, respectivamente, a representação foi realizada diretamente no quadro. Neste caso, não foi viável a utilização de material manipulável por ausência de suporte, não conseguindo os materiais necessários para associar o conteúdo de esfera e suas seções. Isso corrobora com Brasil (2010), em que o aluno já possui situações em que o conteúdo estudado está aplicado de forma prática no seu cotidiano.

O pesquisador propôs atividades para os alunos construírem materiais concretos a partir de folha sulfite, produzir: pirâmides, tronco de cones, cilindros, cubos e octaedros. Ao finalizar a montagem dos sólidos, houveram questionamentos sobre os nomes de cada um, as respostas para pirâmide, cilindro e cubo foram corretas. Já para octaedro e tronco de cone, os alunos não souberam responder.

Ao responderem as questões, os alunos preferiram não utilizar os sólidos geométricos disponíveis nas aulas, pois informaram que dispunham de prévia visualização. E mesmo tendo a liberação para manusear a calculadora, alguns alunos escolheram não utilizar, sendo que a maioria usou. Isso mostra a necessidade de se propor um ensino considerando-se o que os alunos já sabem (Pivatto, 2014).

Após as atividades serem aplicadas, com as respostas parcialmente ou totalmente erradas, foram realizadas classificações para os erros cometidos pelos educandos, sendo estes:

Quadro 4: Exemplificativo das classificações de erros

Erros	Explicação
E1 – Erro aritmético	equivoco durante algum procedimento aritmético.
E2 – Erro conceitual	equivoco durante a aplicação de algum conceito, relacionado à geometria e medidas.
E3 – Erro interpretativo	equivoco durante a interpretação do problema.
E4 – Erro total:	equivoco ao responder o problema ou a resposta foi dada sem fundamento algum.
E5 – Questão em branco	problema não teve resposta.

Fonte: Autores (2024)

O erro aritmético foi o que teve maior frequência, mesmo com o uso de calculadora sendo permitido pelo professor; pois os alunos buscaram alternativas para resolução sem possuírem mecanismos seguros de procedimentos; tendo priorizado apenas o resultado em si; o uso da calculadora deve ser de forma planejada, e o educando deve conhecer tanto a ferramenta, enquanto recurso, como as possibilidades de operacionalização (Costa, 2020).

Para a superação dos erros conceituais, identificados com a geometria e expressões numéricas Costa (2020) sugere, antes de iniciar o conteúdo, a realização de atividades para relembrar os conteúdos do ensino fundamental; o professor deve começar com questionamentos de fácil entendimento e, com o desenvolvimento dos alunos, tornar as questões mais difíceis. Sendo a aplicação de materiais manipuláveis uma ferramenta útil para esses procedimentos.

Fala sobre a importância das aulas de reforço para os alunos com dificuldade em conversão de medidas (grandezas e medidas), para os quais se deve explicar o assunto de forma contextual, relacionando-o com a realidade do aluno; considerando que por vezes os alunos podem cometer estes erros por não entenderem a conexão sobre o cálculo necessário e o contexto das questões (Costa, 2020).

Para a superação dos erros interpretativos, referente a compreensão das questões matemáticas, Costa (2020), sugere aulas conjuntas com o professor de Língua Portuguesa podem amenizar os erros constantes de interpretação textual, pois alguns alunos apresentam dificuldades de compreensão e conexão dos enunciados com a linguagem matemática; uma vez que esta não é algo simples para o aluno entender, já que as palavras do dia a dia podem ter significados diferentes das utilizadas nas aulas (Costa, 2020).

Sobre as questões que tiveram erro total de resolução, em que teve equivoco na resposta ou foi ela foi apresentada sem base alguma, apoia-se em Cruz, Silva e Tavares (2020) para propor que o professor deve fornecer ferramentas suficientes para a resolução da questão, que as questões devem ser aplicadas de forma clara. Assim, o aluno deve ser capaz de compreender o que foi solicitado e ter o conhecimento suficiente para construção da solução, o que depende do professor verificar.

