



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO DE FÍSICA**

THAILAN DIAS DE FRANÇA

**DA PARTÍCULA AO CAMPO: UM ESTUDO DO CAMPO SPINORIAL E SUAS
SIMETRIAS INTERNAS**

SÃO RAIMUNDO NONATO

2025

THAILAN DIAS DE FRANÇA

DA PARTÍCULA AO CAMPO: UM ESTUDO DO CAMPO SPINORIAL E SUAS
SIMETRIAS INTERNAS

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para a obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sousa Ribeiro .

SÃO RAIMUNDO NONATO
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

França, Thailan Dias de
F814p Da Partícula ao campo : um estudo do campo spinorial e suas simetrias
internas / Thailan Dias de França. - 2025.
45 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo
Nonato, 2025.

Orientador : Prof Dr. Antonio Sousa Ribeiro.

1. relatividade especial. 2. grupo de Lorentz. 3. equação de Dirac. 4. teoria
de campos . I.Título.

CDD - 530

Elaborado por Uliscley Silva Gomes CRB 15/938

THAILAN DIAS DE FRANÇA

DA PARTÍCULA AO CAMPO: UM ESTUDO DO CAMPO SPINORIAL E SUAS
SIMETRIAS INTERNAS

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para a obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.

Aprovada em 11/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Sousa Ribeiro (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Luís Rodolfo dos Santos Filho
Centro Brasileiro de Pesquisa Física (CBPF)

Prof. Dr. Jeferson Dias Goncalves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí (IFPI)

“Que a força esteja com você”
Obi-Wan Kenobi

Dedico este trabalho aos meus pais, Crislene e José Nery.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Crislene, por todo o suporte, carinho e sabedoria. Agradeço também ao meu pai, José Nery, por todos os ensinamentos, valores e por ser o meu maior exemplo de integridade e caráter, mostrando-me, a cada dia, como ser uma pessoa melhor.

Agradeço aos professores Mauryléia, Rafael, Valdemir, Guilherme, Ronan, Marcus Viana, Gilvan, Aline e, especialmente, ao meu orientador, Antônio Ribeiro, a quem tenho imenso respeito e consideração, por todas as horas dedicadas a me orientar da melhor maneira possível. Também agradeço imensamente ao IFPI por toda a estrutura oferecida, incluindo transporte, biblioteca e o RU. Um agradecimento ainda mais especial vai para os meus colegas de graduação, a todos eles, especialmente para Anne Beatriz, Adriano, Cássia, Daniela, Kahuã, Patrícia e Sara.

RESUMO

Este trabalho revisa a Teoria da Relatividade Especial (TRE), abordando as implicações geométricas do espaço-tempo de Minkowski e aprofundando-se nos aspectos matemáticos do grupo de Lorentz (GL). Além disso, é derivada a equação de onda para uma partícula relativística, que resulta na equação de Dirac, a qual descreve partículas de spin $1/2$. Em seguida, realiza-se um estudo detalhado sobre as simetrias locais em teoria de campos e sua conexão com o campo espinorial. O objetivo deste material didático é proporcionar uma compreensão clara e acessível das ferramentas matemáticas necessárias para o estudo das teorias de campos relativísticas, facilitando tanto a análise teórica quanto a manipulação das equações que descrevem o comportamento das partículas. Espera-se que este conteúdo seja útil como complemento à bibliografia básica da área, permitindo que estudantes iniciantes em Física de Altas Energias e Partículas Elementares possam explorar e aprofundar seus conhecimentos nesse campo desafiador e fascinante. O material visa, portanto, auxiliar na transição do aprendizado inicial para um entendimento mais profundo das complexas interações entre partículas e campos.

Palavras-chave: relatividade especial; grupo de Lorentz; equação de Dirac; teoria de campos; simetrias locais

ABSTRACT

This work reviews the Special Theory of Relativity (SRT), addressing the geometric implications of Minkowski spacetime and delving into the mathematical aspects of the Lorentz group (GL). In addition, the wave equation for a relativistic particle is derived, which results in the Dirac equation, which describes particles of spin $1/2$. Then, a detailed study is carried out on local symmetries in field theory and their connection with the spinor field. The objective of this teaching material is to provide a clear and accessible understanding of the mathematical tools necessary for the study of relativistic field theories, facilitating both theoretical analysis and the manipulation of the equations that describe the behavior of particles. It is expected that this content will be useful as a complement to the basic bibliography of the area, allowing students beginning in High Energy Physics and Elementary Particle Physics to explore and deepen their knowledge in this challenging and fascinating field. The material therefore aims to assist in the transition from initial learning to a deeper understanding of the complex interactions between particles and fields.

Keywords: special relativity; Lorentz group; Dirac equation; field theory; local symmetries.

LISTA DE SÍMBOLOS

x^μ	Representação das coordenadas do espaço-tempo
η	Letra grega eta
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski
p^μ	Quadri-vetor momento
$dx_\mu dx^\mu$	Convecção da soma de Einstein
Λ	As matrizes do grupo de Lorentz
$\in$	Simbolo de pertence
$\cap$	Simbolo de Interseção
δ	Letra grega minúscula delta
ϵ_{ijk}	Simbolo de Levi-Civita
$\dagger$	Dagger
H	Hamiltoniano
p	Momento da partícula
E	Energia da partícula
$\psi(\vec{r}, t)$	Função de onda
c	Velocidade da luz
$\hbar$	Constante de Planck reduzida
$\square$	Operador diferencial D'Alambertiano
$*$	Complexo conjugado
J^μ	Densidade de corrente
tr	Traço das matrizes
∂	Derron Slah
I	Identidade
$(+ - - -)$	Assinatura da métrica

LISTA DE SIGLAS

RE	Relatividade Especial
TL	Transformação de Lorentz
GL	Grupo de Lorentz
MQ	Mecânica Quântica
TRE	Teoria da Relatividade Especial

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL - (TRE)	14
2.1	Espaço de Minkowski	14
2.2	Grupo de Lorentz	15
2.3	Geradores do Grupo de Lorentz	19
3	EQUAÇÃO DE ONDA RELATIVÍSTICA DE UMA ÚNICA PARTÍCULA	26
3.1	Equação de Dirac	26
4	SIMETRIAS LOCAIS EM TEORIA DE CAMPOS	29
5	CONCLUSÃO	32
	APÊNDICE A – ÁLGEBRA DE LIE DO GRUPO DE LORENTZ	33
	APÊNDICE B – DEDUÇÃO MATEMÁTICA DO CAMPO SPINORIAL .	42
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Erwin Schrödinger, no final de 1925 formulou uma equação quântica que descrevia a evolução temporal de um elétron. Porém, seu limite de validade é apenas para baixas velocidades. Sendo assim, a equação de Schrodinger não é consistente com a Teoria da Relatividade Especial (TRE) de Einstein. Inúmeros foram os esforços para tentar conciliar a Mecânica Quântica, que descreve o mundo microscópico, e a RE que descreve partículas com velocidades próximas a da luz [1, 2]. Klein e Gordon tentaram formular uma teoria que fosse consistente com a RE e com a transformação geral da Mecânica Quântica (MQ), mas falharam em seu objetivo.

A equação de Klein-Gordon era de segunda ordem no espaço e no tempo, e isso implicava que a normalização da função de onda não poderia ser definida positiva, além de ser complicado interpretá-la corretamente. Porém, mais tarde, ela viria a ser uma equação que descrevia partículas com spin igual a zero, as quais, até então (1926), ainda não haviam sido descobertas [3, 4]. A equação de Klein-Gordon possuía soluções de energia positivas e negativas, sendo ela uma derivada de segunda ordem no tempo, e sua densidade de probabilidade uma derivada de primeira ordem no tempo. Juntamente com as soluções de energia negativa, isso implicava que a normalização da função de onda não deveria ser definida de forma positivo-definida. Além de tornar sua interpretação mais complicada, o que é inconsistente com a definição de uma densidade de probabilidade [5, 6].

Coube a Paul Dirac, em 1928, unificar a MQ e a TRE em uma teoria quântica para o elétron. Ele mostrou que a invariância de Lorentz exigiria que o espaço e o tempo fossem tratados em um pé de igualdade e, portanto, tal equação resultante deveria ser de primeira ordem nas derivadas de espaço e tempo assim como a equação de Schrödinger. Dirac introduziu o conceito de spinor, ou seja, que a função de onda para o elétron relativístico possuía quatro componentes. Explicando, assim, a origem do spin do elétron e prevendo teoricamente a existência da antimatéria [2].

O estudo das equações de onda de Dirac e Klein-Gordon, basearam-se na teoria de grupos, mais precisamente no grupo de Lorentz. Porém, o estudo de simetrias ainda continuava progredindo, e chegou a um estágio que podemos considerar como muito avançado. Um desses estágios é as simetrias de gauge, ou simetrias de calibre, que surgem quando tentamos promover uma simetria global em uma simetria local. As simetrias de gauge constituem um grupo, que podemos tratar como grupo de acoplamento entre os campos, de maneira que se preserve cada ponto do espaço-tempo que ela está presente. A teoria eletromagnética é invariante para uma determinada transformação de gauge. Podemos dizer que as transformações de gauge estão

diretamente relacionadas com a invariância de uma determinada lagrangiana, isso em um dado sistema físico, que está sob as transformações locais dos campos, sendo assim, tal teoria pode ser trabalhada para o caso não abeliano.

Essas transformações são constituídas no que podemos chamar de um grupo de Lie, que é o grupo na qual ela está presente. Sendo assim, consideramos o Eletromagnetismo como uma Teoria de Gauge invariante sob o grupo $U(1)$. Os campos de gauge não abelianos não tiveram muita utilidade no início, ou seja, não se cogitava utilizá-la em interações. Alegando que os resultados que se poderia alcançar com essa teoria eram de curto alcance, assim não seria conveniente trabalhá-la com partículas de massa zero (fotón)[7]. Os campos não abelianos tiveram seu primeiro grande sucesso com a unificação das teorias fracas e eletromagnéticas, assim denominada de teoria eletrofraca, isso no final dos anos 60.

