INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
***CAMPUS* TERESINA CENTRAL**
CURSO: PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

RAIFRAN RAPOSO COSTA

O CRIVO DE ERATÓSTENES NO CONTEXTO DA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS PRIMOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

TERESINA
2024

RAIFRAN RAPOSO COSTA

O CRIVO DE ERATÓSTENES NO CONTEXTO DA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS PRIMOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Pós-graduação Lato Sensu em Ensino de Matemática no Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina Central. Orientador: Profª. Drª. Claudia Maria Lima da Costa
Co orientador: Prof. Me. Louise Tatiana Mendes Rodrigues.

TERESINA
2024

O CRIVO DE ERATÓSTENES NO CONTEXTO DA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS PRIMOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Autor: Raifran Raposo Costa
Orientador: Profª. Drª. Claudia Maria Lima da Costa
Co orientador: Prof. Me. Louise Tatiane Mendes Rodrigues.

RESUMO

Este trabalho analisa a importância do Crivo de Eratóstenes como método pedagógico no ensino e aprendizagem dos números primos no ensino fundamental. Os objetivos incluem avaliar a viabilidade desse método e sua influência no desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. A fundamentação teórica baseia-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Base Nacional Comum Curricular, que destacam a matemática como uma ferramenta essencial para a comunicação e a formação de cidadãos críticos e propositivos. A metodologia envolve uma investigação bibliográfica sobre a eficácia do Crivo de Eratóstenes e suas aplicações práticas no ensino de números primos, considerando a necessidade de abordagens concretas e significativas para facilitar a aprendizagem. Os resultados esperados incluem a melhoria na compreensão dos conceitos de números primos e compostos, bem como no manejo de operações matemáticas básicas. As considerações finais sugerem que o uso do Crivo de Eratóstenes pode otimizar o ensino da matemática, contribuindo para a formação de um conhecimento sólido e integrado, e estimulando futuras pesquisas na área.
Palavras-chave: crivo de Eratóstenes; números primos; matemática.

ABSTRACT

This work analyzes the importance of the Sieve of Eratosthenes as a pedagogical method in the teaching and learning of prime numbers in elementary education. The objectives include evaluating the feasibility of this method and its influence on the development of students' logical reasoning. The theoretical framework is based on the National Curriculum Parameters and the Common National Curriculum Base, which highlight mathematics as an essential tool for communication and the formation of critical and proactive citizens. The methodology involves a bibliographic investigation into the effectiveness of the Sieve of Eratosthenes and its practical applications in teaching prime numbers, considering the need for concrete and meaningful approaches to facilitate learning. Expected results include improvement in the understanding of the concepts of prime and composite numbers, as well as in the handling of basic mathematical operations. The final considerations suggest that the use of the Sieve of Eratosthenes can optimize the teaching of mathematics, contributing to the formation of solid and integrated knowledge, and stimulating future research in the field.
Keywords: sieve of Eratosthenes; prime numbers; mathematics.

Data de aprovação: 05/11/2024

1 INTRODUÇÃO

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais a matemática configura-se como uma construção humana capaz de gerenciar a comunicação no contexto da sociedade da informação e do conhecimento, bem como promover interação no âmbito natural, social e cultural (Brasil,

1997). E na Base Nacional Comum Curricular a matemática é apresentada como área do conhecimento que abrange tanto as questões objetivas quanto estatísticas e probabilísticas das ciências naturais (Brasil, 2018).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais conferem à matemática referencial para construção do conhecimento científico com possibilidades de inserção na sociedade, e promoção de cidadania (Brasil, 1997). A Base Nacional Comum Curricular comunga da mesma ideia ao afirmar que o conhecimento matemático cumpre funções sociais para a formação crítica e propositiva desses cidadãos (Brasil, 2018).

Na Base Nacional Comum Curricular para a Matemática propõe-se cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística assuntos correlacionados e importantes para a estrutura cognitiva dos alunos (Brasil, 2018).

Na unidade temática Números para além do pensamento numérico espera-se que o aluno internalize não só o uso das operações, mas, seus significados razão pela qual os conteúdos pensados para esse contexto devem ser mediados por situações concretas e significativas de aprendizagem (Brasil, 2018).

Para a unidade temática Números tem-se como objetos de conhecimento para o 6º ano entre outros, números primos e compostos. E como habilidade para estes:

> Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000 (Brasil, 2017, p. 301).

Desse modo, os números primos são tijolos de construção para os números compostos "[...] a partir dos quais os outros inteiros são formados multiplicativamente (Eves, 2011, p. 622)"

Assim, a Base Nacional Comum Curricular enfoca sobre os diversos campos do conhecimento: algébricos, geométricos, estatísticos e de probabilidade propondo ferramentas de resolução, apresentação, aproximação ou possibilidades conforme cada situação problema (Brasil, 2018).

Comumente os assuntos de matemática são trabalhados de forma abstrata o que faz do processo de aprendizagem algo mais complexo. Em sentido contrário tem-se a recomendação do uso de recursos os mais variados frente ao ensino da matemática (Brasil, 2018; 1996).

O ensino viabiliza a aprendizagem dos alunos devido sua composição pedagógica condutora que guia os alunos (Libâneo,1994). A aprendizagem consiste no domínio do conhecimento; ação essa, que não é possível sem o ensino (Libâneo,1994).

A interação entre ensino e aprendizagem ocorre quando o conteúdo é ministrado sem perdas ou resumo em excesso; pois um dos papéis do professor é mediar atividades mentais (Libâneo,1994).

Para o assunto em tela como recurso didático-pedagógico tem-se a utilização do crivo de Eratótenes que se constitui como um "método de construir uma tábua de números primos escrevendo a sucessão dos números naturais ímpares e eliminando sucessivamente os múltiplos de 3, de 5, de 7, etc. (Ferreiro, 1999, p. 583)

O crivo tem seu alicerce em Eratóstenes (276 – 196 a. C): um astrônomo, bibliotecário, geógrafo, gramático, poeta, matemático e atleta, nascido em Cirene (atual Líbano). Ficou conhecido por ter inventado o Crivo de Eratóstenes, o primeiro algoritmo que forneceu números primos, ferramenta útil para encontrar os números primos (Eves, 2011); "com todos os números naturais dispostos em ordem, simplesmente são riscados os números de dois em dois (...) e continua-se assim a riscar cada n-ésimo número a seguir do número n. (...)" (B. Boyer, 2012, p. 122).

Como assinalado antes o crivo de Eratostenes implica em uma escolha e estratégia de se entender e explicar a matemática partindo-se da premissa de que o professor/educador do ensino matemático necessita de um ou vários métodos para dar consecução ao propósito do ensinar a matemática. O esforço ancora-se na ideia presente de melhor conduzir o trabalho pedagógico (Pais, 2016).

Indica Pais (2016), que o trabalho docente nas séries iniciais é sinônimo de maior desafio tendo em vista que os princípios do conhecimento escolar precisam ser articulados com os primeiros sinais/situações de formalização matemática.

Diante do exposto até o momento a pergunta-problema que norteou este estudo teve: Como o método Crivo de Eratóstenes auxilia no ensino e aprendizagem dos números primos no ensino fundamental? E como objetivo: Avaliar a exequibilidade do Crivo de Eratóstenes para o ensino e aprendizagem dos números primos em trabalhos bibliográficos.

Como resposta hipotética parte-se da ideia de que o Crivo de Eratóstenes auxilia no desenvolvimento matemático de sequências numéricas iniciadas por números primos assim como o raciocínio lógico envolvendo múltiplos e divisores no ensino fundamental. E como objetivo geral: analisar a influência do método Crivo de Eratóstenes para o ensino e aprendizagem dos números primos no ensino fundamental.

