

INSTITUTO FEDERAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS CORRENTE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO HENRIQUE MARTINS DE OLIVEIRA

**CONTRIBUIÇÕES DA ANÁLISE DE ERROS NO CÁLCULO DE DERIVADAS E
INTEGRAIS PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

CORRENTE

2017

JOÃO HENRIQUE MARTINS DE OLIVEIRA

CONTRIBUIÇÕES DA ANÁLISE DE ERROS NO CÁLCULO DE DERIVADAS E
INTEGRAIS PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura
em Matemática do Instituto Federal do Piauí –
Campus Corrente, como requisito parcial à
obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Professor Mestre Flávio de Ligório
Silva

CORRENTE

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Oliveira, João Henrique Martins de.

O48c Contribuições da análise de erros no cálculo de derivadas e integrais para a formação de professores de matemática / João Henrique Martins de Oliveira. - 2017.

74 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente, 2017.

Orientador: Prof Me. Flávio de Ligório Silva

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Cálculo de Derivadas 3. Cálculo de Integrais 4. Oliveira, João Henrique Martins de.
I. Título.

CDD – 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB3/1251

JOÃO HENRIQUE MARTINS DE OLIVEIRA

João Henrique Martins de Oliveira. *Contribuições da análise de erros no cálculo de derivadas e integrais para a formação de professores de Matemática.*

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí – *Campus Corrente*, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Professor Mestre Flávio de Ligório Silva.

Aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Me. Flávio de Ligório Silva – Orientador
IFPI – *Campus Corrente*

Profa. Esp. Cleonice Moreira Lino
IFPI – *Campus Corrente*

Profa. Dra. Karine dos Santos
Campus Corrente - IFPI

Aos meus pais, Nair e Edivaldo, à minha noiva Ionize, e aos meus irmãos Yuri e Naira pois mesmo não tendo a compreensão de meus rascunhos de Matemática, apoiam-me, com a certeza de que fiz a escolha certa expressa em minha alegria de trabalhar com a “rainha das ciências”.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder a oportunidade de terminar mais uma etapa da minha vida. Depois aos meus parentes e amigos que sempre estiveram me apoiando, e que me suportaram em momentos de angústia, de fraqueza e, finalmente, de alegria.

Por toda a contribuição para a realização deste trabalho, fica expressa aqui minha gratidão, especialmente ao Prof. Me. Flávio de Ligório Silva, pelo seu competente trabalho como orientador. Meu muito obrigado pela orientação ao longo desses anos. Obrigado por todo o tempo que disponibilizou a discutir pormenores deste Trabalho de Conclusão de Curso, contribuindo de forma significativa para minha formação como pesquisador.

Agradeço a todos os professores do Curso de Licenciatura em Matemática, que ajudaram no meu crescimento enquanto discente, em especial, ao Prof. Me. Jeovan Lira, que guardo em minhas lembranças eternas como exemplo de profissional.

Aos meus amigos Jean Corado, Valdimir Alves e Naécio Souza que sempre estiveram presentes em momentos importantes de minha trajetória acadêmica.

Meus sinceros agradecimentos a todos os sujeitos participantes desta pesquisa que contribuíram grandemente com esse trabalho, sem os quais não poderia ter sido realizado.

A todos os colegas da graduação em Matemática, companheiros de caminhada com quem muito aprendi.

Ao Instituto Federal do Piauí – *Campus* Corrente, que me concedeu a oportunidade de tornar-me professor de Matemática.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi identificar, classificar e analisar erros de alunos de uma turma do curso de Licenciatura em Matemática do IFPI - *Campus Corrente* cometidos no cálculo de derivadas e integrais, bem como, apresentar sugestões para que esses erros venham ser trabalhados pelos futuros professores da Licenciatura de maneira adequada. Tem-se, através deste trabalho, a oportunidade de descobrir as principais dificuldades matemáticas enfrentadas pelo grupo de educandos investigado, no que diz respeito ao estudo de conteúdos que envolvem o cálculo diferencial e integral. Tornam-se, assim, evidentes as contribuições que a análise dos erros cometidos pelos educandos melhora o processo de formação dos futuros professores de matemática em Corrente. A pesquisa se baseia em Cury (2007), que trabalha com esse instrumento de avaliação e produção de conhecimento, qual seja, a análise de erros. As questões analisadas constam em quatro questionários que foram aplicados no período letivo da instituição de ensino. Com os dados obtidos, os erros foram agrupados e categorizados, como proposto por Bardin (1979), a respeito da análise de conteúdo e por Ponte *et al.* (1997), que afirmam a necessidade da categorização dos erros, permitindo assim adotar procedimentos específicos para seu tratamento. Os resultados obtidos, além de indicarem que os alunos têm enfrentado grandes dificuldades em relação ao conteúdo estudado, mostram que é necessário a realização de possíveis intervenções ao longo do processo de formação desses discentes, com o intuito de inibir a reprodução de tais falhas no futuro ambiente de trabalho (salas de aula) dos formandos, já que os erros podem ser reproduzidos durante sua trajetória acadêmica e, posteriormente, sua prática pedagógica de sala de aula. A análise de erros remete, ainda, aos professores formadores momentos de reflexão quanto à metodologia de ensino adotada, oportunizando a esses educadores sua adoção no processo diário de ensino das disciplinas da licenciatura. Faça-se, ainda, a ressalva de que a análise de erros é um instrumento de diagnóstico para orientar o docente na sua profissão educacional, tendo o poder, não necessariamente, de evitar os erros, mas de usá-los como oportunidade de reconstrução dos conhecimentos dos alunos.

Palavras-chave: Análise de erros; Cálculo Diferencial e Integral; Formação de professores.

ABSTRACT

The objective of this work was to identify, classify and analyze errors of students of a course of Mathematics Degree of the IFPI - Campus Corrente committed in the calculation of derivatives and integrals, as well as to present suggestions for these errors to be worked out by the future teachers Of the Degree in an appropriate way. Through this work, we have the opportunity to discover the main mathematical difficulties faced by the group of students investigated, with respect to the study of contents that involve differential and integral calculus. Thus, the contributions that the analysis of the mistakes made by the students improves the process of formation of the future teachers of Mathematics in Corrente. The research is based on Cury (2007), who works with this instrument of evaluation and production of knowledge, that is, the analysis of errors. The questions analyzed are presented in four questionnaires that were applied during the academic period of the institution. With the data obtained, the errors were grouped and categorized, as proposed by Bardin (1979), regarding the content analysis and by Ponte et al. (1997), who affirm the need to categorize errors, thus allowing the adoption of specific procedures for their treatment. The results obtained, in addition to indicating that the students have faced great difficulties in relation to the content studied, show that it is necessary to make possible interventions throughout the training process of these students, in order to inhibit the reproduction of such failures in the future (Classrooms) of the trainees, since the errors can be reproduced during their academic trajectory and, later, their pedagogical practice of the classroom. The analysis of mistakes also reminds teachers of moments of reflection on the teaching methodology adopted, giving these educators an opportunity to adopt them in the daily process of teaching undergraduate courses. It should also be noted that the analysis of errors is a diagnostic tool to guide teachers in their educational profession, not having the power to avoid mistakes, but rather to use them as an opportunity to reconstruct Knowledge.

Keywords: Error analysis; Differential and integral calculus; Teacher training.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: I1Q1E1	32
Figura 2: I1Q1E2	32
Figura 3: I1Q2E3	33
Figura 4: I1Q3.A.E4.....	34
Figura 5: I1Q3.A.E5.....	34
Figura 6: I1Q3.A.E6.....	34
Figura 7: I1Q3.B.E7.....	34
Figura 8: I1Q3.B.E8.....	35
Figura 9: I1Q3.C.E9.....	35
Figura 10: I1Q3.C.E10.....	35
Figura 11: I1Q3.C.E11.....	35
Figura 12: I1Q3.C.E12.....	36
Figura 13: I1Q3.D.E13.....	36
Figura 14: I1Q3.D.E14.....	36
Figura 15: I1Q3.D.E15.....	36
Figura 16: I1Q4.A.E16.....	37
Figura 17: I1Q4.A.E17.....	37
Figura 18: I1Q4.A.E18.....	38
Figura 19: I1Q4.A.E19.....	38
Figura 20: I1Q4.A.E20.....	38
Figura 21: I1Q4.A.E21.....	38
Figura 22: I1Q4.A.E22.....	38
Figura 23: I1Q4.B.E23.....	39
Figura 24: I1Q4.B.E24.....	39
Figura 25: I1Q4.B.E25.....	39
Figura 26: I1Q4.B.E26.....	39
Figura 27: I1Q4.B.E27.....	40
Figura 28: I1Q4.B.E28.....	40
Figura 29: I1Q4.C.E29.....	40
Figura 30: I1Q4.C.E30.....	41
Figura 31: I1Q4.C.E31.....	41
Figura 32: I1Q4.C.E32.....	41

Figura 33: I1Q4.C.E33.....	41
Figura 34: I1Q5.A.E34.....	42
Figura 35: I1Q5.A.E35.....	42
Figura 36: I1Q5.A.E36.....	42
Figura 37: I1Q5.A.E37.....	43
Figura 38: I1Q5.B.E38.....	43
Figura 39: I1Q5.B.E39.....	43
Figura 40: I1Q5.B.E40.....	43
Figura 41: I1Q5.B.E41.....	44
Figura 42: I1Q5.B.E42.....	44
Figura 43: I1Q5.C.E43.....	44
Figura 44: I1Q5.C.E44.....	44
Figura 45: I1Q5.C.E45.....	45
Figura 46: I1Q5.C.E46.....	45
Figura 47: I2Q1.A.E47.....	46
Figura 48: I2Q1.A.E48.....	46
Figura 49: I2Q1.B.E49.....	46
Figura 50: I2Q1.B.E50.....	47
Figura 51: I2Q1.C.E51.....	47
Figura 52: I2Q1.C.E52.....	47
Figura 53: I2Q1.D.E53.....	48
Figura 54: I2Q1.D.E54.....	48
Figura 55: I2Q1.D.E55.....	48
Figura 56: I2Q1.E.E56.....	48
Figura 57: I2Q1.E.E57.....	49
Figura 58: I2Q1.E.E58.....	49
Figura 59: I2Q1.E.E59.....	49
Figura 60: I2Q1.E.E60.....	49
Figura 61: I2Q1.F.E61.....	50
Figura 62: I2Q1.F.E62.....	50
Figura 63: I2Q1.F.E63.....	50
Figura 64: I2Q1.G.E64.....	50
Figura 65: I2Q1.G.E65.....	51
Figura 66: I2Q1.G.E66.....	51

Figura 67: I2Q1.H.E67	51
Figura 68: I2Q1.E68	52
Figura 69: I2Q1.I.E69	52
Figura 70: I2Q1.I.E70	52
Figura 71: I2Q1.I.E71	52
Figura 72: I2Q1.J.E72.....	53
Figura 73: I2Q1.E73	53
Figura 74: I2Q1.E74	53
Figura 75: I3Q1.A.E75.....	54
Figura 76: I3Q1.A.E76.....	55
Figura 77: I3Q1.A.E77.....	55
Figura 78: I3Q1.A.E78.....	55
Figura 79: I3Q1.A.E79.....	55
Figura 80: I3Q1.B.E80.....	56
Figura 81: I3Q1.B.E81.....	56
Figura 82: I3Q1.B.E82.....	56
Figura 83: I3Q2.E83	57
Figura 84: I3Q2.E84	57
Figura 85: I3Q3.A.E85.....	58
Figura 86: I3Q3.A.E86.....	58
Figura 87: I3Q3.A.E87.....	58
Figura 88: I3Q3.A.E88.....	58
Figura 89: I3Q3.B.E89.....	59
Figura 90: I3Q3.B.E90.....	59
Figura 91: I3Q3.B.E91.....	60
Figura 92: I3Q3.C.E92.....	60
Figura 93: I3Q3.C.93	61
Figura 94: I3Q3.C.94	61
Figura 95: I3Q3.C.95	61
Figura 96: I3Q3.C.E96.....	61
Figura 97: I3Q3.D.E97.....	62
Figura 98: I3Q3.D.E98.....	62
Figura 99: I3Q3.D.E99.....	62
Figura 100: I3Q3.D.E100.....	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BA	Bahia
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IFPI	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Piauí
MG	Minas Gerais
MA	Maranhão
PI	Piauí

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 REFERENCIAL TEÓRICO	17
1.1 ANÁLISE DE ERROS: CONSIDERAÇÕES INICIAIS E PERSPECTIVAS DE EXPLORAÇÃO	17
1.2 A ANÁLISE DE ERROS, AVALIAÇÃO E ENSINO DE MATEMÁTICA	19
2 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA	23
2.1 CENÁRIO DE INVESTIGAÇÃO E SUJEITOS DA PESQUISA	23
2.2 PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE COLETA	25
2.2.1 Situação-problema	26
2.2.2 Apresentação do tema aos alunos	27
2.3 PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS	27
3 ANÁLISE E DISCUSSÃO	30
3.1 QUESTÕES E ERROS	31
3.2 DISCUSSÃO	66
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70
APÊNDICE A	71
APÊNDICE B	72
APÊNDICE C	73
APÊNDICE D	74

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo identificar, classificar e analisar erros de alunos de uma turma do curso de Licenciatura em Matemática do IFPI - *Campus* Corrente cometidos no cálculo de derivadas e integrais. Por meio dessa análise, pretendemos compreender as possíveis causas desses erros ao mesmo tempo em que procuramos perceber em quais conteúdos esses educandos encontram mais dificuldades de aprendizagem.

Por se tratar de discentes de um curso de formação de professores, nossa preocupação é a de criar estratégias que possam minimizar ou até mesmo sanar as possíveis carências que eles possam ter ou que venham ser adquiridas ao longo de sua trajetória de formação na educação básica e no ensino superior, uma vez que os erros cometidos por eles poderão ser reproduzidos pelos mesmos em sua futura prática pedagógica de sala de aula.

A sociedade contemporânea considera somente os acertos como dotados de valor, em detrimento da aprendizagem que pode ser conseguida mediante a exploração e análise das situações de erro. Por outro lado, na maioria das vezes, quando se comete um erro no ambiente escolar, ele é geralmente reproduzido e passado adiante quando não é explorado e corrigido de uma maneira adequada. Sendo assim, a intenção desta pesquisa é, através dos erros, criar subsídios para melhoria da formação do futuro professor de matemática.

A concepção desta pesquisa nasceu de montante de insatisfações e dúvidas no que diz respeito ao processo de formação pelo qual passam os professores. Uma primeira inquietação diz respeito às nossas experiências como estudantes de Matemática. Desde o ensino fundamental, sentia falta de que os professores discutissem os porquês de determinados cálculos e estratégias de resolução de questões matemáticas serem consideradas erradas. Apesar das boas notas que tinha no estudo da disciplina, muitas vezes eu não conseguia compreender o sentido do *erro*, o que gerava uma sensação de angústia diante da percepção de que as respostas aos exercícios de Matemática deveriam estar no mesmo padrão do livro didático adotado e que qualquer outro tipo de resposta seria considerado errado pelos professores em atuação. Afinal, qual o valor educacional do erro no ensino de Matemática? Ou ainda, de que maneira os erros, ao serem minuciosamente analisados, poderiam agregar novos conhecimentos à prática pedagógica dos professores de Matemática?

Uma outra inquietação diz respeito à prática docente no ensino superior. Não raramente, observei que sempre que tínhamos dúvidas de conteúdos referentes ao ensino básico, cujo aprendizado deveria ter ocorrido em anos anteriores, era comum escutar dos professores

da licenciatura que já deveríamos saber aquilo e que eles não tinham mais nada a ver com isso. Nesse sentido, cabe questionar: será que uma análise das dificuldades expressadas pelos alunos da licenciatura por meio dos erros que eles cometem na resolução de exercícios e avaliações ao longo de sua trajetória acadêmica teria alguma utilidade para a futura prática profissional dos professores em processo de formação?

Assim sendo, através da investigação que aqui se apresenta, a qual se apoia na metodologia da análise de erros, além das respostas aos questionamentos apresentados acima, busco apontar algumas sugestões que possam aprimorar o conhecimento matemático dos futuros professores em processo de formação. Nesse sentido, o trabalho se justifica por se pretender mapear as dificuldades matemáticas dos alunos da licenciatura que poderiam impactar sua futura prática pedagógica, bem como oportunizar uma reflexão sobre os erros que vêm sendo cometidos e permitir a realização de possíveis intervenções ao longo de sua formação acadêmica, de modo a sanar as lacunas de sua aprendizagem.

Fusiger, Heck e Ritter (2016, p. 2) destacam que “o estudo dos erros deveria fluir naturalmente no sistema educacional, uma vez que o professor só conhece de fato as dificuldades dos seus alunos quando se preocupa com os erros que eles cometeram”. Sendo assim, a análise de erros pode ser compreendida como uma prática que pode vir a ser parte natural do trabalho docente, podendo ser adotada de acordo com a preocupação de cada professor em entender mais sobre as dificuldades encontradas pelos seus educandos em cada conteúdo estudado.

Por outro lado, Cury (2013) defende que “a análise de erros deveria ser abordada, em disciplinas que estão presentes nos currículos das instituições que ofertam cursos de formação de professores, uma vez que essa pode contribuir para que o profissional da educação venha saber intervir futuramente com as possíveis dificuldades ou obstáculos que venham influenciar de maneira negativa na aprendizagem de seus alunos”. Com isso podemos de fato entender que a análise de erros é de suma importância para a formação docente, bem como para fins científicos, pois Cury (2013) aponta que as pesquisas relacionadas ao estudo dos erros no ensino da matemática principalmente nos cursos de pós-graduação e mestrado, vem aumentando na medida em que se tornou notório o grande potencial desse instrumento de investigação.

Portanto, a análise de erros é vista por diversos autores como metodologia de ensino, prática docente ou até mesmo como um instrumento de investigação e pesquisa. Assim iremos abordá-la nesta pesquisa como método investigativo, uma vez que se pretende através do inquérito sobre os questionários agrupar e categorizar os erros cometidos pelos futuros

professores em processo de formação, além de sugerir possíveis estratégias que possam ser eficazes para a melhoria do conhecimento matemático dos aprendizes da licenciatura.

No primeiro capítulo, apresento os fundamentos teóricos da análise de erros. Traço um panorama sobre sua utilização inicial e perspectivas de exploração assim como análise de erros voltada para a avaliação e para o ensino de matemática. A análise de erros é apresentada principalmente nas concepções de Cury (2007) e Borasi (1996), pesquisadoras que deram grandes contribuições a sua aplicação no ensino de matemática no Brasil.

No segundo capítulo, descrevo a metodologia utilizada na realização do estudo a começar pelo cenário de investigação, seguindo pelos sujeitos da pesquisa, procedimentos e instrumentos de coleta, situação-problema, apresentação do tema aos alunos e os procedimentos e instrumentos de análise dos dados.

No terceiro capítulo, exponho os dados da pesquisa, realizo sua análise e faço as discussões dos erros encontrados. Por fim, apresento as considerações finais e as referências bibliográficas.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, explicita-se a análise de erros como possibilidade no ensino de Matemática, destacando seu contexto histórico. Assim, apresento algumas considerações sobre a análise de erros inserida nesse contexto de ensino, mais precisamente, no ensino superior, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, observando sua importância para a formação de professores dessa disciplina.

1.1 ANÁLISE DE ERROS: CONSIDERAÇÕES INICIAIS E PERSPECTIVAS DE EXPLORAÇÃO

Em um contexto mais amplo, a análise de erros insere-se nas práticas docentes cotidianas em seu trabalho de ensinar. O processo de observação da produção discente é parte, mesmo, inerente das atividades realizadas pelos professores, o que torna a análise de erros, também, uma prática de avaliação utilizada com diferentes finalidades e sob óticas diversificadas, dependendo das concepções de ensino e aprendizagem da Matemática escolar adotadas pelos professores da disciplina.