Neste projeto estudaremos o spinor de Dirac de forma clara e objetiva, apresentando equações bem elaboradas e minimalistas, onde nesta exposição das equações que se entendiam como necessária para o estudo foram abordadas de forma clara e explícita para facilitar a compreensão. Destacando a relação entre a mecânica quântica e a relatividade, focando no detalhamento de parte do conteúdo para melhor absorção, e por fim, apresenta-se a dedução da equação que descreve um elétron em velocidades próximas à da luz. A ideia é proporcionar um texto compreensível e de referência para os estudantes de Física que desejam se aprofundar nessa importante área do conhecimento que é a teoria quântica de campos, tornando o estudo da teoria acessível e menos intimidante.

O texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 é feita uma revisão da TRE e do grupo GL e seus geradores: boost e rotações. No capítulo 3 trata-se as equações de onda relativística de uma única partícula, onde é deduzida a equação de Dirac. No capítulo 4 é feito um estudo sobre simetria de gauge e a lagrangiana do campo Spinorial.

2 TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL - (TRE)

Einstein em 1905, apresentou a Teoria da Relatividade Especial (TRE), e Minkowski mostrou que ela poderia ser entendida geometricamente como uma teoria do espaço-tempo quadridimensional, mostrando que o espaço e o tempo não são separados, mas são entrelaçados e dependem do movimento relativo dos observadores.

2.1 Espaço de Minkowski

O espaço de Minkowski é caracterizado por ser um espaço-tempo quadridimensional, no qual o vetor posição é dado por,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x^\mu \mathbf{e}_\mu, \\ x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3),\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que $\mu = 0, 1, 2, 3$, e a coordenada $x^0 = ct$ e x^1, x^2, x^3 são as coordenadas cartesianas [6, 8]. O espaço tangente é idêntico a todo o de Minkowski, e é plano. Isto implica que os vetores de base são globais. O deslocamento é infinitesimal definindo o elemento de linha como,

$$ds = \mathbf{e}_\mu dx^\mu,\tag{2.2}$$

o dx^μ refere-se a um pequeno diferencial de uma coordenada no espaço-tempo. Esses diferenciais são usados na descrição de trajetórias de partículas ou na construção de objetos como o intervalo no espaço de Minkowski. O $\mathbf{e}_\mu$ se refere aos vetores de base associados às coordenadas do espaço-tempo e são usados para representar direções no espaço de Minkowski. O quadrado deste deslocamento, que define o intervalo, é então,

$$\begin{aligned}(ds) \cdot (ds) &= (\mathbf{e}_\mu dx^\mu) \cdot (\mathbf{e}_\nu dx^\nu), \\ (ds)^2 &= (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu, \\ (ds)^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde,

$$\eta_{\mu\nu} = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu).\tag{2.4}$$

A equação (2.4) define o tensor métrico ou simplesmente a métrica do espaço-tempo de Minkowski. Ela é um tensor de rank 2, sua forma matricial é:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

assim, a forma explícita do intervalo é:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.6)$$

Ela descreve a estrutura geométrica do espaço e determina como calcular a distância ou o intervalo entre dois eventos no espaço-tempo. Também incorpora a ideia de que o espaço e o tempo não são entidades separadas, mas estão intimamente conectados, formando o espaço-tempo. A métrica nada mais é do que os elementos de linha dos espaços vetoriais, onde ela é invariante sob certas transformações, como as (as transformações de Lorentz). A métrica de Minkowski é indefinida, ou seja, ela pode assumir valores negativos, positivos e zero.

2.2 Grupo de Lorentz

Podemos considerar na matemática um grupo como uma estrutura $\{G, \cdot\}$, consistindo de um conjunto G e uma operação " $\cdot$ ", que satisfaz às seguintes propriedades [9–11]:

- Se $a \in G$ e $b \in G$, então $a \cdot b \in G$, (operação de fechamento).
- Para todo $a, b, c \in G$, temos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (propriedade associativa).
- Existe um elemento identidade $e \in G$ tal que para todo $a \in G$ temos $e \cdot a = a \cdot e = a$.
- Para todo $a \in G$, existe um elemento inverso, dado por a^{-1} , também pertencente a G , tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Se os elementos $a, b \in G$ comutam, ou seja, $a \cdot b = b \cdot a$, o grupo é dito ser abeliano, os que não comutam são classificados como não abelianos, os quais são de grande importância para o estudo da Física de partículas e do modelo padrão. Em Física utiliza-se com frequência o grupo de rotações. Serão utilizadas as definições acima no caso quando os elementos $a, b, c \in G$ são todos as possíveis rotações no R^3 sobre um ponto fixo [9–11].

As leis físicas são invariantes sob as Transformações de Lorentz (TL), elas são transformações lineares agindo sobre os quadrivetores e que constituem o grupo Lorentz. O

grupo de Lorentz é o conjunto de matrizes que obedecem à seguinte relação,

$$\eta = \Lambda \eta \Lambda^T, \quad (2.7)$$

representa uma relação fundamental que descreve a invariância da métrica de Minkowski mantendo inalteradas as distâncias e intervalos entre eventos, sendo denominada TL, onde η representa a métrica do espaço-tempo de Minkowski, e Λ são as matrizes da representação deste grupo. O grupo de Lorentz também é conhecido como o grupo ortogonal SO (1,3). A Eq.(2.7) também é conhecida como a forma matricial do grupo de Lorentz.

Com uma grande importância na Física relativística, o grupo O (1,3) tem a denominação de especial, também conhecido como o grupo de Lorentz [9]. Ele é o grupo de todas as matrizes 4×4 que satisfazem a relação da equação acima.

Um ponto na variedade do espaço-tempo é denotado por $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ onde $x^0 = ct$. O grupo de Lorentz é um grupo de todas as transformações lineares atuando no espaço de Minkowski,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (2.8)$$

A expressão mostrada abaixo é conhecida como a forma quadrática. Onde,

$$\begin{aligned} x^2 &= x_\mu x'^\mu \\ x^2 &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ x^2 &= (x^0)^2 - (\vec{x})^2, \end{aligned}$$

a forma invariante é,

$$\begin{aligned} x'^2 &= x'^\mu x'_\mu \\ x'^\mu x'_\mu &= \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \\ x'^2 &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho x^\rho \Lambda^\nu_\tau x^\tau \\ x'^2 &= \eta_{\mu\nu} (\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\tau x^\rho x^\tau) \\ \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu &= (\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\tau) x^\rho x^\tau \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\tau &= \eta_{\rho\tau} x^\rho x^\tau \\ \eta_{\rho\tau} &= \Lambda^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\tau \\ \eta &= \Lambda^T \eta \Lambda. \end{aligned} \quad (2.9)$$

a relação x^2 e x'^2 é uma das propriedades fundamentais da teoria da relatividade especial e reflete o fato de que as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais. A equação (2.9) é a forma matricial das transformações de Lorentz invariante. Lembrando que

η é uma matriz que tem todos os elementos da sua diagonal principal igual a 1. Partindo da equação acima, podemos obter o seguinte;

$$\begin{aligned}\det(\eta_{\rho\tau}) &= \det(\eta_{\mu\nu}\Lambda_\rho^\mu\Lambda_\tau^\nu) \\ \det(\eta_{\rho\tau}) &= \det(\eta_{\mu\nu})\det(\Lambda_\rho^\mu)\det(\Lambda_\tau^\nu) \\ \det(\Lambda) &= \pm 1.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Tomando a componente (0,0), ou seja, $\rho = \tau = 0$ da eq. (2.9), temos o seguinte;

$$\begin{aligned}\eta_{00} &= \eta_{\mu\nu}\Lambda_0^\mu\Lambda_0^\nu \\ \eta_{00} &= \eta_{00}\Lambda_0^0\Lambda_0^0 + \eta_{ii}\Lambda_0^i\Lambda_0^i \\ (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^i)^2 &= 1 \rightarrow (\Lambda_0^0)^2 = 1 + (\Lambda_0^i)^2,\end{aligned}\tag{2.11}$$

portanto,

$$(\Lambda_0^0)^2 \geq 1 \rightarrow (\Lambda_0^0)^2 \geq |\Lambda_0^i|.\tag{2.12}$$

Os vínculos $\det(\Lambda) = \pm 1$, $|\Lambda_0^0| \geq 1$ define quatro pedaços desconectados no espaço de parâmetros. Os parâmetros são as coordenadas que descrevem como o grupo de Lorentz age sobre o espaço-tempo e incluem rotações no espaço tridimensional, sendo ele um espaço de 6 dimensões que pode ser parametrizado por 3 rotação e 3 parâmetros de boost. O segundo vínculo $|\Lambda_0^0|$ distingue e usam a chamada TL ortocrona, com $\Lambda_0^0 \geq 1$ e a TL não ortocrona, com $\Lambda_0^0 \leq -1$ [12]. Um dado elemento do grupo de Lorentz é considerado próprio se $\det\Lambda = 1$ e impróprio se esse $\det\Lambda = -1$. Essas duas características $|\Lambda_0^0| \geq 1$ e $\Lambda_0^0 \leq -1$, nos permitem separar as transformações de Lorentz em quatro conjuntos, chamados de $L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$, onde os índices + e - refere-se a $\det\Lambda$, e as setas estão relacionadas a esse determinante ser positivo ou negativo. Somente a transformação $L_+^\uparrow$ tem significado físico presente nela e são ditas como próprias. Já as demais, envolvem tanto inversão espacial ou paridade quanto a inversão temporal, ou seja, elas não correspondem a simetrias exatas e são chamadas de transformações impróprias. Mesmo assim, ainda se pode construir grupos com essas transformações, e eles são conhecidos como grupo ortocrono, grupo próprio e grupo anticrono [12].

