



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

LAUDILINO DE SOUSA VERA

**FORMULAÇÃO COVARIANTE DA RELATIVIDADE ESPECIAL COM APLICAÇÃO
EM HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA**

**SÃO RAIMUNDO NONATO, PIAUÍ
2024**

LAUDILINO DE SOUSA VERA

FORMULAÇÃO COVARIANTE DA RELATIVIDADE ESPECIAL COM APLICAÇÃO EM
HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, São Raimundo Nonato.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sousa Ribeiro

SÃO RAIMUNDO NONATO, PIAUÍ
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Vera, Laudilino de Sousa

V473f Formulação covariante da relatividade especial com aplicação em
hidrodinâmica relativística / Laudilino de Sousa Vera. - 2024.
40 p.: il. p&b.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo
Nonato, 2024.

Orientador : Prof Dr. Antonio Sousa Ribeiro.

1. relatividade especial. 2. formulação covariante. 3. partícula relativística.
4. hidrodinâmica relativística. I. Título.

CDD - 530

Elaborado por Uliscley Silva Gomes CRB 15/938

LAUDILINO DE SOUSA VERA

FORMULAÇÃO COVARIANTE DA RELATIVIDADE ESPECIAL COM APLICAÇÃO EM
HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, São Raimundo Nonato.

Aprovada em 19/09/2024.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Antonio Sousa Ribeiro(Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Profa. Dra. Wanêssa Façanha da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ysmailyn Siqueira Costa
Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF)

SÃO RAIMUNDO NONATO, PIAUÍ
2024

Dedico este trabalho ao meu professor e orientador Antonio Sousa Ribeiro.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado tudo aquilo que preciso para concluir o curso. A minha família, minha namorada, Anne Beatriz Pereira de Sousa, em especial ao meu pai, Lourivaldo Pereira da Vera, e minha mãe, Josélia de Sousa Gonçalves Vera. Ao IFPI-Campus São Raimundo Nonato, a todos os professores e servidores, a CAPES pela ajuda financeira. Ao meu professor orientador Antonio Sousa Ribeiro por acreditar em mim e me incentivado desde o começo do curso . Agradecer também aos meus amigos que me ajudaram.

*"O que prevemos raramente ocorre; o que
menos esperamos geralmente acontece".
Benjamin Disraeli*

RESUMO

O presente trabalho aborda a Formulação Covariante da Relatividade Especial (RE), com a sua aplicação na descrição de Fluidos Relativísticos (Hidrodinâmica Relativística). É feito um estudo das Transformações de Lorentz focando nos aspectos geométricos do espaço-tempo de Minkowski. Utiliza-se a notação de Einstein para encontrar os invariantes da teoria. Aplica-se essa estrutura de cálculo tensorial no problema do fluido perfeito. Ele se apresenta como um material de apoio aos estudantes de graduação que tenham interesse em se aprofundar no tema. Os principais aspectos matemáticos foram desenvolvidos de forma clara e concisa o que deve possibilitar uma aprendizagem mais rápida nos conceitos fundamentais da teoria.

Palavras-chave: relatividade especial; formulação covariante; partícula relativística; hidrodinâmica relativística.

ABSTRACT

This paper addresses the Covariant Formulation of Special Relativity (SR), with its application in the description of Relativistic Fluids (Relativistic Hydrodynamics). A study of Lorentz transformation is made focusing on the geometric aspects of Minkowski space-time. Einstein's notation is used to find the invariants of the theory. This tensor calculus is applied to the problem of the perfect fluid. It is presented as a support material for undergraduate students who are interested in delving deeper into the subject. The main mathematical aspects were developed in a clear and concise way, which should allow a faster learning of the fundamental concepts of the theory.

Keywords: special relativity; covariante formulation; relativistic particle; relativistic hydrodynamics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Dois referenciais inerciais f e f' movendo-se com velocidade relativa $\vec{v}$.	14
Figura 2 – Novas bases cartesianas no referencial f'	15
Figura 3 – Relógios ajustados no primeiro evento.	16
Figura 4 – Um segundo evento no espaço-tempo localizado na origem O'	16
Figura 5 – Quadri-vetor $\vec{x}$ no espaço-tempo visto nos dois referenciais inerciais f e f'	18
Figura 6 – Um segundo evento, depois o primeiro evento, visto nos dois referenciais inerciais f e f'	19
Figura 7 – Vetor decomposto em eixos ortogonais	23
Figura 8 – Trajetória C de uma partícula no espaço-tempo.	25
Figura 9 – Um segundo evento, depois o primeiro evento, visto nos dois referenciais inerciais f e f'	29
Figura 10 – Fluido isotrópico sem forças de cisalhamento movendo-se com velocidade uniforme $\vec{v}$	31
Figura 11 – Transição da análise global para local	33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RE	Relatividade Especial.
TL	Transformação de Lorentz.
RI	Referencial Inercial.
PR	Princípio da Relatividade.
IFPI	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.
HR	Hidrodinâmica Relativística.

LISTA DE SÍMBOLOS

x^μ	Representação das coordenadas do espaço-tempo
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski
p^μ	Quadri-vetor momento.
$dx_\mu dx^\mu$	Convecção da soma de Einstein
Λ_ν^μ	As matrizes do grupo de Lorentz
δ_{ij}	Delta de Kronecker
p	Momento da partícula
E	Energia da partícula
c	Velocidade da luz
∇	Operador Nabla
$\square$	Box
tr	Traço das matrizes
I	Identidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	14
3	FORMULAÇÃO COVARIANTE DA RELATIVIDADE ESPECIAL . . .	23
3.1	VETORES NO ESPAÇO-TEMPO MINKOWSKI	23
3.2	MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA RELATIVÍSTICA	25
4	LEI GERAL DE TRANSFORMAÇÃO DE TENSORES	28
5	HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA	31
6	CONCLUSÃO	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

O princípio da relatividade de Einstein diz, grosso modo, que toda lei Física (incluindo, em particular, a velocidade da luz no vácuo) é a mesma para todos os observadores não acelerados. Este princípio foi motivado pela teoria eletromagnética e, de fato, o campo da relatividade especial foi lançado por um artigo intitulado “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento” (Einstein 1905) [1, 2]. Originalmente, na física, a relatividade significava a abolição do espaço absoluto, uma busca que era reconhecida como desejável desde os dias de Newton. E foi isso que as duas teorias de Einstein realizaram: a relatividade especial (RE), a teoria do espaço-tempo plano, aboliu o espaço absoluto em seu papel maxwelliano como o “éter” que carregava campos eletromagnéticos e, em particular, ondas de luz, enquanto a relatividade geral (RG), a teoria do espaço-tempo curvo, aboliu o espaço absoluto também em seu papel newtoniano como o padrão onipresente e não influenciável de repouso ou movimento uniforme. A teoria de Einstein também aboliu o conceito de tempo absoluto de Newton.[3–6].

A relatividade especial é, portanto, para começar, a teoria do espaço e do tempo em um mundo repleto de Referenciais Inerciais (RI) que se relacionam por transformações de Lorentz. Isso inclui resultados como dilatação do tempo, contração do comprimento, adição de velocidade relativística, a existência de um limite de velocidade, a cinemática relativística das ondas, etc [1, 2, 7]. A maioria das leis físicas faz referência não apenas ao comprimento e ao tempo, mas também a quantidades não cinemáticas como forças, campos, massas e fluidos relativísticos.