O erro na disciplina de Matemática é visto, de forma geral, como um estigma, dado que as resoluções dos problemas e questões da disciplina são feitas por caminhos absolutos, provados logicamente, não permitindo a dúvida ou a hesitação. As respostas em Matemática não permitem “um talvez”, não promovem o debate e o diálogo em busca dos melhores argumentos, a exemplo do que acontece em outras disciplinas em que visões de mundo diferentes podem conceber respostas também distintas, todas consideradas corretas em seus contextos de existência. Sendo assim:

Na disciplina de Matemática os erros são vistos na maioria das vezes como rótulos negativos, pelos quais o estudante deve ser simplesmente punido, sem a preocupação da compreensão. Dessa forma, o erro acaba sendo relegado sem ser explorado e consequentemente leva o aluno a cometê-lo em séries posteriores, sem se dar conta da sua verdadeira origem. Por isso, é importante que o educador estabeleça uma relação de aprendizagem por meio do erro, ou seja, perceba que os erros podem contribuir com o aprendizado dos alunos (FUSIGER; HECK; RITTER, 2016, p. 2).

Cury (2015, p. 15) concebe a análise de erros em matemática com sendo tanto uma metodologia de pesquisa quanto uma metodologia de ensino, desde que os professores a insiram em sala de aula de maneira que venha impulsionar a aprendizagem dos educandos. Nesse sentido, a autora destaca que:

[...] a análise das produções dos estudantes não é um fato isolado na prática do professor; ela é – ou deveria ser – um dos componentes dos planos pedagógicos das instituições e dos planos de aula dos docentes, levando em conta os objetivos do ensino de cada disciplina. Mas há entraves para sua realização, que envolvem aspectos delicados da prática docente, já que, sendo uma avaliação, assume o estatuto desta, tocando em sentimentos [...], em memórias [...], em questões sociais e econômicas [...] (CURY, 2015, p. 15-16).

Portanto, devemos levar em consideração esses aspectos citados pela autora para entendermos, de maneira mais ampla, os contextos e possibilidades de utilização da análise de erros em processos de ensino-aprendizagem da Matemática escolar. Sendo assim, a análise de erros consiste tanto de uma prática social dos professores, desenvolvida por eles junto com os discentes, quanto um processo mediante o qual os pesquisadores (que podem, também, ser os professores das salas de aula) compreendem como se dá a apropriação desse repertório de conhecimentos pelos aprendizes, inserindo esse tipo de análise no campo de investigação da Educação Matemática. Cury (1995, p.41) reitera essa percepção ao afirmar que “a análise de erros é uma abordagem de pesquisa em Educação Matemática que vem sofrendo as influências das teorias vigentes, em diferentes épocas, tanto na Pedagogia, quanto na Psicologia”.

Desde seu surgimento no século XX, a análise de erros vem sendo utilizada sob diferentes perspectivas. Em um primeiro momento, ela era vista apenas como uma maneira de contar a quantidade de vezes que era necessário mostrar uma determinada operação para uma criança, de modo que ela fosse capaz de fornecer uma resposta correta, e ainda, quanto tempo ela levaria para chegar a essa resposta. Pode-se observar que, nesse contexto, as primeiras pesquisas que envolviam a análise de erros se limitavam apenas a estudar conteúdos aritméticos, abrangendo estudos em outras áreas da matemática gradualmente (Cury, 1995, p. 41).

Um segundo momento da análise de erros se deu a partir da década de 1950, com uma mudança de enfoque para o processamento da informação. Nesse sentido, observa-se a utilização de meios e recursos computacionais para a realização de pesquisas envolvendo a análise de erros em contextos educacionais (CURY, 1995, p. 41-42). Cabe destacar, porém, que tanto em uma perspectiva quanto em outra, a análise de erros em Matemática se limitava às funções diagnóstica e reparadora dos erros cometidos pelos educandos, visão que tem se

modificado, nos últimos anos, pela compreensão e inserção de novas possibilidades da análise de erros no ensino de Matemática.

Hadamard (1945)¹, citado por Cury (2007), comenta que a maior parte dos matemáticos, na maioria das vezes, só apresenta os resultados finais dos seus trabalhos, sem demonstrar suas incertezas, hesitações, falhas e até mesmo as idas e vindas de seus raciocínios, durante suas produções e elaborações. Isso contribuiu para que muitos professores, ao se depararem com os erros cometidos por seus alunos, tenham somente a preocupação de eliminá-los, sem antes explorá-los na tentativa de entender quais teriam sido as dificuldades enfrentadas pelos seus alunos que os levou a cometerem tais falhas.

Esta pesquisa, ao analisar os erros dos alunos da licenciatura, seguiu critérios, no que diz respeito a identificação, categorização e classificação dos dados recolhidos nos questionários aplicados explicitados abaixo, na metodologia, de modo a avaliar as respostas, não somente com o intuito de diagnosticar e reparar os erros, mas com a preocupação de utilizar essas informações para construir novos conhecimentos que venham a agregar na aprendizagem dos educandos na medida em que propomos a esses educandos caminhos que possam levar a compreensão dos conteúdos, em particular, e da Matemática, em geral, de maneira significativa.

Assim, ao fim da aplicação desses procedimentos, elaboro sugestões e estratégias que podem ser utilizadas, futuramente, pelo corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática do *Campus Corrente*, tendo em vista minimizar, ou até mesmo sanar grande parte dos impactos negativos que esses erros podem estar causando no processo de formação dos futuros professores de matemática, visto que se há de considerar que tais formas equivocadas de resolução poderão ser reproduzidas durante sua atuação em sala de aula, levando seus alunos a adquirirem conhecimentos incorretos.

1.2 A ANÁLISE DE ERROS, AVALIAÇÃO E ENSINO DE MATEMÁTICA

A análise de erros está inscrita nos processos de avaliação inerentes não somente à Matemática escolar, como a outras disciplinas, o que faz com que seja necessário repensar as relações entre avaliação, erro e ensino.

¹ HADAMARD, Jacques. *Na essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press, 1945.

A avaliação é, ainda, uma temática bastante controversa nos ambientes educacionais, observando-se, muitas vezes, no campo da prática docente, um abismo que separa aquilo que preconiza a literatura especializada na área e o trabalho desenvolvido pelos professores em seu cotidiano. Sendo assim, muitos são os docentes e instituições escolares, bem como pais de alunos e mesmo os educandos, que concebem a avaliação apenas como a valoração e mensuração de resultados cometidos em instrumentos como provas, classificando as respostas escritas nesses instrumentos como certas e erradas. Nesse sentido, o erro é algo a ser afastado e penalizado, enquanto que seu contrário, o acerto, deve ser louvado e retribuído.

Tal situação vai de encontro às concepções mais modernas que subjazem as práticas escolares de avaliação. Sendo assim:

[...] já faz muito tempo que, a partir da literatura pedagógica, as declarações de princípios de reformas educacionais compreendidas em diferentes países e grupos de educações mais inquietos se propõem formas de entender a avaliação que não se limitam a valoração dos resultados obtidos pelos alunos. O processo seguido pelos meninos e meninas, o progresso pessoal, o processo coletivo de ensino/aprendizagem, etc., aparecem como elementos ou dimensões da avaliação. Deste modo, é possível encontrar definições de avaliação bastante diferentes e, em muitos casos, bastante ambíguas, cujos sujeitos e objetos de estudo aparecem de maneira confusa e indeterminada (ZABALA, 1998, p. 195).

Assim, cabe destacar que as práticas pedagógicas mais modernas tendem a conceber a avaliação como um processo de observação da trajetória global do educando e do docente, não bastante a simples mensuração de resultados, mas, a compreensão de como os alunos em processo de aprendizagem vão se apropriando do conhecimento, integrando-o em suas vidas. Borasi (1996)², citada por Cury (2007), aponta que os alunos no momento que se veem pressionados a alcançarem resultados satisfatórios para a sua aprendizagem pelas instituições em que estudam, sentem-se frustrados ao cometerem erros. Por isso, ela entende que o ato de avaliar os alunos deveria deixar de ser voltado para o resultado final e, sim, para o processo, possibilitando assim a evidenciação do potencial educacional dos erros para a aquisição de novas aprendizagens.

Sendo assim, a utilização da análise de erros para o ensino de Matemática pode ser apontada como uma oportunidade singular, visto que possibilita a professores e alunos ter uma compreensão global dos processos de ensino, ressignificando os erros e integrando-os como parte mesmo desse processo que, antes de ser evitado e punido, deve ser compreendido como possibilidade de melhoria do ensino.

² BORASI, Raffaella. *Reconceiving mathematics instruction: a Focus on Errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

Muitos professores, ao se depararem com os erros cometidos pelos alunos, principalmente aqueles que eles consideram vindos de outras etapas e processos de ensino, simplesmente os ignoram, não explicando aos alunos o porquê de determinada forma de pensamento expressada naquela resposta ser considerada errada, nem oportunizando ao educando perceber suas falhas de aprendizagem e corrigir-se. Nesse sentido, eles consideram-se responsáveis apenas pela transmissão do saber inerente à etapa do ensino em que trabalham, relegando a responsabilidade pela não aprendizagem anterior aos próprios estudantes e aos professores que lhes deram aula, não vislumbrando na observação e reflexão sobre um determinado erro uma possibilidade ímpar de intervenção que garante a aprendizagem de determinado saber.

Sendo assim, a análise de erros, sob um tratamento adequado dentro de sala de aula, com atividades que integrem os educandos aos processos de avaliação e que os oportunizem conceber o erro como aspecto natural do seu próprio processo de ensino e aprendizagem, seria uma prática pedagógica que muito teria a contribuir com a apropriação e aquisição do conhecimento matemático pelos estudantes.

Trata-se, assim, de uma crítica à concepção em que, na maioria das vezes, os erros, principalmente na disciplina de Matemática, são considerados como fracasso dos alunos, ao mesmo tempo em que servem somente como forma de punição ou a maneira pelo qual o educando não consegue tirar nota máxima na avaliação. Com isso, o erro deixa de ser explorado de uma maneira que se torne útil e, por consequência, poderá ser repetido série após série por esse aluno, ao mesmo tempo em que lhe é negada a oportunidade de refletir sobre o mesmo para não mais cometê-lo. Por isso é importante salientar que os erros cometidos pelos alunos devem ser analisados pelos seus professores, sob diferentes perspectivas, pois, como afirmam, Fusiger, Heck e Ritter (2016, p. 2) “é importante que o educador estabeleça uma relação de aprendizagem por meio do erro, ou seja, perceba que os erros podem contribuir com o aprendizado dos alunos”.

Por outro lado, muitos professores entendem, ainda, que trabalhar os erros cometidos por seus alunos se resume em, ao final de cada avaliação, trazer as respostas corretas e passá-las para os alunos como correção da prova, tornando esse momento uma correção de atividade como outro qualquer. Sendo assim, os erros devem ser analisados de maneira que sejam identificados por quem os comete a percepção de suas causas e possibilitando a compreensão de como os mesmos se originaram.

A análise de erros deve ser, também, uma dimensão inerente à formação de professores, de modo, ao possibilitar-lhes a compreensão e a necessidade de investigarem seus

próprios erros, integrem essa perspectiva no trabalho docente que hão de desenvolver em sala de aula, futuramente, com seus alunos.

Sendo assim, Cury (2015) destaca que:

As pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciandos em Matemática estarão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre as possíveis metodologias de ensino que vão implementar no início de sua prática, podendo ajudar seus alunos logo que detectarem alguma dificuldade (CURY, 2015, p. 95).

Nesse sentido, em relação ao estudo que aqui se apresenta, nossa preocupação foi a de possibilitar uma reflexão sobre os erros cometidos pelos estudantes da licenciatura, visto que as formas como eles resolvem as questões terá, em certo sentido, influência sobre a maneira como atuarão, no futuro, nas escolas de Corrente e região. Sendo assim, concordamos com a afirmação de Abrate, Pochulu e Vargas (2006), citada por Cury (2015), a qual aponta que:

[...] os professores em formação cometem erros na realização de tarefas matemáticas, muitos deles semelhantes ou devidos às mesmas causas que aqueles cometidos pelos alunos; e expor as concepções deficientes e os erros cometidos resultaria em uma tarefa formativa que não se pode descartar, já que os obrigaria a uma reestruturação positiva de esquemas prévios (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006, p. 16³ *apud* CURY, 2015, p. 95).

Assim, destaca-se a importância da inserção da análise de erros, também, na formação de professores de Matemática. No próximo capítulo apresentaremos todo o processo metodológico da pesquisa.

³ ABRATE, R. S.; POCHULU, M. D.; VARGAS, J. M. *Errores y dificultades en matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006.

2 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

A presente pesquisa tem caráter qualitativo, a qual, na maioria das vezes, pode ser ainda intitulada como etnográfica, participativa, inquisitiva ou ainda naturalística (D'AMBRÓSIO, 2012, p.93). Sendo assim, independentemente de como é chamada esse tipo de pesquisa, ela sempre conservará os seus ideais de ter como foco principal o sujeito, com suas mais amplas visões, e levar em consideração o ambiente sociocultural em que o mesmo está inserido.

Para a organização e esquematização da pesquisa, o autor destaca algumas etapas a se seguir.

1. Formulação das questões a serem investigadas com base no referencial teórico do pesquisador;
2. Seleção de locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco da pesquisa;
3. Identificação das relações que envolvem esses elementos;
4. Definição de estratégias de coleção e análise de dados;
5. Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3;
6. Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2;
7. Redefinição de estratégias definidas no item 4;
8. Coleção e análise dos dados.

(D'AMBRÓSIO, 2012, p.93).

Além de apresentar o método e as estratégias empregadas na pesquisa, pretendo fornecer ao leitor o percurso que vai desde o cenário ou ambiente onde eles se encontram, como se deu sua escolha, bem como a forma como aconteceu todo o processo de elaboração, coleta e análise dos dados.

2.1 CENÁRIO DE INVESTIGAÇÃO E SUJEITOS DA PESQUISA

Essa pesquisa teve como delimitação a cidade de Corrente (PI), município cuja população é de cerca de 26149 habitantes (IBGE, 2017). Fica localizada no extremo sul do estado do Piauí, com área de 3.048,447 km² segundo dados do (IBGE, 2017). A cidade é cortada pela rodovia BR-135 que passa pelo norte de Minas Gerais, oeste da Bahia, sul do Piauí, chegando até o Maranhão, sendo uma importante via de integração entre essas regiões. A vegetação típica de Corrente é o cerrado, que predomina na cidade. Os sujeitos que participaram dessa pesquisa foram, inicialmente, 20 alunos⁴ do Instituto Federal do Piauí, todos graduandos do Curso de Licenciatura em Matemática – *Campus* Corrente. A instituição em questão dispõe de instalações como salas climatizadas, biblioteca com um bom acervo de livros, laboratório de matemática, refeitório, ginásio, dentre outras.

A escolha dos sujeitos da pesquisa se deu a partir da percepção de vários questionamentos feitos pela maioria dos educandos sobre suas dificuldades encontradas durante sua formação, principalmente, em relação ao conjunto das disciplinas de cálculo diferencial e integral que cursavam. Sendo assim, escolhemos acompanhar um grupo de alunos durante um período de um ano e meio enquanto os mesmos cursavam essas disciplinas presentes no currículo da Licenciatura em Matemática, com o objetivo de obter os dados a serem analisados.

Passo a descrever, agora, algumas características gerais dos sujeitos que colaboraram com a pesquisa. Emprego nomes fictícios para referir-me a cada um deles. Essa disposição segue uma ordem aleatória, sendo que todas as informações foram declaradas pelos depoentes:

Tabela 1 - Características dos sujeitos envolvidos na pesquisa

Nome	Sexo	Idade	Cor	Renda
Pedro	Masculino	19	Branco	Média
Raquel	Feminino	20	Negra	Baixa
Augusto	Masculino	20	Pardo	Média
Ana	Feminino	20	Branco	Média
Ricardo	Masculino	20	Negra	Média
Jorge	Masculino	20	Pardo	Média
Lucas	Masculino	20	Pardo	Baixa
Érike	Masculino	21	Pardo	Média
Mirian	Feminino	21	Pardo	Média
Rodrigo	Masculino	22	Pardo	Baixa
Cristiano	Masculino	22	Pardo	Média
Monaliza	Feminino	19	Pardo	Baixa
Igor	Masculino	27	Negra	Baixa

⁴ Há de se destacar que esse número sofreu alterações ao longo da pesquisa, visto que os alunos que eram reprovados em alguma das disciplinas de cálculo não participaram das etapas seguintes da pesquisa. Além disso, houve o não comparecimento pontual de alguns alunos por situações adversas ao longo da coleta de dados.

Iago	Masculino	22	Branco	Baixa
Joana	Feminino	22	Pardo	Baixa
Paula	Feminino	35	Pardo	Média
Marcos	Masculino	26	Pardo	Média
Manoela	Feminino	21	Pardo	Média
Fernanda	Feminino	21	Negra	Baixa
Mirella	Feminino	21	Branco	Baixa

Fonte: produzido pelo autor com base nos dados disponibilizados pelos depoentes.

Houve variação no número de participantes em cada etapa da pesquisa, conforme mencionado anteriormente. Sendo assim, o número de participantes que responde a cada instrumento de pesquisa encontra-se na Tabela 2.

Tabela 2 - Número de depoentes em cada instrumento de avaliação

Etapa	Número de participantes
Primeira avaliação	19 alunos
Segunda avaliação	15 alunos
Terceira avaliação	20 alunos
Quarta avaliação	6 alunos

Fonte: produzido pelo autor.

Na apresentação dos erros cometidos, identifiquei as situações de erro com códigos como por exemplo Instrumento 1 questão 1 Erro 1- I1Q1.E1, Instrumento 1 questão 2 Erro 2 – I1Q2.E2 e assim por diante.

2.2 PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE COLETA

Para a coleta de dados, foram utilizados questionários elaborados pelo próprio pesquisador junto aos professores que ministravam as disciplinas de cálculo diferencial e integral, seguindo uma linha de percepção dos docentes em relação aos pontos que deveriam ser explorados nos instrumentos da pesquisa. Quanto à aplicação dos questionários, durante o período letivo das disciplinas, os professores cediam 2 horas-aulas para a realização de cada parte da pesquisa, onde a mesma foi dividida em 3 etapas.

A primeira etapa contém dois questionários que foram aplicados nos dias 7 e 30 de março do ano de 2016, sobre os conteúdos relacionados às derivadas (equação da reta tangente, derivação por meio da definição de limite, regras de derivações, derivação de funções

trigonométricas), quando o grupo cursava a disciplina de Cálculo I. Na segunda etapa, que foi realizada no dia 8 de julho de 2016, foi aplicado um único questionário sobre os conteúdos referentes à disciplina de Cálculo II (técnicas de integração, integração de áreas entre curvas). Da mesma maneira, foi aplicado somente um questionário na terceira etapa da pesquisa. Esse questionário versava sobre os conteúdos da disciplina de Cálculo III (derivadas parciais, integrais duplas, integrais triplas e vetor gradiente) e foi aplicado no dia 10 de março de 2017.