A escolha pelo presente tema justificou-se a partir da observação enquanto professor de Matemática de que alguns alunos apresentavam dificuldades teórico-metodológicas com o conteúdo sequência numérica e com a identificação do que é um número primo ou composto,

assuntos pilares para a aprendizagem sobre adição, multiplicação e divisão. Em estudos realizados conheci o Crivo de Eratóstenes, apresentado como método de auxílio na condução do ensino da matemática o que me motivou a pesquisar em trabalhos científicos já realizados como o crivo de Eratóstenes poderia ser utilizado para a otimização de aprendizagens matemáticas relativas ao ensino dos números primos.

Espera-se com o produto das considerações suscitadas promover discussões teórico-metodológicas no âmbito da disciplina Matemática I entre outras. Bem como, que outros pesquisadores a partir dos achados possam refutá-los ou aprofundá-los.

2 MÉTODO DE PESQUISA

O presente trabalho caracteriza-se como qualitativo tendo em vista que busca enfatizar aspectos qualitativos dos estudos pesquisados. A possibilidade da fala subjetiva coloca a pesquisa qualitativa como capaz de permitir ao pesquisador se imbricar no objeto de estudo e dialogar com os objetos do conhecimento relevantes e escolhidos previamente na preparação da pesquisa qualitativa (Richardson et al, 2012).

Quanto ao objetivo do método de pesquisa caracteriza-se como estudo exploratório, visto que os parâmetros que o nortearam partem da ideia de procurar nos trabalhos realizados as respostas para o problema de pesquisa entre outros (Gil, 2019).

Para a consecução do estudo elencou-se como técnica e procedimento de coleta de dados, a pesquisa bibliográfica, que se caracteriza como a busca por respostas científicas em trabalhos já publicados, tendo sido observado alguns passos: escolha do tema; elaboração do plano de trabalho; fichamento; análise e interpretação e a redação propriamente dita (Marconi; Lakatos, 2010).

Para tal seguiu-se os seguintes trâmites: acessou-se o Google acadêmico com os descritores "Crivo de Eratóstenes" And "número primos" resultando em 409 trabalhos, ano de publicação entre 2023 e 2024 chegando-se a 23 trabalhos, dos quais foram escolhidos quatro (4) trabalhos mantendo-se o crivo do lapso temporal, de trabalhos publicados nos últimos cinco anos. A seguir breve resumo dos trabalhos realizados:

Quadro 01: Números Primos e a Hipótese de Riemann

Tipo	Dissertação
Instituição	Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Autor/Data	Coelho, Fernando Nascimento, Data da defesa 28-Mar-2023
Objetivo	Mostrar a conexão entre os números primos e a hipótese de Riemann. Abordou-se resultados importantes sobre números primos e sua distribuição; conceitos relacionados a função Zeta de Riemann, suas extensões no plano complexo, equações funcionais e suas raízes. Finalmente a conexão entre a função Zeta de Riemann e a distribuição dos números primos.
Conteúdo matemático	**Os Números Primos** 1. Foram apresentados **A Infinitude dos Números Primos E o Teorema da Aritmética** que pode ser encontrado no Livro Elementos de Euclides VII na definição 12 (BICUDO, 2009) tentativas de encontrar fórmulas para encontrar os números primos como Polinômio de Euler de $p(n)$ 0 a 41 que não encontra todos os números primos, Teorema de Wilson que mostra que não há fórmulas para encontrar o próximos número primo, Série Harmônica e Série Harmônica dos Números Primos onde ela pode diverge se o números tende ao infinito, Distribuição de primos usando a Função da contagem usada por matemáticos para entender os números primos onde apresentam os desertos de primos formados por $n! + 2, n! + 3, n! + n$ e também a contribuição do Matemático Alemão Johann Carl Friedrich Gauss conjecturou a função $\pi(x)$ e a função $L_i(x)$ obtida pela integração do recíproco do logaritmo e outras contribuições como a do Matemático francês Adrien-Marine Legendre e Don Zagier. Fala sobre o teorema dos números primos primeira e segunda versão, Terceiro Teorema de Mertens e demonstrações que o x-ésimo primo é aproximadamente $xlnx$. 2. **Função Zeta no Domínio Real** por Bernhard Riemann que fala que todos os zeros não triviais (raízes) da função zeta estão sobre a mesma linha crítica abordando também a Série Zeta e a função $\zeta(s)$. Fórmula de Produto de Euler que apresenta uma conexão entre a Função Zeta e o produto de números primos. Importantes Relações Oriundas do Produto de Euler como o reciproca de Zeta e sua derivada, Função de Möbios, Função de Von Mangoldt, o Inverso da Função Zeta, e a relação relacionada a derivada de $\zeta(s)$, Valores especiais de Zeta - problema de Basileia em que temos $\zeta(2)$ demonstrada por Euler. 3. **Função Zeta no Domínio Complexo** em que $s = \sigma + it$ da função $\zeta(s)$ feita por Riemann, a Série Eta $\eta(s)$ incluindo a região $0 < \sigma < 1$ mostrando que a Série Eta converge para todo $s = \sigma + it$, com $\sigma > 0$ e $\sigma =$s real e outras relações de Eta… Relação entre Zeta, Eta e a Primeira Relação de Zeta. 4. **Equação Funcional e a Segunda Extensão de Zeta** descoberta por Riemann inicialmente introduzindo a Função Gama $\Gamma(s)$ em que $s = \sigma + it$ e calculando $\Gamma(s + 1)$ e fazendo e desenvolvimento até chegar na na relação dessas Funções.

	Equação Funcional de Zeta. Fórmulas Equivalentes e a Equação Funcional. O Cálculo de $\zeta(0)$, Função $\xi(s)$. 5. **As Raízes da Função Zeta e a Hipótese de Riemann** mostrando que a Função Zeta está definida em quase todos os números complexos exceto o polo 1. Análises da dos Zeros das Funções Zeta e Eta e sua simetria dos Zeros e as raízes da função $\xi(s)$. 6. **Função Zeta e a Função de Convergentes dos Número Primos** abordando o Artigo de Riemann e a Introdução da Função $J(x)$ e introduzindo a Função da Inversão de Mörbios e relações entre as funções Zeta e Mörbios, a seguir foi abordado a Fórmula explícita de Riemann para $J(x)$ e a Definição (Transformação de Mellin) no domínio real e o Teorema da Inversão de Mellin e for fim abordando também o Cálculo $\ln\zeta(s)$. 7. **Fórmula de Von Mangoldt** e as duas Funções do matemático Russo Pafnuty Chebyshev $\psi(x)$ e $\vartheta(x)$ de contagem dos números primos onde Chebyshev provou que essas Funções são equivalente ao Teorema dos números primos e depois Von Mangoldt demonstrados em duas partes por Integral e por Teorema de Resíduos só sendo possível pelo fato da Função Zeta está definida em todo plano complexo em sua extensão e também o uso de Zeta em função de Eta e seus resíduos, derivações e limites. O Componente Oriundo de $\psi(x)$ e um esboço da Demonstração do Teorema dos Números Primos.
Crivo de Eratóstenes	O Crivo de Eratóstenes foi usado para encontrar os números primos até um número finito n eliminando todos os múltiplos de todos os números primos até $\sqrt{n}$.

Fonte: Autores, 2023.

Quadro 02: O teorema dos números primos

Tipo	Dissertação
Instituição	Universidade Federal de Sergipe (UFS)
Autor/Data	Vieira, Márcia Oliveira, maio, 2023
Objetivo	O objetivo deste trabalho é apresentar os números primos e mostrar uma relação entre a função de contagem de primos, π(x), e a função logaritmo natural, log(x). Inicialmente, faremos um breve apanhado histórico. Em seguida, traremos alguns conceitos importantes acerca dos números primos e sobre alguns elementos da Análise Complexa. Por m, estudaremos a função Zeta de Riemann e traremos a demonstração do Teorema dos Números Primos, traçando uma conexão entre a função Zeta de Riemann e a função π(x).