As matrizes (Λ_ν^μ) formam um grupo de Lie não compacto do grupo de Lorentz,

$$O(1,3) = [\Lambda \in GL(4, R) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta],\tag{2.13}$$

com a álgebra de Lie. Um grupo de Lorentz não compacto é um tipo de grupo que preserva a simetria do espaço de Minkowski, e não pode ser representado por uma unidade finita, ou

seja, suas operações como multiplicação podem se espalhar e não estarem dentro de uma região limitada. Os grupos de Lie são grupos contínuos, ou seja, são continuamente parametrizados o que nos descrevê-los com um número finito de parâmetros reais de forma suave [9] .

O GL $SO(1,3)$, consiste de todas as transformações lineares do espaço-tempo de Minkowski, que deixam sua forma quadrática invariante, ou seja, não modificam a distância entre dois eventos em diferentes referenciais. O GL é uma generalização das rotações para o espaço quadridimensional de Minkowski, sendo ele um grupo $SO(1,3)$, indicando uma coordenada temporal e três espaciais . As transformações de Lorentz são representadas pelas matrizes Λ , onde essas matrizes possuem 16 componentes entre dependentes e independentes. Se fizermos a relação de $\mu = \nu$ encontramos 4 quantidades se somando a mais 6 quantidades que são encontradas quando fazemos $\mu \neq \nu$ [12]. Juntas elas somam 10 quantidades que são dependentes e as outras 6 são consideradas independentes, e é dessas quantidades que são independentes que se constroem os boosts e as rotações. Três boosts e três rotações. GL $(4, \mathbb{R})$, denota o conjunto de todas as matrizes $M_{4 \times 4}$ invertíveis com componentes reais, na qual $M_{4 \times 4}$ é o conjunto de todas as matrizes 4×4 com elementos reais. Do teorema de Lie sabemos que cada $\Lambda \in O(1,3)$ pode ser escrito na forma,

$$\Lambda(t) = \exp(ta),$$

onde t é um parâmetro real e $a \in O(1,3)$ é um gerador do grupo. O Teorema de Lie, no contexto do grupo de Lorentz $O(1,3)$, nos diz que qualquer transformação de Lorentz pode ser gerada pela exponenciação de elementos da álgebra de Lie $so(1,3)$, é fundamental para entender como as transformações de Lorentz podem ser decompostas em transformações infinitesimais. Os geradores de um grupo G são os elementos a partir dos quais todos os outros elementos do grupo podem ser obtidos, ou seja, os geradores geram o grupo, e qualquer elemento do grupo pode ser escrito como uma combinação As matrizes de $O(1,3)$ estão sujeitas à condição,

$$\begin{aligned} \Lambda^T(t) \eta \Lambda(t) &= [\exp(ta)]^T \eta [\exp(ta)] = \eta \\ \frac{d}{dt} &= [\exp \cdot (ta)]^T \eta [\exp(ta)]|_{t=0} = \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Obtemos a condição para elementos da álgebra de Lie, uma vez que qualquer grupo de Lie é isomófico ao espaço tangente a identidade, que é o espaço vetorial que descreve os vetores tangentes à variedade do grupo no ponto correspondente à identidade do grupo, isso nos diz que a estrutura algébrica associada ao grupo de Lie pode ser entendida como o espaço vetorial de direções infinitesimais no ponto da identidade do grupo,

$$a^T = -\eta a \eta. \quad (2.15)$$

A matriz $\eta_{\mu\nu}$ corresponde a uma matriz classificada como não singular, ou seja, ela possui determinante diferente de 0, e isso implica dizer, que as transformações de Lorentz são lineares, onde a sua representação fica da seguinte forma,

$$a = \eta a \eta^T.$$

Seja Λ qualquer matriz 4×4 invertível com elementos reais, ou seja, $\Lambda \in GL(4, R)$, então,

i) O grupo de Lorentz é completo,

$$L = O(1, 3) = (\Lambda \in GL(4, R) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta).$$

ii) As transformações de Lorentz próprias são L_+ , sendo um subgrupo de Lie,

$$SO(1, 3) = (\Lambda \in O(1, 3) \mid \det \Lambda = +1) L_+.$$

iii) As transformações de Lorentz impróprias são:

$$L_- = (\Lambda \in O(1, 3) \mid \det \Lambda = -1),$$

L_- não é um subgrupo de Lie, uma vez que o elemento identidade não é um elemento de L_- (paridade).

iv) As transformações de Lorentz ortocronas

$$L^\uparrow = (\Lambda \in O(1, 3) \mid \Lambda_0^0 \geq +1) L^+$$

é um subgrupo de Lie.

V) As transformações de Lorentz não ortocronas,

$$L^\downarrow = (\Lambda \in O(1, 3) \mid \Lambda_0^0 \leq -1)$$

vi) O grupo de Lorentz restrito é

$$L^\uparrow \cap L_+ \rightarrow L_+^\uparrow = (\Lambda \in O(1, 3) \mid \det \Lambda = 1) \Lambda_0^0 \geq 1.$$

Uma transformação de Lorentz que é escrita L_+ é dita própria. Já a transformação L_- é chamada de imprópria.

2.3 Geradores do Grupo de Lorentz

A linguagem matemática das simetrias está diretamente relacionada com a teoria de grupos. Os geradores do grupo de Lorentz descrevem os parâmetros matemáticos utiliza-

dos para as tranformações dos sistemas de referênciais íncias, trabalhando com entradas que chamamos de boost, que são um meio de rotações espaciais e temporais do grupo. Esses boost formam um grupo de simetria em quatro dimensões [9–11]. Na vizinhança da Identidade $\mathbf{I}$ $SO(1,3)$, uma transformação de Lorentz é,

$$\omega_{\rho\tau} = -\omega_{\tau\rho}, \quad (2.16)$$

$$\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.17)$$

a variação x^μ é devido a uma transformação infinitesimal. A representação vetorial do grupo de Lorentz restrito $L_+^\uparrow$ é,

$$\Lambda^\mu_\nu = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} M_{\rho\tau} \right) \right]^\mu_\nu, \quad (2.18)$$

na qual a expressão da exponencial significa que Λ pode ser expressada em termos de uma série de operadores, e $M_{\rho\tau}$ são os geradores do grupo de Lorentz. Eles correspondem a operadores que geram transformações infinitesimais no grupo de Lorentz. As matrizes $M_{\rho\tau}$ constituem uma base da álgebra de Lie $O(1,3)$, onde $M_{\rho\tau}$ são antissimétricas em ρ e τ e esse fator é escolhido de tal forma que $M_{\rho\tau}$ são hermitianos ($M^\dagger = M$). Assim essa equação nos mostra de que maneira as transformações de Lorentz podem ser representadas de forma compacta utilizando os geradores da álgebra de Lie de uma forma exponencial.

Então vamos para uma transformação infinitesimal,

$$\delta x^\mu = -\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})^\mu_\nu x^\nu. \quad (2.19)$$

Se igularmos a EQ. (2.19) com a EQ. (A.5), encontramos a relação (2.20),

$$\omega^\mu_\nu = -\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})^\mu_\nu. \quad (2.20)$$

Desta forma podemos encontrar os geradores do grupo de Lorentz na forma matricial,

$$-\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau}) = \omega^\mu_\nu. \quad (2.21)$$

Tais geradores estão associados a tipos de transformações que mantém invariante a métrica de Minkowski. Como este grupo é um grupo de simetrias das equações de onda de Maxwell, ele pode ser escrito como o conjunto que gera rotações em um sistema de coordena-

das, ou seja, os boosts.

As três matrizes M_i geram o $SO(3)$ subgrupo de $SO(1,3)$, e as três matrizes N_i ($i = 1, 2, 3$) geram os boosts de Lorentz, onde esses geradores obedecem relações de comutação, que estão desenvolvidas nas EQ'S. (A.7) e (A.8),

$$\begin{aligned}[M_i, M_j] &= \varepsilon_{ijk} M_k, \\ [N_i, M_j] &= \varepsilon_{ijk} N_k, \\ [N_i, N_j] &= -\varepsilon_{ijk} M_k.\end{aligned}$$

As matrizes M_i são antissimétrica $M_i^T = -M_i$, enquanto os geradores de boost são simétricos $N^T = N$.

Agora podemos construir as matrizes hermitianas $J_l = iM_l$,

$$\begin{aligned}J_l^\dagger &= (iM_l)^\dagger \\ J_l^\dagger &= \left[(iM_l)^\dagger\right]^* \\ J_l^\dagger &= [(-iM_l)]^* \\ J_l^\dagger &= iM_l \\ J_l^\dagger &= J_l,\end{aligned}$$

as matrizes anti-hermitianas $K_l = iN_l$ são contruídas seguindo um modelo parecido,

$$\begin{aligned}K_l^\dagger &= (iN_l)^\dagger \\ K_l^\dagger &= \left[(iN_l)^\dagger\right]^* \\ K_l^\dagger &= [iN_l]^* \\ K_l^\dagger &= -iN_l \\ K_l^\dagger &= -K_l,\end{aligned}$$

existe três relações de comutação,

$$\begin{aligned}[J_i, J_k] &= \varepsilon_{ikl} J_l, \\ [J_i, K_l] &= \varepsilon_{ilm} K_m, \\ [K_i, K_j] &= \varepsilon_{ijl} J_l.\end{aligned}$$

Os geradores (J_i) são responsáveis pelos parâmetros de rotação, em um espaço tridimensional. Os geradores (K_i) define os parâmetros da mudança de velocidade do sistema de coordenadas, isso sem alterar a origem desse mesmo [10]. Eles formam o que chamamos de