No desenho inicial da pesquisa, bem como no termo de consentimento que foi entregue a cada aluno, estava prevista a realização de entrevistas com os participantes da pesquisa. Por princípios éticos, cada depoente teria, ainda, a garantia de que poderiam desistir de participar de qualquer uma de suas etapas, no momento que quisessem. Ocorreu que, dentro da própria disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, com a apresentação aberta aos alunos do andamento da pesquisa e de alguns de seus resultados preliminares⁵, a grande maioria dos colaboradores deste estudo que aqui apresento sentiram-se expostos e constrangidos pelo fato de verem os seus possíveis erros sendo mostrados e comentados antes da análise propriamente dita, e mesmo não tendo nenhum dos nomes dos participantes da pesquisa divulgado, eles decidiram não se submeter à entrevista. Assim, optamos, o orientador e eu, por concluir o estudo somente com os dados obtidos nos questionários, que estarão expressos no capítulo de análise e discussão dos resultados.

A apresentação de cada questionário, bem como a resolução das questões que os compõem, será feita, também, no próximo capítulo.

2.2.1 Situação-problema

Para a escolha da situação-problema, tivemos como motivação principal a observação das diversas reclamações feitas por boa parte dos educandos sobre as dificuldades encontradas no estudo do cálculo diferencial e integral, na licenciatura em Matemática. Com isso, a preocupação da presente pesquisa quanto a esse problema foi a de observar os erros cometidos pelos alunos nas resoluções das questões, supor suas prováveis origens quando fosse

⁵ Havia ficado acordado entre o orientador e eu que seriam apresentados alguns resultados preliminares da pesquisa nesse momento de avaliação da disciplina, decisão que foi tomada em consenso e não de forma unilateral por nenhum dos dois. Não se tinha previsto a participação dos próprios colaboradores da pesquisa nessa avaliação, nem seu impacto negativo sobre o andamento da pesquisa.

possível, estabelecer estratégias para saná-los e pensar em que esses erros impactariam na futura atuação docente dos licenciados quando eles assumissem, futuramente, uma sala de aula.

2.2.2 Apresentação do tema aos alunos

Ao apresentar o tema aos alunos, houve uma breve explicação quanto ao que vem a ser a análise de erros e a forma como iríamos trabalhar nessa pesquisa, bem como seriam os instrumentos de coleta dos dados.

Em seguida, foi explanado um pouco sobre os objetivos da pesquisa e o porquê da realização da mesma. Ao apresentar a situação-problema aos alunos, esses se mostraram muito motivados a participarem da pesquisa, pois entenderam ser de suma importância a realização de um estudo com essa temática. Por outro lado, ao mesmo tempo, alguns outros alunos tiveram uma reação de receio pelo fato de acharem que os seus erros seriam expostos e sofrerem algum tipo rejeição pelos outros colegas ou retaliação no ambiente que atuam. Nesse momento, vi a necessidade de intervir e explicar a eles que todos os dados seriam mantidos em pleno sigilo e que, em nenhum momento, seriam divulgados fora do trabalho ou, até mesmo, mostrados a pessoas que não estivessem ligadas à pesquisa.

Nesse sentido, cabe destacar o cuidado ético necessário a este tipo de pesquisa que aqui se apresenta, visto que o erro carrega em si uma imagem que é culturalmente bastante negativa. Sendo assim, a análise de erros requer dos pesquisadores que evitem julgamentos desnecessários ou hierarquizações indevidas, de modo a não prejudicar a imagem dos depoentes, bem como sua autoestima.

2.3 PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Nessa etapa da pesquisa, procedi à análise das respostas obtidas nos questionários em busca dos erros cometidos pelos educandos, de modo a responder às perguntas de pesquisa. Inicialmente, por meio da técnica de análise de conteúdo proposta por Bardin (1976), realizei a leitura flutuante dos dados recolhidos, estabelecendo inferências e anotações guias para a análise. Em um segundo momento, os erros foram classificados e agrupados em categorias no que diz respeito ao nível de ensino de que eram provenientes, sendo classificados em nível fundamental, nível médio e nível superior. De modo a completar a análise e a classificação de

cada erro, enunciei as devidas definições, teoremas, preposições e axiomas que julguei ser necessário para responder cada questão onde os educandos apresentaram resoluções incorretas.

Bardin (1979)⁶, citada por Cury (2007), assinala três etapas básicas para a análise de conteúdo são elas a pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Na primeira etapa, consistiu na preparação do material, escolhendo os documentos a serem analisados através de uma leitura superficial. Escolhidos os documentos, nesse momento delimita-se o conjunto das produções textuais, que é chamado de *corpus* da pesquisa, sob o qual o pesquisador ira debruçar-se. Foi feito o escaneamento de cada resposta dos testes respondidos, sendo salvas no formato de imagem e, posteriormente foi nomeada cada imagem, com os nomes fictícios que foram atribuídos aos participantes da pesquisa, para que suas identidades fossem preservadas. O nome de cada aluno foi indicado a frente de cada questão por ele resolvida. Seguindo às etapas, as questões que continham respostas erradas foram colocadas lado a lado com suas respectivas correções, além de algumas definições, teoremas, preposições e axiomas, caso fosse necessário, para que o leitor viesse a entender quais conhecimentos os educandos que cometeram tais erros negligenciaram ou ignoraram ao redigir suas respostas. Na segunda etapa, é feita uma releitura onde nesse momento os dados passam por uma separação do *corpus*, onde é feita a categorização, ou seja, a criação de categorias que englobam, erros semelhantes em relação aos níveis de ensino provenientes de cada erro. Na terceira etapa, é feita a descrição de cada categoria, onde fiz uso de tabelas ou quadros, com a indicação dos níveis dos erros encontrados com suas devidas frequências. Nessa etapa, apresento um texto-síntese para que o leitor compreenda o significado de cada categoria, apoiando-se sobre exemplos do próprio *corpus*. Nesse momento da pesquisa, realizo a interpretação dos dados e a elaboração de sugestões para possíveis intervenções que possam vir a ser feitas no intuito de minimizar o impacto desses erros na formação dos futuros professores de matemática.

As categorias das respostas obtidas foram identificadas em A1, A2 e A3 e assim sucessivamente. Para a classificação das categorias dos níveis de ensino dos erros agrupados, tem-se B1 (utilizada para identificar o nível fundamental), B2 (utilizada para identificar o nível médio) e B3 (utilizada para identificar o nível superior).

Diante dos erros apontados nesta pesquisa, estabeleceu-se hipóteses que na tentativa de apontar quais foram supostamente os causadores de tais erros, vindo a visualizar dessa maneira quais são as principais dificuldades encontradas pelos educandos participantes da pesquisa no estudo do cálculo diferencial e integral.

⁶ BARDIN, Laurence. Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70, 1979.

Os questionários aplicados nesta pesquisa estão dispostos nos Apêndices A, B, C e D.

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO

No capítulo anterior foi apresentado todo o percurso metodológico adotado nesta pesquisa. Passo agora a expor inicialmente as categorias criadas a partir da análise das respostas dos questionários, seguida dos símbolos utilizados na pesquisa e de todos os erros identificados junto com os possíveis fatores que geraram tais erros.

Para classificar os tipos de respostas dos alunos, foram estabelecidas as seguintes opções: incorreta e em branco. Utilizando as ideias apresentadas em Ponte *et al.* (1997)⁷, citado por Fusiger, Heck e Ritter (2016), sobre avaliação global de trabalhos que envolvem resolução de questões matemáticas, foram considerados os seguintes critérios para avaliar as respostas das questões dos questionários aplicados:

Através da análise dos erros feita até esse momento, criou-se as seguintes categorias para classifica-los em relação as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução dos questionários:

A1: Erros atribuídos ao cancelamento de termos de forma incorreta;

A2: Erros cometidos pela utilização de falsas generalizações;

A3: Erros atribuídos as dificuldades em trabalhar com radicais, potenciação, cálculo algébrico, ideia de inverso ou ainda com frações;

A4: Erros atribuídos as dificuldades em encontrar a equação da reta tangente a uma curva dada;

A5: Erros atribuídos as dificuldades de calcular a derivada de uma função pela definição de limite;

A6: Erros cometidos por falta ou pelo emprego de forma incorreta das regras de derivação;

A7: Erros atribuídos as dificuldades em calcular integrais definidas ou áreas de curvas;

A8: Erros cometidos por falta ou pelo emprego de forma incorreta das regras de integração;

A9: Erros atribuídos as resoluções onde não foi possível a interpretação da resposta;

A10: Questões com respostas corretas sem apresentar cálculos;

A11: Questões com respostas em branco.

Erros de nível fundamental (B1): o erro analisado decorreu da inexistência do domínio de conteúdos pertencentes ao ensino fundamental.

Erros de nível médio (B2): o erro analisado decorreu da inexistência do domínio de conteúdos pertencentes ao ensino médio.

⁷ PONTE, J. P. et al. **Didática da Matemática**. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação, 1997.

Erros de nível superior (B3): o erro analisado decorreu da inexistência do domínio de conteúdos pertencentes ao ensino superior.

3.1 CONVENÇÃO DE SÍMBOLOS UTILIZADOS

Para a resolução das questões, foram adotados alguns símbolos, conforme está expresso no quadro abaixo.

Tabela 3 - Convenção de símbolos utilizados

Símbolo	Significado
m	Coeficiente angular da reta tangente
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Limite
$\frac{dy}{dx}$ ou $f'(x)$ ou y'	Derivada de uma função
$\text{sen } x$	Função seno
$\text{cos } x$	Função cosseno
$\text{tg } x$	Função tangente
$\text{cotg } x$	Função cotangente
$\text{sec } x$	Função secante
$\text{cossec } x$	Função cossecante
$\log_b a$	Função logarítmica
$\ln a$	Logaritmo natural
e^x	Função exponencial
$\text{arc tg } x$	Função arco tangente
$\int_a^b f(x) dx$	Integral definida
$\int f(x) dx$	Integral indefinida

3.1 QUESTÕES E ERROS

Exponho aqui as questões dos questionários aplicados, onde houve a ocorrência de algum tipo de erro. Será apresentada a questão com sua respectiva resolução apresentada pelo pesquisador, e seguido de cada questão virão as resoluções dos alunos, junto com a identificação

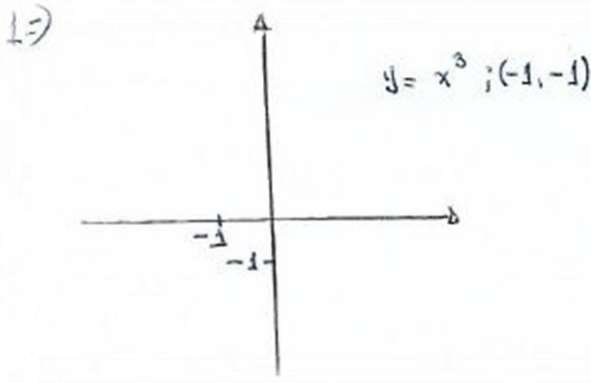
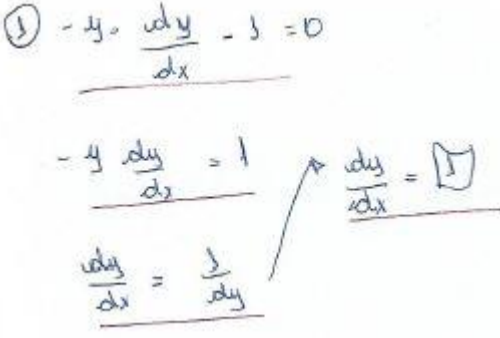
quanto a categoria do erro, ao nível de ensino que tal erro pertence e o código do responsável pela resolução.

Primeiro instrumento

1. Encontre a equação da reta tangente a curva $y = x^3$, no ponto de coordenadas $(-1, -1)$.

Resolução: $m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $m = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ $m = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1}$ $m = 3$ A equação da reta tangente é dada por: $(y - y_0) = m(x - x_0)$ $y - (-1) = 3(x - (-1))$ $y + 1 = 3(x + 1)$ $r: y = 3x + 2$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 4 Número de respostas em branco: 13 Número de equivocadas: 2
---	--

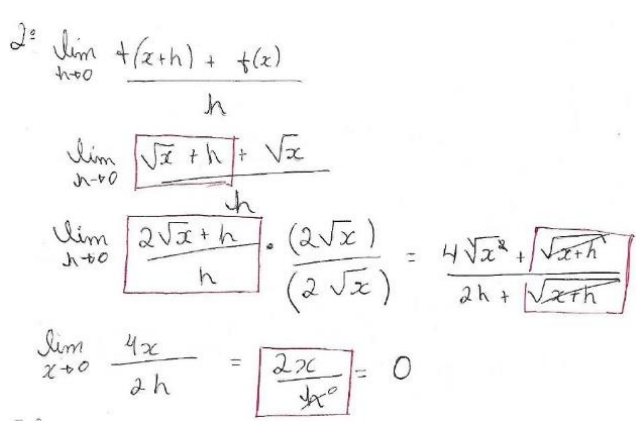
Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 1: I1Q1E1	• Não resolveu a questão, • Não esboçou a curva e sua reta tangente; • Não marcou o ponto de coordenadas $(-1, -1)$. O aluno demonstrou não saber calcular a equação da reta tangente a uma curva dada. Erro (A4), nível de ensino (B3).
 Figura 2: I1Q1E2	• Desconhece a relação entre derivada e coeficiente angular da reta tangente. • Desconhece a técnica de derivação de polinômios. • Apresentou uma equação que não tem nenhuma relação com a resolução do problema. • Desconhece a resolução de equações literais e cálculo algébrico (trocas de sinais, introdução de termos desconhecidos no meio do cálculo). Esboçou uma resolução incorreta, provavelmente por não saber encontrar a equação da reta tangente a uma curva dada. Erro (A4), nível de ensino (B3).

2. Se $f(x) = \sqrt{x}$, determine a derivada de f por meio da definição utilizando limite:

Resolução: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 4 Número de respostas em branco: 14 Número de equivocadas: 1
---	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 3: I1Q2E3	- Erros na definição de derivada por limite (soma ao invés de subtração); - Erro na expressão de $f(x+h)$: colocou h fora da raiz; - Erro na utilização do conjugado; - Erros na multiplicação de termos algébricos: produto de h por $2\sqrt{x}$ no numerador e no denominador; - Dividiu por zero, encontrando zero como resposta. O aluno mostrou que tem muitas dificuldades em calcular a derivada de uma função pela definição de limite. Assim como ficou claro não ter o domínio dos conhecimentos prévios que necessitaria para resolver de forma correta a questão. Erro (A1 e A5), nível de ensino (B3).

(Obs.: as questões de 3 a 5 deveram ser resolvidos a partir das regras de derivação.)

3. Calcule a derivada de cada polinômio abaixo

a) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1;$

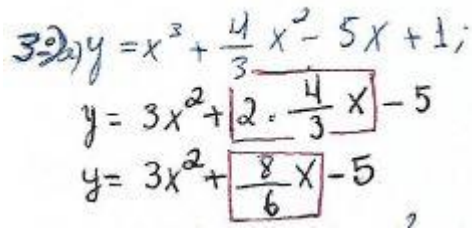
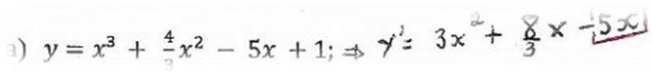
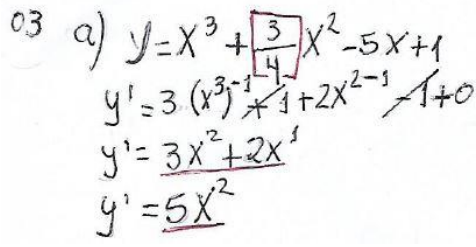
b) $y = 3x^{-4} + 8x^{-1} + 5;$

c) $y = \frac{1}{9y^5} - 4y^2 + \frac{2}{y^3};$

d) $y = 7x^{-6} - 5\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2};$

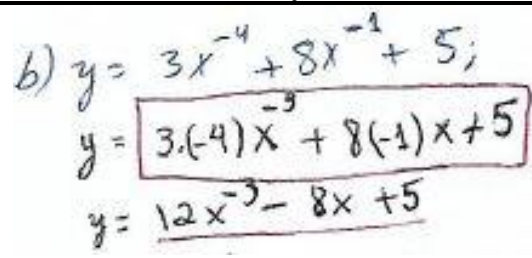
Resolução: a) $y' = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 7 Número de respostas em branco: 9 Número de equivocadas: 3
---	---

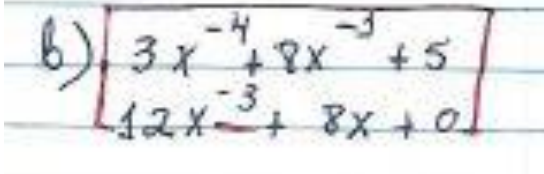
Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 4: I1Q3.A.E4	Erro na multiplicação de termos aritméticos: o produto de 2 por $\frac{4}{3}$ onde multiplicou o numerador e o denominador por 2. Esboçou uma resolução contendo falhas, devido a não compreensão do produto de um número natural por uma fração. Erro (A3), nível de ensino (B1).
 Figura 5: I1Q3.A.E5	Erro não derivou o termo cujo a variável tinha expoente igual a 1. Provavelmente por não ter compreendido a definição de derivada. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 6: I1Q3.A.E6	- Erro reescreveu a questão trocando o numerador da fração pelo denominador. - Erro exclusão de termos pertencentes a resolução e introdução de termos desconhecidos. - Desconhece as propriedades do cálculo algébrico (soma de termos não semelhantes). O aluno demonstrou saber calcular a derivada de um polinômio, e dificuldades no cálculo algébrico. Erro (A3), nível de ensino (B1).

Resolução:	Número de alunos que responderam ao item: 19
b) $y' = -12x^{-5} - 8x^{-2}$	Número de acertos: 8
	Número de respostas em branco: 9
	Número de equivocadas: 2

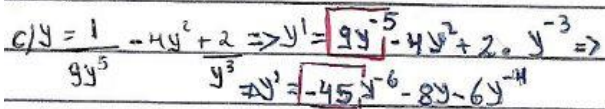
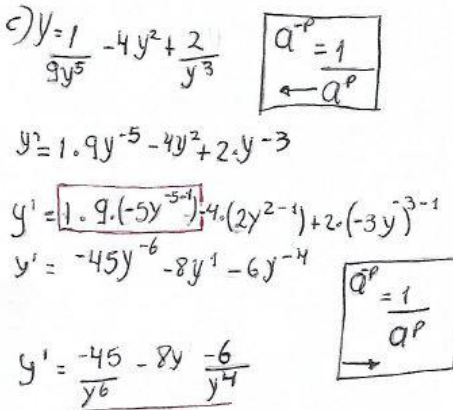
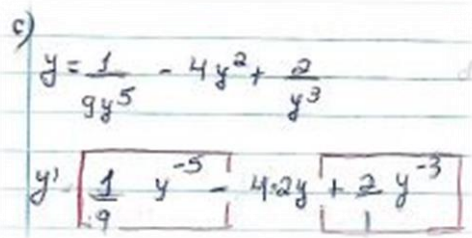
Erros cometidos:

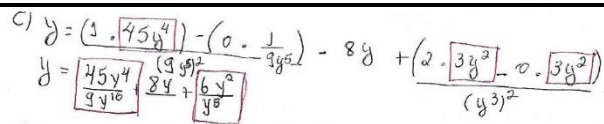
Resolução	Hipótese
 Figura 7: I1Q3.B.E7	- Erro no momento em que derivou adicionou 1 grau ao expoente, onde deveria retirar 1 grau. - Erro: não derivou a constante 5. - Erro: não considerou as regras de sinais no produto de 3 por -4. O aluno demonstra não ter o domínio da regra de derivação de polinômio. Erro (A6), nível de ensino (B3).