A hidrodinâmica relativística é a parte da física dedicada ao estudo de ambos os fluxos, nos quais as velocidades atingidas por partículas individuais ou pelo fluido como um todo se aproximam da velocidade da luz no vácuo. Modelos de fluidos relativísticos são de considerável interesse em diversas áreas da astrofísica, física de plasma e física nuclear [8, 9]. Teorias de colapso gravitacional e modelos de explosões de supernovas são baseados em um modelo de fluido relativístico para a estrela [10–12]. O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo (3) trata os tensores, sua definição e como eles se transformam sob uma mudança de coordenadas, incluindo os tensores contravariantes e covariantes. No capítulo (5), apresenta as equações do eletromagnetismo em sua forma covariante. No (6) apresentaremos os resultados e conclusões.

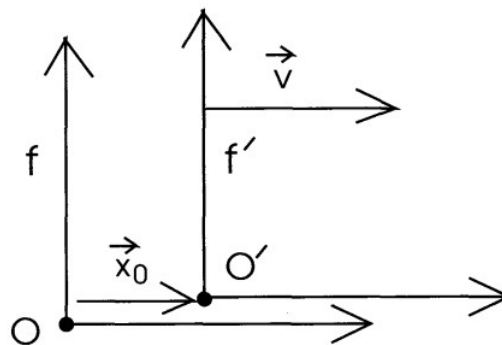
2 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Einstein disse que vivemos em um contínuo espaço-tempo quadri-dimensional com coordenadas cartesianas $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, ct)$ e a métrica de Lorentz da Eq. (2.5). A seguir, destaca-se pontos importantes em relação à física do espaço de Minkowski, onde em diferentes referenciais inerciais é representada por transformações de coordenadas. Visualiza-se então, que, em diferentes sistemas de coordenadas é tratada a mesma física, os mesmos eventos, o mesmo elemento de linha ds e os mesmos intervalos $(ds)^2$; São colocados em correspondência diferentes referenciais inerciais com sistemas de coordenadas neste espaço, sendo que são relacionados por uma transformação de Lorentz.

Logo, uma transformação de Lorentz é uma regra que informa como as coordenadas em um referencial inercial $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, ct)$ estão relacionadas com as de um segundo referencial inercial $x^\mu = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, c\bar{t})$. Algo muito importante a destacar aqui, é que o tempo não é o mesmo para dois referenciais inerciais. Esta é uma grande ruptura com o pensamento clássico e revoluciona a compreensão de como o universo se comporta [1, 2, 7].

Mediante as análises anteriores de transformações de coordenadas, agora será feito o uso das mesmas em um dado ponto do espaço-tempo, no espaço tangente, introduzindo uma base cartesiana.

Figura 1 – Dois referenciais inerciais f e f' movendo-se com velocidade relativa $\vec{v}$.



Fonte: Walecka, 2010.

tem-se aqui dois referenciais inerciais, o primeiro f com coordenadas $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, ct)$ e no segundo referencial f' movendo-se com velocidade $\vec{v}$, apresenta uma nova base cartesiana naquele ponto no espaço tangente com coordenadas $x^\mu = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, c\bar{t})$ e correspondentes vetores

de base para cima [6, 13].

Em termos das novas coordenadas, o elemento de linha, intervalo e métrica são dados por

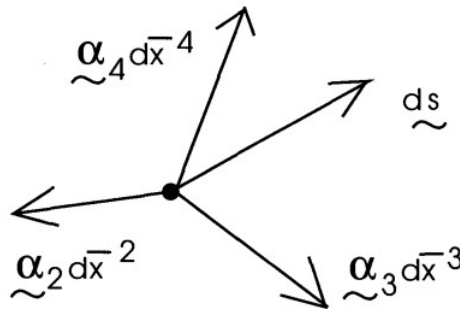
$$\begin{aligned} ds &= \alpha_\mu d\bar{x}^\mu, \\ (ds)^2 &= \bar{\eta}_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu = \alpha_\mu \cdot \alpha_\nu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

todos os referenciais inerciais são equivalentes, deve-se ser capaz de usar uma métrica da mesma forma no segundo referencial inercial

$$\bar{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

portanto, conclui-se que uma transformação de Lorentz deixa a métrica invariante.

Figura 2 – Novas bases cartesianas no referencial f'



Fonte: Walecka, 2010.

A figura acima representa a base cartesiana no referencial f' e é importante notar o seguinte: O espaço é plano, e aqui o espaço tangente é idêntico a todo o espaço; Os vetores de base cartesiana e_μ são os mesmos em todos os lugares; Os vetores de base cartesiana α_μ são os mesmos em todos os lugares; A correspondente transformação de coordenadas, ou transformação de Lorentz, descreve a transformação física entre os referenciais inerciais (Einstein).

Ao ser iniciado os relógios quando as duas origens O e O' se coincidirem, faz com que o primeiro evento tenha a presença de um quadri-vetor x , onde o mesmo pode ser colocado em correspondência biunívoca com o segundo evento no espaço-tempo. Assim, o quadri-vetor

pode ser decomposto em qualquer referencial, como mostra a seguir

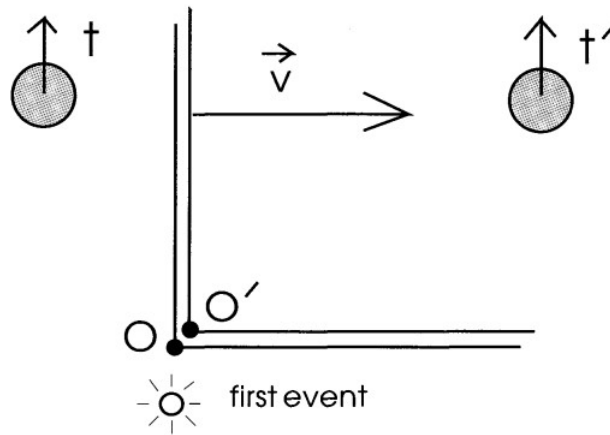
$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{e}_\mu x^\mu = x^i \mathbf{e}_i + ct \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{x} &= \alpha_\mu \bar{x}^\mu = \bar{x}^i \alpha_i + c\bar{t} \alpha_4,\end{aligned}\tag{2.3}$$

aqui os índices latinos repetidos são somados de 1 a 3 e essas expressões ainda pode ser descrita como

$$\begin{aligned}x^i \mathbf{e}_i + ct \mathbf{e}_4 &\equiv \vec{x} + ct \mathbf{e}_4, \\ \bar{x}^i \mathbf{e}_i + c\bar{t} \mathbf{e}_4 &\equiv \vec{x}' + ct' \mathbf{e}_4,\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde $t' \equiv \bar{t}$

Figura 3 – Relógios ajustados no primeiro evento.