Para as questões em branco, sugere que se deve proporcionar um suporte psicológico ao educando, pois pode representar uma situação em que os alunos não estejam devidamente motivados para responder às questões ou que não possuem uma base satisfatória sobre geometria ou ainda, apresentem algum bloqueio cognitivo desconhecido (Costa, 2020).

Observou-se no trabalho de Costa (2020) um ambiente de aprendizado favorável em que o aluno se mostrou ativo no seu aprendizado, sendo motivado a ser mais seguro e interessado; bem, como o ensino de Geometria foi desenvolvido de forma interessante e motivadora; e que o trabalho em grupo foi um distintivo para a socialização e acessibilidade dos conhecimentos geométricos.

A aplicação de metodologias alternativas mostrou-se um diferencial para o aprendizado do conteúdo de Geometria, demonstrando-se que os alunos tiveram uma experiência instigadora com a metodologia aplicada, pois ao término das atividades, relataram estarem mais confiantes, mais experientes com interpretação das questões e sua resolução das questões. Além disso, organizar os sólidos geométricos foi uma atividade que chamou a atenção, isso atrelado ao trabalho em grupo (Costa, 2020). A parte negativa identificada pelos alunos foi referente a dificuldade das questões, na qual não conseguiam entender o que estava sendo solicitado (Costa, 2020). Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999), a manipulação dos materiais pode ajudar os alunos na evolução do pensamento geométrico, criando suas próprias hipóteses.

Além disso, conforme Costa (2020), verificar os erros cometidos, de forma frequente, pelos alunos, pode proporcionar ao professor formas diferentes de lecionar determinado conteúdo. A partir disso, utilizar materiais manipuláveis torna-se uma opção para o ensino, sendo algo que pode chamar a atenção dos alunos e incentivar na aprendizagem de forma significativa, o que vai de acordo com as ideias de Sarmiento (2010).

Assim, na análise de erros dos alunos, juntamente com a utilização de materiais manipuláveis, deixou-se perceber a otimização do ensino de geometria, os pontos em que o professor deve reforçar nas aulas, uma vez que pode ficar exposto em que aspecto os alunos tiveram mais dificuldade. Atrelado a isso, abordar situações cotidianas dos alunos pode tornar o ensino mais eficaz. Sendo assim, conforme Sarmiento (2010), um ensino significativo dos conteúdos torna os alunos mais críticos, ativos em sua própria aprendizagem.

Portanto, o que foi discutido, tendo como foco a contribuição e a utilização de materiais manipuláveis, a pesquisa de Costa (2020) encontra-se com o objetivo deste trabalho, apresentando que o uso desses materiais podem ser um impulsionador para o ensino de geometria, despertando a curiosidade do aluno para uma metodologia diferenciada,

promovendo possibilidades de o aluno investigar as propriedades dos sólidos e, além disso, produzir seu próprio material.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Notificou-se nos trabalhos investigados a promoção de uma visão mais ampla sobre o contexto teórico-prático dos conteúdos geométricos resultando no desenvolvimento de curiosidade, estímulo à adesão de métodos diferenciados e atrativos para a otimização da aprendizagem dos educandos; cumprindo assim, a pretensão do presente estudo de descrever como o ensino de geometria poderia ser otimizado através da utilização de materiais manipuláveis.

Atrelado a isso, confirma-se que os objetivos específicos foram atingidos de forma satisfatória, sendo observado que a Geometria surgiu para suprir as necessidades humanas e que ao longo da história sua representação e definições foram se moldando às realidades emergentes. Além disso o ensino por meio de materiais manipuláveis pode tornar mais sólida a relação entre a teoria e a prática, deixando o aluno mais crítico e autônomo quanto a construção de sua aprendizagem e dos recursos didático-pedagógicos utilizados. Os trabalhos analisados foram claros quanto ao potencial dos materiais manipuláveis, sendo que as experiências realizadas podem ser repetidas, de forma planejada, nos estudos planejados de Geometria de qualquer contexto de ensino e aprendizagem matemático.