 Figura 8: I1Q3.B.E8	• Erro no momento em que derivou adicionou 1 grau ao expoente, onde deveria retirar 1 grau. • Erro no emprego dos sinais. O aluno mostrou não ter o domínio da regra de derivação de polinômio. Além de apresentar dificuldades em derivar termos com expoentes negativos. Erro (A6), nível de ensino (B3).
---	---

Resolução: c) $y' = -\frac{5}{9}y^{-6} - 8y - 6y^{-4}$ ou $y' = -\frac{5}{9y^6} - 8y - \frac{6}{y^4}$	Número de alunos que responderam ao item: 20 Número de acertos: 7 Número de respostas em branco: 8 Número de equivocadas: 4
---	---

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 9: I1Q3.C.E9	• Utilizou o coeficiente errado na reescrita do termo $\frac{1}{9y^5}$ • Erro não utilizou a ideia de inverso de um número de maneira correta. O aluno mostra ter dificuldades no cálculo de derivadas quando a variável está no denominador. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B2 e B3).
 Figura 10: I1Q3.C.E10	• Erro no emprego da regra de derivação de polinômio. • Erro utilizou a ideia de inverso de um número de forma incorreta. Provavelmente pelo que Cury (2007), chama de falsas generalizações, quando aplicou o inverso ao levar o termo do denominador para o numerador somente a variável y ficou com expoente negativo, conservando a constante. • Confunde coeficiente e variável. O aluno demonstra não ter o domínio do conteúdo que envolve a regra de derivação de polinômios, assim como apresenta dificuldades em aplicar a ideia de inverso de um número. Erro (A2, A3 e A6), nível de ensino (B2 e B3).
 Figura 11: I1Q3.C.E11	• Erro não aplicou a regra de derivação de polinômios, de forma correta. • Erro ao levar a variável do denominador para o numerador com o expoente negativo, não derivou esses termos. O aluno mostrou não ter o domínio do conteúdo de derivadas. Além de apresentar dificuldades no emprego da regra de derivação de polinômios. Erro (A6), nível de ensino (B3).

 Figura 12: I1Q3.C.E12	• Erro: não aplicou a regra de derivação de polinômios, de forma correta. • Erro: introduziu termos desconhecidos na resolução. • Erro aplicou a ideia de inverso de um número de maneira incorreta. O aluno mostra não ter domínio do conteúdo de derivada, no que diz respeito a regra de derivação de polinômios, nem dos conhecimentos prévios necessários para a resolução da questão. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B2 e B3).
---	---

Resolução: d) $y' = -42x^{-7} - \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ou $y' = -\frac{42}{x^7} - \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 7 Número de respostas em branco: 9 Número de equivocadas: 3
---	---

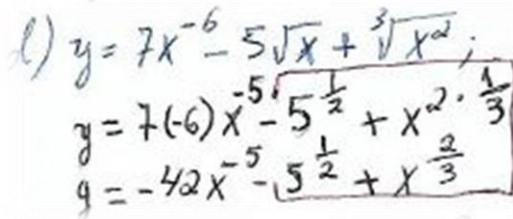


Figura 13: I1Q3.D.E13

- Erro não aplicou a regra de derivação de polinômios de maneira correta.
- Erro quando aplicou a propriedade que garante que o radicando poder ser retirado de dentro do radical e ser expresso com o expoente fracionário, entendeu não ser necessário derivar os termos.
- Erro exclusão da variável x de um dos termos da resolução de forma incorreta.
- Erro no momento em que derivou em vez de retirar 1 grau do expoente, adicionou 1 grau.

O aluno demonstra ter dificuldades em derivar termos contendo radicais, assim como fica evidente que não tem o domínio da regra de derivação de polinômios. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B3).

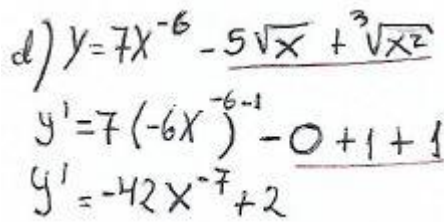


Figura 14: I1Q3.D.E14

- Erro demonstra não ter o domínio do conteúdo de derivadas.
- Erro no momento em que derivou os radicais. Mostrar ter dificuldades em aplicar a regra de derivação de polinômios, em termos com radicais.

O aluno mostra ter o conhecimento da regra de derivação de polinômios, exceto em termos que contenham radicais. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1).

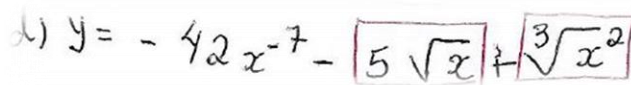


Figura 15: I1Q3.D.E15

- Erro não derivou os termos que continham radicais. Provavelmente por não saber da propriedade que possibilita que o radicando saia do radical e seja expresso com expoente fracionário.
- Erro não tem o domínio da regra de derivação de polinômios.

O aluno tem dificuldades em derivar termos que contem radical. Bem provável que seja por

	não ter compreendido o conteúdo de derivadas. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
--	---

4. Derive cada uma das funções abaixo:

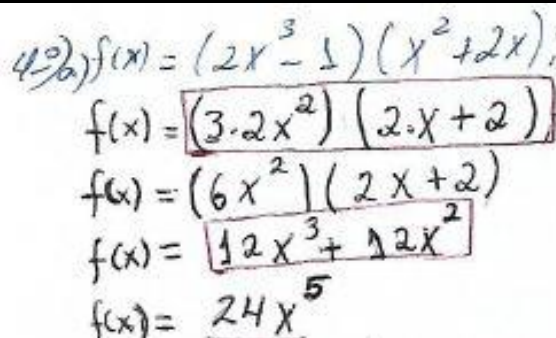
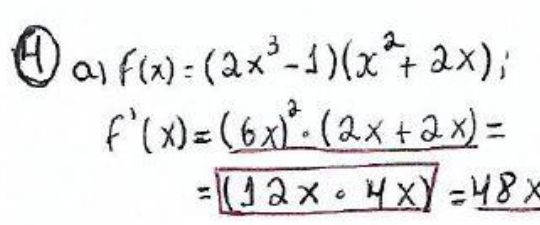
a) $f(x) = (2x^3 - 1)(x^2 + 2x)$;

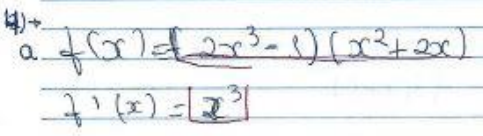
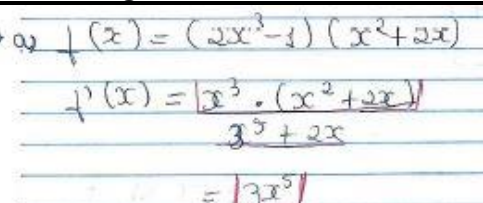
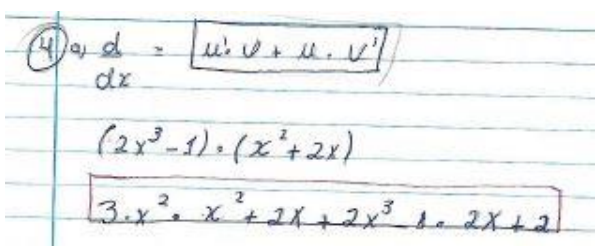
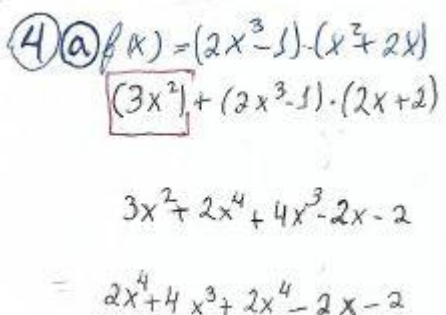
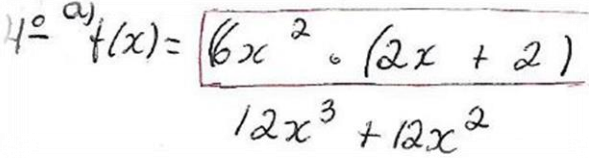
b) $f(x) = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$;

c) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(3x^3 + 27)$;

Resolução: a) $f'(x) = (2x^2 - 1)(2x + 2) + (6x^2)(x^2 + 2x)$ $f'(x) = 4x^4 + 4x^3 - 2x - 2 + 6x^4 + 12x^3$ $f'(x) = 10x^4 + 16x^3 - 2x - 2$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 8 Número de respostas em branco: 4 Número de equivocadas: 7
---	--

Erros cometidos:

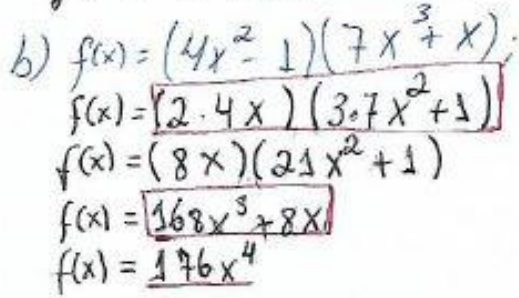
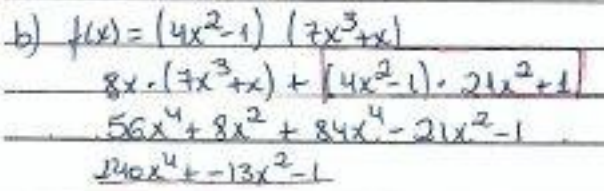
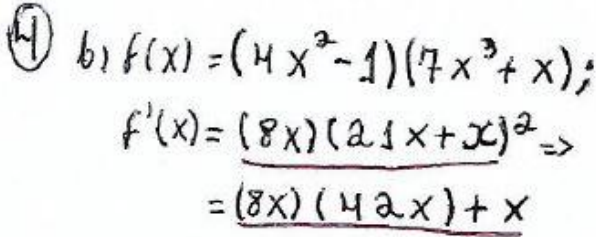
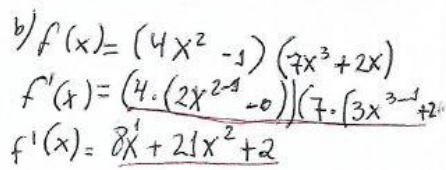
Resolução	Hipótese
 Figura 16: I1Q4.A.E16	• Erro não aplicou a regra de derivação adequada. • Erro realizou algo parecido com a regra de derivação de polinômios, no lugar da regra de derivação do produto. • Erro adicionou termos algébricos diferentes. O aluno mostrou ter dificuldade em identificar qual regra de derivação deveria utilizar, além de ter ficado evidente que tem dificuldades no cálculo algébrico. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
 Figura 17: I1Q4.A.E17	• Erro não aplicou a regra de derivação adequada. • Erro realizou algo parecido com a regra de derivação de polinômio, no lugar da regra de derivação do produto. • Erro no momento da resolução desconsiderou ser necessário derivar a variável que tinha expoente de grau 1. • Erro realizou um produto entre termos algébricos de forma incorreta, dando a ideia de não ter domínio da noção de potenciação. O aluno mostrou ter dificuldade em identificar qual regra de derivação deveria utilizar, além de ter ficado evidente que tem dificuldades no cálculo algébrico. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
	• Erro não identificou a regra de derivação adequada a ser empregada. • Erro derivou somente uma única derivada através de algo parecido com a regra de derivação de polinômios.

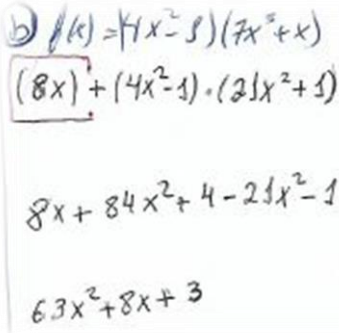
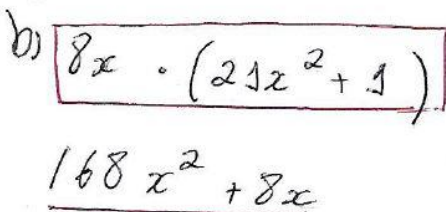
 Figura 18: I1Q4.A.E18	É evidente que o aluno não compreendeu o conteúdo de derivadas. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 19: I1Q4.A.E19	• Erro não aplicou a regra de derivação adequada. • Erro realizou algo parecido com a regra de derivação de polinômios, no lugar da regra de derivação do produto. • Erro adicionou termos algébricos diferentes. O aluno mostrou ter dificuldade em identificar qual regra de derivação deveria utilizar, além de ter ficado evidente que tem dificuldades no cálculo algébrico. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B).
 Figura 20: I1Q4.A.E20	• Erro aplicou de forma correta a regra de derivação do produto. • Erro retirou os parênteses de forma incorreta, o que gerou uma resolução incorreta. O aluno mostrou ter compreendido como empregar a regra de derivação do produto de forma adequada, só que ficou evidente não ter a ideia da propriedade da distributividade que deveria ter sido utilizada para eliminar os parênteses na resolução. Erro (A3), nível de ensino (B1 e B2).
 Figura 21: I1Q4.A.E21	• Erro aplicou a regra de derivação do produto de forma incorreta. • Erro a regra de derivação do produto é expressa como sendo a $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Só que no momento em que derivou não fez o produto da $f'(x) \cdot g(x)$, e sim somente derivou a $f'(x)$. O aluno mostrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do produto. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 22: I1Q4.A.E22	• Erro não identificou qual regra de derivação seria a adequada para aplica então utilizou algo parecido com a regra de derivação de polinômio. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo de derivadas voltado para a regra de derivação do produto. Erro (A6), nível de ensino (B3).

Resolução: b) $f'(x) = (8x)(7x^3 + x) + (4x^2 + -1)(21x^2 + 1)$ $f'(x) = 56x^4 + 8x^2 + 84x^4 + 4x^2 - 21x^2 - 1$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 7 Número de respostas em branco: 6
--	---

$f'(x) = 140x^4 - 9x^2 - 1$	Número de equivocadas: 6
-----------------------------	--------------------------

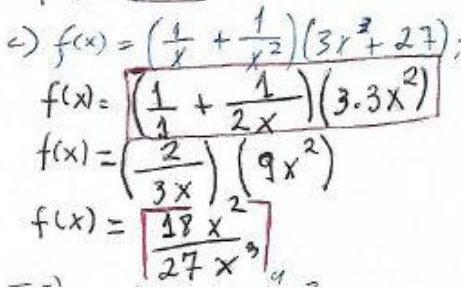
Erros cometidos:

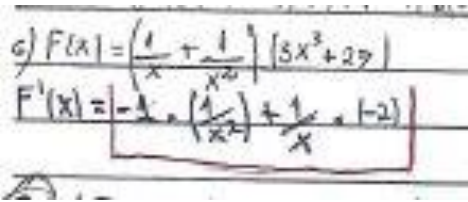
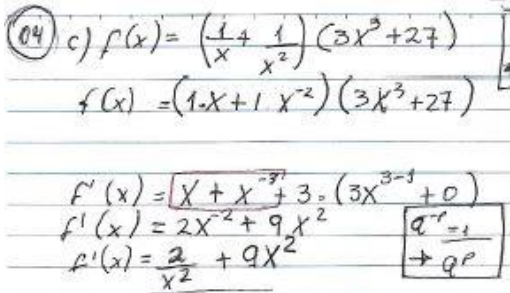
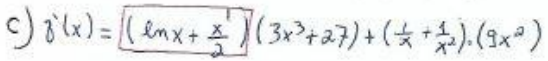
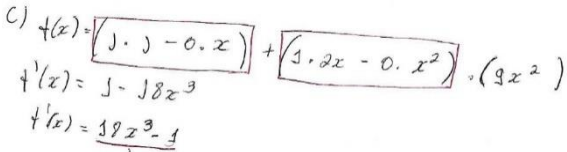
Resolução	Hipótese
 Figura 23: I1Q4.B.E23	- Erro não identificou qual a regra de derivação adequada para empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. - Erro no momento em que adicionou termos algébricos diferentes $168x^3 + 8x = 176x^4$. O aluno não compreendeu o conteúdo que envolve a regra de derivação do produto, assim como demonstra ter dualidades no cálculo algébrico. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
 Figura 24: I1Q4.B.E24	Erro aplicou de forma correta a regra de derivação do produto só que ao eliminar os parênteses no momento em que derivou a $g(x)$, sem utilizar a propriedade distributiva. O aluno mostrou ter compreendido o conteúdo só que ficou evidente a dificuldade na eliminação dos parênteses. Erro (A3), nível de ensino (B1).
 Figura 25: I1Q4.B.E25	- Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. - Erro realizou uma potenciação de forma incorreta, onde o resultado de $(21x + x)^2 = (42x) + x$. Provavelmente por ter cometido uma falsa generalização no momento em que concluiu que $(21x)^2 = (21x) \cdot 2$. Além de ter somente conservado a variável que também estava dentro do parêntese. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo que envolve a regra de derivação do produto, assim como ficou evidente que tem dificuldades em operacionalizar potenciações, além de não ter a noção de que quadrado e dobro são noções distintas. Erro (A2, A3 e A6), nível de ensino (B1, B2 e B3).
 Figura 26: I1Q4.B.E26	- Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. - Erro no momento em que eliminou os parênteses de forma incorreta, sem utilizar a propriedade da distributividade. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de

	derivação do produto, além de não ter a noção de como eliminar de forma correta os parênteses de uma expressão. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
 Figura 27: I1Q4.B.E27	Erro aplicou a regra de derivação do produto de forma incorreta. Pois a regra de derivação do produto é dado por $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. E no momento em que a empregou não realizou o produto entre a $f'(x) \cdot g(x)$. Derivando somente a $f(x)$. O aluno não compreendeu o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do produto. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 28: I1Q4.B.E28	Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do produto. Erro (A6), nível de ensino (B3).

Resolução: $c) f'(x) = (-x^{-2} - 2x^{-3})(3x^3 + 27) + (x^{-1} + x^{-2})(9x^2)$ $f'(x) = -3x - 27x^{-2} - 6 - 54x^{-3} + 9x + 9$ $f'(x) = 6x - \frac{27}{x^2} - \frac{54}{x^3} + 3$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 4 Número de respostas em branco: 10 Número de equivocadas: 5
---	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 29: I1Q4.C.E29	- Erro: não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. - Erro: no momento em que foi derivar não aplicou a ideia de inverso de um número que possibilita levar a variável do numerador para o denominador com mudando o sinal do expoente e sendo possível derivar. - Erro no momento em que concluiu que o resultado do produto entre $\left(\frac{2}{3x}\right)(9x^2) = \frac{18x^2}{27x^3}$ ao multiplicar o $9x^2$ tanto no numerador quanto no denominador. O aluno mostra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do produto, assim como demonstra ter dificuldade em derivar termos onde a variável está no denominador da

	fração, provavelmente por não saber empregar a ideia de inverso de um número. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B2 e B3).
 Figura 30: I1Q4.C.E30	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar. • Erro não foi possível interpretar a resolução apresentada, assim tornando impossível identificar as dificuldades que geraram tal erro. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo de derivadas, que envolve a regra de derivação do produto. Erro (A6 e A9), nível de ensino (B3).
 Figura 31: I1Q4.C.E31	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria ser empregada, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno mostra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do produto. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 32: I1Q4.C.E32	• Erro não aplicou a regra de derivação do produto de forma adequada pois provavelmente cometeu uma falsa generalização, em concluir que a derivada de $\frac{1}{x}$ é igual a integral de $\frac{1}{x}$, fato que ficou evidente quando derivou $\frac{1}{x} = \ln x$. O aluno demonstrar até saber a definição da regra de derivação do produto, só que cometeu o equívoco por conta de uma falsa generalização. Erro (A2), nível de ensino (B3).
 Figura 33: I1Q4.C.E33	• Erro aplicou a regra de derivação do produto de forma incorreta. • Erro não derivou os termos em que a variável aparecia no denominador, bem provável por não saber a ideia de inverso de um número. O aluno não compreendo o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do produto, assim com apresentou dificuldades em operacionalizar termos onde a variável estivesse no denominador. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B2 e B3).