Conteúdo matemático	**2. Um breve apanhado histórico** O artefato mais antigo que remete à ideia de números primos é o osso de Ishango. Registrado de 6.500 a.C, aproximadamente, este artefato foi encontrado na região da África Central Equatorial contendo os números primos no intervalo de 10 a 20 com os números 11, 13, 17 e 19. Fora esse artefato, temos a primeira cultura a tentar desvendar os mistérios acerca dos números primos tenha sido a dos chineses, por volta de 1.000a.C. Há registros de que características femininas eram atribuídas aos números pares, e as masculinas, aos ímpares. O termo machões foi atribuído aos primos por não poder distribuir os grãos em fileiras como se este tipo de quantidade de grãos "resistisse" às tentativas de distribuição. **Os primos e os pitagóricos** Dentre todos os povos antigos, a história registra que os gregos foram os primeiros a associar a ideia de blocos de construção para os números a partir de números primos. Possivelmente, a noção de número primo tenha sido introduzida por Pitágoras, por volta de 530 a.C. Os pitagóricos perceberam que havia número que não podia ser expresso como produto de números menores e com o estudo eles perceberam que qualquer número diferente da unidade era originário de algum produto envolvendo números primos. Um dos primeiros matemáticos a estudar com vigor a Teoria dos Números foi Euclides de Alexandria (aprox. 323 - 283 a.C). Apesar de ser conhecido por grandes descobertas no campo da geometria, Euclides chegou a escrever três livros voltados para a teoria elementar dos números. O livro Elementos VII onde podemos calcular o máximo divisor de dois ou mais números (mdc), e que verificava se dois números inteiros são primos entre si. **O surgimento de um crivo** Registra-se que o primeiro matemático a escrever uma tabela de números primos foi o bibliotecário-chefe da universidade local de Alexandria, o grego Eratóstenes de Cirene (aprox. 276 194 a.C.). Ele criou um dispositivo muito útil para descobrir todos os números primos pertencentes ao intervalo [1, N], onde N é um número natural. O método utilizado por Eratóstenes consiste em eliminar gradativamente números compostos, inicialmente faz uma sequência numérica de 1 a N e elimina os múltiplos encontrados de primos de forma crescente até N. **Um teste de primalidade e a busca por fórmulas** Sendo advogado, e tendo recebido sua educação inicial em casa, o francês Pierre de Fermat (1.601 1.665) dedicava horas de sua folga para o estudo da Matemática fazendo grandes contribuições, dentre eles, a Teoria dos Números. Em especial, enunciou teoremas voltados ao estudo dos números primos. Destacamos neste trabalho o Pequeno Teorema de Fermat, que fornece um importante teste de primalidade. **Euler e o início da análise complexa** Com sérios problemas na visão, o suiço Leonhard Euler (1.707 1.783), inspirado pelas ideias de Fermat, foi responsável por implementar importantes notações, tais como f(x) para funções, e para a base de

	logaritmos naturais, Σ para somatórios e i para a unidade imaginária, onde $i^2 = -1$ chegando a publicar 530 trabalhos durante sua vida. Euler além matemática ele tinha uma grande visão de assuntos para resolução de problemas sobre hidráulica, construção de navios e balísticas. Uma de suas conquistas, foi dar uma solução plausível para o problema das pontes de Königsberg. Seu amor pela Teoria dos Números se estendeu pelo interesse acerca do mistério dos números primos, levando-o a construir tabelas de primos para valores pouco superiores a 100.000. **A disputa entre Gauss e Legendre** Cita que aos 15 anos Karl Friedrich Gauss (1.777 1.855) ficou curioso com o fato de um livro sobre logaritmos conter uma tabela de números primos na sua contracapa. Embora era comum trabalhar com logaritmos em vários ramos, sua curiosidade o fez trabalhar em tabelas, e perceber que esses dois temas possuíam alguma conexão. Assim fez anotações de como encontrar a quantidade de primos de um até x mas não anunciou por não poder provar. Na mesma época que Gauss, Adrien-Marie Legendre (1.752 1.833) também estudava o mistério em torno dos números primos. Diferentemente de Gauss, Legendre não temia o anúncio de ideias sem o respaldo de uma prova. Assim, em 1.798, ousou anunciar uma relação entre os números primos e logaritmos próxima à ideia de Gauss: a quantidade de números primos existentes de 1 até o número x consistia em um valor próximo a mesma ideia que Gauss só que mais precisa. Gauss, por sua vez criou uma nova fórmula que podia prever uma moeda viciada e era mais precisa que a de Legendre, Gaus chegou a listar números primos até 3.000.000 durante sua disputa. **Chebyshev e uma importante estimativa** Em meados do século XIX, o russo Pafnuti Lvovitch Chebyshev (1.821 − 1.894) conseguiu mostrar que a razão entre $\pi(x)$ e $x/\log(x)$ estava sempre contida em um intervalo (C1, C2), onde C1 e C2 são números positivos, para todo valor $x \geq 2$. Esta se tornou a primeira contribuição concreta para a prova do teorema dos números primos. **Riemann, os números primos e a música** Aluno de Gauss e do matemático Dirichlet, o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1.826 - 1.866) foi responsável por relacionar uma função antiga grega, a função zeta $\zeta(x)$, à Análise Complexa e à Teoria dos Números primos. Em 1.748, Euler percebeu que ao inserir números complexos na função 2^x , seu gráfico possui ondulações semelhantes às de ondas sonoras, e acreditava que os números primos tinham algo em relação a combinações de notas musicais, Como um grande mentor, Dirichlet influenciou fortemente Riemann a estudar a função zeta, e tomar como base as análises feitas por Euler um século antes. Riemann percebeu que a armação acerca dos logaritmos feita por Gauss era cada vez mais plausível suas ideias sobre os números primos foram revolucionárias pois indicavam que existe alguma ordem em meio à aleatoriedade do

	surgimento de números primos à medida que caminhamos na reta dos números naturais. Ele afirmou que a distribuição dos números primos estava diretamente relacionada à função zeta, mas não conseguiu mostrar tal fato, também fez uma forte afirmação, chamada hipótese de Riemann que ainda não foi provada e atualmente a uma recompensa de um milhão de dólares para aquele que apresentar soluções. **Hadamard, Poussin e uma demonstração** Após séculos de hipóteses e descobertas somente em XIX, Jacques Hadamard (1.865 - 1.963) e Charles Jean de la Vallée-Poussin (1.866 - 1.962) conseguiram demonstrar o Teorema dos Números Primos usando as análises de Riemann, de forma independente e no mesmo ano. A prova deste teorema corresponde à prova da conjectura proposta por Gauss de que, para um x suficientemente grande para $\pi(x)$. Vários matemáticos após Hadamard e Vallé-Poussin trabalharam para obter outras demonstrações mais elementares ou simples para o mesmo teorema, como Atle Selberg e Paul Erdös em 1.949, e Donald J. Newman em 1.980. **3. Espaçamentos entre primos** A busca por padrões tem desafiado os adeptos da Teoria dos Números através dos números primos, esses números estão presentes até na natureza como a saída das cigarras de 7, 13 ou 17 anos, esse capítulo trata da teoria dos números e da divisibilidade. **Conceitos básicos** Conceitos de divisibilidade e o Teorema da divisão Euclidiana assim como o Máximo Divisor Comum. **Os números primos** Após o conceito de divisibilidade podemos definir que um número é dito primo se possuir apenas dois divisores, 1 e ele mesmo. Neste capítulo foi usado o Lema de Euclides e o Teorema Fundamental da Aritmética para demonstrar. **Alguns tipos de números primos** Fermat estudou uma sequência de números na forma F(n) = $2^{2^n} + 1$, onde n é um número inteiro não negativo. Tais números receberam o nome de *números de Fermat* e o Pequeno Teorema de Fermat. Em três séculos de análises, já foram encontrados mais de 200 divisores de alguns números de Fermat. Até o momento, apenas os números de Fermat para valores de n pertencentes ao intervalo [5, 11] foram completamente fatorados. Inspirado pela determinação de Fermat o padre e matemático Marin Mersenne do século XVII estudou amplamente uma sequência de números que recebeu seu nome. A sequência $(2^n - 1)$ n ∈ N havia sido analisada anteriormente por Euclides, em torno do século III a.C., e tinha conexão com os números perfeitos. Mersenne descobriu uma particularidade para quando n fosse primo, e se dedicou a esse caso.