A ludicidade pode ser utilizada pelos professores como um impulsionador para o ensino de matemática, em especial, para o ensino de Geometria Plana, visto que o lúdico faz parte do cotidiano de qualquer aluno bem como a geometria está presente no dia a dia dos alunos. Os materiais manipuláveis podem servir como um recurso para iniciar um novo conteúdo ou ser suporte nas atividades. Assim, o professor deve considerar o conhecimento que o aluno possui e a melhor abordagem do material manipulável a ser inserido no contexto do educando.

Assim, o professor deve saber quais materiais manipuláveis podem ser utilizados, envolver o aluno no processo, tornando-o ativo de sua aprendizagem, e lembrar de que somente o material não garante um ensino eficaz, o professor deve ter capacidade de identificar, ampliar e aplicar a metodologia adequada.

Esta pesquisa não tem o intuito de finalizar a discussão sobre o assunto; isso se deve à utilização de materiais manipuláveis, que proporciona uma variedade de possibilidades. Assim, para futuras pesquisas sobre o tema, partindo do que foi discutido, pode-se verificar quais materiais manipuláveis podem proporcionar uma melhor visualização das propriedades geométricas, se esses são de fácil manipulação e se a construção por parte dos alunos é viável.

Além disso, pode ser discutida a relação entre a geometria estudada em sala de aula com as situações do dia a dia, focando no material manipulável e nas fórmulas já demonstradas, explicando o princípio da fórmula e apresentado isso diretamente no material.

Faz-se necessário estimular cada vez mais os docentes a utilizar os materiais manipuláveis e a divulgarem suas metodologias de aplicação para proporcionar um desenvolvimento eficaz quanto ao uso e manuseio dos recursos manipuláveis. Vale repetir: somente o material manipulável não é suficiente para um ensino significativo, é preciso que o professor esteja preparado intencional e propositivamente para o planejamento, execução, avaliação, replanejamento, execução, reavaliação *ad infinitum*, em um círculo virtuoso. Além disso, os professores devem estar em constante atualização, buscando a formação continuada e adaptando-se as diversas necessidades que os alunos apresentem durante as aulas.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. S. **O uso de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Geometria**: uma experiência didática no 6º ano do ensino fundamental. 35 p. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023. Disponível em: <https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/30262/1/TCC%20-%20Jocelina%20da%20Silva%20Ara%C3%BAjo.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2024.
- BECKER, F. **A epistemologia do professor**: o cotidiano da escola. Petrópolis: Vozes, 1994.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2017. 595 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 23 fev. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação. Departamento de educação básica. **Currículo Nacional do Ensino Básico**: Competências essenciais. Brasília: Distrito Federal, 2001. Disponível em: <https://alvarovelho.net/attachments/article/39/LivroCompetenciasEssenciais.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's)**. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (ensino médio)**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2024.

BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 16 mar. 2024.

PITOMBEIRA, João Bosco Pitomeira de Carvalho (coord.). CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F.; GITIRANA, V.; GUIMARÃES, G. L.; MANDARINO, M. C. F. Geometria. In: **Coleção Explorando o Ensino**. Brasil. Matemática: ensino fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7842-2011-matematica-capa-pdf&category_slug=abril-2011-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 16 mar. 2024.

CHIMENTÃO, L. K. O significado da formação continuada docente. In: 4. CONGRESSO NORTE PARANAENSE DE EDUCAÇÃO FÍSICA ESCOLAR, Londrina, 2009. **Anais**. Londrina: UEL, 2009. Disponível em: <https://www.uel.br/eventos/conpef/conpef4/trabalhos/comunicacaooralartigo/artigocomoral2.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2024.

COLLI, M. D. **O desenvolvimento do pensamento geométrico nos anos iniciais do ensino fundamental a partir da Teoria de Van Hiele**: contribuições de um curso de formação de professores. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/28868>. Acesso em: 11 fev. 2024.