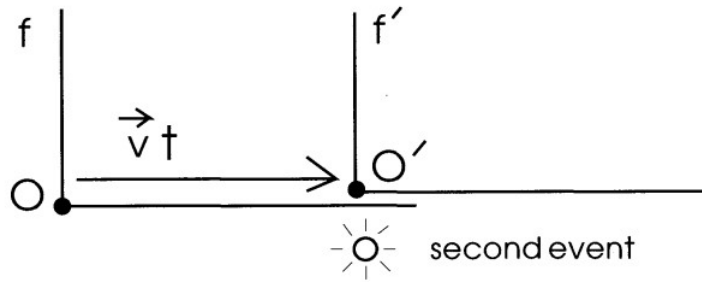


Fonte: Walecka, 2020.

- No referencial f , utiliza-se as quantidades $(\vec{x}, ct)$ para descrever o quadri-vetor $\mathbf{x}$ e o ponto espaço-temporal correspondente;
- No referencial f' , utiliza-se as quantidades $(\vec{x}', ct')$ para descrever o quadrivetor $\mathbf{x}$ e o ponto espaço-temporal correspondente.

Agora, considerando que o referencial f' descreve um deslocamento subsequente da origem O' no espaço-tempo. Tem-se em segundo evento que acontece no espaço-tempo marcando a localização da origem O' Como mostra a seguir,

Figura 4 – Um segundo evento no espaço-tempo localizado na origem O' .



Fonte: Walecka, 2010.

nota-se que o quadri-vetor $\mathbf{x}$ conecta os dois pontos no espaço-tempo marcado pelos dois eventos. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \vec{x}_0 + ct\mathbf{e}_4, \\ \mathbf{x} &= \vec{v}t + ct\mathbf{e}_4,\end{aligned}\tag{2.5}$$

uma vez que a localização da origem O' em f está agora em

$$\vec{x}_0 = \vec{v}t = (v^i \mathbf{e}_i)t,\tag{2.6}$$

no referencial f' , o segundo evento ocorre na origem $\vec{x}' = \vec{0}$ e em um tempo t' e, portanto, diz-se que o quadri-vetor físico $\mathbf{x}$ é dado por O' em f'

$$\mathbf{x} = \vec{0} + ct'\alpha_4,\tag{2.7}$$

portanto, essas duas expressões para $\mathbf{x}$ podem agora ser igualadas e resolvidas para α_4 ,

$$\alpha_4 = \frac{t}{t'}(\vec{\beta} + \mathbf{e}_4); \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c},\tag{2.8}$$

esta expressão pode ser pontilhada em si mesmo e fazer o uso da mesma da seguinte forma

$$\begin{aligned}\alpha_4 \cdot \alpha_4 &= \bar{g}_{44} = -1, \\ \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 &= g_{44} = -1 \\ \vec{\beta} \cdot \mathbf{e}_4 &= (\beta^i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_4 = \beta^i g_{i4} = 0,\end{aligned}\tag{2.9}$$

com

$$-1 = \left(\frac{t}{t'}\right)^2 (\beta^2 - 1),\tag{2.10}$$

ou com uma dilatação do tempo

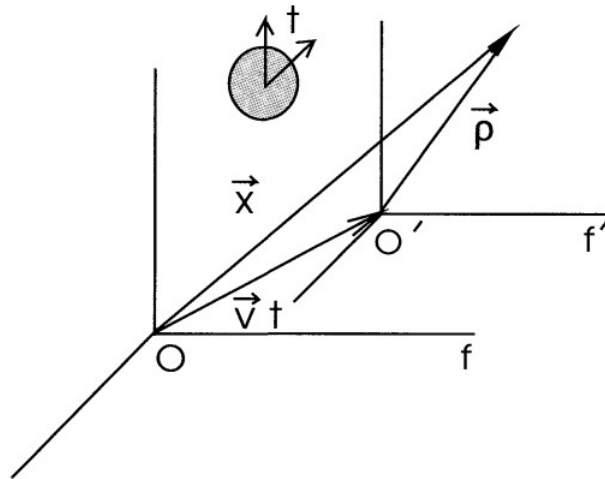
$$t = \frac{t'}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.11)$$

note que o tempo t está bem definido em todo o f . O mesmo vale para o tempo t' em f' . Logo, essa equação mostra que o relógio no referencial f' na origem O' é mais lento que o relógio no referencial f . E assim a relação entre os vetores de base será dada da seguinte forma

$$\alpha_4 = \frac{\vec{\beta} + \mathbf{e}_4}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.12)$$

Agora será feito a expansão de um quadri-vetor x arbitrário no espaço-tempo representado em dois referenciais inerciais f e f' com origens que se coincidem quando os relógios iniciam. O mesmo fica representado da seguinte forma

Figura 5 – Quadri-vetor $\vec{x}$ no espaço-tempo visto nos dois referenciais inerciais f e f' .



Fonte: Walecka, 2010.

é importante ressaltar que em f o quadri-vetor é $\mathbf{x} = (\vec{x}, ct)$, logo, ele pode ser expandido em qualquer sistema de coordenadas (referencial inercial) como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \vec{x} + ct\mathbf{e}_4, \\ &= \vec{x}' + ct'\alpha_4, \end{aligned} \quad (2.13)$$

como já foi definido anteriormente os três vetores espaciais (ver Eq 2.53), como

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x^i \mathbf{e}_i, \\ \vec{x}' &= \bar{x}^i \alpha_i, \end{aligned} \quad (2.14)$$

pontilhando α_4 em $\mathbf{x}$ na Eq. (2.62), e como foi visto que $\vec{\beta} \cdot \mathbf{e}_4 = (\beta^i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_4$ na Eq.(2.58), tem-se o seguinte

$$\alpha_4 \cdot \vec{x}' = \alpha \cdot (\vec{x}^i \alpha_i) = 0, \quad (2.15)$$

substituindo o α_4 que já foi encontrado, leva a

$$\begin{aligned} \left[\frac{\vec{\beta} + \mathbf{e}_4}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \cdot (\vec{x} + ct \mathbf{e}_4) &= -ct', \\ \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x} - ct}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} &= -ct', \end{aligned} \quad (2.16)$$

isso dá a relação geral entre os tempos t e t' nos dois referenciais inerciais

$$\begin{aligned} t' &\equiv \bar{t} \\ t' &= \frac{t - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{x}}{c}}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

contudo, percebe-se que o tempo t' no segundo referencial depende de $(\vec{x}, ct)$ no primeiro referencial. Resolvendo agora para o x' , e fazendo o uso das Eqs. 2.61 e 2.66

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x}^i \alpha_i, \\ &= \vec{x} + ct \mathbf{e}_4 - ct' \alpha_4, \\ \vec{x}' &= \frac{\vec{x} - \vec{v}t - \beta^2 [\vec{x} - (\hat{v} \cdot \vec{x}) \hat{v}]}{1 - \beta^2} + \frac{\left(\frac{\vec{v}}{c}\right) \cdot [\vec{x} - \vec{v}t]}{1 - \beta^2} \mathbf{e}_4, \end{aligned} \quad (2.18)$$

aqui $\hat{v} \equiv \frac{\vec{v}}{\beta c}$ é um vetor unitário na direção de $\vec{v}$. Definindo a posição de $\vec{x}$ em relação à origem O' no referencial f .