	Mp = $2^n - 1$ Algo importante a se destacar é que nem todo número de Mersenne é primo como o número M11 = 2047 = 23 · 89. Sophie se passando por homem estudou e se comunicou com vários matemáticos, inclusive com Gauss e Legendre. Ela descobrir uma fórmula que gera alguns números primos e também mostrou que se p e 2p + 1 são números primos, onde p ≠ 2, então a equação $x^p + y^p = z^p$ não possui solução para x, y e z naturais. Ainda não foi provado se existem infinitos primos de Sophie Germain, sendo que já foi descoberta uma quantidade próxima a 200 destes até esta data. Um número primo p é chamado primo fatorial, se puder ser escrito na forma p = n! ± 1, onde, n ∈ N. **Lacunas entre primos** Há como prever alguns intervalos onde há uma série de números compostos consecutivos. Estes intervalos são chamados lacunas ou, usando a expressão correspondente em inglês, os gaps. O único par de primos consecutivos cujo intervalo é de apenas 1 unidade é (2, 3). Dois números primos consecutivos p1 e p2 são ditos gêmeos se p2 = p1 + 2. À exceção do par (3, 5), todo par de primos gêmeos é da forma (6k − 1, 6k + 1) onde k ∈ N. Três números primos consecutivos p1, p2 e p3 são ditos trigêmeos se p3 = p2 + 2 = p1 + 4. A única terna de primos gêmeos consecutivos é (3, 5, 7). **As lacunas e o Teorema dos Números Primos** Seja x um número real, x ≥ 0, então π(x) representa a quantidade de números primos existentes no intervalo [0, x]. **4. Um pouco sobre análise complexa** Neste capítulo, trata sobre ferramentas da Análise Complexa necessárias para a demonstração do Teorema dos Números Primos. **O corpo dos números complexos** A solução da equação $x^2 + 1 = 0$ data da época do século XVI, pom Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia. já a notação i para a unidade imaginária foi adotada pela primeira vez apenas no século XVII, por Leonard Euler. Ainda assim, a expressão número complexa só foi usada pela primeira vez apenas em 1.832, por Gauss. O conjunto dos números complexos é o conjunto C = {x + yi ; x, y ∈ R}, onde i é a unidade imaginária que satisfaz a igualdade $i^2 = -1$. Para o número complexo z = x + yi, dizemos que x é a parte real de z e y a parte imaginária. **Funções Complexas** A ideia de funções complexas está intimamente ligada à noção de funções reais, uma vez que associamos um par ordenado z = (x, y) ∈ R^2 a um par w = (u(x, y), v(x, y)) ∈ R^2

Alguns subconjuntos de Complexos
Diz-se que a essência do cálculo diferencial e integral de funções de variável real se estende às funções de variável complexa.

Noções sobre sequências de números complexos
A ideia de sequências de números complexos também está intimamente ligada à ideia de sequências de números reais

Séries de potência e funções analíticas
Neste capítulo fala da série de números complexos convergentes e divergentes, função contínuas, derivação de funções, funções analiticas

Integrais, pólos e resíduos
Finalização do capítulo falando sobre integração para funções de variáveis complexas, ideia de caminho de integração, a função holomorfa e série de Laurent.

5. A distribuição dos números primos
Este capítulo se destina a apresentar a função Zeta de Riemann e mostrar uma prova para o Teorema dos Números Primos, prova diferente de Hadamard e Poussin. Tal demonstração será realizada apresentando uma relação entre a função Zeta de Riemann e umas das funções do matemático Pafnuty Chebyshev.

As funções de Chebyshev
Embora não apresentou uma prova acerca do Teorema dos Números Primos, Pafnuty Chebyshev contribuiu com uma análise muito importante a respeito da razão entre $\pi(x)$ e $x/\log(x)$ em 1.850, na cidade de São Petersburgo.
O primeiro deles se refere à maior potência de base p que divide n!
Todo número primo que satisfaz a condição $n < p < 2n$, onde n é um número natural, divide o binômio $\binom{2n}{n}$.
Também fala de outras proposições de como primeira e segunda função de Chebyshev e outras proposições.

A função Zeta
Leonhard Euler foi o primeiro matemático a estudar a função zeta no século XVII, usando artifícios para convergência de somas finitas para afirmar que séries infinitas convergiam obtendo resultados verdadeiros e brilhantes, assim, ele mudou o rumo da história da Matemática. Em 1735, Euler apresentou a solução para o famoso Problema da Basiléia, usando a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais ele relacionou à função zeta. Esta solução recebeu críticas, uma vez que as devidas observações mais rigorosas no campo analítico foram ignoradas, mesmo assim é válida.
Riemann estudou o conhecido Produto de Euler em 1858, utilizando técnicas de variáveis complexas e teoria das funções analíticas a nomeou de função Zeta de Riemann $\zeta(s)$.

	Definição:Um número natural n é dito livre de quadrados se n não existe primo p tal que p^2 | n. Este capítulo apresenta outros lemas, proposições, definições e teorias acerca da ζ(s)... **Transformadas de Laplace e Mellin** Este capítulo faz uso de alguns teoremas relacionados a transformada de Laplace e Mellin, conhecidos como Teoremas Tauberianos, algumas funções limitada e integrável e um teorema é inspirado no teorema de Ikehara-Wiener **O Teorema dos Números Primos** Esta seção aborda o usar os resultados obtidos neste capítulo para provar a demonstração do Teorema dos Números Primos.
Crivo de Eratóstenes	Aborda que o Eratóstenes foi o primeiro a criar um crivo que podia encontrar os números primos de 1 a N onde N é um número natural

Fonte: Autores, 2023.

Quadro 03: Teoria dos números e criptografia RSA

Tipo	Dissertação
Instituição	Universidade Federal da Paraíba
Autor/Data	Mota, Wélisson Martins Fevereiro de 2023
Objetivo	Neste trabalho, fazemos uma abordagem de alguns conceitos básicos de teoria dos números visando o entendimento dos modelos de criptografia. Apresentamos inicialmente tópicos de divisibilidade, congruências, números primos e funções aritméticas. Em seguida, fazemos um breve estudo sobre criptografia, com ênfase no sistema RSA (Rivest-Shamir-Adleman). Após o estudo de criptografia, apresentamos duas propostas de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula que abordam criptografia com função afim e congruência de números inteiros.
Conteúdo matemático	**Capítulo 1** 1. O presente trabalho apresenta os **Conceitos básicos de divisibilidade e números primos** e seu múltiplos usando demonstrações de divisibilidade, também foram usados os Algoritmo da divisão e seus Teoremas e Corolários e o **Algoritmo Euclidiano** com sua **Definição de Máximo divisor comum** e o **Teorema de Bachet-Bézout**, **Lema de Gauss**, **Algoritmo Euclidiano**, uma abordagem sobre os números primos grandes e sua importância para a criptografia assim como a definição de **Números Primos** e Números Compostos e o Lema de Euclides sobre divisibilidade e **Teorema Fundamental da Aritmética** que cita que todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve como um produto de fatores primos sendo que o Teorema Fundamental da Aritmética, trata da infinidade dos números primos e **Alguns critérios de divisibilidade** por 3, 7, 9 e 10, a Quebra da Unidade, **Encontrando números primos** que inicia com **Fórmulas Polinomiais** que é antigo no processo de obtenção de números primos, podemos citar a conjectura que afirma a existência de infinitos primos da forma n^2 +