álgebra de Lie. Cada um desses geradores obedecem as relações de comutação do grupo $SO(3)$. Expressando-a em notação covariante,

$$(M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} = (\eta_{\tau\nu}\delta_{\rho}^{\mu} - \eta_{\rho\nu}\delta_{\tau}^{\mu}), \quad (2.22)$$

para $\rho = 0$ e $\tau = 1$, (mostrada na relação A.10),

$$\begin{aligned} (M_{01})_{\nu}^{\mu} &= -(iN_l)_{\nu}^{\mu} \\ (M_{01})_1^0 &= -(iN_l)_1^0 \\ -i &= -i(N_1)_1^0 \\ (N_1)_1^0 &= 1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

para $\rho = 2$ e $\tau = 3$, (dada pela a expressão (A.11)),

$$\begin{aligned} (M_{23})_2^3 &= i(M_1)_2^3 \\ i &= i(M_1)_2^3 \\ (M_1)_2^3 &= 1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Definimos agora:

$$\begin{aligned} (M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\tau} (M_{\rho\sigma})_{\nu}^{\tau} \\ (M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} &= \left[i \left(\eta_{\sigma\nu} \delta_{\rho}^{\tau} - \eta_{\rho\nu} \delta_{\sigma}^{\tau} \right) \right] \\ (M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} &= i \left(\eta_{\mu\tau} \eta_{\sigma\nu} \delta_{\rho}^{\tau} - \eta_{\mu\tau} \eta_{\rho\nu} \delta_{\sigma}^{\tau} \right) \\ (M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} &= i \left(\eta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

As matrizes $\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]$, são hermitianas. A prova está deduzida na passagem da EQ.(A.12),

$$\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]^{\dagger} = \left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right], \quad (2.26)$$

isso implica que para geradores, K_i e J_i são no formato,

$$(J_1)_{23} = -(J_1)_{23} = -i(M_1)_2^3, \quad (2.27)$$

e para os geradores de boost, temos,

$$(K_1) = -i(\eta_1)_0^1 \rightarrow (K_1)_{10} = -i, \quad (2.28)$$

que também podem ser representados como matrizes, que podemos observar através das matrizes dadas por as EQ's.(A.14) e (A.16).

No âmbito da TRE, os boosts são matrizes que são hermitianas, isso implica a dizer que: Os parâmetros descritos por eles são consistentes com a realidade física associada a esses parâmetros.. Portanto, desta forma as seis matrizes (K_i) e (J_i) com $i = 1, 2, 3$, formam um conjunto de geradores hermitianos de Lorentz onde os geradores $M_{\mu\nu}$ do grupo de Lorentz obedecem as seguintes relações de comutação, (estão deduzidas no primerio âpendice, dado pela EQ.(A.17))

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \quad (2.29)$$

Podemos fazer as relações de comutação dos geradores K_i e J_i , utilizando de propriedades do tipo $M_{mn} = \varepsilon_{mni}J_i$, $M_{0i} = -K_i$. Essas deduções se iniciam à parti da EQ. (A.18)

Para o uso de $\rho = 0$, $\nu = i$ e $\sigma = j$, temos:

$$\begin{aligned} [-K_i, -K_j] &= -i\eta_{00}M_{ij} \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k, \end{aligned} \quad (2.30)$$

para $\mu = 0$, $\nu = i$, $\rho = k$ e $\sigma = l$,

$$2[K_i, J_n] = -i(-\varepsilon_{inl}K_l - \varepsilon_{kin}K_k), \quad (2.31)$$

fazendo $K = l$,

$$[K_i, J_n] = \varepsilon_{inl}K_l \quad (2.32)$$

para $\mu = i$, $\nu = j$, $\rho = k$, e $\sigma = l$,

$$-\eta_{jk}\varepsilon_{kjp}\delta_{qr} - \eta_{jk}\varepsilon_{rjp}\delta_{qk}\eta_{jl}\varepsilon_{ljp}\delta_{qr} - \eta_{jl}\varepsilon_{rjp}\delta_{ql}]J_q \quad (2.33)$$

fazendo a relação de $\eta_{ab} = -\delta_{ab}$,

$$\begin{aligned} [J_p, J_r] &= -\frac{i}{4}[2\varepsilon_{qrp} - 2\varepsilon_{rqp}]J_q \\ [J_p, J_r] &= -\frac{i}{4}[-2\varepsilon_{qpr} - 2\varepsilon_{qrp}]J_q \\ [J_p, J_r] &= \frac{i}{4}4\varepsilon_{qpr}J_q \\ [J_p, J_r] &= i\varepsilon_{prq}J_q. \end{aligned} \quad (2.34)$$

ambas as relações acima estão deduzidas

A EQ. $([J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk}J_k)$, define o grupo de rotação $SO(3)$ como um subgrupo de $L_+^\uparrow$. Enquanto a EQ. $([K_i, J_k] = \varepsilon_{ikl}K_l)$, afirma que $\vec{K}$ é um vetor sob grupo de Lorentz. Assim, cada elemento de $SO(1, 3)$ pode ser representado por uma matriz do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e a relação

entre esses dois grupos pode ser desenvolvida por o que chamamos de spinor. A questão de $SU(2) \times S(2)$ estar relacionada com os grupos de simetrias, sendo $SU(2)$ uma matriz unitária 2×2 com determinante igual a 1, então, nos permite afirmar que $SU(2)$ está associado com as simetrias do espaço-tempo [9].

O sinal de menos em $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$ é significativo, expressa a diferença entre o grupo $SO(1,3)$ não compacto e a sua forma compacta $SO(4)$, ou entre o $SL(2, \mathbb{C})$ e o $SU(2) \times S(2)$, uma vez que os grupos de Lie $(SO(3), SL(2, \mathbb{C}))$ são localmente homomórfico bem como o $SO(4)$ e o $SU(2) \times S(2)$ que têm o mesmo estilo da definição do grupo de Lie anterior [10].

Para poder classificar as representações irredutíveis de dimensão finita não-unitárias do grupo de Lorentz $L_+^\uparrow$, temos que mudar as bases K_i e J_i da álgebra de Lie $SO(1,3)$ introduzindo a combinação linear complexa,

$$S_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad T_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i),$$

que é a relação de comutação do tipo,

$$S_i = [S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk}S_k, \quad [T_i, T_j] = \varepsilon_{ijk}T_k, \quad [T_i, S_j] = 0. \quad (2.35)$$

A relação $S_i = [S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk}S_k$, mostra o processo de comutação entre as rotações, ou entre geradores de spin. A relação $[T_i, T_j] = \varepsilon_{ijk}T_k$, estão associados aos geradores de boosts, se comportando de maneira idêntica a comutação dos geradores de spin. A última relação $[T_i, S_j] = 0$, significa que as transformações de boosts não afetam o spin das partículas.

Os geradores S_i e T_j obedecem as relações de comutação da álgebra de Lie de $SU(2)$. Essas relações mostram que a álgebra de Lie $SO(1,3)$ decompõe-se na soma direta de duas álgebras de Lie $SU(2)$ [9]. Essa decomposição vale apenas para a álgebra de Lie complexificada $SO(1,3)$, ou seja, considerado o conjunto de matrizes reais 4×4 satisfazendo $a^T = -\eta a \eta$, como em um espaço vetorial complexo de S_i, T_i $SO(1,3)^\mathbb{C} \equiv SU(2) \times S(2)$ é válida apenas para a álgebra de Lie complexificada do grupo de Lorentz [10].

Podemos usar a classificação irredutíveis da álgebra de Lie complexa $SO(1,3)^\mathbb{C}$ para encontrar representações irredutíveis reais da álgebra de Lie $SO(1,3) \equiv SL(2, \mathbb{C})$, já que existe uma correspondência de um-para-um entre as representações de uma álgebra de Lie complexa e representações de qualquer de suas formas reais [11].

A classificação das representações irredutíveis de dimensão finita de $SU(2) \times SU(2)$. De acordo com o teorma de Racah, existe um operador de Casimir para cada a álgebra de $SU(2)$, definido como,

$$\sum_{i=1}^3 S_i, S_i; \quad \sum_{j=1}^3 T_j, T_j \quad \rightarrow [S_i, S^2] = 0; \quad [T_i, T^2] = 0,$$

que são operadores de Casimir que comutam com todos os elementos da álgebra, com autovalores $n(n+1)$ e $m(m+1)$, respectivamente. Onde n e m são autovalores de S_3 e T_3 , assim, podemos rotular as representações de $SO(1,3)$ pelo par (n,m) como $J_3 = S_3 + T_3$ e também podemos identificar o spin da representação como $(n+m)$.

A dimensão do espaço da representação (n,m) é $(2n+1) \times (2m+1)$, para uma representação (n,m) do grupo de Lorentz. É importante notar que as duas subálgebras $SU(2)$ não são independentes, pois podem ser trocadas pela operação de paridade. A paridade é da seguinte forma nos geradores de rotação e boost,

$$\begin{aligned} J_i &\rightarrow J_i, & K_i &\rightarrow -K_i \\ S_i &= \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \\ T_i &= \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \\ S_i &\rightleftharpoons T_i, & T_i &\rightleftharpoons S_i, \end{aligned}$$

dada que a conjugação hermitiana é,

$$S_i^\dagger = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)^\dagger \rightarrow S_i^\dagger = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \rightarrow S_i^\dagger = T_i, \quad T_i^\dagger = S_i.$$

Observa-se que, a operação de paridade e a conjugação hermitiana são equivalentes. Como a paridade muda S_i para T_i e T_i para S_i , representações do grupo de Lorentz em geral não são auto-estados do operador paridade. Assim, podemos classificar duas representações spinoriais irredutíveis: a representação *left* $(1/2, 0)$ e a representação *right* $(0, 1/2)$. Os demais campos clássicos são obtidos através do produto tensorial destas duas representações.

3 EQUAÇÃO DE ONDA RELATIVÍSTICA DE UMA ÚNICA PARTÍCULA

O estudo abaixo descreve o comportamento de partículas que se movem a velocidades próximas à da luz, combinando a mecânica quântica com os princípios da relatividade especial, permitindo descrever partículas que se movem a altas velocidades.