COSTA, M. V. S. **Análise de erros em resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos**: uma experiência em uma turma de segundo ano do ensino médio da rede pública. 2020. 127 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2020. Disponível em: <https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/6275>. Acesso em: 02 fev. 2024.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria**: opiniões sobre a área e seu ensino. 2005. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino) — Universidade Federal de São Carlos–UFSCar, São Carlos, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/2380/TeseEPC.pdf?sequence=1>. Acesso em: 16 mar. 2024

DANTAS, A. K. L. **Matemática recreativa através de materiais manipuláveis**. 2017. 15 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí, Teresina, 2017. Disponível em: <http://bia.ifpi.edu.br:8080/jspui/handle/123456789/662>. Acesso em: 20 jun. 2024.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6081521/mod_resource/content/1/%28Saunders%20Series%29%20Domingues%2C%20Hygino%20Hugueros_%20Eves%2C%20Howard%20-%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20hist%C3%B3ria%20da%20matem%C3%A1tica-Editora%20da%20Unicamp%20%282004_2008%29.pdf. Acesso em: 06 mar. 2024.

FONSECA, M. I. P. **O ensino de geometria no programa nova EJA**: uma abordagem através de recursos lúdicos e tecnológicos. 2017. 191 f. Dissertação (Mestrado em

Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2017. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2018/05/01122017Marcelly-Jack-Peres-da-Fonseca.pdf>. Acesso em: 06 mar. 2024.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. Disponível em: https://docentes.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india/at_download/file. Acesso em: 09 fev. 2024.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, SBEM, ano 3, p. 3-13. 1995. Disponível em: <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1194174/Lorenzato1995Por.pdf>. Acesso em: 07 fev. 2024.

LUCENA, R. S. **Laboratório de Ensino de Matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/429642>. Acesso em: 15 fev. 2024.

MARQUES, T. M.; FONSECA, M. A. M.; MENDES, A. F. Sólidos geométricos por meio de material manipulável: um recurso para o ensino de Geometria. **Revista Educação, Escola e Sociedade**, Montes Claros, v. 11, n. 13, p. 109-119, jul./dez. 2018. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/rees/article/view/1095>. Acesso em: 15 fev. 2024.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2007. Disponível em: https://cursosextensao.usp.br/pluginfile.php/300166/mod_resource/content/1/MC2019%20Minayo%20Pesquisa%20Social%20.pdf. Acesso em: 07 mar. 2024.

OTTESBACH, R.C.; PAVANELLO, R.M. **Laboratório de Ensino e Aprendizagem da Matemática na apreciação de professores**, 2007. Disponível em: www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/248-4.pdf. Acesso em: 28 fev. 2024.

PEREIRA, P. V. **A surdez no ambiente escolar: um estudo das representações sociais de professores de matemática, intérpretes e alunos**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/bitstream/123456789/2339/1/Paulo%20V%C3%ADtor%20Pereira.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2024.

PIVATTO, W. B. Os conhecimentos prévios dos estudantes como ponto referencial para o planejamento de aulas de Matemática: análise de uma atividade para o estudo de Geometria Esférica. **Revemat**, Florianópolis, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n1p43>. Acesso em: 14 mar. 2024.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Eletrônica de Educação**

Matemática, v. 7, n. 2, p. 187–196, 2012. Florianópolis. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187>. Acesso em: 06 mar. 2024.

SANTOS, P. E. S. **Teorema de Euler**: um estudo com auxílio de materiais concretos e tecnologias. 2014. 91 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2014. Disponível em: <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/26062014Paula-Eveline-da-Silva-dos-Santos.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2024.

SARMENTO, A. K. C. A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática. **VI Encontro de Pesquisa em Educação da Universidade Federal do Piauí**, Picos, 2010. Disponível em: http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf. Acesso em: 23 fev. 2024.

TURRIONI, A. M. S. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2004. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/8065737c-b131-4bfc-9115-b79c187f09d2/content>. Acesso em: 06 mar. 2024.

VALE, I.; BARBOSA, A. Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Ana-Barbosa-30/publication/277620264_Materiais_manipulaveis_para_aprender_e_ensinar_geometria/links/5575676108aeb6d8c0195723/Materiais-manipulaveis-para-aprender-e-ensinar-geometria.pdf. Acesso em: 16 mar. 2024.