$$\vec{\rho} \equiv \vec{x} - \vec{v}t, \quad (2.19)$$

usando as seguintes manipulações de vetores

$$\begin{aligned} (\vec{\rho} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} &= (\vec{x} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times (\vec{x} \times \vec{\beta}), \\ &= -\vec{x} \beta^2 + \vec{\beta} (\vec{x} \cdot \vec{\beta}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

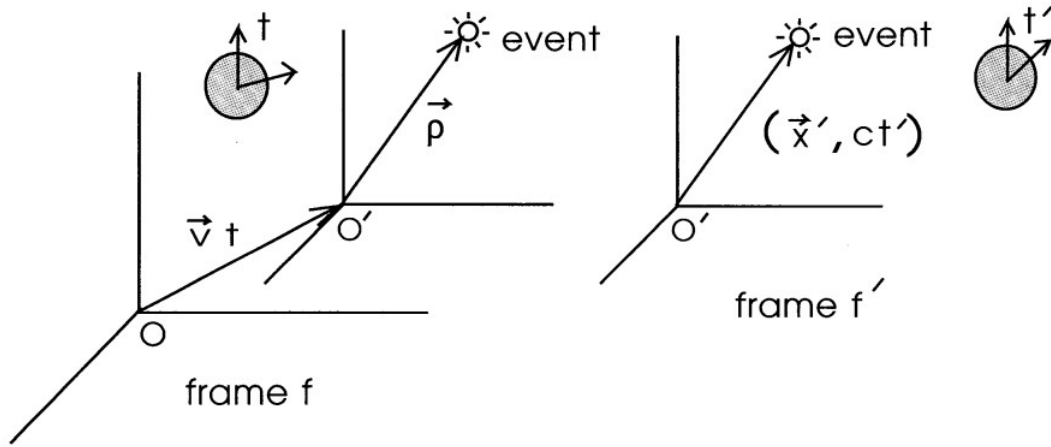
a Eq.(2.67) torna-se então

$$\vec{x}' = \vec{x}^i \alpha_i = \frac{\vec{\rho} + (\vec{\rho} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} + (\vec{\rho} \cdot \vec{\beta}) \mathbf{e}_4}{1 - \beta^2}. \quad (2.21)$$

As equações (2.70) e (2.66) são a transformação geral de Lorentz entre dois sistemas de coorde-

nadas, o primeiro com coordenadas $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, ct)$ e vetores de base $\mathbf{e}_\mu$, e o segundo com $\bar{x}^\mu = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, c\bar{t})$ para cima α_μ , representando, segundo Einstein, dois referenciais inerciais movendo-se com velocidade relativa $\vec{v} = \vec{\beta}c$, e com origens coincidentes. Como ilustra a seguir o segundo evento ocorre em um determinado ponto do espaço-tempo especificando $\mathbf{x}$, que é

Figura 6 – Um segundo evento, depois o primeiro evento, visto nos dois referenciais inerciais f e f' .



Fonte: Walecka, 2010.

então descrito da seguinte forma:

- No referencial f :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x^\mu \mathbf{e}_\mu, \\ \mathbf{x} &= (\vec{v}t + \vec{\rho}, ct).\end{aligned}\tag{2.22}$$

- No referencial f' :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \bar{x}^\mu \alpha_\mu, \\ \mathbf{x} &= (\bar{x}', ct'),\end{aligned}\tag{2.23}$$

aqui $t \equiv \bar{t}$. Como exemplo, considerando o caso em que o vetor $\vec{\rho}$ é perpendicular à velocidade de modo que $\vec{\rho} \perp \vec{\beta}$ e $\vec{\rho} \cdot \vec{\beta} = 0$. Nesse caso

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \frac{\vec{\rho} + (\vec{\rho} \times \vec{\beta}) \tilde{\beta}}{1 - \beta^2} = \vec{\rho}, \\ t' &= (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} t,\end{aligned}\tag{2.24}$$

os vetores transversais são, portanto, inalterados sob uma transformação de Lorentz e, para tais vetores, a dilatação do tempo é independente de $\vec{\rho}$. colocando $\mathbf{e}_3$ ao longo da direção da velocidade de modo que,

$$\vec{\beta} = \beta \mathbf{e}_3, \quad (2.25)$$

como foi mostrado que os vetores espaciais transversais são inalterados, então pode-se tomar

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \alpha_2 &= \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

para satisfazer $\alpha_3 \cdot \alpha_4 = 0$ e $\alpha_3 \cdot \alpha_3 = 1$, tem-se

$$\alpha_3 = \frac{\mathbf{e}_3 + \beta \mathbf{e}_4}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.27)$$

agora, chega-se na métrica que já foi vista quando estava se tratando de quatro-vetores, esta sendo representada no primeiro referencial

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu, \\ \eta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

logo, percebe-se que a métrica na nova base é

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{\mu\nu} &= \alpha_\mu \cdot \alpha_\nu, \\ \bar{\eta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

e, de fato, a métrica de Lorentz é preservada sob esta transformação de coordenadas. É importante ressaltar que nesse caso a relação entre os vetores de base é global. Observe que ambas as métricas são diagonais e

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu}, \\ \bar{\eta}^{\mu\nu} &= \bar{\eta}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Contudo, a partir da teoria geral de transformações de coordenadas, a relação entre os vetores de base é dada por

$$\alpha_\nu = a_\nu^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2.31)$$

portanto, pode-se apenas ler a matriz de transformação de Lorentz a da relação entre os vetores de base, como

$$a_{\mu\nu} \equiv a_\nu^\mu, \quad a = \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

com

$$\vec{\beta} = \beta \mathbf{e}_3$$

. A partir de uma análise geral, tem-se

$$\begin{aligned} a_\mu^\nu &= a_\mu^\nu, \\ \bar{a}_\nu^\mu &= \eta^{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} a_\lambda^\sigma, \end{aligned} \quad (2.33)$$

assim com a notação de matriz

$$a_{\mu\nu} \equiv a_\nu^\mu, \quad (2.34)$$

com

$$a = \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

É importante ressaltar que

$$a_\lambda^\mu \bar{a}_\lambda^\mu = \delta_\nu^\mu. \quad (2.36)$$

Um ponto importante a se destacar nessa etapa é o termo de quadri-velocidade, porque assim como há o quadri-vetor tem-se também a aparência da mesma quando se trata de eventos no espaço-tempo contínuo. Portanto tem-se a seguinte forma

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu = \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} [\vec{v}, -c], \quad (2.37)$$

3 FORMULAÇÃO COVARIANTE DA RELATIVIDADE ESPECIAL

O princípio básico da Relatividade Especial (RE) é que se deve ter as mesmas leis da física incluindo o fato de que existe uma velocidade limite na propagação de sinais, ou seja, c , a velocidade da luz em qualquer Referencial Inercial (RI). Qualquer sistema de coordenadas movendo-se com velocidade constante em relação a um RI é inercial. Einstein observou que vivemos em um espaço-tempo quadri-dimensional contínuo. Com isso, é importante introduzir o conceito de quadri-vetores e, a seguir, fazer o uso de sua estrutura [1, 2].