	1 (com n ∈ N) que ainda não foi provado para todos os primos e o **Números de Mersenne** M(n) = $2^n - 1$ que ainda não temos garantia que existem infinitos primos dessa forma, mas, também temos Conjectura Existem infinitos primos de Mersenne em que os maiores números primos já encontrados são de Mersenne. **Números de Fermat,** F(n) = $2^{2^n} + 1$. Observando esse comportamento, Fermat afirmou que todos os números dessa forma são primos, até que em 1732, Leonhard Euler mostrou que F(5) não era primo sendo divisível por 641. **Crivo de Eratóstenes** sendo um dos primeiros métodos para achar primos e um dos mais simples. Fazendo uma implementação a programas computacionais convenientes, o mesmo pode fazer a lista de primos menores ou iguais a n ∈ N, para um n consideravelmente grande. **Fatoração de Fermat** que fala do Algoritmo de fatoração de Fermat: Se n ∈ N é um número composto, então podemos escrevê-lo na forma: n = $2^k \cdot$ b. **Capítulo 2** 2. **Aritmética dos restos** que inicia com **2.1Congruências** que é uma das áreas de estudo mais importantes da teoria dos números são as congruências módulo m, pois tem fundamental importância no processo de checagem da divisibilidade de um número por outro e é usado no sistema de criptografia mais seguros da atualidade. Fala também da **Lei do cancelamento**, do **Pequeno Teorema de Fermat** que cita que se p é um número primo e a ∈ Z tal que p † a, então: $a^p \equiv$ a mod p e também foi usados os Lemas 1,2 e 3, **Teorema de Wilson** que menciona que um número natural p é primo se, e somente se, (p − 1)! ≡ −1 mod p. **2.2Classes de resíduos** que conjectura que se m > 1 é um número inteiro, temos que todo conjunto de números inteiros cujos restos da divisão por m são os números 0, 1, 2, .., m−1 sem repetições, independentemente da ordem, é dito um sistema completo de resíduos módulo m. Aborda também a definição e proposição sobre resíduos. Nesse mesmo capítulo aborda o **Teorema de Euler** que nos diz que se a, m ∈ Z, com m > 1 e mdc(a, m) = 1. Então: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$. Aborda do Teorema que afirma que se $m = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \ldots p_n^{\alpha n}$ a decomposição em fatores primos de m em fatores primos. **2.3 Funções aritméticas** na teoria dos números merecem destaque devido a sua importância como: τ (n) : número de divisores positivos de n. σ(n) : Soma dos divisores positivos de n π(n) : número de primos menores ou iguais a n. φ(n) : Função φ de Euler **Capítulo 3** 3. Neste capítulo aborda sobre a **Criptografia** que aborda que quem só entende uma mensagem é quem está enviando e quem está recebendo pois caso um terceiro intercepte a mensagem, não saberá do que se trata, Em resumo, a criptografia é responsável pelo estudo e aplicação de técnicas que possibilitam a codificação e decodificação de mensagens.

	Aborda também de **Um sistema de criptografia simétrico com Função Afim** iniciando pela codificação anterior fazendo correspondências entre letras do alfabeto como entrada e os números como a saída para enviar a mensagem e antes de enviar deve escolher uma Função Afim dada por f(x) = ax + b com a, b ∈ Z e mdc(a, S) = 1 onde S é o número de símbolos do alfabeto. **Codificando uma mensagem.** O processo de codificação de uma mensagem é bem simples. Basta aplicar a função de codificação e usar congruência módulo S para transformar letra em letra usando no processo uma função para trocar por números correspondentes a essa letra e assim mudar ela por outra letra. **Decodificando uma mensagem.** O processo de decodificação também é simples. Definida a função de codificação f(x) = ax + b basta encontrar a inversa dada por f^{-1}(x) = a′x + b′ onde a · a′ ≡ 1 mod S (a′ é o inverso de a mod S) e b′ = −a′ · b. Após encontrar f^{-1}(x) o processo fica igual a codificação. A codificação e a decodificação RSA encontrado no livro de **Coutinho.** Inicialmente devemos corresponder ao alfabeto a um número sendo importante saber quantos dígitos tem o alfabeto e usa a mesma quantidade nos números. **Codificando.** Para o processo de codificação precisamos do valor de n = p · q (produto dos primos escolhidos) e um número inteiro α tal que mdc(α, φ(n)) = 1, pois queremos que α seja inversível módulo φ(n). Chamamos o par (n, α) de chave de codificação, sabemos que conhecidos os valores de p e q torna-se muito fácil encontrar o valor de φ(n = p · q) que é dado por φ(n) = (p − 1) · (q − 1). Por isso p e q devem ser mantidos em segredo e o sucesso desse sistema depende disso. **Decodificando** O segredo do sistema RSA está na decodificação, pois a mesma só pode ser feita por quem tem conhecimento dos primos p e q escolhidos. Mesmo conhecendo a chave de codificação e sabendo codificar, não saber os valores de p e q faz com que o processo de decodificação seja praticamente impossível. Por isso, o RSA é dito um sistema de chave pública (Todos podem tem acesso a chave de codificação). Mas como decodificar uma mensagem? **Variação do RSA (codificando palavras em palavras)** O processo é semelhante, inicialmente escolhemos dois primos p e q extremamente grandes e definimos n = p·q, calculamos φ(n) = (p−1)·(q−1) = n+1−p−q, escolhemos 1 < α < φ(n) tal que mdc(α, φ(n))=1 e calculamos o inverso multiplicativo de α módulo φ(n) resolvendo a congruência α·α′ ≡ 1 mod n. A chave de codificação é (n, α) e a chave de decodificação é (n, α′) **Codificação** A codificação para um bloco b é dada por C(b) ≡ b α mod n, onde C(b) é o resultado do bloco b codificado. A mudança dessa variação com relação à anterior na receita de codificação é que nessa os blocos gerados na pré codificação devem ter a mesma quantidade de caracteres, ou seja,

	quebramos a mensagem original em blocos de 2, ou 3 ou 4... dígitos uniformemente. **Decodificação** Para decifradora de um bloco codificado C(b) = x é dada por D(x) ≡ $x^{\alpha'}$ mod n. Ora, mas até aqui o processo é praticamente o mesmo descrito anteriormente. O que muda de fato? A mudança é que nessa variação deseja-se codificar uma palavra em um bloco de letras, e não de números, para isso a mudança se dá pelo uso das bases numéricas e a aritmética dos restos implementada a associação de um alfabeto bem organizado no processo de pré codificação. **Pré codificação** Com a organização do alfabeto e associando números e letras por meio da aritmética dos restos com um alfabeto de S símbolos e fazemos uma correspondência biunívoca entre os símbolos do alfabeto e os inteiros do intervalo [0, S − 1]. dividimos o texto que queremos cifrar (já associado aos números) em blocos de k dígitos e escolhemos a quantidade m de dígitos que os blocos codificados devem ter. Para que não ocorram falhas devemos escolher k e m de modo que S^k < n < S^m se k < m ou S^m < n < S^k caso m < k, pois com isso qualquer unidade de texto simples corresponde a um elemento em Z_n e a unidade codificada C(b) ≡ b^{α}mod n que também é um elemento de Z_n pode ser escrita como um bloco de m letras. E por fim Comentários acerca das duas variações do RSA. **Capítulo 4** **4. Sugestões de atividades para sala de aula** Criando um modelo de Criptografia Simples foi feito atividades organizando a divisão de tempo e também **implementando um modelo de criptografia com função afim no Construct** onde foi feito **Comentário sobre as aplicações feitas em sala de aula** e por fim apresentando o trabalho de dois alunos.
Crivo de Eratóstenes	O Crivo de Eratóstenes foi usado como uma forma para encontrar os números primos até n excluindo todos os múltiplos de primos até $\sqrt{n}$ iniciando pelo primeiro primo que é 2.

Fonte: Autores, 2023.