5. Em cada parte, determine $f'(x)$.

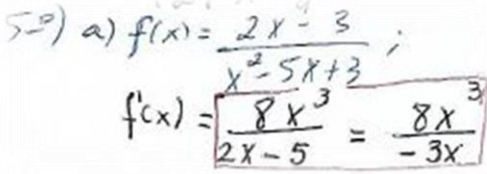
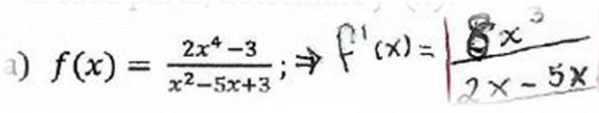
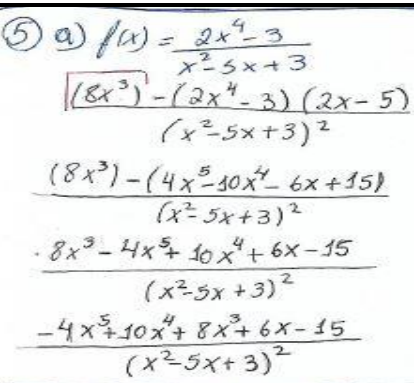
a) $f(x) = \frac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$;

b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$;

c) $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-5}$;

Resolução: $a) f'(x) = \frac{(8x^3)(x^2 - 5x + 3) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^5 - 5x + 3)^2}$ $f'(x) = \frac{8x^5 - 40x^4 + 24x^3 - 4x^5 + 10x^4 + 6x - 15}{(x^5 - 5x + 3)(x^5 - 5x + 3)}$ $f'(x) = \frac{4x^5 - 30x^4 + 24x^3 + 6x - 15}{x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 30x + 9}$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 12 Número de equivocadas: 4
---	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 34: I1Q5.A.E34	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro no momento em que efetuou a subtração $2x - 5 = -3x$, onde os termos são algebricamente diferentes. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente, assim como apresenta ter dificuldades no cálculo algébrico. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
 Figura 35: I1Q5.A.E35	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria ser empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro não derivou a variável que estava elevada ao expoente de grau 1. O aluno mostrou que não compreendeu o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 36: I1Q5.A.E36	• Erro aplicou a regra de derivação do quociente de forma incorreta. • Erro a regra de derivação do quociente é dada por $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$, e no momento em que derivou não efetuou o produto entre $f'(x) \cdot g(x)$, somente derivou a $f(x)$. O aluno demonstra ter compreendido parcialmente o emprego da regra de derivação do quociente. Erro (A6), nível de ensino (B3).

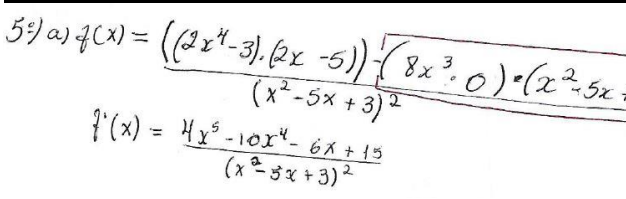
 5.º) a) $f(x) = \frac{(2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}$ $f'(x) = \frac{4x^5 - 10x^4 - 6x + 15}{(x^2 - 5x + 3)^2}$	• Erro aplicou a regra de derivação do quociente de forma correta, só que no lugar de $(8x^3 - 0)$ substituiu de forma incorreta por $(8x^3 \cdot 0)$ o que resultou no erro da questão. O aluno demonstra ter compreendido parcialmente o conteúdo de derivadas. Erro (A6), nível de ensino (B3).
--	---

Figura 37: I1Q5.A.E37

Resolução: $b) f'(x) = \frac{0(\sqrt{x} + 2) - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{x + 4\sqrt{x} + 4}$ $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x + 4\sqrt{x}}$ $f'(x) = -\frac{3}{2x\sqrt{x} + 8x + 8\sqrt{x}}$	Número de alunos que responderam ao item: 20 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 11 Número de equivocadas: 5
--	--

Erros cometidos:

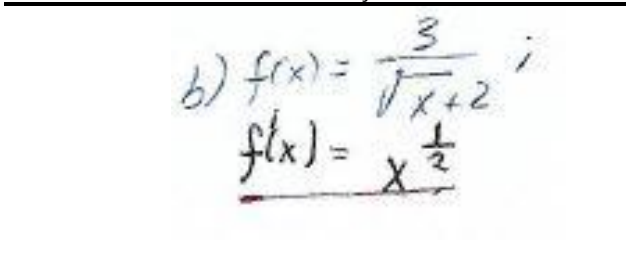
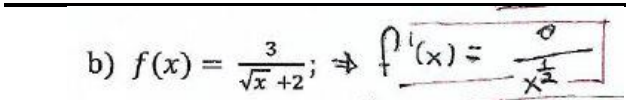
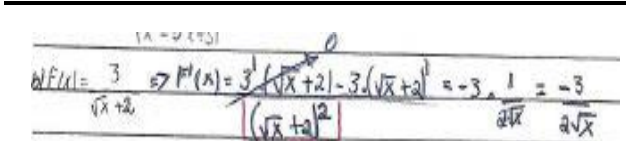
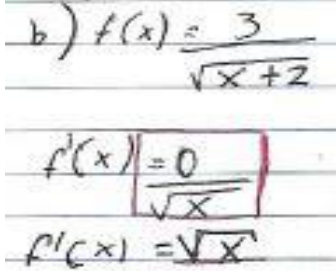
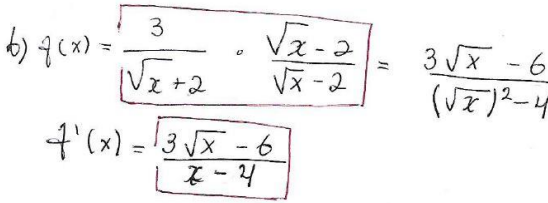
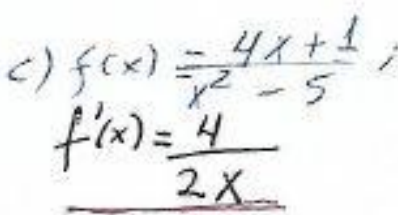
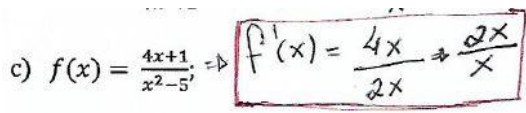
Resolução	Hipótese
 b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$; $f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$	• Apresentou uma resolução com uma série de erros. • Erro não empregou a regra de derivação adequada, aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios no lugar da regra do quociente. • Erro quando derivou o denominador ao retirar o radicando do radical entendeu não ser necessário deriva-lo. Fica evidente que o aluno não compreendeu o conteúdo de derivadas. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$; $\Rightarrow f'(x) = \frac{0}{x^{\frac{1}{2}}}$	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar. • Erro apresentou uma resolução onde apenas aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios no numerador ao derivar a constante, e no denominador somente retirou o radicando do radical, e não o derivou por entender não ser necessário. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$; $\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(\sqrt{x} + 2)^2} = -3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$	• Erro empregou a regra de derivação do quociente de forma correta, só que no momento em que deveria ter conservado o denominador $(\sqrt{x} + 2)^2$, o excluiu de forma incorreta. O aluno mostrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente. Erro (A6), nível de ensino (B3).

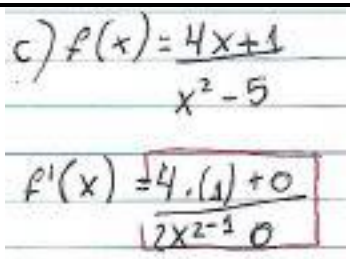
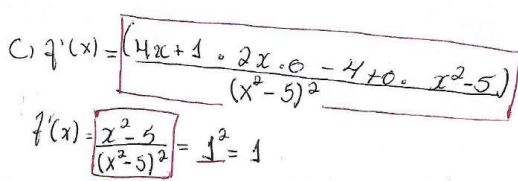
Figura 40: I1Q5.B.E40

 Figura 41: I1Q5.B.E41	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, aplicando somente algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro não derivou o radical do denominador. • Erro no final da resolução apresentada efetuou a divisão $\frac{0}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente, além de apresentar dificuldades voltadas para a ideia de dividir zero. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
 Figura 42: I1Q5.B.E42	• Erro não empregou nenhuma regra de derivação, somente aplicou algo parecido com o conjugado, resultando em uma resposta incorreta. Fica evidente que o aluno não compreendeu o conteúdo de derivadas. Erro (A6), nível de ensino (B3).

Resolução: $c) f'(x) = \frac{4(x^2 - 5) - (4x + 1)(2x)}{(x^2 - 5)^2}$ $f'(x) = \frac{4x^2 - 20 - 8x^2 - 2x}{x^4 - 10x^2 + 25}$ $f'(x) = \frac{-4x^2 - 2x - 20}{x^4 - 10x^2 + 25}$	Número de alunos que responderam ao item: 19 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 12 Número de equivocadas: 4
--	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 43: I1Q5.C.E43	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 44: I1Q5.C.E44	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro no final da resolução efetuou a divisão $\frac{4x}{2x} = \frac{2x}{x}$ de forma incorreta. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente, além de apresentar dificuldades no cálculo algébrico. Erro (A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).

 Figura 45: I1Q5.C.E45	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo de derivadas que envolve a regra de derivação do quociente. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 46: I1Q5.C.E46	• Erro aplicou algo parecido com a regra de derivação do quociente, só que no momento em que derivou os termos eliminou os parênteses sem utilizar a propriedade da distributividade. • Erro no momento em que efetuou a divisão $\frac{x^2-5}{(x^2-5)^2} = 1^2 = 1$, de forma incorreta. O aluno demonstrou ter compreendido parcialmente a regra de derivação do quociente, só que apresenta dificuldades em relação a eliminação de parênteses e no cálculo algébrico. Erro (A1, A3 e A6), nível de ensino (B1, B2 e B3).

Segundo instrumento

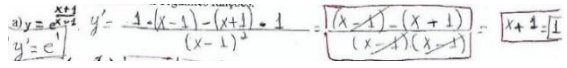
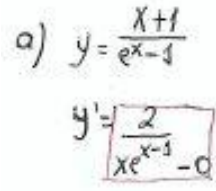
1. Determinar a derivada das seguintes funções:

- $y = e^{\frac{x+1}{x-1}};$
- $y = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right);$
- $y = \log_2(3x^2 + 7x - 1);$
- $y = e^{x \ln x};$
- $y = \sin(x^2);$
- $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right);$
- $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x};$
- $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$
- $y = \sec(x^2 + 3x + 7);$
- $y = \operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$

Resolução: $a) y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$ $y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{(1(x-1) - (x+1)1)}{(x-1)^2} \right)$ $y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x-1-x-1}{x^2-2x+1} \right)$ $y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2-2x+1} \right)$	Número de alunos que responderam ao item: 15 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 10 Número de equivocadas: 2
--	--

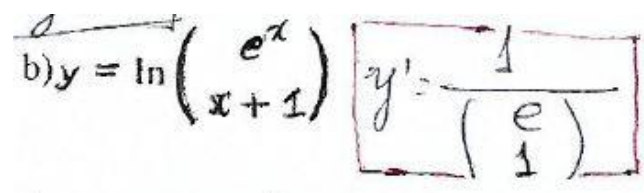
--	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 47: I2Q1.A.E47	• Erro não aplicou a regra da cadeia de forma correta. • Erro no momento em que fatorou o termo do denominador realizou cancelamentos de forma incorreta onde concluiu que $\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x-1)} = x+1 = 1$. • Erro excluiu a função exponencial durante a resolução. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia, além de apresentar dificuldades no cálculo algébrico. Erro (A1, A3 e A6), nível de ensino (B1 e B3).
 Figura 48: I2Q1.A.E48	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios, no numerador onde ignorou a constante e derivou somente a variável concluindo que $(x+1)' = 2$. • Erro não foi possível interpreta a linha de raciocínio utilizada na derivação do denominador. Fica evidente que o aluno não compreendeu o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).

Resolução: $b) y' = \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \cdot \left[\frac{(e^x)'(x+1) - (e^x)(x+1)'}{(x+1)^2} \right]$ $y' = \frac{1}{\frac{e^x}{x+1}} \cdot \left[\frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} \right]$	Número de alunos que responderam ao item: 15 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 10 Número de equivocadas: 2
--	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 49: I2Q1.B.E49	• Erro não aplicou a regra da cadeia da maneira correta. • Erro derivou a função $\ln x$ de forma incorreta quando concluiu que $\ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{e}{1}}$. • Erro excluiu a variável x da resolução de forma incorreta. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
	• Erro aplicou a regra da cadeia corretamente, só que no final da

$$b) y = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{e^x}{x+1}} \left(\frac{e^x \cdot (x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\frac{e^x}{x+1}} \cdot \left(\frac{x+1}{(x+1)^2} \right)$$

Figura 50: I2Q1.B.E50

resolução provavelmente por não ter a ideia de que não é correto adicionar termos que se encontram em unidades diferentes concluiu de forma incorreta que $\left(\frac{e^x \cdot (x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2}\right) = \left(\frac{x+1}{(x+1)^2}\right)$.

O aluno mostrou ter compreendido a regra da cadeia, só que apresenta dificuldades em operar com termos em unidades diferentes. Erro (A1 e A3), nível de ensino (B1 e B2).

Resolução:

$$c) y' = \frac{1}{(3x^2 + 7x - 1)(\ln 2)} \cdot (3x^2 + 7x + 1)'$$

$$y' = \frac{6x + 7}{(3x^2 + 7x - 1)(\ln 2)}$$

Número de alunos que responderam ao item: 15

Número de acertos: 3

Número de respostas em branco: 10

Número de equivocadas: 2

Erros cometidos:

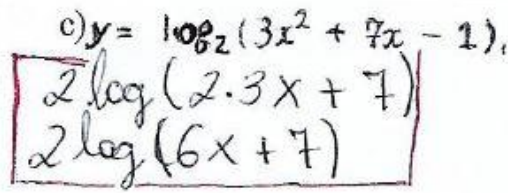
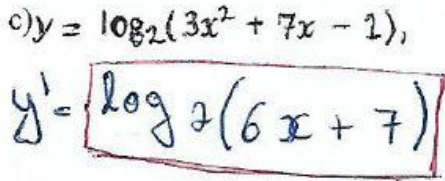
Resolução	Hipótese
 Handwritten student solution for I2Q1.C.E51. The student writes $c) y = \log_2(3x^2 + 7x - 1)$, then below it, boxed, are two lines: $2 \log(2.3x + 7)$ and $2 \log(6x + 7)$.	• Erro não aplicou a regra da cadeia da maneira adequada. • Erro não derivou a função logarítmica de forma correta concluiu que a derivada do $\log_2 = 2 \log$. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia, além de apresentar dificuldade em encontrar a derivada da função logarítmica. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Handwritten student solution for I2Q1.C.E52. The student writes $c) y = \log_2(3x^2 + 7x - 1)$, then below it, boxed, is $y' = \log 2(6x + 7)$.	• Erro não aplicou a regra da cadeia da maneira correta, aplicando algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro não derivou a função logarítmica. O aluno mostrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia, além de apresentar dificuldade em encontrar a derivada da função logarítmica. Erro (A6), nível de ensino (B3).

Figura 51: I2Q1.C.E51

Figura 52: I2Q1.C.E52

Resolução:

$$d) y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x + 1)'$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1)$$

$$y' = (e^{\ln x})^x \cdot (\ln x + 1)$$

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

$$y' = x^x \cdot \ln x + x^x$$

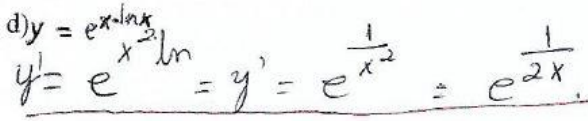
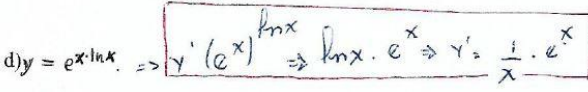
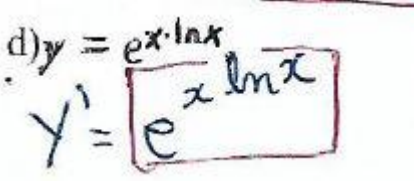
Número de alunos que responderam ao item: 15

Número de acertos: 3

Número de respostas em branco: 9

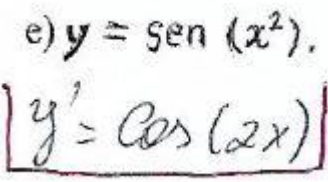
Número de equivocadas: 3

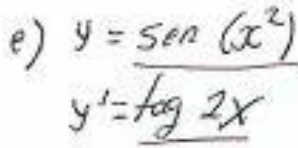
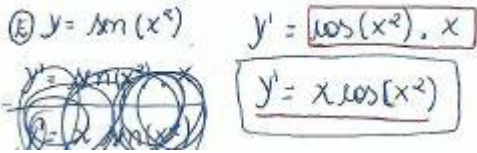
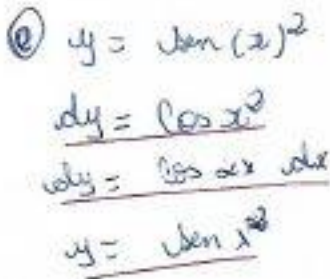
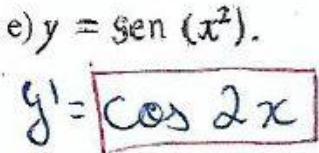
Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 53: I2Q1.D.E53	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada que deveria empregar. • Erro apresentou uma resolução onde não foi possível interpretar qual a linha de raciocínio utilizada. Fica evidente que o aluno não compreendeu o conteúdo de derivadas. Por isso não aplicou a regra da cadeia para derivar a função. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 54: I2Q1.D.E54	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 55: I2Q1.D.E55	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar. • Erro derivou a função de forma incorreta por cometer o que Cury (2007), chama de “falsas generalizações”, por entender a derivada de toda função exponencial é igual a própria função, quando concluiu que $(e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x}$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas. Além de apresentar dificuldades em encontrar a derivada de funções exponenciais. Erro (A6), nível de ensino (B3).

Resolução: e) $y' = \cos(x^2) \cdot (x^2)'$ $y' = \cos(x^2) \cdot 2x$	Número de alunos que responderam ao item: 15 Número de acertos: 4 Número de respostas em branco: 6 Número de equivocadas: 5
---	--

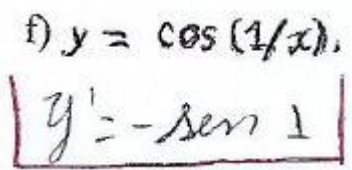
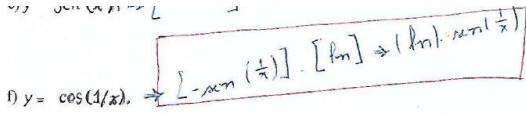
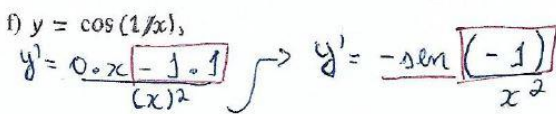
Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 56: I2Q1.E.E56	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Desconhece a Regra da Cadeia de derivadas. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).