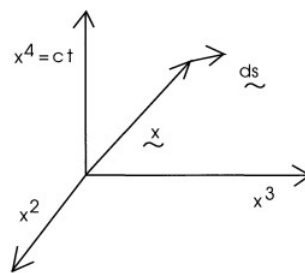
3.1 VETORES NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Um quadri-vetor é escrito em termos dos vetores de base no espaço-tempo quadridimensional ($4D$) como

$$v = \sum_{\mu=1}^4 v^{\mu} e_{\mu} = v^{\mu} e_{\mu}, \quad (3.1)$$

onde os índices gregos superiores e inferiores repetidos significam soma de 1 a 4 [7]. Logo, quando se estende para uma localização da posição no espaço-tempo $4D$ e deslocamento infinitesimal dessa posição em um RI qualquer, sua representação fica da seguinte forma: As coor-

Figura 7 – Vetor decomposto em eixos ortogonais



Fonte: Walecka, 2010.

denadas na figura acima são $(x^1, \dots, x^4) = (x^1, x^2, x^3, ct)$. A coordenada espacial x^1 é suprimida, e apenas as duas coordenadas espaciais (x^2, x^3) são mostradas. Aqui x e ds são quadri-vetores. O vetor posição neste referencial inercial é dado por

$$\begin{aligned} x &= x^{\mu} e_{\mu} \\ x^{\mu} &= (x^1, x^2, x^3, ct). \end{aligned} \quad (3.2)$$

É importante notar aqui, que os três primeiros componentes deste quadri-vetor são as componentes da localização espacial, e a quarta componente é a velocidade da luz multiplicada pelo tempo. Aqui as coordenadas generalizadas são assim $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, ct)$ e os vetores de base correspondentes são e_μ com $(\mu = 1, \dots, 4)$. No espaço tangente, o deslocamento infinitesimal que define o elemento de linha é dado por

$$ds = e_\mu dx^\mu. \quad (3.3)$$

O quadrado desse deslocamento, que define o intervalo, é dado em função da métrica por

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.4)$$

e

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu. \quad (3.5)$$

Com a escolha de coordenadas cartesianas para a posição espacial [13], a métrica conhecida também como a métrica de Lorentz assume a forma

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Aqui, nota-se que o sinal na quarta componente da métrica é negativo, logo, é um ponto muito importante, pois garante que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais. A presença desse sinal de menos implica que o espaço-tempo quadri-dimensional contínuo não é euclidiano, mas forma um espaço de Minkowski. Assim, a base é definida pela relação

$$e_\mu e^\nu = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Percebe-se, que a métrica levanta e baixa índices. Tendo em mente conhecimento sobre matrizes inversas, logo, percebe-se que a matriz na Eq. (3.6) é seu próprio inverso, e assim tem-se o seguinte,

$$(\eta^{-1})_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

ou

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

assim, temos que

$$\eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (3.9)$$

Sendo que um quadri-vetor pode ser expandido em qualquer base

$$\mathbf{v} = v^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = v_{\mu}\mathbf{e}^{\mu}, \quad (3.10)$$

e o seu quadrado é invariante sob transformações de coordenadas, como:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \eta_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = v_{\mu}v^{\mu}, \quad (3.11)$$

em particular, o intervalo em RS assume a forma

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = d\vec{x} \cdot d\vec{x} - c^2(dt)^2. \quad (3.12)$$

Nessa primeira parte, foi realizada uma breve introdução sobre um quadri-vetor em um espaço-tempo 4D contínuo, buscando detalhar os vetores, índices e coordenadas do sistema.

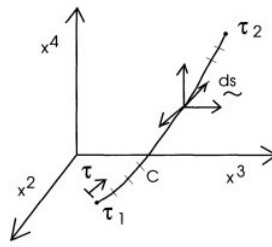
3.2 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA RELATIVÍSTICA

Considere uma trajetória de partícula C em um referencial inercial no espaço-tempo quadri-dimensional como ilustrado na Fig.(8). Deixe τ parametrizar a distância ao longo da curva com

$$\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \quad (3.13)$$

Seja ds um deslocamento infinitesimal ao longo do caminho real C . Então podemos definir $d\tau$

Figura 8 – Trajetória C de uma partícula no espaço-tempo.



Fonte: Walecka, 2010.

através do intervalo invariante

$$-c^2(d\tau)^2 \equiv (ds)^2. \quad (3.14)$$

Com a escolha da métrica na Eq. (3.6), o intervalo $(ds)^2$ na Eq. (3.12) é sempre negativa para o movimento das partículas, pois neste caso

$$(d\vec{x})^2 = \vec{v}^2(dt)^2, \quad (3.15)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula (com $|\vec{v}| < c$) e, portanto

$$(ds)^2 = (d\vec{x})^2 - c^2(dt)^2 = (\vec{v}^2 - c^2)(dt)^2 < 0. \quad (3.16)$$

Assim, com a definição na Eq. (3.14), a quantidade $(d\tau)^2$ é positiva e $d\tau$ é real. O parâmetro τ é conhecido como o tempo adequado. No espaço tangente, aqui idêntico a todo o espaço, Eqs. (3.4) e (3.14) podem ser divididos por $(d\tau)^2$ para dar

$$\frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{ds}{d\tau} = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2, \quad (3.17)$$

esta quantidade é apropriadamente constante ao longo do caminho real C . Definimos a quadri-velocidade por

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.18)$$

Como x^μ é um quadri-vetor e $d\tau$ é um invariante, essa quantidade também é um quatro-vetor. Segue da Eq. (3.17) que

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2, \quad (3.19)$$

com a métrica de Lorentz da Eq. (3.6), tem-se

$$(ds)^2 = d\vec{x} \cdot \vec{x} - c^2(dt)^2 = -c^2(d\tau)^2. \quad (3.20)$$

Após a divisão pelo intervalo de tempo $(dt)^2$, isso leva a

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)^2 - c^2 = \vec{v}^2 - c^2 = -c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2, \quad (3.21)$$

portanto, a relação entre o tempo e o tempo próprio é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \vec{\beta} &\equiv \frac{\vec{v}}{c}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aqui $\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}}{c}$ é a razão entre a velocidade da partícula e a velocidade da luz. As componentes das quatro velocidades na Eq. (3.18) assumem então a forma

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} [\vec{v}, -c], \quad (3.23)$$

essas relações reproduzem a Eq. (3.19)

$$\mathbf{u}^2 = u_\mu u^\mu = \frac{\vec{v}^2 - c^2}{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = -c^2. \quad (3.24)$$

que é invariante. O quadri-momento da partícula de massa m é dado por

$$p^\mu = m u^\mu, \quad (3.25)$$

as componentes do quadri-momento podem ser obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p^\mu &= m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \\ p^\mu &= m \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$p^\mu = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} (\vec{v}, c) = \left(\vec{p}, \frac{E}{c} \right), \quad (3.27)$$

e

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= -(mc)^2, \\ p^2 &= \vec{p}^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

assim, encontramos a relação de Einstein para a energia relativística

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (3.29)$$

Observe que, para uma partícula em repouso, isso se reduz à celebrada relação de Einstein $E = mc^2$.