Quadro 04: Engenharia Elétrica E Computação

Tipo	Dissertação
Instituição	UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKEZINE
Autor/Data	Paris, Bruno Mendonça, 2018
Objetivo	Seja d-primo um número natural com exatamente d divisores. De acordo com essa definição, esses números primos usuais correspondem ao caso particular d= 2. Parte desse teste consiste em investigar parte desse teste computacionalmente as sequências numéricas que corresponde às lacunas entre d-primos consecutivos com d ∈ {2, 3,...,16} A partir dessas sequências, são construídos

	gráficos usando algoritmos de visibilidade natural e de visibilidade horizontal e, então, a topologia desses gráficos é analisada. Nesta análise, são também calculadas a entropia informacional das sequências de lacunas e a densidade dos primos. As simulações computacionais mostram que os grafos gerados a partir de lacunas entre d-primos consecutivos têm, em geral, uma distribuição em graus que é livre-de-escala. Essa simulação mostra que essa densidade de d-primos para d par d ∈ {2, 3,...,16}. Nesse teste também se calcula a entropia informacional e constroem-se grafos de visibilidade natural e de visibilidade horizontal a partir das sequências formadas pelas quantidades de divisores de números e pela ampliação recursiva da função quantidade de divisores dessa sequência. Para efeito de comparação, o mesmo trabalho é feito considerando os números felizes, que são números naturais que acabam convergindo para 1 ao se calcular recursivamente a soma dos quadrados de seus dígitos. A topologia desses grafos é caracterizada, seguindo que as sequências que os geraram têm um caráter quase-aleatório.
Conteúdo matemático	**Capitulo 1** Inicia conceituando o que é um número primo, o seu primeiro algoritmo que foi o Crivo de Erastóstenes. aborda que os números primos são fundamentais em estudos de muitas áreas como Teoria dos números, criptografia clássica e criptografia conhecida como RSA. Algumas espécies de cigarras possuem círculos de via cuja sua duração em números são números primos como 13 ou 17. Elucida que se um número não é primo ele é composto. O Teorema Fundamental da Aritmética aborda os trabalhos de Euclides feios por volta de 300aC afirmando que qualquer número natural possui uma única decomposição em fatores primos. Acredita-se que o conceito de primos se deve a Euclides. Aborda também sobre contextos históricos de Kulik,Euler, Gauss, Legendre,Hadamard e Riemann na contribuição individual para os números primos. Dentre essas contribuições temos o Teorema Fundamental da Aritmética, Teoria dos Números, a relação dos números primos com a função zeta, e outras contribuições de outros autores como os maiores números conhecido são os números de Mersenne, lacunas entre primos, sequência de primos, sequência de trajetória de números felizes. Esse trabalho usou um software mathematica 12 para fazer cálculos em um computador pessoal com processador de 4 núcleo e clock de 3Gz e memória RAM de 8GB tendo limitações na memória durante os cálculos. **Capitulo 2** **Definições 2.1.1** **Sequência 2.1** **Números primos 2.1.2** Um número primo é um número que só possui 2 divisores, 1 e ele mesmo sendo maior que 1.

	Teorema Fundamental da Aritmética 2.1.3 O Teorema Fundamental da Aritmética fornece o alicerce para a construção dos números naturais e para a fatoração prima **Números d-primo 2.1.4** Números d-primos são números que possuem exatamente d divisores. Exemplo, o 4 é 3-primo porque tem 3 divisores, 1,2 e 4. **Números felizes 2.1.5** No conjunto de números felizes H um número feliz é denotado por h, um número ele pode ser feliz ou um número triste, os números tristes como o 11 por exemplo fica 1^2+ 1^2=2, $2^2 = 4$, que acabam convergindo para esse sequência (4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20) a partir daí repetindo indefinidamente. Portanto os números felizes são 23, 32, 203, 230, 302, 320, e incluindo o zero não altera a felicidade como 3002, 30002 e por daí em diante. **Função quantidade de divisores 2.1.6** É conhecida como D(n) **Entropia informacional 2.1.7** A entropia informacional é definida por H e a variabilidade de uma sequência {x(n)} pode ser calculado calculando H, assim quanto maior o valor de x maior o valor de H, proposto por Shannon. **Lei de potência 2.1.8** E uma função f(x) relacionada a variável x com A e γ constantes por meio da fórmula f(x)=A$x^{-\gamma}$. **Métodos 2.2** Apresenta dois algoritmos que convertem séries temporais em grafos não direcionados. **Visibilidade natural 2.2.1** Representa dados amostrais contendo nós que podem se conectar no gráfico. **Visibilidade horizontal 2.2.2** Ocorre uma análise gráfica no plano cartesiano no sentido horizontal onde indicam conexão permitidas ou não. **Algumas medidas em grafos 2.3** Aborda estruturas topológicas de grafos construídos por meio de algoritmos de visibilidade caracterizados a seguir, distribuição de graus, grau médio, coeficiente de agregação, menor caminho médio e coeficiente de agregação média. **Relação entre d-primos e d primos 2.4** Hardy e Wright apresentam um resultado que aumenta a eficiência de geradores de números d-primos em que d é 2, ou seja, 2 divisores.

	Capitulo 3 **Lacuna entre d-primos** Analisa as lacunas já que elas não geram sequência necessariamente crescente enquanto os d-primos só aumentam o valor ao decorrer de uma sequência correspondente. Para calcular a variabilidade de cada uma dessas sequências de alcunhas, foi calculada a entropia informacional com seus valores normalizados denotado por $\triangle$. **Resultados 3.1** Apresenta os valores da entropia normalizada $\triangle$ calculada pela equação de primos consecutivos e seus grafos e tabelas. **Discussões 3.2** Aborda pontualmente os grafos, dados e tabelas e seus resultados. **Capitulo 4** **Densidade de d-primos** Nesse capítulo foi calculado a densidade de d-primo usando a função de contagem. **Resultado 4.1** Foi percebido que conforme o número aumenta os números pares converge para uma distribuição de 10% para os são 2-primos, 25% são 4-primos, 5% são 6-primos, 20% são 8-primo, 5% são 10-primos, 2%são 14-primos, e 10% são 16-primos, a soma dessa porcentagem é 92%, os 8% são d-primos ímpares com d menor que 16. **Discussões 4.2**. Em uma das figuras há um comportamento de densidade de d-primos para d par em que parece tender para um número fixo entre 0,002 e 0,003, já para d ímpar esse número parece tender para zero. d ímpar: densidade muito baixa. d par e concavidade para cima: densidade semelhante aos números primos. d par e concavidade para baixo: diferente dos anteriores **Capitulo 5** **Quantidade de divisores dos números naturais e felizes** Fala da sequência de divisores (n,D(n)) e da sequência de quantidade de divisores D(n) e T(n) onde levam em conta os 30000 primeiros termos dessa sequência, após realizar cálculos a seguir foi publicado em (Mayer; Monteiro, 2023) A mesma sequência também foi repetida para a sequência de números felizes gerando a sequência de divisores e das trajetórias, denotadas por D(h) e T(h) respectivamente. **Resultados 5.1**

	Apresenta os resultados gerados usando sequência de divisores e e sequência das trajetórias de divisores, tanto para os números naturais e para os números felizes. **Para os números naturais 5.1.1** Os valores para N=30000 são $\triangle$=0,582 para (D(n)) $\triangle$=0,687 para onde os saltos em $\triangle$ são mais evidentes em (T(n)) já que corresponde a introdução de um novo valor na trajetória. **Discussões 5.2** Apesar da similaridade de valores para entropia normalizada de números ímpares e pares de D(n) e D(h) as sequências de números naturais e felizes foram mapeadas em grafos com medidas topológicas distintas nas sequências e trajetórias. Para N = 30000, $1 \leq D(n) \leq 96$, $1 \leq D(h) \leq 160$ e $0 \leq T(n), T(h) \leq 6$. Desse modo, os valores distintos nas sequências {D} são maiores do que nas sequências {T}. Inesperadamente, a entropia normalizada Δ é superior para as sequências {T} em relação sequências {D}. Dentre outros resultados notou que nem todos os valores são puramente aleatórios dentro dos resultados. **Capitulo 6** **Conclusão** O estudo de divisores de números naturais precisa de mais investigação por ser muito abrangente. Lacunas entre primos. • $\Delta \simeq 0.7$ para d par e $\Delta \simeq 1$ para d ímpar; assim, a entropia normalizada distingue d par de d ímpar; • nos grafos de VH, $\langle k \rangle > 3.9$ para d par e $\langle k \rangle < 3.9$ para d ímpar; assim, o grau médio dos grafos de visibilidade horizontal diferencia d par de d ímpar; • para d-ímpar, $\langle k \rangle \simeq 4$ nos grafos de VH, o que é característica de sequências aperiódicas. Sobre a densidade dos d-primos: • o comportamento da curva da densidade para d ímpar e para d par são distintos, e dentro dos pares há uma divisão levando em conta a concavidade dessa curva; • d par com a concavidade para cima é similar ao caso de d = 2, pois esses casos seguem uma distribuição assintótica do tipo a/(ln(n) + b); • Para d par, concavidade voltada para baixo ocorre em 62.5% dos casos aqui analisados. Sobre a quantidade de divisores dos números naturais e felizes:

	• As quatro sequências foram mapeadas em grafos com $\langle l \rangle \gtrsim \langle l \rangle$ random e $0 \ll \langle c \rangle < 1$, que são características de conectividade geralmente encontradas em redes biológicas, sociais e tecnológicas; • Analisando o formato de P(k), os grafos de VN têm formato de sino e os de VH decrescem monotonamente, tanto para os números naturais quanto para os números felizes; • Apesar de a quantidade de pares e ímpares serem iguais nos naturais e quase iguais nos felizes, em todos os grafos, as ligações entre ímpares são as menos frequentes. **Trabalhos feitos não relatados** No período de 4 anos de pesquisa os trabalhos que não obtiveram resultados satisfatórios não foram mencionados. **Trabalhos futuros** Apresenta a intenção de prosseguir com a pesquisa de com valores maiores a fim de obter uma melhor compreensão usando novos métodos.
Crivo de Eratóstenes	O Crivo de Eratóstenes foi citado apenas como a primeira referência a um algoritmo capaz de descobrir os números primos dentro de uma sequência

Fonte: Autores, 2024.

Para a análise dos dados produzidos utilizou-se a análise temática que considera partes similares de cada trabalho para serem discutidos à luz de embasamento teórico previamente escolhido, o que proporciona o levantamento de categorias de análise (Minayo, 2015). Como categorias de análise pensou-se os conteúdos matemáticos empreendidos por cada autor e como o crivo de Eratóstenes foi didático-pedagogicamente trabalhado.

As dissertações de Fernando Nascimento Coelho, Márcia Oliveira Vieira, Wélisson Martins Mota e Brian Lee Mayer abordam temas centrais na teoria dos números, cada uma com seu foco e metodologia, refletindo a riqueza e a complexidade desse campo da matemática. Coelho explora a conexão entre os números primos e a hipótese de Riemann, enfatizando conceitos fundamentais como a função zeta de Riemann. Sua dissertação se inicia com uma discussão histórica sobre a infinitude dos números primos e os fundamentos da teoria dos números, como o Teorema da Aritmética. O autor não apenas menciona contribuições clássicas, mas também analisa a função zeta em profundidade, destacando a importância de seus zeros não triviais. O trabalho é abrangente e bem fundamentado, promovendo uma visão clara sobre a relação entre a distribuição dos primos e a hipótese de Riemann, consolidando sua relevância para pesquisas futuras.

Vieira, por sua vez, foca na função de contagem de primos e sua relação com o logaritmo natural. Sua dissertação inicia-se com um panorama histórico, incluindo referências a artefatos antigos, e avança para discutir métodos clássicos de identificação de primos. Um aspecto marcante é a análise do Teorema dos Números Primos, assim como a relação com a função zeta e a hipótese de Riemann. O texto é enriquecido com uma exploração das lacunas entre números primos, demonstrando a complexidade do assunto e sua importância contemporânea em áreas

como segurança digital. A discussão sobre a persistência de mistérios na distribuição dos primos revela uma abordagem crítica e atualizada.

Mota se destaca ao conectar a teoria dos números com aplicações práticas em criptografia, especificamente no sistema RSA. Sua dissertação é estruturada para ser acessível, com ênfase em atividades educacionais, o que a torna particularmente relevante para a aplicação em sala de aula. O trabalho aborda conceitos fundamentais de divisibilidade e congruências, apresentando algoritmos clássicos e teoremas relevantes. Ao final, o autor propõe uma metodologia didática, evidenciando a eficácia de suas atividades por meio de avaliações. A prática pedagógica é um ponto forte, pois promove um ensino ativo e engajado, contribuindo para a formação de novos educadores.

Mayer investiga os números d-primos e as lacunas entre eles, utilizando ferramentas computacionais e teóricas. Sua dissertação é inovadora, apresentando uma análise gráfica das lacunas e explorando a entropia informacional das sequências. O trabalho está bem estruturado, começando pela introdução dos conceitos de números primos e a importância histórica deles, até a exploração de dados de 30.000 termos. A distinção entre sequências de números naturais e felizes é um aspecto interessante, que revela a diversidade no estudo dos números. Mayer conclui com um convite à continuidade das investigações, destacando a necessidade de mais pesquisa nas áreas abordadas.

Cada dissertação traz uma contribuição única para o campo da teoria dos números. Coelho e Vieira oferecem uma profundidade teórica e histórica sobre a hipótese de Riemann e a distribuição dos primos, enquanto Mota combina teoria e prática educacional. Mayer, com sua análise sobre d-primos, amplia o escopo de pesquisa computacional na área. Juntas, essas dissertações não apenas avançam o conhecimento matemático, mas também incentivam novas investigações e aplicações práticas, refletindo a vitalidade e a relevância da matemática contemporânea.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O Crivo de Eratóstenes é uma das formas mais antigas e eficientes de encontrar números primos. Sua aplicação prática no ensino fundamental vai além da simples identificação dos números primos; ele promove habilidades de raciocínio crítico e resolução de problemas. A visualização do processo — onde os alunos marcam múltiplos e observam quais números permanecem não marcados — transforma a aprendizagem em uma atividade interativa e colaborativa. Os alunos podem trabalhar em grupos, discutir suas observações e desenvolver um entendimento mais profundo sobre a natureza dos números primos.

A utilização do Crivo de Eratóstenes também pode ser complementada com atividades lúdicas, como jogos e desafios, que estimulam a competição saudável e a motivação. Essa abordagem prática é especialmente eficaz em uma faixa etária onde o aprendizado por meio da interação e da exploração é fundamental.

3.1 NÚMEROS PRIMOS E A HIPÓTESE DE RIEMANN

A Hipótese de Riemann, que sugere uma conexão profunda entre números primos e funções complexas, pode ser um tema inspirador, mesmo que os detalhes técnicos sejam complexos para o ensino fundamental. Os professores podem usar o conceito de distribuição dos números primos para introduzir a ideia de padrões matemáticos. A partir do Crivo de Eratóstenes, os alunos podem explorar como a distribuição dos números primos muda conforme aumentamos o intervalo de busca.

Iniciativas como debates em sala de aula sobre a importância dos números primos em diversas áreas da matemática e da ciência podem instigar a curiosidade. Ao conectar o Crivo de

Eratóstenes com a Hipótese de Riemann, os alunos podem começar a perceber que a matemática está cheia de mistérios ainda não resolvidos, incentivando uma mentalidade de descoberta e pesquisa.

3.2 O TEOREMA DOS NÚMEROS PRIMOS

O Teorema dos Números Primos estabelece que a quantidade de números primos até um número nnn é aproximadamente nln⁡(n)\frac{n}{\ln(n)}ln(n)n. Embora a formulação formal do teorema seja complexa, os conceitos por trás dele podem ser introduzidos aos alunos. O Crivo de Eratóstenes pode ser utilizado para calcular quantos números primos existem até 100 ou 1000, permitindo que os alunos comparem esses valores com a previsão do teorema.