3.1 Equação de Dirac

O fato da equação de Klein-Gordon não está de acordo com a natureza fez com que Dirac propusesse uma equação que estivesse de acordo com as leis naturais da Física. Então, vamos deduzir a equação proposita por Dirac para uma partícula livre relativística [13, 14]. Vamos considerar o primeiro caso do movimento de elétrons na ausência de um campo eletromagnético, de modo que é simplesmente aquele da partícula livre com possível adição de graus de liberdade,

$$\begin{aligned} p^\mu &= (p^0, \vec{p}) \\ p_\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Rightarrow p_0 = \frac{\partial}{c \partial t}, \quad \vec{p} = i\hbar \vec{\nabla}, \end{aligned}$$

o momento p pode ser escrito na forma,

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= m^2 c^2 \\ p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 &= m^2 c^2, \end{aligned}$$

isolando p_0^2 ,

$$p_0^2 = m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad (3.1)$$

lembrando que toda a expressão acima está aplicada à ψ ,

$$\left\{ p_0^2 - [m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2]^{1/2} \right\} \psi = 0. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) embora leve em conta a relação entre energia no momento exigida pela a relatividade ainda é insatisfatória do ponto de vista da teoria relativística, por que é assimétrica entre p^0 e os p^i s,

$$[p_0 - m^2 c^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2] \psi = 0, \quad (3.3)$$

que é uma forma relativisticamente invariante e pode, portanto, ser mais covariante tomando como base dessa teoria relativística.

A equação (3.3) não é a forma exigida pelas leis gerais da teoria quântica por ser quadrática em p_0 . A equação de onda deve ser linear no operador $\partial/\partial t$, ou seja, p_0 . Procuramos portanto uma equação linear em p_0 e que seja aproximadamente equivalente a equação (3.3). Para que está equação de onda se transforme de maneira simples sob uma transformação de Lorentz, tentamos fazer com que ela seja linear em p_1 , p_2 e em p_3 bem como em p_0

$$[p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta] \psi = 0, \quad (3.4)$$

em que os α'_s e β'_s são independentes de p'_s .

Os α'_s e β também deve ser indenpente dos x'_s , e eles descrevem portanto algum novo grau de liberdade pertencente a algum movimento interno dos elétrons.

Realizando a multiplicação entre os termos,

$$[p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta] [p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta] \psi, \quad (3.5)$$

onde, multiplicando cada elemento da primeira expressão por cada elemento da segunda, encontra-se uma expressão que podemos extrair informações bem importantes para o desenvolvimento da matemática da equação, como as relações entre os α'_s e β'_s ressaltando também a relação,

$$\alpha_a \alpha_b + \alpha_b \alpha_a = 2\delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

isso implica a dizer que α_i e β não deveriam ser números reais pois não obedeciam a relação de comutação de multiplicação.

Dirac, então, propos um novo hamiltoniano, diferente do usado por Klein-Gordon, do tipo $H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$ onde os α'_s e β são matrizes cuja as suas relações já foram descritas acima. Então, com $\beta = \alpha pmc$,

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - i\hbar \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \alpha pmc \right] \psi = 0,$$

como α e β são matrizes podemos realizar o trabalho algébrico para encontrar o traço dessas matrizes,

$$\alpha_i \alpha_p + \alpha_p \alpha_i = 0, \quad \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \quad (3.6)$$

$$tr[\alpha_p] = 0, \quad (3.7)$$

logo o,

$$\text{tr}[\alpha_i] = 0. \quad (3.8)$$

Vale ressaltar que $\alpha_p = \gamma^0$, ou seja, γ representa as matrizes, então,

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \frac{imc\alpha_p}{\hbar} \right] \psi = 0, \quad (3.9)$$

é a equação de Dirac, pelo menos em uma de suas formas.

A forma covariante dela pode ser expressa, considerando,

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \gamma^0; & \gamma^j &= \alpha_i \alpha_p \\ i, p &= 1, 2, 3 \\ \gamma^\mu &= (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dirac utilizou as matrizes de spin de Pauli, para dar forma à sua equação. Podemos usar um método de Feynman para a expressão $\gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$, presente na relação (1), ficando da seguinte forma a equação,

$$\left[i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi = 0, \quad (3.11)$$

lembrando que ψ representa os spinores de Dirac e são no formato,

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix},$$

considerando $c = \hbar = 1$,

$$(i\not{\partial} - m) \psi = 0, \quad (3.12)$$

está é então a equação de Dirac na forma covariante. Essa notação covariante é formulada para garantir que a teoria respeite os princípios da relatividade especial e seja consistente com a estrutura do espaço-tempo.

A equação de Dirac unificou a MQ com a RE, explicou de forma satisfatória o spin do elétron. A função de onda do elétron é denominada spinor possuindo quatro componentes. Duas componentes estão relacionadas ao elétron e as outras duas são devidas ao pósitron, a anti-partícula do elétron, que possui energia positiva [15].

4 SIMETRIAS LOCAIS EM TEORIA DE CAMPOS

Simetrias locais aplicadas na teoria de gauge local, são aquelas do tipo a que se refere a uma transformação de simetria que pode variar de ponto para ponto no espaço-tempo [16]. Diferente de uma simetria global, onde a transformação é a mesma para todo o espaço-tempo, na simetria local cada ponto pode sofrer uma transformação independente [4, 17]. Essas simetrias locais estão associadas a campos de gauge, que são mediadores de interações fundamentais. Em termos simples, se uma teoria possui simetria local, isso significa que as leis físicas não são alteradas quando aplicamos uma transformação de simetria, mas com a condição de que essa transformação pode ser diferente em cada ponto do espaço-tempo. Na prática, a simetria local leva à introdução de campos de gauge, como o campo eletromagnético [3]. Considere a lagrangiana para um campo de elétron livre $\psi(x)$,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (4.1)$$

claramente ela tem uma simetria global $U(1)$ correspondendo a invariância da teoria sob uma mudança de fase,

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x); \quad \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha} \bar{\psi}(x). \quad (4.2)$$

Vamos transformar essa simetria em em uma simetria local para a simetria de Gauge trocando α por $\alpha(x)$.

Portanto, vamos construir uma teoria que será invariante sob uma mudança de fase que depende do espaço-tempo.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x); \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \quad (4.3)$$

O termo de derivada agora terá uma transformação bastante complicada,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \left[e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \right] \\ \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) &= \bar{\psi}(x) e^{i\alpha(x)} \left[e^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x) - i \partial_\mu \alpha(x) e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \right] \\ \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) &= \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) - i \bar{\psi}(x) \partial_\mu \alpha(x) \psi(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

O segundo termo estraga a invariância. Nós precisaremos formar uma derivada covariante de Gauge, D_μ , e substituir ∂_μ por $D_\mu(x)$, temos a transformação simples,

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow [D_\mu \psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)} D_\mu \psi(x), \quad (4.5)$$

de modo que a combinação $\bar{\psi} D_\mu \psi(x)$ é invariante de Gauge.

Em outras palavras, a ação da derivada covariante sob o campo não mudará a transformação [17]. Isto pode ser feito se ampliarmos a teoria com um novo campo vetorial $A_\mu(x)$, o campo de Gauge, e formar a derivada covariante como,

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi, \quad (4.6)$$

onde e é um parâmetro livre que eventualmente identificaremos como a carga elétrica, e A_μ é o campo de gauge (calibre).

A lei de transformação para a derivada covariante a EQ.(4.5) será satisfeita se o campo $A_\mu(x)$ tem a propriedade de transformação,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (4.7)$$

Da EQ.(4.1), agora, temos,

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (4.8)$$

Para fazer o campo de Gauge uma verdadeira variável dinâmica precisamos adicionar um termo da lagrangiana envolvendo suas derivadas.

O termo invariante de Gauge mais simples 4D ou menos (com uma normalização convencional) é,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

onde,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(A_\nu + \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha(x) \right) - \partial_\nu \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right) \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu + \frac{\partial_\mu}{e} \partial_\nu \alpha - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\nu \partial_\mu \alpha \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.10)$$

é invariante de Gauge.

O $F_{\mu\nu}$ é um tensor de curvatura do espaço das transformações de gauge. Este tensor

anti-simétrico $F_{\mu\nu}$ está relacionado com a derivada covariante como,

$$\begin{aligned}
(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi &= [(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu) - (\partial_\nu + ieA_\nu)(\partial_\mu + ieA_\mu)] \\
(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi &= (\partial_\mu \partial_\nu + ie\partial_\mu A_\nu + ieA_\mu \partial_\nu - e^2 A_\mu A_\nu \\
&\quad - \partial_\nu \partial_\mu - ie\partial_\nu A_\mu - ieA_\nu \partial_\mu + e^2 A_\nu A_\mu) \psi \\
(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi &= ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \psi \\
(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi &= ieF_{\mu\nu} \psi
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Da EQ.(4.5) é fácil ver que,

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi]' = e^{-i\alpha} [(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi], \tag{4.12}$$

ou,

$$F'_{\mu\nu} \psi' = (F_{\mu\nu} \psi) e^{-i\alpha}, \tag{4.13}$$

ou,

$$F'_{\mu\nu} \psi' = F_{\mu\nu} \psi' \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \tag{4.14}$$

Combinando as EQ'S (4.8) e (4.9) chegamos a Lagrangiana da QED,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

Portanto, a equação acima, descreve partículas com spin 1/2, interagindo com um campo eletromagnético, levando em conta fatores como sua massa e suas interações [3]. Então, o primeiro termo descreve a propagação e interação da partícula com o campo. O segundo termo representa a massa da partícula e o último termo refere-se ao comportamento do campo eletromagnético, que nos fornece o comportamento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético na teoria de campos [18].