4 LEI GERAL DE TRANSFORMAÇÃO DE TENSORES

A partir do que foi visto anterior em relação as transformações de coordenadas, a relação entre um tensor geral T no referencial f , e $\bar{T}$ no novo referencial f' , é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\rho\dots} &= a_{\mu'}^{\mu} a_{\nu'}^{\nu} a_{\rho'}^{\rho} \dots \bar{T}^{\mu'\nu'\rho'\dots}, \\ \bar{T}^{\mu\nu\rho\dots} &= \bar{a}_{\mu'}^{\mu} \bar{a}_{\nu'}^{\nu} \bar{a}_{\rho'}^{\rho} \dots T^{\mu'\nu'\rho'\dots}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

por exemplo, considerando um quadri-vetor $\mathbf{x}$ que esta localizado em um segundo evento ao longo do eixo z ocorrendo em (z, t) em f , e $(\bar{z}, \bar{t})$ em f' como mostra a Fig.(??)

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= [0, 0, z, ct], \\ \bar{x}^{\mu} &= \bar{a}_{\nu}^{\mu} x^{\nu} = [0, 0, \bar{z}, c\bar{t}], \end{aligned} \quad (4.2)$$

dadas as Eqs. (2.83-2.84), $\bar{x}^{\mu}$ é simplesmente obtido pela multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{z} \\ c\bar{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ ct \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

com a TL padrão

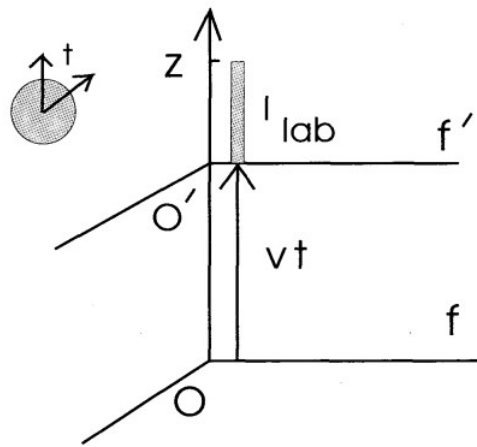
$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{z - vt}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \bar{t} &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

suponha-se que o evento ocorra na posição da origem O' . Então

$$\begin{aligned} z &= vt, \\ \bar{z} &= 0, \\ \bar{t} &= t(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

logo, chega ao resultado anterior para a dilatação do tempo. Suponha que se tenha uma barra de comprimento l em repouso no referencial f' e orientada ao longo do eixo z começando em O' . Em seguida um segundo evento ocorre quando a ponta da barra atingir algum ponto z no referencial f (o “laboratório”). Isso ocorrerá em algum momento t em f . A posição da extremidade posterior da barra em f no momento t será simplesmente vt . A situação é ilustrada da seguinte forma comprimento em f' ;

Figura 9 – Um segundo evento, depois o primeiro evento, visto nos dois referenciais inerciais f e f' .



Fonte: Walecka, 2010.

$$\bar{z} = l$$

$$l_{lab} = z - vt$$

$$= l(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

A barra aparece mais curta no referencial f . Há uma contração de Lorentz de seu comprimento na direção do movimento, com

$$l_{lab} = l(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

Percebe-se que mudam de um referencial para o outro tanto o comprimento quanto o tempo, mas as mudanças de coordenadas na transformação de Lorentz são exatamente para manter a velocidade da luz constante nos dois referenciais inerciais. Para ver isso, suponha que haja dois eventos no espaço-tempo que possam ser conectados com um sinal de luz. Por exemplo, a luz é emitida por um oscilador em um ponto e absorvida por um segundo oscilador em outro

ponto. Comece no referencial inercial f . Um observador diz que o primeiro evento ocorreu em $\mathbf{x}_1 = (\vec{x}_1, ct_1)$ e o segundo em $\mathbf{x}_2 = (\vec{x}_2, ct_2)$. O observador então mede uma velocidade c para o sinal de luz (distância/tempo). Isso implica que o intervalo global conectando esses dois eventos desaparece em f

intervalo de luz;

$$s_{12}^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = 0 \quad (4.8)$$

O intervalo é uma quantidade física que é preservada sob uma transformação de coordenadas. Agora, fazendo uma transformação de Lorentz para um segundo referencial inercial f' . Um observador neste referencial diz que o primeiro evento ocorre em $\mathbf{x}_1 = (\vec{x}'_1, ct'_1)$ e o segundo em $\mathbf{x}_2 = (\vec{x}'_2, ct'_2)$, mas como o intervalo novamente desaparece

$$s_{12}^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 = (\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2)^2 - c^2(t'_1 - t'_2)^2 = 0 \quad (4.9)$$

o segundo observador mede a velocidade certa para o sinal de luz (mesma distância/tempo). Observe que o sinal de menos na quarta componente da métrica de Lorentz na Eq. (2.5) é o que leva a esse resultado.

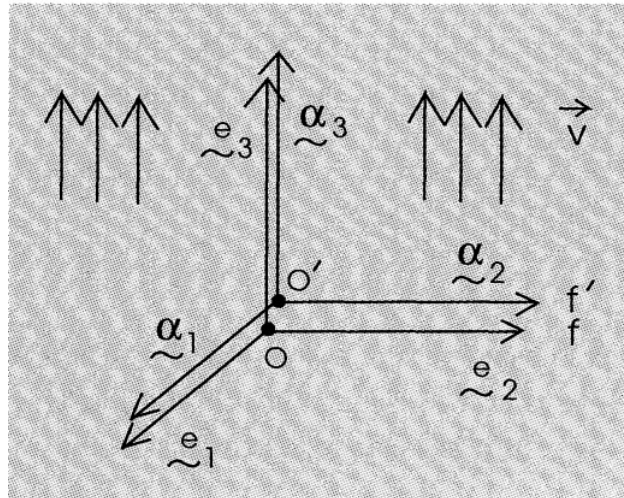
5 HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

Agora será aplicado todo arcabouço teórico da RE, para obter a dinâmica de um fluido relativístico [9, 11, 14, 15]. Na RE, existe um tensor energia-momento de segunda ordem para o fluido

$$T = T^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = \bar{T}^{\mu\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu, \quad (5.1)$$

logo, será útil para uma análise detalhada de um fluido isotrópico sem forças de cisalhamento em um sistema onde os vetores de base espacial cartesiana são $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ com origem O em um referencial f com velocidade $\vec{v} = v\mathbf{e}_3$ constante. Ainda no mesmo sistema, tem-se a presença de um segundo referencial f' com vetores de base espacial $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com uma origem O' que coincide com O quando os relógios iniciam. Representado da seguinte forma o tensor

Figura 10 – Fluido isotrópico sem forças de cisalhamento movendo-se com velocidade uniforme $\vec{v}$



Fonte: Walecka, 2010.

energia-momento $\bar{T}^{\mu\nu}$ no referencial de repouso do fluido f' é definido como

$$\begin{aligned} \bar{T}^{ij} &= P\delta^{ij} \\ \bar{T}^{44} &= \rho c^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde, mais uma vez, os índices latinos se referem as componentes espaciais. Aqui P é a pressão, ρ é a densidade de massa adequada e ρc^2 é a densidade de energia adequada. A

lei de transformação do tensor nos permite re-expressar este tensor no referencial f como

$$T^{\mu\nu} = a_{\mu'}^{\mu} a_{\nu'}^{\nu} \bar{T}^{\mu'\nu'} \quad (5.3)$$

após a substituição da Eq. (5.2), isso se torna

$$T^{\mu\nu} = P a_i^{\mu} a_i^{\mu} + \rho c^2 a_4^{\mu} a_4^{\nu}. \quad (5.4)$$