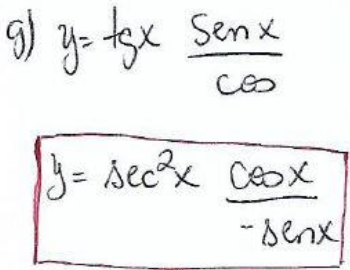
 e) $y = \text{sen}(x^2)$ $y' = \text{tag } 2x$ Figura 57: I2Q1.E.E57	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro provavelmente por não saber a derivada de $\text{sen} x$, pois concluiu que $(\text{sen} x)' = \text{tag} x$. O aluno mostrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia, além de não saber qual a derivada da função $\text{sen } x$. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 e) $y = \text{sen}(x^2)$ $y' = \cos(x^2) \cdot x$ $y' = \text{sen}(x^2)$ $y' = x \cos(x^2)$ Figura 58: I2Q1.E.E58	• Erro aplicou corretamente a regra da cadeia só que errou em concluir que a derivada de $x^2 = x$. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de derivada por completo, por apresenta dificuldade no momento de derivar. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 e) $y = \text{sen}(x)^2$ $dy = \cos x^2$ $y = \text{sen } x^2$ Figura 59: I2Q1.E.E59	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 e) $y = \text{sen}(x^2)$ $y' = \cos 2x$ Figura 60: I2Q1.E.E60	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).

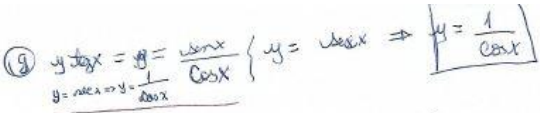
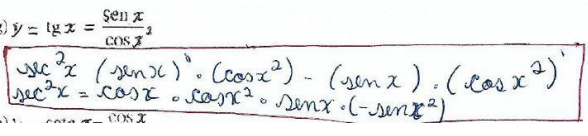
Resolução: $f) y' = -\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$ $y' = -\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{0 \cdot x - 1(1)}{x^2}\right)$ $y' = \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$	Número de alunos que responderam ao item: 15 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 9 Número de equivocadas: 3
--	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 61: I2Q1.F.E61	- Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. - Erro no momento em que derivou a função errou em concluir que a derivada de $\left(\frac{1}{x}\right)' = 1$. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 62: I2Q1.F.E62	Erro aplicou a regra da cadeia parcialmente correta, provavelmente por cometer o que Cury (2007), chama de “falsas generalizações”, onde considerou que a derivada de $\frac{1}{x}$ é igual a integral. Fato que ficou evidente ao concluir que a derivada de $\frac{1}{x} = \ln x$. O aluno mostrou ter compreendido a regra da cadeia, só que apresenta dificuldades em derivar algumas funções. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 63: I2Q1.F.E63	Erro não aplicou a regra da cadeia de forma correta. O aluno demonstrou não ter compreendido por completo o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
Resolução: $g) y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$ $y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $y' = \sec^2 x$	Número de alunos que responderam ao item: 15 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 9 Número de equivocadas: 3

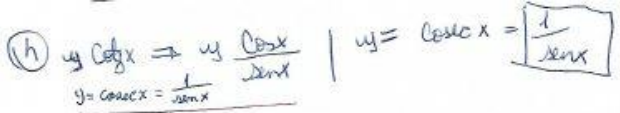
Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 64: I2Q1.G.E64	- Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar. - Erro somente apresentou a resposta sem apresentar nenhum cálculo. O aluno demonstrou não saber o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia, por não ter apresentado cálculos, somente a resposta. Erro (A6 e A10), nível de ensino (B3).

 Figura 65: I2Q1.G.E65	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar. • Erro não derivou somente fez algumas substituições trigonométricas. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 66: I2Q1.G.E66	• Erro não aplicou a regra da cadeia de forma correta. • Erro mostra saber qual a derivada da tgx, só que não apresentou nenhum cálculo, somente a resposta. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6 e A10), nível de ensino (B3).

Resolução: $h) y' = \frac{-senx \cdot senx - cosx \cdot cosx}{sen^2x}$ $y' = -\frac{(sen^2x + cos^2x)}{sen^2x}$ $y' = -\frac{1}{sen^2x}$ $y' = -cossec^2x$	Número de alunos que responderam ao item: 15 Número de acertos: 4 Número de respostas em branco: 10 Número de equivocadas: 1
---	--

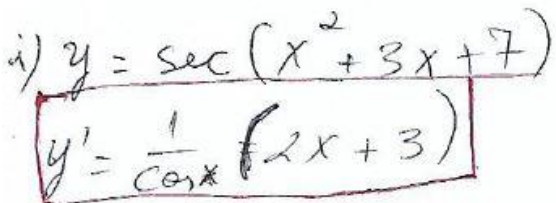
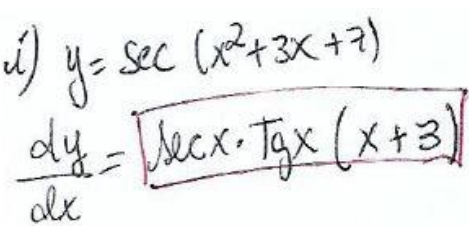
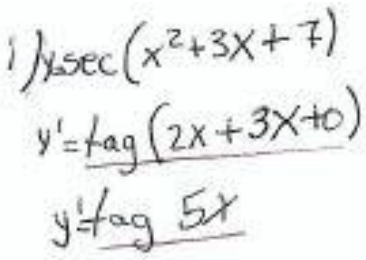
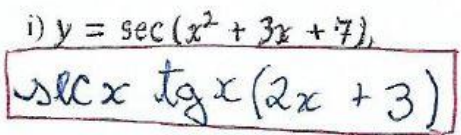
Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 67: I2Q1.H.E67	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada que deveria empregar. • Erro aparentemente mostra saber qual é a derivada da tgx, só que além de apresentar a resposta sem os cálculos errou no sinal da resposta. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6 e A10), nível de ensino (B3).

Resolução: $i) y' = tg(x^2 + 3x + 7) \cdot sec(x^2 + 3x + 7) \cdot (x^2 + 3x + 7)'$ $y' = tg(x^2 + 3x + 7) \cdot sec(x^2 + 3x + 7) \cdot (2x + 3)$	Número de alunos que responderam ao item: 15 Número de acertos: 4 Número de respostas em branco: 7 Número de equivocadas: 4
---	---

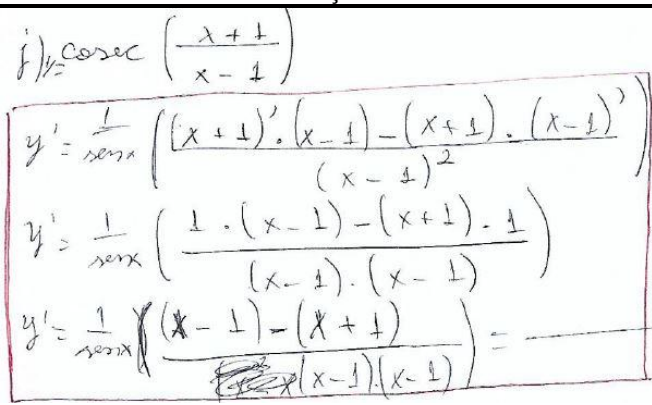
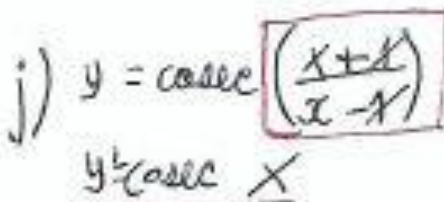
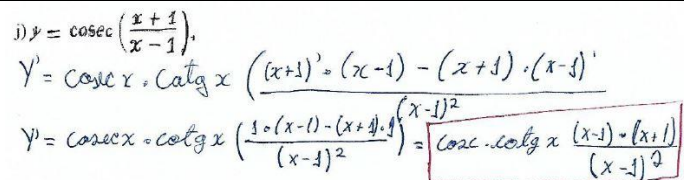
Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
	• Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro não derivou a função $secx$, somente aplicou uma substituição trigonométrica,

 Figura 68: I2Q1.E68	bem provável que não soubesse como encontrar a derivada dessa função. O aluno mostrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 69: I2Q1.E69	• Erro não aplicou a regra da cadeia de forma correta. • Erro no momento em que derivou a $\sec(x^2 + 3x + 7) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x(x + 3)$, resultando em uma resposta incorreta. • Erro derivou a função $(x^2 + 3x + 7) = x + 3$, de forma incorreta pois não desceu o 2 do expoente multiplicando. O aluno demonstrou ter compreendido parcialmente o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 70: I2Q1.E70	• Erro não identificou a regra de derivação adequada que deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. • Erro derivou a função de forma incorreta quando concluiu que $\sec x = \operatorname{tag} x$, assim como quando derivou $(x^2 + 3x + 7) = (2x + 3x + 0)$, onde desconsiderou a necessidade de derivar a variável de expoente de grau 1. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia, além de apresentar dificuldade em derivar termos com expoente de grau 1. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Figura 71: I2Q1.E71	• Erro aplicou a regra da cadeia de forma incorreta, então aplicou algo parecido com a regra de derivação de polinômios. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).

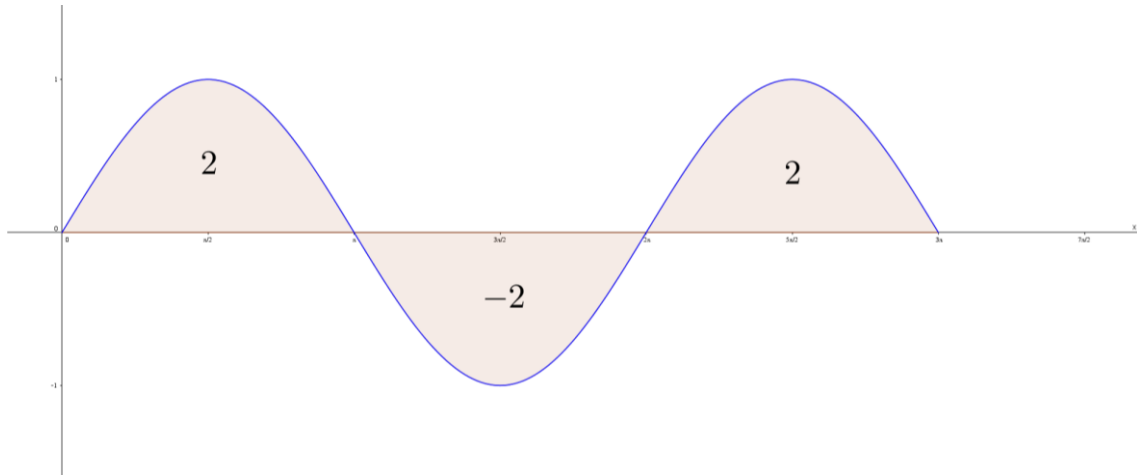
Resolução: $j) y' = -\cot g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)'$ $y' = -\cot g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}\right)$ $y' = -\cot g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$	Número de alunos que responderam ao item: 20 Número de acertos: 4 Número de respostas em branco: 8 Número de equivocadas: 3
---	---

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Handwritten student work for Figure 72. The student defines $f(x) = \text{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. They attempt to differentiate using the chain rule, but make several errors in the algebraic steps, including incorrect derivatives and simplifications.	- Erro não aplicou a regra da cadeia de forma correta, provavelmente por não saber qual a derivada da tgx. - Erro no momento de derivar a função $tgx = \frac{1}{\text{sen}x}$, apenas fez uma substituição por outra identidade trigonométrica. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de derivada que envolve a regra da cadeia, além de não saber encontrar a derivada da função $\text{cosec } x$. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Handwritten student work for Figure 73. The student writes $y = \text{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ and then incorrectly states $y' = \text{cosec } x$.	- Erro não identificou qual a regra de derivação adequada deveria empregar. - Erro realizou o cancelamento de termos de forma incorreta, quando concluiu que $\text{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \text{cosec } x$. Fica evidente que o alunão não compreendeu o conteúdo de derivas, assim como a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).
 Handwritten student work for Figure 74. The student defines $y = \text{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ and then uses the identity $y' = \text{cosec } x \cdot \cotg x$. They attempt to differentiate the inner function but make errors in the final simplification.	Erro aplicou a regra da cadeia de forma incorreta, o que resultou em uma resolução errada. O aluno demonstrou entender parcialmente o conteúdo de derivadas que envolve a regra da cadeia. Erro (A6), nível de ensino (B3).

Terceiro instrumento

1. Considere a função $f(x) = \text{sen } x$, com domínio $x \in [0, 3\pi]$. A figura abaixo mostra o gráfico de $f(x)$ com os valores das integrais calculadas sobre cada parte do intervalo.



Faça o que se pede:

- Calcular $\int_0^{3\pi} f(x) dx$.
- Calcular a área entre $f(x)$ e o eixo x no intervalo $[0, 3\pi]$.

Resolução:

$$a) \int_0^{3\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{3\pi} = \{-\cos 3\pi + \cos 0\} = -(-1) + 1 = 2$$

Número de alunos que responderam ao item: 20

Número de acertos: 3

Número de respostas em branco: 12

Número de equivocadas: 5

Erros cometidos:

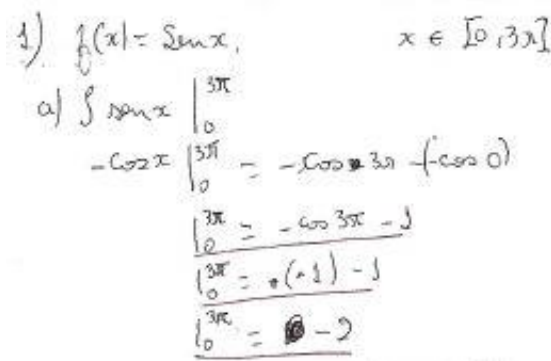
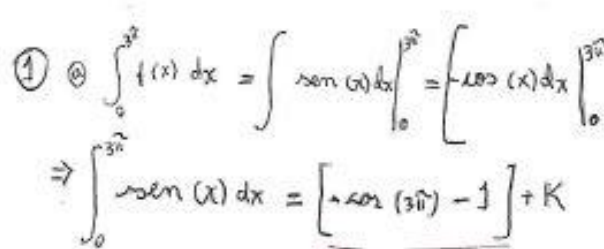
Resolução	Hipótese
 Figura 75: I3Q1.A.E75	Erro aplicou corretamente a regra de integração simples, só que não realizou da maneira certa o jogo de sinal quando concluiu que $-\cos 3\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = -2$. O aluno mostrou ter compreendido o conteúdo de integrais, embora ter errado no final da resolução ao realizar o jogo de sinal de forma incorreta. Erro (A7), nível de ensino (B1).
	Erro empregou corretamente a regra de integração simples, só que no momento de substituir o intervalo não apresentou o resultado para $-\cos(3\pi)$. O aluno demonstrou saber o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração simples, apesar de não ter conseguido concluir a resposta. Erro (A7), nível de ensino (B2 e B3).

Figura 76: I3Q1.A.E76

$$f(x) = \frac{3^{1+x}}{1+x} \Big|_0^{3\pi}$$

$$\frac{3\pi}{1+1} - \frac{0}{1+1}$$

$$f(x) = \frac{3^{1+x} (1+x)}{\pi} = \frac{0}{2}$$

$$f(x) = \frac{3^2 \pi^2}{2} \rightarrow \frac{\pi \cdot 3^2 \pi^2}{2}$$

$$\frac{x\pi^2 \cdot 9}{2} \quad \frac{9x \cdot \pi^2}{2}$$

- Erro não identificou qual a regra de integração adequada que deveria empregar.
- Erro apresentou uma resolução onde não foi possível interpretar a linha de raciocínio utilizada para chegar em tal resposta.

O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais definidas. Erro (A7, A8 e A9), nível de ensino (B3).

Figura 77: I3Q1.A.E77

$$f(x) = \frac{3^{1+x}}{1+x} \Big|_0^{3\pi}$$

$$\frac{3\pi}{1+1} - \frac{0}{1+1}$$

$$f(x) = \frac{(3^{1+x} \cdot \pi^{1+x})}{2} = \frac{0}{2}$$

$$f(x) = \frac{3^2 \cdot \pi^2}{2}$$

$$\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \pi^2}{2}$$

$$\frac{x\pi^2 \cdot 9}{2} \quad \frac{9x \cdot \pi^2}{2}$$

- Erro não identificou qual a regra de integração adequada que deveria empregar.
- Erro apresentou uma resolução onde não foi possível interpretar a linha de raciocínio utilizada para chegar em tal resposta.

O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais definidas. Erro (A7, A8 e A9), nível de ensino (B3).

Figura 78: I3Q1.A.E78

$$\int_0^{3\pi} \sin x \, dx = \left[\cos x \right]_0^{3\pi} = \cos 3\pi - \cos 0 = -1$$

- Erro aplicou a regra de integração corretamente, só que chegou em um resultado incorreto provavelmente por não saber o valor do $\cos 3\pi$ ou de $-\cos 0$, pois concluiu de forma incorreta que $\cos 3\pi - \cos 0 = -1$.

O aluno demonstrou ter o compreendido o conteúdo de integrais, apesar de apresentar ter dificuldades em saber o valor do cosseno de alguns ângulos. Erro (A7), nível de ensino (B2 e B3).

Figura 79: I3Q1.A.E79

$$\int_0^{3\pi} \sin x \, dx = \left[\cos x \right]_0^{3\pi} = \cos 3\pi - \cos 0 = -1$$

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{b) Área} &= \left| \int_0^{\pi} f(x) dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \right| + \left| \int_{2\pi}^{3\pi} f(x) dx \right| = \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

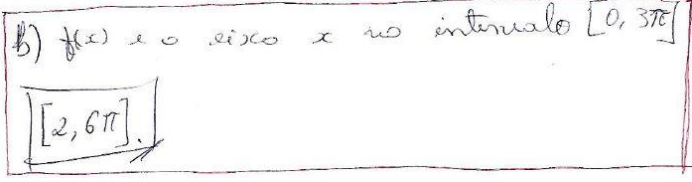
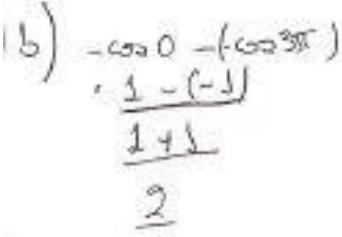
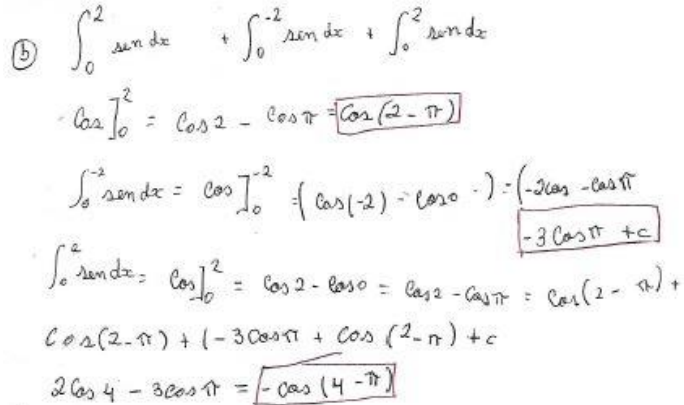
Número de alunos que responderam ao item: 20

Número de acertos: 3

Número de respostas em branco: 14

Número de equivocadas: 3

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 80: I3Q1.B.E80	Erro não conseguiu calcular a área compreendida pela função $f(x)$ e o eixo x no intervalo de $[0, 3\pi]$, mesmo os valores de cada intervalo já estarem calculados na figura. O aluno demonstrou não ter conseguido interpretar a questão ou não sabe realmente calcular há área de uma curva. Erro (A7 e A8), nível de ensino (B3).
 Figura 81: I3Q1.B.E81	Erro apresentou apenas a substituição dos intervalos de forma direta, provavelmente por não entender que a curva é periódica e que seria necessário calcular cada intervalo. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de cálculo de áreas de curvas através das integrais definidas. Erro (A7 e A8), nível de ensino (B3).
 Figura 82: I3Q1.B.E82	Erro apresentou uma resolução incorreta, ao tentar calcular as áreas de cada período, provavelmente por não ter interpretado a questão pois as áreas já eram dadas na própria figura. O aluno demonstra não ter compreendido o conteúdo de cálculo de áreas de curvas através de integrais definidas. Erro (A7 e A8), nível de ensino (B3).