5 CONCLUSÃO

Ao se estudar a geometria do espaço-tempo de Minkowski, encontramos que a sua métrica é pseudo-euclidana, isto é, o quadrado do elemento de linha pode ser maior, igual ou menor que zero. As isometrias da métrica, e as transformações que deixam a métrica invariante, foram encontradas. Tais transformações são denominadas TL elas formam o GL $SO(1,3)$. Aplicamos o teorema de Lie para encontrar os seu geradores em seguida, foi desenvolvida a álgebra de Lie das matrizes da representação do GL. Encontramos as representações spinoriais do GL *left* e *right*. O hamiltoniano relativístico foi aplicado para estudar as equações de onda de uma única partícula. Assim, chegamos a equação relativística para o elétron chamada de equação de Dirac com grau de liberdade de spin semi-inteiro. Então, vimos a simetria de gauge que estão relacionadas com uma invariância de uma densidade lagrangiana, isso para um determinado sistema físico, com uma transformação local dos campos. Essa transformação local representa uma classe de transformações presentes nos campos, tendo em vista que essa modificação é dependente de cada ponto particular do espaço-tempo. Como perspectivas, pode-se estudar o comportamento do campo Spinorial em espaço-tempo curvo, modelos de geração de massa para neutrinos e algumas aplicações em cosmologia.

APÊNDICE A – ÁLGEBRA DE LIE DO GRUPO DE LORENTZ

Para se obter a equação (2.15), fazemos,

$$\frac{d}{dt} = [\exp(ta)]^T \eta [\exp(ta)]|_{t=0} + [\exp(ta)]^T \eta \frac{d}{dt} [\exp(ta)]|_{t=0} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$u = ta^T \rightarrow \frac{du}{dt} = a, \quad v = e^u \rightarrow \frac{dv}{du} = e^u \quad a^T e^{(ta)} \eta e^{(ta)}|_{t=0} + e^{(ta)T} \eta e^{(ta)}|_{t=0} = 0$$

$$a^T \eta + \eta a = 0 \rightarrow a^T \eta = -\eta a \quad \cdot (\eta).$$

(A.2)

Então para deduzir o formato desses boost, utiliza-se as operações matemáticas conhecidas até então. Na vizinhança da identidade $\mathbf{I} \in SO(1, 3)$, uma transformação de Lorentz

$$\Lambda \in L_{+}^{\uparrow},$$

pode ser escrito da forma abaixo, e assim chegando na relação 2.16

$$\Lambda = \mathbf{I}_{4 \times 4} + \omega \rightarrow \mathbf{I}_{4 \times 4} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\tau}^{\nu} &= \eta_{\rho\tau} \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\tau}^{\nu} &= \eta_{\mu\nu} (\delta_{\rho}^{\mu} + \omega_{\rho}^{\mu}) (\delta_{\tau}^{\nu} + \omega_{\tau}^{\nu}) \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\tau}^{\nu} &= \eta_{\mu\nu} (\delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu} + \delta_{\rho}^{\mu} \omega_{\tau}^{\nu} + \omega_{\rho}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu} + \omega_{\rho}^{\mu} \omega_{\tau}^{\nu}) \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\tau}^{\nu} &= \eta_{\mu\nu} \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu} + \eta_{\mu\nu} \delta_{\rho}^{\mu} \omega_{\tau}^{\nu} + \eta_{\mu\nu} \omega_{\rho}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu} + \eta_{\mu\nu} \omega_{\rho}^{\mu} \omega_{\tau}^{\nu} \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\tau}^{\nu} &= \eta_{\rho\tau} + \eta_{\rho\nu} \omega_{\tau}^{\nu} + \eta_{\mu\tau} \omega_{\rho}^{\mu} \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\tau}^{\nu} &= \eta_{\rho\tau} + \omega_{\rho\tau} + \omega_{\tau\rho} \\ \eta_{\rho\tau} + \omega_{\rho\tau} + \omega_{\tau\rho} &= \eta_{\rho\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Isso me diz que o parâmetro ω são anti-simétrico em ρ e τ . Agora,

$$\begin{aligned}
 x'^{\mu} &= \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \\
 x'^{\mu} &= \delta_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \\
 x'^{\mu} &= x^{\mu} \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \\
 x'^{\mu} - x^{\mu} &= \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \\
 \delta x^{\mu} &= \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu},
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

vamos transformar infinitesimal, para chegar na equação (2.19),

$$\begin{aligned}
 \delta x^{\mu} &= x'^{\mu} - x^{\mu} \\
 \delta x^{\mu} &= \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} - x^{\mu} \\
 \delta x^{\mu} &= \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} M_{\rho\tau} \right) \right]_{\nu}^{\mu} x^{\nu} - x^{\mu} \\
 \delta x^{\mu} &= \left[\mathbf{I}_{4 \times 4} - \frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} M_{\rho\tau} \right]_{\nu}^{\mu} x^{\nu} - x^{\mu} \\
 \delta x^{\mu} &= \left[\delta_{\nu}^{\mu} - \frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} \right] x^{\nu} - x^{\mu} \\
 \delta x^{\mu} &= \delta_{\nu}^{\mu} x^{\nu} - \frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} x^{\nu} - x^{\mu} \\
 \delta x^{\mu} &= x^{\mu} - \frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} x^{\nu} - x^{\mu}.
 \end{aligned}$$

Os geradores do grupo de Lorentz pode ser escrito na forma matricial, conforme o resultado está expressa na equação (2.21),

$$\begin{aligned}
 (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} &= i(\eta_{\tau\nu} \delta_{\rho}^{\mu} - \eta_{\rho\nu} \delta_{\tau}^{\mu}) \\
 -\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} &= -\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} [i(\eta_{\tau\nu} \delta_{\rho}^{\mu} - \eta_{\rho\nu} \delta_{\tau}^{\mu})] \\
 -\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} &= \frac{1}{2} [\omega^{\rho\tau} \eta_{\tau\nu} \delta_{\rho}^{\mu} - \omega^{\rho\tau} \eta_{\rho\nu} \delta_{\tau}^{\mu}] \\
 -\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} &= \frac{1}{2} [\omega_{\nu}^{\rho} \delta_{\rho}^{\mu} - \omega_{\nu}^{\tau} \delta_{\tau}^{\mu}] \\
 -\frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} &= \frac{1}{2} [\omega_{\nu}^{\mu} - \omega_{\nu}^{\mu}] \\
 \frac{i}{2} \omega^{\rho\tau} (M_{\rho\tau})_{\nu}^{\mu} &= \frac{1}{2} [\omega_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}].
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Como foi dito na seções acima, tais geradores estão associados tipos de transformações que mantém o formato da métrica de Minkowski que são abordados como matrizes,

$$a^T = -\eta a \eta,$$

$$a^T = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{03} & a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T ; \eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{03} & a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{03} & a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{03} & a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{20} & -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{30} & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$a_{00} = -a_{00}, \quad a_{11} = -a_{11}, \quad a_{22} = -a_{22}, \quad a_{33} = -a_{33}$$

$$a_{00} + a_{00} = 0, \Rightarrow a_{00} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0$$

$$a_{10} = a_{01}, \quad a_{20} = a_{02}, \quad a_{30} = a_{03}$$

$$a_{12} = -a_{21}, \quad a_{13} = -a_{31}, \quad a_{23} = -a_{32}, \quad a_{21} = -a_{12}, \quad a_{31} = -a_{13}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

Portanto a matriz típica $a \in o(1, 3)$ tem a forma,

$$a = \begin{bmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & 0 & -a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{03} & -a_{31} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, podemos escolher uma base de $O(1,3)$ da seguinte forma,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Como K_i e J_i são matrizes, podemos construir um certo formalismo covariante, e para isso é necessário que adotemos uma matriz anti-simétrica $M_{\mu\nu} \quad 4 \times 4$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \varepsilon_{kij} M_j; \quad M_{0i} = -K_i \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & -J_1 & -J_1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Os geradores (J_i) são responsáveis pelo os parâmetros de rotação, em um espaço tridimensional. Os geradores (K_i) definem os parâmetros de rotação, expressando ela em notação covariante,

$$(M_{\rho\tau})^\mu_\nu = (\eta_{\tau\nu}\delta^\mu_\rho - \eta_{\rho\nu}\delta^\mu_\tau), \quad (\text{A.9})$$

prova 1; para $\rho = 0$ e $\tau = 1$, da equação (2.23),

$$\begin{aligned}
(M_{01})_v^\mu &= i(\eta_{1v}\delta_0^\mu - \eta_{0v}\delta_1^\mu) \\
(M_{01})_1^0 &= i(\eta_{11}\delta_0^0 - \eta_{01}\delta_1^0) \rightarrow \eta_{11}\delta_0^0 = 1 \\
(M_{01})_1^0 &= i \\
(M_{01})_0^1 &= i(\eta_{10}\delta_0^1 - \eta_{00}\delta_1^1) \rightarrow -\eta_{00}\delta_1^1 = -1 \\
(M_{01})_0^1 &= -i \\
K_i &= iN_l \\
(M_{01})_v^\mu &= (-K_i)_v^\mu \\
(M_{01})_v^\mu &= -(iN_l)_v^\mu \\
(M_{01})_1^0 &= -(iN_l)_1^0 \\
-i &= -i(N_l)_1^0 \\
(N_l)_1^0 &= 1,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

prova 2; $\rho = 2$ e $\tau = 3$ que dá a EQ.(2.24),

$$\begin{aligned}
(M_{23})_v^\mu &= i(\eta_{3v}\delta_2^\mu - \eta_{2v}\delta_3^\mu) \\
(M_{23})_3^2 &= i(\eta_{33}\delta_2^2 - \eta_{23}\delta_3^2) \\
(M_{23})_3^2 &= i(\eta_{33}\delta_2^2 - \eta_{23}\delta_3^2) \rightarrow \eta_{33}\delta_2^2 = 1 \\
(M_{23})_3^2 &= -i \\
(M_{23})_2^3 &= i(\eta_{32}\delta_2^3 - \eta_{22}\delta_3^3) \\
(M_{23})_2^3 &= i \\
(M_{23})_v^\mu &= (J_1)_v^\mu \\
J_1 &= iM_l \\
(M_{23})_v^\mu &= i(M_1)_v^\mu \\
(M_{23})_3^2 &= i(M_1)_3^2 \\
-i &= i(M_1)_3^2 \\
(M_1)_3^2 &= -1 \\
(M_{23})_2^3 &= i(M_1)_2^3 \\
i &= i(M_1)_2^3 \\
(M_1)_2^3 &= 1.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Prova que as matrizes $\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu}\right]$ são hermitianas, para mostra que (2.26) é verdadeira,