A Eq. (??) agora pode ser usada para reescrever a segunda contribuição em termos da quadri-velocidade do fluido

$$\begin{aligned} a_4^{\mu} a_4^{\nu} &= \frac{1}{c^2} u^{\mu} u^{\nu} \\ \frac{1}{c} u^{\mu} &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} [0, 0, \beta, 1] \end{aligned} \quad (5.5)$$

se o fluido estiver se movendo em uma direção arbitrária, a quadri-velocidade é dada pela Eq. (??)

$$\frac{1}{c} u^{\mu} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} [\vec{\beta}, 1], \quad (5.6)$$

onde $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$. Para o primeiro termo na Eq. (5.4), afirma-se que para a presente configuração

$$a_i^{\mu} a_i^{\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^{\mu} u^{\nu} \quad (5.7)$$

a prova é simplesmente uma avaliação direta usando a Eq. (2.32)

$$\begin{aligned} a_i^1 a_i^1 &= a_i^2 a_i^2 = 1, \\ a_i^1 a_i^2 &= a_i^1 a_i^3 = a_i^1 a_i^4 = a_i^2 a_i^1 = a_i^2 a_i^3 = 0, \\ a_i^4 a_i^4 &= \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = -1 + \frac{1}{1-\beta^2}, \\ a_i^3 a_i^3 &= \frac{1}{1-\beta^2} = 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}, \\ a_i^3 a_i^4 &= a_i^4 a_i^3 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

portanto, logo deve ser comparado com

$$\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^{\mu} u^{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} & \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta^2}{1-\beta^2} & -1 + \frac{1}{1-\beta^2} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

observa-se que isso é idêntico a Eq. (5.8), e o resultado está estabelecido. Em resumo, o tensor energia-momento para um fluido isotrópico sem forças de cisalhamento movendo-se com quatro velocidades u^μ é dado por

$$T^{\mu\nu} = P\eta^{\mu\nu} + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u^\mu u^\nu. \quad (5.10)$$

Diante do que foi visto sabe-se que a quadri-velocidade u^μ é um quadri-vetor pela forma como foi definida; a métrica é um tensor de segunda ordem; a pressão e a densidade de energia adequada são definidas no referencial de repouso do fluido e não se transformam, logo, eles são escalares de Lorentz. Portanto, $T^{\mu\nu}$ é de fato um tensor de Lorentz de segunda ordem, que é claramente simétrico

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (5.11)$$

De modo geral, um fluido clássico é feito de partículas, que não são criadas nem destruídas. A corrente de uma partícula na relatividade especial forma um quadri-vetor e também pode-se definir a densidade de partícula e a corrente no referencial de repouso do fluido como

$$\begin{aligned} \bar{N}^4 &= n, \\ \bar{N}^i &= 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

em um determinado referencial, a corrente transformada é então dada por

$$N^\mu = a^\mu_\nu \bar{N}^\nu = n a^\mu_4, \quad (5.13)$$

portanto,

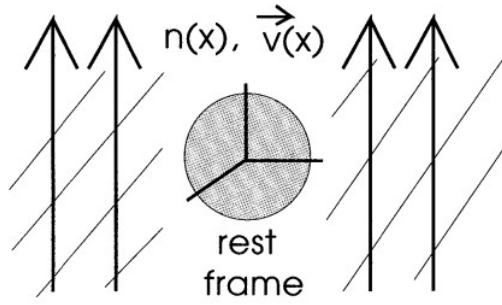
$$N^\mu = \frac{n}{c} u^\mu, \quad (5.14)$$

logo, essa equação quando considerada inicialmente no ponto $x = (\vec{x}, t)$ do referencial a corrente tem a forma

$$N^\mu = \frac{n(x)}{c} u^\mu(x). \quad (5.15)$$

A conservação atual aqui reflete a conservação do número de partículas que compõem o fluido. No referencial de repouso local, a corrente de partícula $\bar{S}^i$ desaparece na origem, mas como agora ela varia de ponto a ponto, sua divergência espacial $\frac{\partial \bar{S}^i}{\partial \bar{x}^i}$ pode não desaparecer ali e, portanto, $\frac{\partial n}{\partial t}$ pode ser diferente de zero. como ilustra a seguir em uma transição de uma análise global para a local a densidade do fluido e o campo de velocidade variam com $x = (\vec{x}, t)$, mas existe um referencial local no qual o fluido está em repouso na origem, logo, todas as velocida-

Figura 11 – Transição da análise global para local



Fonte: Walecka, 2010.

des são pequenas e, portanto, pode ser usada a conhecida análise não relativística.

$$\frac{\partial n}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \bar{S}^i = 0 \quad (5.16)$$

com o emprego do atual quadri-vetor, tem-se

$$\bar{N}^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \bar{S}^i, n \right), \quad (5.17)$$

portanto, a Eq (5.16) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} \bar{N}^\mu = 0, \quad (5.18)$$

as barras novamente indicam quantidades no referencial de repouso local. Esta é a demonstração de conservação de corrente na origem, como

$$\bar{\partial}_\mu \bar{N}^\mu = 0, \quad (5.19)$$

agora percebe-se que a conexão afim desaparece em um espaço onde a métrica é plana cartesiana

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (5.20)$$

portanto, a derivada ordinária também é a derivada covariante neste caso. Assim, o l.h.s. da Eq. (5.18) e pode ser escrita como uma divergência covariante

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{N}^\mu = 0, \quad (5.21)$$

agora fazendo a transformação de coordenadas (transformação de Lorentz) do referencial de repouso local de volta ao referencial de laboratório. Tem-se a correspondente de conservação

de corrente no referencial de laboratório como

$$\nabla_\mu N^\mu = \bar{\nabla}_\mu \bar{N}^\mu, \quad (5.22)$$

novamente, a conexão afim desaparece com a métrica da Eq. (2.28), e a divergência covariante no referencial de laboratório se reduz à divergência ordinária

$$\nabla_\mu N^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} N^\mu = 0, \quad (5.23)$$

com a substituição da Eq. (5.15), essa relação se torna

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{n(x)}{c} u^\mu(x) \right] = 0 \quad (5.24)$$

esta é a conservação de partículas no referencial do laboratório na relatividade restrita. E em detalhes, com a substituição da Eq. (5.40), esta relação afirma a corrente atual

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{b\vec{\beta}}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{n}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0, \quad (5.25)$$

aqui $n(\vec{x}, t)$ é a densidade da partícula local, definida no referencial de repouso local, e $\vec{v}(\vec{x}, t) = c\vec{\beta}(\vec{x}, t)$ é a velocidade local do fluido de laboratório. O limite não relativístico desta expressão simplifica consideravelmente e reduz a