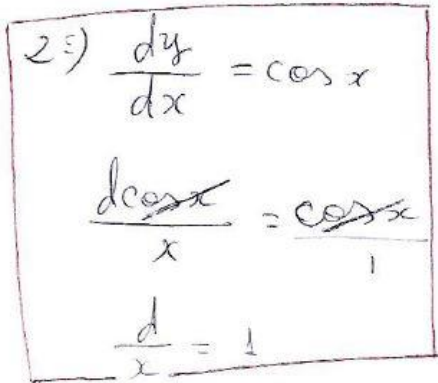
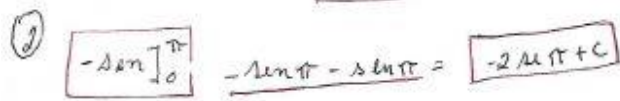
2. Seja y uma função real de variável real tal que a derivada de y é $\cos x$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

Determine a função y e calcule sua variação total no intervalo $x \in [0, \pi]$.

Resolução: $y = \sin x + C$ $\int_0^\pi \cos x \, dx = \sin x \Big _0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$	Número de alunos que responderam ao item: 20 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 15 Número de equivocadas: 2
---	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 2) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ $\frac{d\cos x}{x} = \frac{\cos x}{1}$ $\frac{d}{x} = 1$	- Erro não identificou qual regra de integração adequada deveria empregar. - Erro apresentou uma resolução onde não foi possível interpretar a resposta. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais. Erro (A7, A8 e A9), nível de ensino (B3).
 2) $-\text{sen} \Big _0^\pi$ $-\text{sen} \pi - \text{sen} 0 = -2 \text{sen} \pi + C$	- Erro no momento de integrar a função $\cos x$, cometeu o que Cury (2007), chama de “falsas generalizações” quando apresentou na resolução que a integral da função é igual a sua derivada ao concluir que $\int \cos x = -\text{sen} x$. - Erro não substituiu os intervalos de forma correta pois a integral variava de 0 a π, e só substituiu o π. O aluno demonstra ter compreendido parcialmente o conteúdo de integrais definidas, além de apresentar dificuldade em integrar a função $\cos x$. Erro (A7 e A8), nível de ensino (B3).

3. Resolva cada integral abaixo, identificando a técnica de integração utilizada.

a) $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$ Técnica: _____

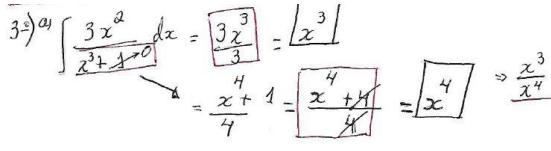
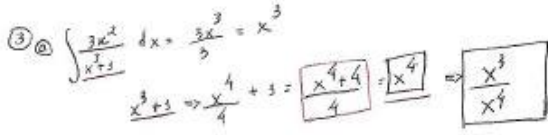
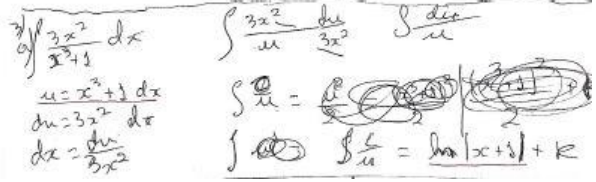
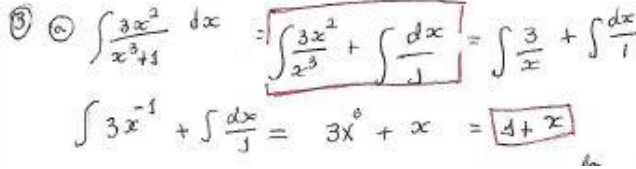
b) $\int x^2 e^x dx$ Técnica: _____

c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ Técnica: _____

d) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ Técnica: _____

Resolução:	Número de alunos que responderam ao item: 20
a) $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$; $u = x^3 + 1$; $du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$	Número de acertos: 3
$\int \frac{3x^2}{u} \cdot \frac{du}{3x^2} = \int \frac{1}{u} du = \ln u + k = \ln x^3 + 1 + k$	Número de respostas em branco: 13
	Número de equivocadas: 4

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 85: I3Q3.A.E85	• Erro não identificou qual a regra de integração adequada deveria empregar, então separou o numerador do denominador de forma incorreta e integro-os separadamente. • Erro momento que separou o numerador do denominador apresentou que a integral da constante é 0, provavelmente por cometer uma falsa generalização, ao concluir que a integral da constante é igual a derivada. • Erro realizou cancelamentos de forma incorreta $\frac{x^4+4}{4} = x^4$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por substituição simples. Erro (A1 e A8), nível de ensino (B3).
 Figura 86: I3Q3.A.E86	• Erro não identificou qual a regra de integração adequada deveria empregar, então separou o numerador do denominador de forma incorreta e integro-os separadamente. • Erro no momento em que foi integrar desconsiderou a necessidade de integrar a constante ao concluir que a integral de $x^3 + 1 = \frac{x^4}{4} + 1$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por substituição simples. Erro (A8), nível de ensino (B3).
 Figura 87: I3Q3.A.E87	• Erro aplicou de forma correta a regra de integração por substituição simples, só que como ele chamou $u = x^3 + 1$ dx no momento de voltar a substituição ele substituiu $u = x + 1$ de forma incorreta. O aluno demonstrou ter compreendido o conteúdo de integração por substituição simples, só que apresenta falhas na sua aplicação. Erro (A8), nível de ensino (B3).
 Figura 88: I3Q3.A.E88	• Erro no momento de integrar separou os termos do denominador em duas integrais de forma incorreta, provavelmente por não saber aplicar a regra de integração por substituição simples. • Erro apresentou uma resolução onde alguns passos não foram interpretados diante da não compreensão dos resultados. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por substituição simples. Erro (A8), nível de ensino (B3).

Resolução:

$$\begin{aligned}
 b) \int x^2 \cdot e^x dx &= \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx \\
 &= \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx \\
 &= \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = e^x$$

$$g(x) = e^x$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned}
 -2 \cdot \int x \cdot e^x dx &= -2 \cdot [x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx] = -2 \cdot [x \cdot e^x - e^x] \\
 \int x^2 \cdot e^x dx &= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x = e^x \cdot [x^2 - 2x + 2] + c
 \end{aligned}$$

$$h(x) = e^x$$

$$h'(x) = e^x$$

$$y(x) = x$$

$$y'(x) = 1$$

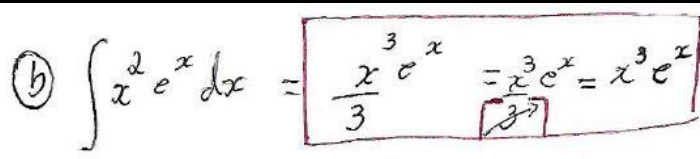
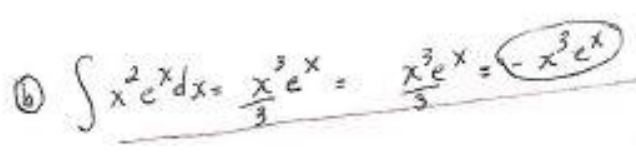
Número de alunos que responderam ao item: 20

Número de acertos: 3

Número de respostas em branco: 14

Número de equivocadas: 3

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Figura 89: I3Q3.B.E89	- Erro não identificou qual a regra de integração adequada deveria empregar, então aplicou a regra de integração de polinômios. - Erro cancelou um termo de forma incorreta quando concluiu que $\frac{x^3 \cdot e^x}{3} = x^3 \cdot e^x$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por partes. Erro (A1 e A8), nível de ensino (B3).
 Figura 90: I3Q3.B.E90	- Erro não identificou qual a regra de integração adequada deveria empregar, aplicou algo parecido com a regra de integração de polinômios. - Erro cancelou um termo de forma incorreta quando concluiu que $\frac{x^3 \cdot e^x}{3} = -x^3 \cdot e^x$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais, que envolve a regra de interação por partes. Erro (A1 e A8), nível de ensino (B3).

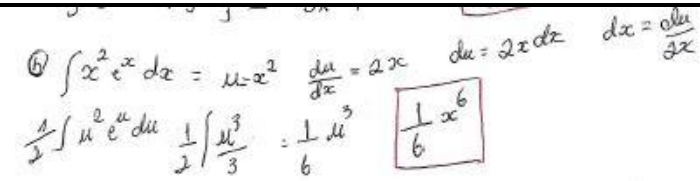
 6) $\int x^2 e^x dx = u = x^2 \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad du = 2x dx \quad dx = \frac{du}{2x}$ $\frac{1}{2} \int u^2 e^u du = \frac{1}{2} \int \frac{u^3}{3} = \frac{1}{6} u^3 = \frac{1}{6} x^6$	• Erro aplicou a regra de integração por substituição simples onde seria necessário aplicar a regra de integração por partes. Cometeu vários erros a parti da escolha da regra errada. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por partes. Erro (A8), nível de ensino (B3).
--	--

Figura 91: I3Q3.B.E91

Resolução: c) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx; x = 2 \cdot \sec \theta; dx = 2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta$ $\int \frac{1}{x^2 - 2^2} dx = \int \frac{1}{4 \cdot \sec^2 \theta - 4} dx$ $= \int \frac{1}{4 \cdot \sec^2 \theta - 4} \cdot d\theta \cdot 2 \cdot \sec \theta \cdot \tan \theta =$ $= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\sec \theta \cdot \tan \theta}{\tan^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\sec \theta}{\tan \theta} \cdot d\theta$ $= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta =$ $= \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{cosec} \theta d\theta =$ $= -\frac{1}{2} \cdot \ln \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta + c$ $= -\frac{1}{2} \cdot \ln \left \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 - 2^2}}{x}} + \frac{\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - 2^2}}{x}} \right + c$ $= -\frac{1}{2} \cdot \ln \left \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 2^2}} \right + c$	Número de alunos que responderam ao item: 20 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 12 Número de equivocadas: 5
--	--

Erros cometidos:

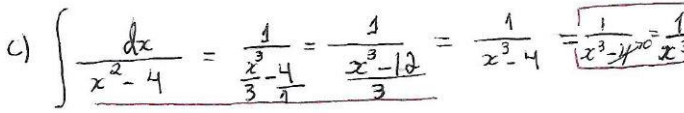
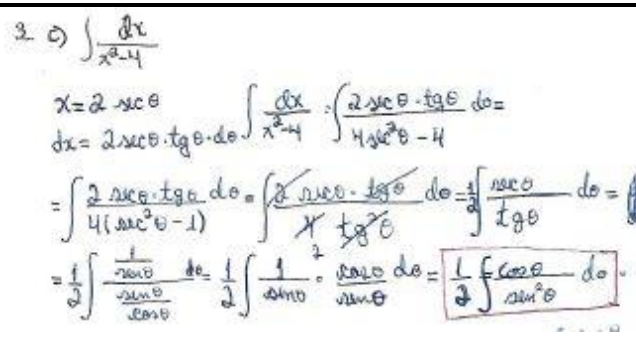
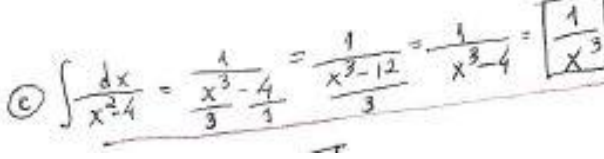
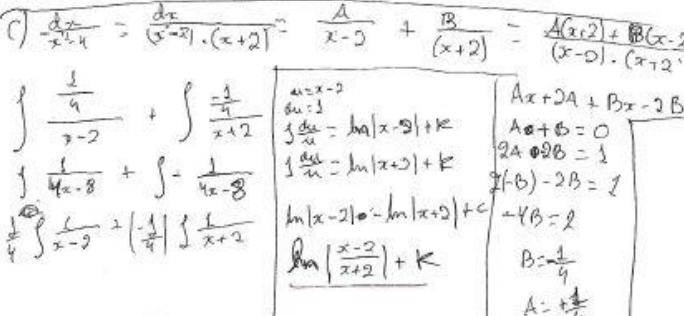
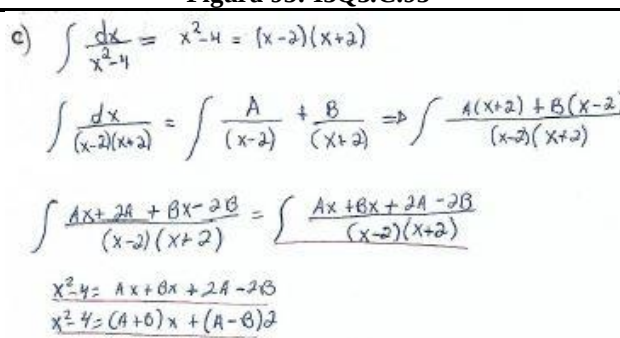
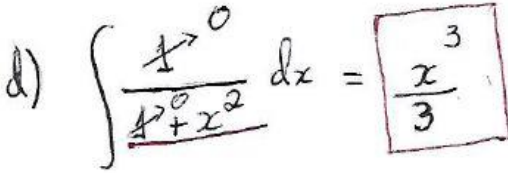
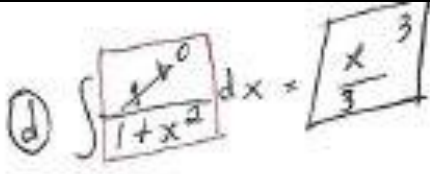
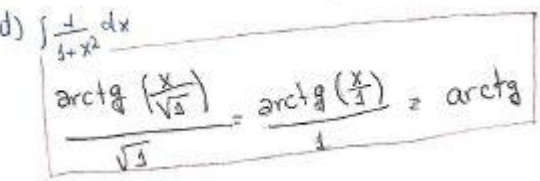
Resolução	Hipótese
 c) $\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{\frac{x^3 - 4}{3 - 1}} = \frac{1}{\frac{x^3 - 4}{2}} = \frac{2}{x^3 - 4} = \frac{1}{x^3 - 4x^2} = \frac{1}{x^3}$	• Erro não identificou a regra de integração adequada que deveria empregar. • Erro cancelou termos de forma incorreta durante a resolução, onde concluiu que $\frac{1}{x^3 - 4} = \frac{1}{x^3}$. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo de derivas. Erro (A1 e A8), nível de ensino (B3).

Figura 92: I3Q3.C.E92

 3 c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ $x = 2 \sec \theta$ $dx = 2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta$ $\int \frac{2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta}{4 \sec^2 \theta - 4}$ $= \int \frac{2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta}{4(\sec^2 \theta - 1)}$ $= \int \frac{2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta}{4 \tan^2 \theta}$ $= \frac{1}{2} \int \frac{\sec \theta}{\tan \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$	Erro apresentou uma resolução onde estava aplicando uma regra de derivação adequada, só que não apresentou uma resposta, bem provável que foi por não ter ideia de como seguir o desenvolvimento da questão. O aluno demonstrou ter compreendido parcialmente o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por substituição trigonométrica. Erro (A8), nível de ensino (B3).
 c) $\int \frac{dx}{x^3-4} = \frac{1}{\frac{x^3}{3}-4} = \frac{1}{\frac{x^3-12}{3}} = \frac{3}{x^3-12} = \boxed{\frac{1}{x^3}}$	- Erro não identificou a regra de integração adequada que deveria empregar. - Erro cancelou termos de forma incorreta durante a resolução, onde concluiu que $\frac{1}{x^3-4} = \frac{1}{x^3}$. O aluno demonstrou que não compreendeu o conteúdo de derivas. Erro (A1 e A8), nível de ensino (B3).
 c) $\frac{dx}{x^2-4} = \frac{dx}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ $\int \frac{1}{x-2} + \int \frac{-1}{x+2}$ $\ln x-2 - \ln x+2 + C$ $\ln\left \frac{x-2}{x+2}\right + C$ Partial fractions: $\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ $1 = A(x+2) + B(x-2)$ $1 = Ax + 2A + Bx - 2B$ $1 = (A+B)x + (2A-2B)$ $A+B=0$ $2A-2B=1$ $2(A-B)=1$ $A-B=1/2$ $A = 1/4, B = -1/4$	Erro apresentou uma resolução onde estava aplicando uma regra de derivação adequada, só que apresentou uma resposta incorreta pois esqueceu das frações $\frac{1}{4}$. O aluno demonstrou ter compreendido conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por frações parciais. Erro (A8), nível de ensino (B3).
 c) $\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)}$ $\int \frac{dx}{(x-2)(x+2)} = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \int \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ $\int \frac{Ax + 2A + Bx - 2B}{(x-2)(x+2)} = \int \frac{Ax + Bx + 2A - 2B}{(x-2)(x+2)}$ $x^2-4 = Ax + Bx + 2A - 2B$ $x^2-4 = (A+B)x + (A-B)2$	Erro apresentou uma resolução onde estava aplicando uma regra de derivação adequada, só que apresentou uma resposta incorreta. O aluno demonstrou ter compreendido parcialmente o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por frações parciais. Erro (A8), nível de ensino (B3).

Resolução: d) $\int \frac{1}{1+x^2} dx; x = 1 \cdot \tan \theta; dx = \sec^2 \theta d\theta$ $\int \frac{1}{1+\tan^2 \theta} d\theta \cdot \sec^2 \theta =$ $\int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int d\theta = \theta; \arctg x = \theta$ $\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$	Número de alunos que responderam ao item: 20 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 13 Número de equivocadas: 4
---	--

Erros cometidos:

Resolução	Hipótese
 Handwritten student solution for integral d) showing the integrand $\frac{1}{1+x^2}$ with a zero above the 1, and the result $\frac{x^3}{3}$ boxed.	• Erro não identificou qual a regra de integração adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de integração de polinômios. • Erro no momento que integrou de forma errada apresentou que a integral da constante é igual a zero, provavelmente por ter cometido uma falsa generalização por concluir que a integral da constante é igual a derivada $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^3}{3}$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por substituição trigonométrica e frações parciais. Erro (A1 e A8), nível de ensino (B3).
 Handwritten student solution for integral d) showing the integrand $\frac{1}{1+x^2}$ with a zero above the 1, and the result $\frac{x^3}{3}$ boxed.	• Erro não identificou qual a regra de integração adequada deveria empregar, então aplicou algo parecido com a regra de integração de polinômios. • Erro no momento que integrou de forma errada apresentou que a integral da constante é igual a zero, provavelmente por ter cometido uma falsa generalização por concluir que a integral da constante é igual a derivada $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^3}{3}$. O aluno demonstrou não ter compreendido o conteúdo de integrais que envolve a regra de integração por substituição trigonométrica e frações parciais. Erro (A1 e A8), nível de ensino (B3).
 Handwritten student solution for integral d) showing the integrand $\frac{1}{1+x^2}$ with a zero above the 1, and the result $\arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ boxed.	• Erro não identificou qual a regra de integração adequada que deveria empregar. • Erro apresentou uma resolução onde não foi possível interpretar a linha de raciocínio utilizada para chegar na resposta apresentada. Fica evidente que o aluno não compreendeu o conteúdo de integrais. Erro (A8 e A9), nível de ensino (B3).

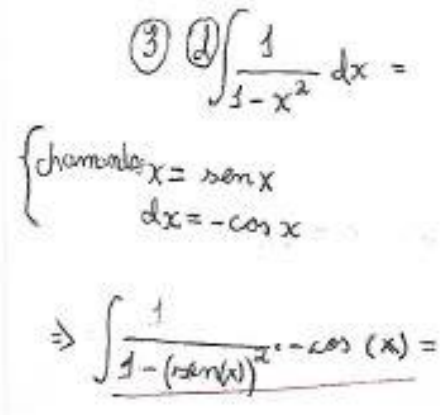
 Handwritten work showing the integral $\int \frac{1}{1-x^2} dx =$. The student uses the substitution $x = \sin x$ and $dx = \cos x$, leading to $\int \frac{1}{1-(\sin(x))^2} \cdot \cos(x) dx$.	• Erro não identificou qual a regra de integração adequada que deveria empregar. • Erro apresentou uma resolução onde não foi possível interpretar a linha de raciocínio utilizada para chegar na resposta apresentada. Fica evidente que o aluno não compreendeu o conteúdo de integrais. Erro (A8 e A9), nível de ensino (B3).
---	--

Figura 100: I3Q3.D.E100

Quarto instrumento

1. Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y) = \sqrt{xy}$ pela definição de limite.

Resolução: $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \text{ para os pontos } (x, y); (x + \Delta x, y)$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) \cdot y} - \sqrt{xy}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x) \cdot y} + \sqrt{xy}}{\sqrt{(x + \Delta x) \cdot y} + \sqrt{xy}}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \cdot y - xy}{\Delta x (\sqrt{(x + \Delta x) \cdot y} + \sqrt{xy})}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{xy} + \Delta xy - \cancel{xy}}{\Delta x (\sqrt{(x + \Delta x) \cdot y} + \sqrt{xy})}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta xy}{\Delta x (\sqrt{xy} + \sqrt{\Delta xy} + \sqrt{xy})}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{(\sqrt{xy} + \sqrt{xy})} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \text{ para os pontos } (x, y); (x, y + \Delta y)$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \cdot (y + \Delta y)} - \sqrt{xy}}{\Delta y} \cdot \frac{\sqrt{x \cdot (y + \Delta y)} + \sqrt{xy}}{\sqrt{x \cdot (y + \Delta y)} + \sqrt{xy}}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x \cdot (y + \Delta y) - xy}{\Delta y (\sqrt{x \cdot (y + \Delta y)} + \sqrt{xy})}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{xy} + x\Delta y - \cancel{xy}}{\Delta y (\sqrt{x \cdot (y + \Delta y)} + \sqrt{xy})}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x\Delta y}{\Delta y (\sqrt{xy} + \sqrt{\Delta xy} + \sqrt{xy})}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(\sqrt{xy} + \sqrt{xy})} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
--	--

2. Achar as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ das funções abaixo:

Resolução: a) $z = e^{x^2}$ (*) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2} \cdot 2x$ (**) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
--	--

Resolução: b) $z = x \cdot \cos(y - x)$ (*) $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \cos(y - x) + x \cdot (-\sin(y - x)) \cdot (-1)$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(y - x) + x \cdot \sin(y - x)$ (**) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + x \cdot (-\sin(y - x)) \cdot 1$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin(y - x)$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
---	--

3. Determine o vetor gradiente das funções abaixo nos pontos indicados:

Resolução: $\nabla_z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right)$ a) $z = x \sqrt{x^2 + y^2}; P(1, 1)$ (*) $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (**) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\nabla_z(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ $\nabla_z(1, 1) = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ $\nabla_z(1, 1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{vetor gradiente.}$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
--	--

Resolução: b) $z = \sin(3x + y); P\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (*) $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(3x + y) \cdot 3$ (**) $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(3x + y) \cdot 1$ $\nabla_z(x, y) = (3 \cos(3x + y), \cos(3x + y))$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
--	--

$\nabla_z \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\nabla_z \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0,0), \text{vetor gradiente.}$	
---	--

4. Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$:

Resolução: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ a) $z = 8u^2v - 2u + 3v; u = xy; v = x - y$ (*) $\frac{\partial z}{\partial x} = (16uv - 2) \cdot y + (8u^2 + 3) \cdot 1$ $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = [16 \cdot (xy) \cdot (xy) - 2] \cdot y + [8 \cdot (xy)^2 + 3]$ (**) $\frac{\partial z}{\partial y} = (16uv - 2) \cdot x + (8u^2 + 3) \cdot (-1)$ $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = [16 \cdot (xy) \cdot (xy) - 2] \cdot x - [8 \cdot (xy)^2 + 3]$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
--	--

Resolução: b) $z = \sqrt{u^2 + v^2 + 5}, u = \cos x, v = \sin y$ (*) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + v^2 + 5}} \cdot (-\sin x) + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 5}} \cdot 0$ $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 5}}$ (**) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 5}} \cdot 0 + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 5}}$ $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 5}}$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\cos x \cdot \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 5}} e$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 5}}$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
--	--

5. Resolva a seguintes integral:

$$I = \int_0^1 \int_1^2 x \cdot \frac{e^x}{y} dy dx$$

Resolução: $I = \int_0^1 \left(\int_1^2 x \cdot \frac{e^x}{y} dy \right) dx$ (*) $x \cdot e^x \int_1^2 \frac{e^x}{y} dy \Rightarrow x \cdot e^x \ln x \Big _1^2 = x \cdot e^x \cdot \ln 2$ (**) $\int_0^1 x \cdot e^x \cdot \ln 2 dx \Rightarrow \ln 2 \cdot \int_0^1 x \cdot e^x dx$	Número de alunos que responderam ao item: 6 Número de acertos: 3 Número de respostas em branco: 3 Número de equivocadas: 0
---	--

vamos nomear as funções, da seguinte forma: $\begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$ Assim, $\int_0^1 x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int_0^1 1 \cdot e^x dx = (x \cdot e^x - e^x) _0^1 = 1$ $I = \ln 2$	
--	--

3.2 DISCUSSÃO

Nesta seção, discuto os erros cometidos pelos educandos trazendo uma visão teórica e conceitual a respeito das categorias dos erros analisados.

Primeiramente, aponto os erros causados pelo uso de cancelamentos incorretos na resolução das questões. Cito como exemplo o erro apresentado na Figura 3: I1Q2.E3 onde o aluno cancelou termos do numerador com termos do denominador sendo que esses termos estavam sendo somados a outros. Pela definição de divisibilidade de termos aritméticos, generalizada para termos algébricos, esse cancelamento é correto somente se no numerador e no denominador estiverem operando termos através de produto.

Há ainda os erros que foram agrupados na categoria das *falsas generalizações*, termo empregado por Cury (2007) em seus trabalhos, em referência aos erros em que o aluno, ao estudar um determinado conteúdo e se deparar com um certo cálculo, generaliza a situação para um contexto inadequado. Como exemplo, onde se pede para encontrar a derivada da função $y = e^x$ que é a própria função. O aluno se deparou com a questão expressa na Figura 101: I2Q1.D.E55 que pedia para encontrar a derivada da função $y = e^{x \cdot \ln x}$, onde o aluno conclui, também, que seria igual a própria função $y = e^{x \cdot \ln x}$, evidenciando nesse momento a falsa generalização onde, ao se deparar com um conteúdo inicial onde se estudou uma certa técnica de resolução, o aluno generalizou de forma incorreta que essa técnica seria válida para todas as questões que envolvessem aparentemente a mesma função, ainda que em outros contextos. Nesse sentido, o aluno desconsiderou a Regra da Cadeia para as funções exponenciais, qual seja $\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

Os erros que foram agrupados na categoria A3 foram erros pertinentes aos conteúdos de álgebra e aritmética. Em relação aos erros em relação ao conteúdo de álgebra, temos como exemplo o da Figura 102: I1Q4.B.E23 em que o aluno, no momento em que derivou a função $f(x) = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$, efetuou a adição de termos não semelhantes em

$f(x) = 168x^3 + 8x$ e concluiu que o resultado era $f(x) = 176x^4$. Trata-se de uma situação de equívoco em relação a uma habilidade matemática ensinada no 8º ano do ensino fundamental. Já em relação aos erros de aritmética, temos como exemplo o da Figura 103: I1Q3.A.E4, em que o aluno, ao derivar a função $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$, efetuou o produto de 2 por 4/3 em $y = 3x^2 + 2 \cdot \frac{4}{3}x - 5$, concluindo que o resultado era igual a $y = x^3 + \frac{8}{6}x - 5$. Trata-se de um resultado foi errado, pois, para multiplicar um número natural por uma fração, basta que o multipliquemos pelo numerador da fração dada e conservemos o seu denominador. Em termos gerais, temos, $k * \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$, com $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}^*$.

Os erros que foram agrupados na categoria que tratava da falta ou pelo emprego incorreto das regras de derivação, temos como exemplo o da Figura 104: I1Q4.B.E25, e o da Figura 105: I1Q5.A.E35. Em relação à primeira, o aluno derivou a função $f(x) = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$, ele errou em concluir que a derivada da função era igual a $f'(x) = (8x)(42x) + x$, pois não empregou a regra de derivação do produto da forma correta, qual seja, $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

No segundo no momento que o aluno foi derivar a função $f(x) = \frac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$, ele errou em concluir que a derivada da função era igual a $f'(x) = \frac{8x^3}{2x - 5x}$, pois não empregou a regra de derivação do quociente que seria necessária para se chegar à resposta correta, expressada por $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$. Sendo assim, o aluno se limitou a derivar o numerador e o denominador da fração algébrica, sem levar em conta que a derivação de funções segue regras próprias, nesse caso.

Os erros que foram agrupados na categoria que tratava da falta ou do emprego incorreto das regras de integração, temos como exemplo o da Figura 106: I3Q3.A.E85. Nesse caso, o aluno errou por não resolver a integral $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$, por meio da regra de substituição simples, chegando em uma resposta igual a $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{x^3}{x^4}$. Tal resposta está incorreta, pois a regra de integração das funções compostas diz que $\int g[f(x)] \cdot f'(x) dx; [f(x)] = u$ e $f'(x)dx = du$, então temos que $\int g(u)du = h(u) + c$, em que $h(u)$ é uma primitiva de $g(u)$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos erros detectados e classificados nessa pesquisa com os alunos que cursavam as diferentes disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral da Licenciatura em Matemática do IFPI, apontados em tópico anterior, penso que se faz necessário modificar a metodologia de trabalho na instituição, buscando novos meios que venham instigar os estudantes na busca do conhecimento. Além de apresentar uma listagem dos erros e das dificuldades dos alunos nesta área da Matemática, ressalta-se que podemos encarar como sendo uma fonte de ideias para a criação de atividades, estratégias que possam se agrupar com os diversos recursos disponíveis, no intuito de desenvolver uma prática docente que venha ao encontro das necessidades dos alunos.

Ao fazer a análise das respostas dos educandos, observei que em todas as questões houve a ocorrência de erros ou de questões deixadas em branco, como foi apresentado na seção precedente. Observa-se que a maioria dos estudantes apresentam um alto índice de despreparo em relação ao estudo do cálculo diferencial e integral, assim como ficou evidente que os educandos demonstram ter grandes dificuldades em conteúdo do nível fundamental e médio e não só de nível superior.

Observo que a origem dos obstáculos e das dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo do cálculo diferencial e integral é o fato de a maioria deles não demonstrar, na aplicação dos instrumentos de pesquisa, ter o domínio dos conteúdos de álgebra e aritmética dos níveis fundamental e médio. Minha experiência prática como aluno do ensino público da região de Corrente permite-me, ainda, acrescentar que parte dos professores que ministram essas disciplinas não revisam esses conteúdos no momento de suas aulas, o que se torna um obstáculo para a aprendizagem dos educandos.

Assim, entendo que o fato de que em todas as questões ocorreu algum tipo de erro, não é necessariamente causado pelo método de avaliação empregado pelo docente, mas pelo fato de haver essa defasagem no aprendizado dos educandos. Assim, minha sugestão é de que se ofereçam cursos de extensão voltados para esses conteúdos, de modo que os estudantes que apresentam dificuldades possam sanar suas dúvidas. Compreendo também que os docentes devem rever as metodologias de ensino que vêm sendo empregadas nas aulas, de modo a integrar o conhecimento sobre as dificuldades discentes propiciados pela análise de erros dos seus alunos como ferramenta de construção de um novo conhecimento.

Acrescento que a própria instituição de ensino poderia incentivar os seus profissionais a trabalharem com essa técnica de investigação, visando entender melhor as dificuldades enfrentadas pelos seus alunos além de fazer uso dos inúmeros meios tecnológicos que podem contribuir para que os estudantes possam ter um bom aprendizado. Por outro lado, os alunos devem se sentir estimulados na busca de minimizar essas falhas na sua aprendizagem visando adquirir o conhecimento acerca desses conteúdos.

Os dados encontrados permitem-me concluir que a análise de erros é uma metodologia de ensino e pesquisa de suma importância para a melhoria do ensino de Matemática, uma vez que essa possibilita que o docente identifique as principais dificuldades enfrentadas pelos seus alunos, podendo assim intervir da melhor maneira possível visando melhorar o ensino da disciplina e, conseqüentemente, contribuir para um melhor aprendizado dos seus alunos.

Entretanto, tenho que admitir não ter conseguido aprofundar a minha pesquisa no que diz respeito ao pensamento dos alunos que justificasse os procedimentos adotados por eles na resolução das questões. Trata-se, portanto, de um ponto que pode ser abordado em estudos futuros.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRATE, R. S.; POCHULU, M. D.; VARGAS, J. M. *Errores y dificultades en matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006.

BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1979.

BORASI, Raffaella. *Reconceiving mathematics instruction: a Focus on Errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

CURY, H. N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação Matemática. *Zetetiké*, v.3, n. 4, p. 39-50, nov. 1995.

D'Ambrósio, Ubiratan, 1932-**Educação matemática: Da teoria à prática**/Ubiratan D'Ambrosio- 23ª ed.- Campinas, SP: Papirus, 2012. – (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

HADAMARD, Jacques. *Na essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press, 1945.

IBGE. **Município de corrente**. Piauí: 2017.

PONTE, J. P. et al. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação, 1997.

APÊNDICE A**1ª Avaliação – Pesquisa de TCC**

1. Encontre a equação da reta tangente a curva $y = x^3$, no ponto de coordenadas $(-1, -1)$.
2. Se $f(x) = \sqrt{x}$, determine a derivada de f por meio da definição utilizando limite:
(Obs.: as questões de 3 a 5 deveram ser resolvidos a partir das regras de derivação.)
3. Calcule a derivada de cada polinômio abaixo
 - e) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$;
 - f) $y = 3x^{-4} + 8x^{-1} + 5$;
 - g) $y = \frac{1}{9y^5} - 4y^2 + \frac{2}{y^3}$;
 - h) $y = 7x^{-6} - 5\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$;
4. Derive cada uma das funções abaixo:
 - d) $f(x) = (2x^3 - 1)(x^2 + 2x)$;
 - e) $f(x) = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$;
 - f) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(3x^3 + 27)$;
5. Em cada parte, determine $f'(x)$.
 - d) $f(x) = \frac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$;
 - e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$;
 - f) $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 - 5}$;

APÊNDICE B**2ª Avaliação – Pesquisa de TCC**

Aluno (a): _____

1. Determinar a derivada das seguintes funções:

e) $y = e^{\frac{x+1}{x-1}};$

f) $y = \ln \left(\frac{e^x}{x+1} \right);$

g) $y = \log_2(3x^2 + 7x - 1);$

h) $y = e^{x \ln x};$

i) $y = \sin(x^2);$

j) $y = \cos(1/x);$

k) $y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x};$

l) $y = \operatorname{cotg} u = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x};$

m) $y = \sec(x^2 + 3x + 7);$

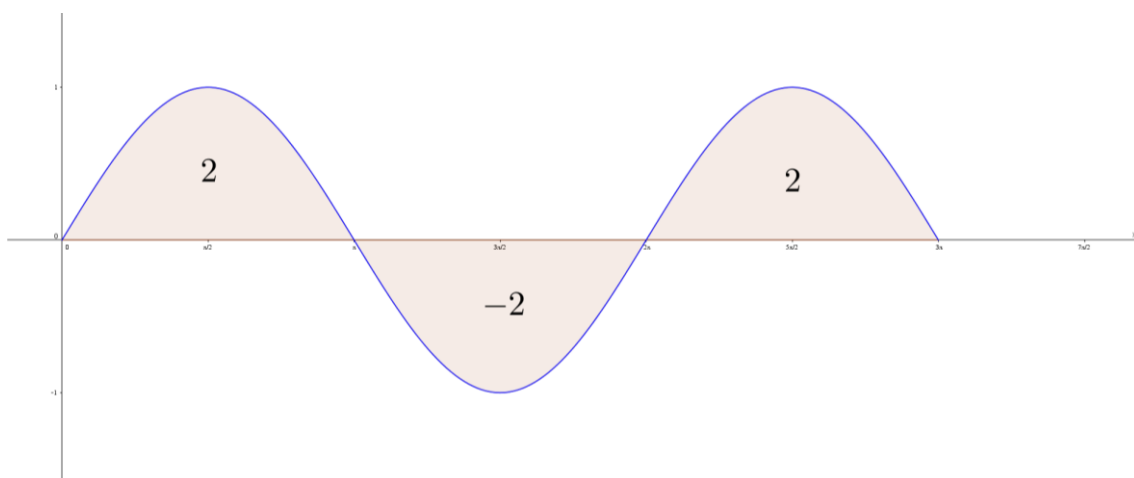
n) $y = \operatorname{cosec} \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$

APÊNDICE C

3ª Avaliação – Pesquisa de TCC

Aluno (a): _____

1. Considere a função $f(x) = \sin x$, com domínio $x \in [0, 3\pi]$. A figura abaixo mostra o gráfico de $f(x)$ com os valores das integrais calculadas sobre cada parte do intervalo.



Faça o que se pede:

c) Calcular $\int_0^{3\pi} f(x) dx$.

d) Calcular a área entre $f(x)$ e o eixo x no intervalo $[0, 3\pi]$.

2. Seja y uma função real de variável real tal que a derivada de y é $\cos x$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

Determine a função y e calcule sua variação total no intervalo $x \in [0, \pi]$.

3. Resolva cada integral abaixo, identificando a técnica de integração utilizada.

a) $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$ Técnica: _____

b) $\int x^2 e^x dx$ Técnica: _____

c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ Técnica: _____

d) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ Técnica: _____

APÊNDICE D

4ª Avaliação – Pesquisa de TCC

Aluno (a): _____

6. Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y) = \sqrt{xy}$ pela definição de limite.

7. Achar as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ das funções abaixo:

a) $z = e^{x^2}$

b) $z = x \cos(y - x)$

8. Determine o vetor gradiente das funções abaixo nos pontos indicados:

a) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}; P(1, 1)$

b) $z = \sin(3x + y); P\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

9. Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $z = 8u^2v - 2u + 3v; u = xy; v = x - y$

b) $z = \sqrt{u^2 + v^2 + 5}, u = \cos x, v = \sin y$

10. Resolva a seguintes integral:

$$I = \int_0^1 \int_1^2 x \cdot \frac{e^x}{y} dy dx$$