$$\begin{aligned}
\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]^\dagger &= \left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right] \\
\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]^\dagger &= \left[i(\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu}) \right]^\dagger \\
\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]^\dagger &= \left[\{ [i(\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu})] \}^\dagger \right]^T \\
\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]^\dagger &= -i(\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu})^T \\
\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]^\dagger &= -i(\eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu} + \eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu})^T \\
\left[(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right]^\dagger &= i(\eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu}).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Isso implica para geradores K_i e J_i

$$\begin{aligned}
\left[(J_i)_{\mu\nu} \right]^\dagger &= \left[(J_i)_{\mu\nu} \right] \quad ; \quad \left[(k_i)_{\mu\nu} \right]^\dagger = \left[(k_i)_{\mu\nu} \right] \\
(J_i)_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\rho} (J_i)_\nu^\rho \\
(J_i)_{\mu\nu} &= \eta_{\mu 0} (J_i)_\nu^0 + \eta_{\mu i} (J_1)_\nu^i \\
(J_1)_{23} &= \eta_{20} (J_1)_3^0 + \eta_{22} (J_1)_{23} = -i(M_1)_3^2 \\
(J_1)_{23} &= -i(M_1)_3^2 \\
(J_1)_{23} &= i \\
(J_1)_{23} &= \eta_{30} (J_1)_2^0 + \eta_{33} (J_1)_2^3 \\
(J_1)_{23} &= -(J_1)_{23} = -i(M_1)_2^3.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

A expressão foi utilizada para a obtenção das operações da equação (2.27),

$$(J_1)_{32} = -1 \quad J_2 = \varepsilon_{231} J_1, \quad -J_2 = \varepsilon_{213} J_3, \quad J_3 = \varepsilon_{312} J_2, \quad -J_3 = \varepsilon_{321} J_1.$$

Assim, portanto, temos que uma das formas de mostra a expressão (2.27) está logo abaixo nas matrizes

$$(J_1)_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, (J_2)_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, (J_3)_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.14}$$

seguindo para os boost,

$$\begin{aligned}
(K_1)_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\rho} (K_1)_\nu^\rho \\
(K_1)_{\mu\nu} &= \eta_{\mu 0} (K_1)_\nu^0 + \eta_{\mu l} (K_1)_\nu^l \\
(K_1)_{01} &= \eta_{00} (K_1)_1^0 + \eta_{01} (K_1)_0^1 \\
(K_1)_{01} &= i(\eta_1)_1^0 \rightarrow (K_1)_{01} = i \\
(K_1)_{10} &= \eta_{11} (K_1)_0^1,
\end{aligned} \tag{A.15}$$

que é a dedução da equação (2.28),

$$(K_1)_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (K_2)_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (K_3)_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.16}$$

Portanto, nesta forma as seis matrizes (K_i) e (J_i) , onde os geradores $M_{\mu\nu}$ do grupo de lorentz seguem as relações de comutação.

Prova,

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= (M_{\mu\nu})_{\alpha\gamma} (M_{\rho\sigma})_\beta^\gamma - (M_{\rho\sigma})_{\alpha\gamma} (M_{\mu\nu})_\beta^\gamma \\
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= i(\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\gamma} - \eta_{\mu\gamma} \eta_{\nu\alpha}) i(\eta_{\sigma\beta} \delta_\rho^\gamma - \eta_{\rho\beta} \delta_\sigma^\gamma) \\
&\quad - i(\eta_{\rho\alpha} \eta_{\sigma\gamma} - \eta_{\sigma\alpha} \eta_{\rho\gamma}) i(\eta_{\nu\beta} \delta_\mu^\gamma - \eta_{\mu\beta} \delta_\nu^\gamma) \\
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\rho} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\alpha} \eta_{\sigma\beta} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\alpha} \eta_{\rho\beta}) \\
&\quad - (\eta_{\rho\alpha} \eta_{\sigma\nu} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\rho\alpha} \eta_{\sigma\nu} \eta_{\mu\beta} - \eta_{\sigma\alpha} \eta_{\rho\mu} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\sigma\alpha} \eta_{\rho\nu} \eta_{\mu\beta}) \\
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= \eta_{\mu\rho} (\eta_{\nu\alpha} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\nu\beta} \eta_{\sigma\alpha}) + \eta_{\mu\sigma} (\eta_{\nu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\alpha}) \\
&\quad + \eta_{\nu\rho} (\eta_{\mu\beta} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\sigma\beta}) + \eta_{\nu\sigma} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\rho\alpha} \eta_{\mu\beta}) \\
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= \eta_{\mu\rho} (\eta_{\nu\alpha} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\nu\beta} \eta_{\sigma\alpha}) - \eta_{\mu\sigma} (\eta_{\nu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\alpha}) \\
&\quad - \eta_{\nu\rho} (\eta_{\mu\beta} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\sigma\beta}) + \eta_{\nu\sigma} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\rho\alpha} \eta_{\mu\beta}) \\
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= (-i) \eta_{\mu\rho} i(\eta_{\nu\alpha} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\nu\beta} \eta_{\sigma\alpha}) + i \eta_{\mu\sigma} i(\eta_{\nu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\alpha}) \\
&\quad + i \eta_{\nu\rho} i(\eta_{\mu\beta} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\sigma\beta}) - (i) \eta_{\nu\sigma} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\rho\alpha} \eta_{\mu\beta}) \\
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= -i[\eta_{\mu\rho} i(\eta_{\nu\alpha} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\mu\beta} \eta_{\sigma\alpha}) + i \eta_{\mu\sigma} i(\eta_{\nu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\rho\alpha} \eta_{\nu\beta}) \\
&\quad - \eta_{\nu\rho} i(\eta_{\mu\alpha} \eta_{\sigma\beta} - \eta_{\mu\beta} \eta_{\sigma\alpha}) + \eta_{\mu\sigma} i(\eta_{\mu\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\rho\alpha} \eta_{\mu\beta})] \\
[M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}]_{\alpha\beta} &= -i[\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}],
\end{aligned} \tag{A.17}$$

então está provada a equação (2.29).

Todo o processo matemático feito da (2.30) até chegar no resultado dado na (2.34) foi feito conforme mostra os passos abaixo.

Para o uso de $\rho = 0$, $\nu = i$ e $\sigma = j$,

$$\begin{aligned} [M_{0i}, M_{0j}] &= -i (\eta_{00} M_{ij} - \eta_{0j} M_{i0} - \eta_{i0} M_{0j} + \eta_{ij} M_{00}) \\ [-K_i, -K_j] &= -i \eta_{00} M_{ij} \\ [K_i, K_j] &= -i \epsilon_{ijk} J_k, \end{aligned} \quad (A.18)$$

para $\mu = 0$, $\nu = i$, $\rho = k$ e $\sigma = l$,

$$\begin{aligned} [M_{0i}, M_{0j}] &= -i (\eta_{0k} M_{il} - \eta_{0l} M_{0k} - \eta_{ik} M_{0l} + \eta_{il} M_{0k}) \\ [-K_i, \epsilon_{klm} J_m] &= -i [-\eta_{ik} (-K_l) - \eta_{il} K_k] \\ [-K_i, \epsilon_{klm} J_m] &= -i \eta_{ik} K_l + \eta_{il} K_k \rightarrow \eta_{ik} = -\delta_{ik} \\ [-K_i, \epsilon_{klm} J_m] &= i \delta_{ik} K_l - i \delta_{il} K_k \\ -\epsilon_{klm} [K_i, J_m] &= i \delta_{ik} K_l - i \delta_{il} K_k \\ \epsilon_{klm} [K_i, J_m] &= -i (\delta_{ik} K_l - \delta_{il} K_k) \\ \epsilon_{klm} [K_i, J_m] &= -i (\delta_{ik} K_l - \delta_{il} K_k) \times \epsilon_{kln} \\ \epsilon_{klm} \epsilon_{kln} [K_i, J_m] &= -i (\delta_{ik} K_l - \delta_{il} K_k) \epsilon_{kln} \rightarrow \epsilon_{klm} \epsilon_{kln} = 2 \delta_{mn} \\ 2 \delta_{mn} [K_i, J_m] &= -i (\delta_{ik} K_l \epsilon_{kln} - \delta_{il} K_k \epsilon_{kln}) \\ 2 [K_i, J_n] &= -i (\epsilon_{iln} K_l - \epsilon_{kin} K_k) \\ 2 [K_i, J_n] &= -i (-\epsilon_{inl} K_l - \epsilon_{kin} K_k), \end{aligned}$$

fazendo $K = l$,

$$\begin{aligned} 2 [K_i, J_n] &= i (-\epsilon_{inl} K_l - \epsilon_{inl} K_l) \\ 2 [K_i, J_n] &= 2i \epsilon_{inl} K_l \rightarrow 2 [K_i, J_n] = 2i \epsilon_{inl} K_l \\ [K_i, J_n] &= \epsilon_{inl} K_l, \end{aligned} \quad (A.19)$$

para $\mu = i$, $\nu = j$, $\rho = k$, e $\sigma = l$,

$$\begin{aligned}
[M_{ij}, M_{kl}] &= -i (\eta_{ik} M_{jl} - \eta_{il} M_{jk} - \eta_{jk} M_{il} + \eta_{jl} M_{ik}) \\
[\varepsilon_{ijm} J_m \varepsilon_{kln} J_n] &= -i (\eta_{ik} \varepsilon_{jlp} J_p - \eta_{il} \varepsilon_{jkq} J_q - \eta_{jk} \varepsilon_{ilr} J_r + \eta_{jl} \varepsilon_{iks} J_s) \\
\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{kln} [J_m, J_n] &= -i (\eta_{ik} \varepsilon_{jlp} J_p - \eta_{il} \varepsilon_{jkq} J_q - \eta_{jk} \varepsilon_{ilr} J_r + \eta_{jl} \varepsilon_{iks} J_s) \\
\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{kln} [J_m, J_n] &= i (\eta_{ik} \varepsilon_{jlp} J_p - \eta_{il} \varepsilon_{jkq} J_q - \eta_{jk} \varepsilon_{ilr} J_r + \eta_{jl} \varepsilon_{iks} J_s) J_q \times \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{klr} \\
\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{klr} [J_m, J_n] &= -i (\eta_{ik} \varepsilon_{jlp} \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{klr} - \eta_{il} \varepsilon_{jkq} \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{klr} \\
&\quad - \eta_{jk} \varepsilon_{ilq} \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{klr} + \eta_{jl} \varepsilon_{ikq} \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{klr}) J_q \\
4\delta_{mp} \delta_{nr} [J_m, J_n] &= -i [\eta_{ik} \varepsilon_{ijp} (\delta_{jk} \delta_{qr} - \delta_{jr} \delta_{qk}) - \eta_{il} \varepsilon_{ijp} (\delta_{jl} \delta_{qr} - \delta_{jr} \delta_{ql}) \\
&\quad - \eta_{jk} \varepsilon_{ijp} (\delta_{ik} \delta_{qr} - \delta_{ir} \delta_{qk}) + \eta_{jl} \varepsilon_{ijp} (\delta_{il} \delta_{qr} - \delta_{ql} \delta_{ir})] J_q \\
4\delta_{mp} \delta_{nr} [J_m, J_n] &= -i [\eta_{ik} \varepsilon_{ikp} \delta_{qr} - \eta_{ik} \varepsilon_{irp} \delta_{qk} + \eta_{il} \varepsilon_{ilp} \delta_{qr} - \eta_{il} \varepsilon_{irp} \delta_{ql} \\
&\quad - \eta_{jk} \varepsilon_{kjp} \delta_{qr} - \eta_{jk} \varepsilon_{rjp} \delta_{qk} \eta_{jl} \varepsilon_{ljp} \delta_{qr} - \eta_{jl} \varepsilon_{rjp} \delta_{ql}] J_q,
\end{aligned}$$

fazendo a relação de $\eta_{ab} = -\delta_{ab}$,

$$\begin{aligned}
[J_p, J_r] &= -\frac{i}{4} [-\delta_{ik} \delta_{qr} \varepsilon_{ikp} + \delta_{ik} \delta_{qk} \varepsilon_{irp} - \delta_{il} \delta_{qr} \varepsilon_{ilp} + \delta_{il} \delta_{ql} \varepsilon_{irp} \\
&\quad + \delta_{jk} \delta_{qr} \varepsilon_{kjp} - \delta_{jk} \delta_{qk} \varepsilon_{rjp} + \delta_{jl} \delta_{qr} \varepsilon_{ljp} - \delta_{jl} \delta_{ql} \varepsilon_{rjp}] J_q \\
[J_p, J_r] &= -\frac{i}{4} [\delta_{qr} \varepsilon_{iip} + \varepsilon_{qrp} - \delta_{qr} \varepsilon_{llp} + \varepsilon_{qrp} + \delta_{qr} \varepsilon_{kkp} - \varepsilon_{rqp} + \delta_{qr} \varepsilon_{jjp} - \varepsilon_{rqp}] J_q \\
[J_p, J_r] &= -\frac{i}{4} [2\varepsilon_{qrp} - 2\varepsilon_{rqp}] J_q \\
[J_p, J_r] &= -\frac{i}{4} [-2\varepsilon_{qpr} - 2\varepsilon_{qrp}] J_q \\
[J_p, J_r] &= \frac{i}{4} 4\varepsilon_{qpr} J_q \\
[J_p, J_r] &= i\varepsilon_{prq} J_q.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

APÊNDICE B – DEDUÇÃO MATEMÁTICA DO CAMPO SPINORIAL

Para a equação de Dirac, temos o seguinte. O momento p é definido em equações anteriores, então pode se deduzir a equação de Dirac da seguinte forma, pois o processo feito em (3.1), seguimos com,

$$\begin{aligned} p_0 \psi &= [m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2]^{1/2} \psi \\ p_0 \psi - [m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2]^{1/2} \psi &= 0 \\ \left[\left\{ p_0 + [m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2]^{1/2} \right\} \left\{ p_0 - [m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2]^{1/2} \right\} \right] \psi &= 0, \end{aligned}$$

que representa a equação (3.2).

O resultado da multiplicação da equação (3.5), é do tipo

$$\begin{aligned} & [[p_0^2 - \alpha_1^2 p_1^2 - \alpha_2^2 p_2^2 - \alpha_3^2 p_3^2] (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 + (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) p_2 p_3] + \\ & [(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) p_1 p_3 + (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) p_1 + (\alpha_2 \beta + \beta \alpha_2) p_2 + (\alpha_3 \beta + \beta \alpha_3) p_3 - \beta^2] \psi = 0. \end{aligned}$$

Os resultados importantes que se encontram após feita a multiplicação da (3.5) são expressões da seguintes forma,

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 p_1^2 &= -p_1^2 \Rightarrow \alpha_1^2 = \mathbf{I}; \quad \alpha_2^2 = \mathbf{I}; \quad \alpha_3^2 = \mathbf{I} \\ \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2 = 0 \quad \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 \beta + \beta \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 \beta + \beta \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 \beta + \beta \alpha_3 = 0 \\ \beta^2 &= m^2 c^2. \end{aligned}$$

Como foi explicado, α_i e β , são matrizes e o traço delas são encontrados da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_p &= -\mathbf{I} \alpha_p \alpha_i \rightarrow \det(\alpha_i) \det(\alpha_p) = \det(\mathbf{I}) \det(\alpha_p) \det(\alpha_i) \\ \det(\alpha_i) \det(\alpha_p) &= (1-)^n \det(\alpha_p) \det(\alpha_i), \end{aligned}$$

onde n é ímpar,

$$\begin{aligned}
\alpha_i \alpha_i (\alpha_i)^{-1} &= \alpha_i \\
tr [\alpha_i \alpha_p (\alpha_i)^{-1}] &= tr [-\beta] \rightarrow [\alpha_i (\alpha_i)^{-1} \alpha_p] = tr [-\alpha_p] \\
tr [\alpha_p] &= tr [-\alpha_p] \rightarrow tr [\alpha_p] - tr (-\alpha_p) = 0 \\
tr [\alpha_p + \alpha_p] &= 0 \rightarrow tr [2\alpha_p] = 0.
\end{aligned}$$

Então o processo para se chegar as equações (3.7) e (3.8), são realizadas da maneira apresentada acima.

A forma covariante da equação dada pela (3.9) pode ser deduzida com a ajuda das matrizes de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes dadas em (3.10) são as matrizes γ , e tem o formato,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix}.$$

Então podemos,

$$\begin{aligned}
i\alpha p \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \frac{imc}{\hbar} \right] \psi &= 0 \\
\left[\frac{1}{c} \alpha p \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_j \alpha p \partial^j - \frac{mc}{\hbar} \alpha p \right] \psi &= 0 \\
\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{mc}{\hbar} \gamma^0 \right] \psi &= 0 \\
\left[i \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.9) por $(i\alpha p)$, podemos chegara na expressão abaixo,

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi = 0 \quad (1)$$

que é a equação de Dirac.

REFERÊNCIAS

- [1] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, v. 37, p. 895–906, 1928.
- [2] DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, v. 117, p. 610–624, 1928.
- [3] DAS, A. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, 2008. (G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series). ISBN 9789812832856. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=7AX38Cqeg3kC>.
- [4] RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-0-521-47814-4, 978-1-139-63239-3, 978-0-521-23764-2.
- [5] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 978-0-201-50397-5, 978-0-429-50355-9, 978-0-429-49417-8.
- [6] WEINBERG, S. *The Quantum theory of fields. Vol.1:: Foundations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 978-0-521-67053-1, 978-0-511-25204-4.
- [7] NETO, J. *Matemática para físicos com aplicações:: vetores, tensores e spinors*, volume 1. Editora Livraria da Física, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=EV2fzgEACAAJ>.
- [8] RINDLER, W. *Relativity: Special, general, and cosmological*. [S.l.: s.n.], 2006.
- [9] MULLER-KIRSTEN, H.; WIEDEMANN, A. *Introduction To Supersymmetry (2nd Edition)*. World Scientific Publishing Company, 2010. (World Scientific Lecture Notes In Physics). ISBN 9789813100961. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=cGNIDQAAQBAJ>.
- [10] RAMOND, P. *Group Theory:: A physicist's survey*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- [11] NAUMARK, M. *Linear Representations of the Lorentz Group*. Pergamon Press, 1964. (International series of monographs in pure and applied mathematics). ISBN 9780080101552. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Zb0rAAAAYAAJ>.
- [12] BARCELOS NETO, J. Fundamentos de relatividade especial. *Cadernos Didáticos da UFRJ*, v. 1, n. 1, p. 210, 1994.
- [13] GOMES, M. *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. EDUSP, 2002. ISBN 9788531406355. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=vQN4DddzFQ0C>.
- [14] NETO, J. *Teoria De Campos E A Natureza:: Parte quântica*. LIVRARIA DA FÍSICA. ISBN 9788578614911. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=h9hDswEACAAJ>.

- [15] SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-86449-7, 978-0-511-26720-8.
- [16] RAMOND, P. *Field theory:: a modern primer*. [S.l.: s.n.], 1981. v. 51.
- [17] CHENG, T.-P. .-.-.-.; LI, L.-F. .-.-.-. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 1984. ISBN 978-0-19-851961-4, 978-0-19-851961-4.
- [18] WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.