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0. \quad (5.26)$$

Considerando agora a conservação do tensor energia-momento e em seguida indo para o referencial de repouso do fluido e, nas proximidades da origem no referencial de repouso, pode-se novamente usar a análise não relativística. Com $u^\mu \rightarrow (\vec{v}, c)$ e $\frac{P}{\rho c^2} \rightarrow 0$, Eq. (5.10) se reduz a

$$\begin{aligned} \bar{T}^{ij} &= P\delta^{ij} + \rho \vec{v}^i \vec{v}^j \\ \bar{T}^{ij} &= \rho \vec{v}^i, \\ \bar{T}^{44} &= \rho c^2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

e a forma não relativística das leis de conservação é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \bar{T}^{4j} + \frac{\partial}{\partial \bar{c}t} \bar{T}^{i4} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \bar{T}^{4j} + \frac{\partial}{\partial \bar{c}t} \bar{T}^{44} &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

A primeira relação é apenas a lei de Newton para o fluido, que leva à equação básica da hidrodinâmica. A segunda relação é a equação de continuidade para a densidade de energia ρc^2 , que expressa a conservação de energia. Essas relações podem ser combinadas para expressar a conservação de energia-momento no referencial de repouso como a relação tensorial

$$\bar{\partial}_\nu \bar{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (5.29)$$

$$\mu = 1, \dots, 4$$

a conexão afim desaparece, e isso é o mesmo que uma declaração sobre a divergência covariante

$$\bar{\nabla}_\nu \bar{T}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.30)$$

agora, como antes, realiza-se uma transformação de coordenadas de volta ao referencial do laboratório. Os índices não se transformam, e assim

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = a_{\mu'}^\mu \bar{\nabla}_\nu \bar{T}^{\mu'\nu} = 0, \quad (5.31)$$

a divergência covariante é novamente a mesma que a divergência ordinária, e a lei da conservação de energia-momento no referencial de laboratório torna-se

$$\begin{aligned} \partial_\nu T^{\mu\nu} &= 0, \\ \mu &= 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (5.32)$$

O tensor de tensão local é dado por

$$T^{\mu\nu}(x) = P(x)\eta^{\mu\nu} + \left[\rho(x) + \frac{P(x)}{c^2} \right] u^\mu(x)u^\nu(x), \quad (5.33)$$

e a quadri-velocidade local é

$$\frac{1}{c}u^\mu(x) = \frac{1}{[1 - \beta^2(x)]^{\frac{1}{2}}} [\vec{\beta}(x), 1], \quad (5.34)$$

$$\vec{v} = \vec{\beta}c$$

. Passamos a escrever a Eq. (5.32) em detalhes.

(1) Para $\mu = 1$, um índice espacial, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x^i} P + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^j u^i \right] + \frac{\partial}{\partial ct} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{u^i c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} P = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\vec{v} v^j}{1 - \beta^2} \right] + \frac{\partial}{\partial ct} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\vec{v} c}{1 - \beta^2} \right] = 0. \quad (5.35)$$

(2) Para $\mu = 4$, encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial ct} (-P) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^4 u^j \right] + \frac{\partial}{\partial ct} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{c^2}{1 - \beta^2} \right] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial ct} (-P) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{v^j c}{1 - \beta^2} \right] + \frac{\partial}{\partial ct} \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{c^2}{1 - \beta^2} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

agora combinando essas duas relações com (1) – $(\vec{v}/c)$ (2):

$$\vec{\nabla} P + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}{1 - \beta^2} + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c} \frac{\partial P}{\partial ct} = 0, \quad (5.37)$$

esta é a equação relativística de Euler para fluxo de fluido

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1 - \beta^2}{\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)} \left[\vec{\nabla} P + \vec{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{c^2} \right) \right], \quad (5.38)$$

o limite não relativístico (NRL) produz a conhecida equação básica da hidrodinâmica para o campo de velocidade $\vec{v} = (\vec{x}, t)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{f}_{app}, \quad (5.39)$$

aqui é incluído a possibilidade de um força adicional $\vec{f}_{app}$

A expressão em (2) acima Eq. (5.36) é a generalização relativística da equação de continuidade para a densidade de energia. A multiplicação por c e uma expansão subsequente em $1/c^2$ fornece o limite não relativístico para a conservação de energia como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{v} \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + P \right) \right] = \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_{app}, \quad (5.40)$$

aqui $\rho \varepsilon$ é a densidade de energia interna no sistema de laboratório, que na ordem de partida é apenas $\rho \varepsilon = \rho c^2$ [veja a segunda das Eqs. (5.28)]. Aqui incluímos novamente a possibilidade de uma força $\vec{f}_{app}$ adicional realizando trabalho no sistema. A Eq. (5.40) permite identificar tanto a densidade de energia quanto o fluxo de energia para o fluido em movimento através desta ordem.

6 CONCLUSÃO

A partir da formulação covariante da RE, foi possível encontrar de maneira mais simplista as TL que conectam os RI, as quantidades cinemáticas: quadri-vetor velocidade, aceleração, momento e energia relativísticos, etc. Também foi feita a análise da linha-mundo de uma partícula relativística no espaço-tempo de Minkowski, onde foi definido o tempo-próprio, $d\tau$, que é o parâmetro que descreve a evolução da partícula. Aplicamos todo esse ferramental matemático para investigar a Hidrodinâmica Relativística, ou seja, o comportamento de um fluido com velocidade próxima a da luz. Foi encontrado o tensor-energia do fluido, sua pressão e a equação da continuidade para o limite não-relativístico. Espera-se aplicar o estudo da HR a modelos mais complexos, como colapso de estrelas e em modelos cosmológicos que descrevem a evolução do universo.

REFERÊNCIAS

- [1] RINDLER, W. *Relativity: Special, general, and cosmological*. [S.l.: s.n.], 2006.
- [2] BARCELOS NETO, J. *Fundamentos de relatividade especial*. [S.l.: s.n.], 1994. 210 p.
- [3] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.: s.n.], 1992. ISBN 978-0-19-859686-8.
- [4] PADMANABHAN, T. *Gravitation: Foundations and frontiers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-7-301-22787-9.
- [5] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.
- [6] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [7] WALECKA, J. D. *Introduction to general relativity*. [S.l.]: World Scientific, 2017. ISBN 978-981-322-769-9.
- [8] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *Fluid Mechanics: Volume 6*. Elsevier Science, 2013. ISBN 9781483140506. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=CeBbAwAAQBAJ>.
- [9] REZZOLLA, L.; ZANOTTI, O. *Relativistic Hydrodynamics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. ISBN 978-0-19-174650-5, 978-0-19-852890-6.
- [10] WEICKGENANT, N. *New developments in relativistic hydrodynamics*. 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2207.14095>.
- [11] KREMER, G. M. *Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation*. 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1404.7083>.
- [12] CHORIN, A.; MARSDEN, J. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer New York, 2013. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 9781461208839. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=HBXSBwAAQBAJ>.
- [13] SCHUTZ, B. F. *A FIRST COURSE IN GENERAL RELATIVITY*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., 1985. ISBN 978-0-511-98418-1.
- [14] ANILE, A. M. *Relativistic Fluids and Magneto-fluids: With applications in astrophysics and plasma physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

- [15] GOURGOULHON, E. An introduction to relativistic hydrodynamics. *EAS Publications Series*, EDP Sciences, v. 21, p. 43–79, 2006. ISSN 1638-1963. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1051/eas:2006106>.