Além disso, os professores podem criar gráficos que mostrem a frequência dos números primos em relação aos números naturais, ajudando os alunos a visualizarem a relação entre a densidade dos números primos e o aumento dos números. Essa abordagem visual pode solidificar a compreensão e motivar discussões sobre padrões, crescimento e limites em matemática.

3.3 TEORIA DOS NÚMEROS E CRIPTOGRAFIA RSA

A criptografia RSA é um exemplo prático e relevante da teoria dos números que pode ser apresentada no contexto do ensino fundamental. Após entender como identificar números primos usando o Crivo de Eratóstenes, os alunos podem explorar como esses números são usados para codificar informações. Uma atividade interessante seria simular a codificação e a decodificação de mensagens utilizando pequenos números primos, permitindo que os alunos vejam a aplicação prática do que aprenderam.

Discutir a importância da criptografia na segurança da informação pode ajudar a conectar a matemática com o mundo real, mostrando como os conceitos matemáticos se traduzem em tecnologias que usamos diariamente. Isso pode incentivar o interesse dos alunos em áreas como ciência da computação e engenharia, destacando a relevância dos números primos além da sala de aula.

3.4 ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

Os números primos têm várias aplicações em engenharia elétrica e computação, como na análise de circuitos e em técnicas de modulação. Em computação, são fundamentais em algoritmos de geração de chaves e em processos de hash. Introduzir o Crivo de Eratóstenes como uma ferramenta de programação pode ajudar os alunos a verem a matemática como uma linguagem que pode ser codificada.

Os alunos podem ser desafiados a criar seu próprio algoritmo para o Crivo de Eratóstenes usando uma linguagem de programação simples, como Python. Isso não apenas reforça o aprendizado dos números primos, mas também desenvolve habilidades em programação e pensamento lógico. Ao integrar matemática e tecnologia, os alunos podem se tornar mais engajados e preparados para futuras carreiras nas ciências exatas.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método Crivo de Eratóstenes não é apenas uma ferramenta para encontrar números primos; ele se configura como um recurso educacional versátil que promove uma aprendizagem ativa e integrada. Essa abordagem interativa permite que os alunos não apenas reconheçam os

números primos, mas também desenvolvam uma compreensão mais profunda de sua importância e aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Ao explorar os números primos sob diferentes perspectivas, como a Hipótese de Riemann, os educadores podem introduzir questões fundamentais sobre a distribuição dos primos e os mistérios que cercam a matemática. A Hipótese de Riemann, embora complexa, oferece uma janela para discussões sobre padrões e conjecturas matemáticas, instigando a curiosidade dos alunos e incentivando-os a pensar criticamente sobre como os números primos se comportam.

Além disso, ao abordar o Teorema dos Números Primos, os professores podem levar os alunos a compreenderem a relação entre a densidade dos números primos e a função logarítmica, criando uma conexão entre teoria e prática. Essa compreensão não é apenas acadêmica; ela fundamenta a habilidade dos alunos em aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real, contribuindo para um aprendizado mais significativo.

Outro aspecto essencial do Crivo de Eratóstenes é sua relevância na criptografia RSA. Ao conectar a matemática à segurança digital, os educadores podem demonstrar como os números primos são essenciais para proteger informações em um mundo cada vez mais dependente da tecnologia. Essa ligação prática não apenas torna a matemática mais acessível, mas também prepara os alunos para entenderem a importância da segurança da informação em suas vidas diárias.

As aplicações dos números primos também se estendem a áreas como engenharia e computação. Ao discutir como números primos são utilizados em algoritmos, modulação de sinais e até mesmo em técnicas de compressão de dados, os alunos podem visualizar a matemática como uma linguagem que se entrelaça com a tecnologia. Isso estimula a criatividade e o pensamento crítico, fundamentais para resolver problemas complexos em campos técnicos.

A experiência de aprendizado proporcionada pelo Crivo de Eratóstenes, portanto, não se limita à memorização de fórmulas ou à realização de cálculos. Em vez disso, ela instiga uma mentalidade de exploração e inovação. Os alunos são encorajados a questionar, experimentar e investigar, habilidades que são valiosas em suas futuras jornadas acadêmicas e profissionais. Essa abordagem ativa prepara os estudantes para se tornarem pensadores independentes, capazes de aplicar o conhecimento matemático de maneira flexível e criativa.

Por fim, ao integrar o Crivo de Eratóstenes no currículo, os educadores criam um ambiente de aprendizado dinâmico e interconectado. Isso não apenas melhora a compreensão dos números primos, mas também ensina aos alunos que a matemática é uma disciplina viva, cheia de conexões e aplicações no mundo real. A experiência adquirida através do Crivo de Eratóstenes pode inspirar uma nova geração de matemáticos, cientistas, engenheiros e inovadores, capacitando-os a enfrentar os desafios do futuro com confiança e criatividade.

REFERÊNCIAS

REIS, Alcenir Soares dos; FROTA, Maria Guiomar da Cunha. **Guia básico para a elaboração do projeto de pesquisa**. Belo Horizonte, MG: UFMG, [200-]. Disponível em: "https://www.ufmg.br/proex/cpinfo/educacao/docs/06a.pdf"a.pdf. Acesso em: 22 fev. 2023.

SPERANDIO, Daniele Spadotto (org.) et al. **Manual de normalização de trabalhos acadêmicos do IFPI**. Teresina: IFPI, 2017.

COELHO, Fernando Nascimento; **Números Primos e a Hipótese de Riemann**. Data da defesa 28-Mar-2023. Disponível em: (https://www.bdtd.uerj.br: HYPERLINK "https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/20560" HYPERLINK)

VIEIRA, Márcia Oliveira; **O teorema dos números primos**, maio de 2023. Disponível em: (https://ri.ufs.br/handle/riufs/ HYPERLINK "https://ri.ufs.br/handle/riufs/18016" HYPERLINK "https://ri.ufs.br/handle/riufs/18016" HYPERLINK "https://ri.ufs.br/handle/riufs/18016"18016)

MOTA, Wélisson Martins; **Teoria dos números e criptografia RSA,** fevereiro de 2023. Disponível em: (https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/ HYPERLINK) (https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/27118" HYPERLINK)

PARIS, Bruno Mendonça, **Engenharia elétrica e computação**, 2018. Disponível em: (https://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&as_sdt=0%2C5&q=ENGENHARIA+EL%C3%89TRICA+E+COMPUTA%C3%87%C3%83O+%28pdf%29+introdu%C3%A7%C3%A3o+%C3%A0+hist%C3%B3ria+da+matem%C3%A1tica&btnG=)

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática,** 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Disponível em: (https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6081521/mod_resource/content/1/%28Saunders%20Series%29%20Domingues%2C%20Hygino%20Hugueros_%20Eves%2C%20Howard%20-%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20hist%C3%B3ria%20da%20matem%C3%A1tica-Editora%20da%20Unicamp%20%282004_2008%29.pdf)

LIBÂNIO, José Carlos. **Didática,** São Paulo: Cortez, 1994.-(coleção magistério)

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais** (5ª a 8ª séries), Brasília 1998. Disponível em: (http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf)

BEZERRA, Nazaré, **Teoria dos números**, Um curso introdutório, primeira edição, 2018. Disponível em: (https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/206368/2/livro_teoria_dos_numeros.pdf)

B. BOYER, Carl, **A história da matemática**, Editora Edgard Blücher Ltda. Tradução da 3.ª edição americana 2012, p. 122.

FERREIRO, Emilia. Com Todas as Letras. São Paulo: Cortez, 1999. v.2.

RICHARDSON, Roberto Jarry, **Pesquisa Social métodos e técnicas**, 2012, 3ª Edição revista e ampliada. Disponível em: (https://climatechangemoz.com/wp-content/uploads/2020/04/Metodologia-de-Pesquisa-Social-Richardson.pdf)

GIL, Antonio Carlos, **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social** - 7 Edição/2019.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2010.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: (http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf).