



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS PARNAÍBA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

FRANCISCO LUCIANO TEOFILO DE LIMA

MODELAGEM E ANÁLISE MATEMÁTICA DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS
UTILIZANDO O *SOFTWARE MODELLUS*

PARNAÍBA-PI
2025

FRANCISCO LUCIANO TEOFILLO DE LIMA

MODELAGEM E ANÁLISE MATEMÁTICA DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS UTILIZANDO
O *SOFTWARE MODELLUS*

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obten-
ção do diploma do Curso de Física do Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí, Campus Parnaíba.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vieira de Araujo

PARNAÍBA-PI

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Lima, Francisco Luciano Teofilo de

L732m Modelagem e análise matemática de vibrações mecânicas utilizando o software Modellus / Francisco Luciano Teofilo de Lima. — Parnaíba, 2025.
150 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Instituto Federal do Piauí, Campus Parnaíba, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vieira de Araujo.

1.Física. 2.Vibrações mecânicas. 3.Modelagem computacional. 4.
Software Modellus. I.Título.

CDD – 530

Elaborado por Micheline Angélica Aragão Gouveia CRB 3/1244

FRANCISCO LUCIANO TEOFILLO DE LIMA

MODELAGEM E ANÁLISE MATEMÁTICA DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS UTILIZANDO
O *SOFTWARE MODELLUS*

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obten-
ção do diploma do Curso de Física do Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí, Campus Parnaíba.

Aprovado em: 13/ 02/ 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Wesley Vieira de Araujo (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Diego Prudencio Soares
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Dedico este trabalho a todos que acreditaram que ele sairia.

AGRADECIMENTOS

Um dos grandes prazeres de terminar um TCC é agradecer a quem ajudou na minha trajetória até aqui. Concluir esta etapa foi um desafio que não poderia ter sido superado sem o apoio e a colaboração de muitas pessoas às quais expresso minha profunda gratidão.

Primeiramente, agradeço a Deus, por me conceder força, saúde e sabedoria ao longo dessa jornada. Aos meus pais, Francisco Teófilo Sobrinho (in memoriam) e Maria Rodrigues Barbosa, pelo dom da vida, pela base sólida de valores que me ensinaram e pelo apoio incondicional em todos os momentos. Agradeço também aos meus irmãos e demais familiares, que sempre me incentivaram e compartilharam comigo os desafios e conquistas desse percurso.

Um agradecimento especial à minha esposa, Tamira Paula de Lima Teófilo, pelo amor, paciência e compreensão nos momentos mais difíceis. Sua presença constante e seu apoio inabalável foram fundamentais para que eu seguisse em frente, mesmo quando os desafios pareciam insuperáveis.

Dedico também este trabalho à minha Comunidade Cristã, à qual pertenço, que foi meu porto seguro em todos os momentos de desânimo, onde procurei refúgio e encontrei conforto.

Sou profundamente grato aos meus professores e orientadores, especialmente ao Prof. Dr. Wesley Vieira de Araujo, por suas valiosas contribuições, paciência e orientação, que foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação e expertise inspiraram não apenas a realização deste projeto, mas também o meu crescimento enquanto estudante e pesquisador. Aos demais professores que contribuíram para minha formação ao longo dessa jornada, em especial ao Prof. Dr. Alexandro Nascimento, cuja competência e dedicação admiro profundamente, deixo minha sincera gratidão. Suas aulas, conselhos e exemplo como profissional foram marcantes e me motivaram a seguir com ainda mais determinação.

Agradeço também à instituição de ensino IFPI, *campus* Parnaíba, por proporcionar o espaço, os recursos e as oportunidades que foram essenciais para minha formação acadêmica. O ensino de qualidade, a troca constante de saberes e o ambiente de aprendizado rico e colaborativo foram determinantes para que eu pudesse alcançar este momento. Por fim, sou grato a todos os membros da comunidade acadêmica, desde colegas até o corpo técnico-administrativo, que, direta ou indiretamente, contribuíram para essa caminhada. A união de esforços e a convivência nesse ambiente contribuíram imensamente para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos colegas e amigos de curso que estiveram ao meu lado, compartilhando experiências, dúvidas e aprendizados, deixo meu sincero agradecimento.

Por fim, dedico esta conquista a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, seja com palavras de incentivo, apoio emocional ou troca de conhecimento.

A todos, registro meu mais profundo e sincero agradecimento.

*"A física é o caminho para entender como
o universo funciona em seus níveis mais
profundos."
(Brian Greene)*

RESUMO

Este trabalho aborda a modelagem e análise matemática de vibrações mecânicas, utilizando o *software Modellus* como ferramenta pedagógica. Destaca-se a importância da aprendizagem significativa em Física, enfatizando a necessidade de integrar conceitos teóricos com práticas de simulação para facilitar a compreensão dos fenômenos físicos. O trabalho é estruturado em capítulos que abordam desde a introdução ao *software Modellus* e sua interface, até a aplicação prática em simulações das vibrações mecânicas. O trabalho também apresenta métodos de resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, que são fundamentais para a modelagem dos sistemas estudados. Além disso, o trabalho inclui um apêndice com orientações sobre como utilizar o *software* na montagem da simulação para realizar as animações dos movimentos vibratórios estudados, proporcionando um guia prático para os usuários. Em suma, o trabalho combina teoria e prática, utilizando tecnologia para facilitar a aprendizagem e a visualização de conceitos físicos complexos, promovendo uma educação mais interativa e eficaz.

Palavras-chave: Vibrações Mecânicas; Modelagem Computacional; *Software Modellus*.

ABSTRACT

This work addresses the modeling and mathematical analysis of mechanical vibrations, using Modellus software as a pedagogical tool. It highlights the importance of meaningful learning in Physics, emphasizing the need to integrate theoretical concepts with simulation practices to facilitate the understanding of physical phenomena. The work is structured into chapters that cover everything from an introduction to Modellus software and its interface to its practical application in mechanical vibration simulations. It also presents methods for solving linear differential equations with constant coefficients, which are fundamental for modeling the studied systems. Additionally, the work includes an appendix with guidelines on how to use the software to set up simulations and create animations of the studied vibratory motions, providing a practical guide for users. In summary, this work join theory and practice, utilizing technology to enhance learning and visualization of complex physical concepts, promoting a more interactive and effective education.

Keywords: Mechanical Vibrations; Computational Modeling; Modellus Software.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Tela inicial do <i>software modellus</i> após o carregamento inicial.	25
Figura 2	– Barra de menu, onde são apresentados comandos básicos na aba início e comandos relacionados à modelagem através das abas: variável independente, modelo, gráfico, tabela, animação e notas.	26
Figura 3	– Barra de menu em destaque a aba início e as funcionalidades da guia início.	26
Figura 4	– Barra de menu em destaque a aba variável independente e as funcionalidades da guia variável independente.	27
Figura 5	– Barra de menu em destaque a aba modelo e as funcionalidades da guia modelo.	27
Figura 6	– Representação da janela do modelo matemático. Em (a) destaca-se que após digitar as equações e clicar no botão interpretar a janela matemática informar que as equações estão digitadas de forma correta. Em (b) a janela do modelo matemática informar que contem erros na digitação das equações matemáticas.	27
Figura 7	– Representação da janela do modelo matemático destacando os painéis. Em (a) destaca-se o painel para inserção dos valores das variáveis. Em (b) destaca-se o painel para inserção das condições iniciais.	28
Figura 8	– Barra de menu em destaque a aba Gráfico e as funcionalidades da guia gráfico.	28
Figura 9	– Representação da janela Gráfico. Em (a) tem-se um gráfico em branco. Em (b), temos um exemplo de um gráfico plotado.	29
Figura 10	– Barra de menu em destaque a aba Tabela e as funcionalidades da guia tabela.	29
Figura 11	– Representação da janela Tabela. Em (a) tem-se a tabela em branco. Em (b) tem-se um exemplo da tabela preenchida com dados sobre a posição x e tempo t após a simulação.	29
Figura 12	– Barra de menu em destaque a aba Animação e as funcionalidades da guia animação.	30
Figura 13	– Barra de menu em destaque a aba Notas e as funcionalidades da guia notas.	30
Figura 14	– Barra de Tarefas.	30
Figura 15	– Representação de um sistema massa-mola. Em (a) mostra a mola em seu comportamento inicial sem distensão. Em (b) temos a posição de equilíbrio estável, em que a força devida à distensão da mola equilibra o peso. Em (c) a mola foi esticada, sofrendo um deslocamento $s > 0$ em relação ao nível de equilíbrio estável correspondente a $s = 0$ desenvolvendo um movimento dinâmico descrito por $z(t)$	42
Figura 16	– Diagrama de forças para um sistema de mola-massa.	43
Figura 17	– Diagrama de forças para um sistema de mola-massa com o deslocamento dinâmico.	44

Figura 18 – Este gráfico compara três casos diferentes para o movimento livre não amortecido em um sistema massa-mola. As curvas representam oscilações com diferentes amplitudes A , frequências ω e fases φ , onde a curva vermelha ($A = 1.0, \omega = 1, \varphi = 0$) não possui deslocamento de fase, a curva verde ($A = 1.5, \omega = 1.2, \varphi = \pi/4$) apresenta um pequeno deslocamento de fase, e a curva em azul ($A = 2.0, \omega = 0.8, \varphi = \pi/2$) possui um deslocamento de fase mais significativo.	46
Figura 19 – Representação de um dispositivo de amortecimento onde a massa poderia estar suspensa em um meio viscoso como destacado em (a) ou conectada a um dispositivo de amortecimento como em (b).	47
Figura 20 – Diagrama de forças para um sistema de mola-massa para o movimento livre amortecido.	48
Figura 21 – Representação gráfica do deslocamento de um sistema massa-mola submetido a amortecimento subcrítico ($\beta < \omega$), para três diferentes coeficientes de amortecimento. Observa-se que quanto maior o coeficiente de amortecimento β , mais rapidamente as oscilações são dissipadas. Os parâmetros utilizados em cada caso são: caso 1 (linha azul tracejada): $\beta = 0.1, \omega_0 = 2\pi, \phi_0 = 0$. Caso 2 (linha preta pontilhada): $\beta = 0.3, \omega_0 = 2\pi, \phi_0 = \pi/4$. Caso 3 (linha vermelha sólida): $\beta = 0.5, \omega_0 = 2\pi, \phi_0 = \pi/2$	51
Figura 22 – Gráfico do deslocamento de sistemas superamortecidos ($\beta > 1$), onde o amortecimento é suficientemente grande para impedir oscilações. O gráfico ilustra a influência do coeficiente de amortecimento β na taxa de decaimento da resposta do sistema, evidenciando que valores maiores de β resultam em um retorno mais lento à posição de equilíbrio. Os casos representados são: caso 1 (linha verde tracejada): $\beta = 2.5$. Caso 2 (linha azul pontilhada): $\beta = 3.0$. Caso 3 (linha vermelha sólida): $\beta = 3.5$	53
Figura 23 – Gráfico do deslocamento de sistemas criticamente amortecidos, onde o coeficiente de amortecimento c é igual ao amortecimento crítico ($c = c_c$), resultando na eliminação de oscilações e no retorno mais rápido à posição de equilíbrio sem ultrapassagem. O gráfico apresenta três diferentes configurações de rigidez k e seus respectivos coeficientes de amortecimento crítico: caso 1 (linha verde tracejada): $k = 10.0, c = 6.32$. Caso 2 (linha azul pontilhada): $k = 12.0, c = 6.93$. Caso 3 (linha vermelha sólida): $k = 15.0, c = 7.75$	55
Figura 24 – Equações das oscilações livres não amortecidas inseridas na janela Modelo Matemático.	67
Figura 25 – Representação das condições iniciais propostas, na janela do Modelo Matemático. .	67
Figura 26 – Representação da dinâmica do sistema massa-mola: Em (a) o sistema está inicialmente em repouso. Isso ocorre quando a mola está nem esticada nem comprimida, representando o ponto de referência para o sistema. Em (b) note que, em alguns instantes o sistema alcança um alongamento máximo da mola em relação ao ponto de equilíbrio. Em (c) a mola está comprimida em relação ao ponto de origem. . . .	68

Figura 27 – Gráfico para o movimento nos três casos definidos na Figura 25: a curva laranja representa a função de deslocamento com maior amplitude. A curva verde representa uma função com amplitude intermediária. A curva azul representa a função com menor amplitude.	69
Figura 28 – Gráfico que representa a amplitude total do movimento livre não amortecido, quando a mola é distendida ao máximo nos três casos estudados.	70
Figura 29 – Gráfico que representa a amplitude mínima do movimento livre não amortecido, quando a mola é distendida ao máximo nos três casos estudados.	71
Figura 30 – Gráfico representando a periodicidade do movimento livre não amortecido.	72
Figura 31 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o movimento livre não amortecido, evidenciando um dos pontos de velocidade mínima, bem como a periodicidade do sistema.	73
Figura 32 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o movimento livre não amortecido, evidenciando um dos pontos de velocidade máxima, bem como a periodicidade do sistema.	73
Figura 33 – A curva laranja , representa o gráfico da posição em função do tempo $x(t)$. Note que, a posição da partícula varia senoidalmente com o tempo. A curva azul , representa o gráfico de velocidade em função do tempo $v(t)$ também é uma função senoidal, mas deslocada em relação ao gráfico de posição.	74
Figura 34 – Modelo das oscilações livres amortecidas.	75
Figura 35 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento subamortecido, na janela do Modelo Matemático.	76
Figura 36 – Representação do movimento subamortecido para os três casos.	76
Figura 37 – Valores das amplitudes máximas no o movimento subamortecido na vibração livre para os caso 1, 2 e 3	77
Figura 38 – Gráfico do movimento livre subamortecido para o caso 1, 2 e 3 mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$	78
Figura 39 – A curva laranja , representa o gráfico da posição $x(t)$ em função do tempo t . Note que, a posição da partícula varia senoidalmente com o tempo e sua amplitude diminui com o tempo até chegar ao ponto de equilíbrio. A curva vermelho , representa o gráfico de velocidade $v(t)$ em função do tempo t também é uma função senoidal. Observe que a velocidade também exibirá um decaimento exponencial ao longo do tempo. Essa taxa de decaimento é determinada pelo coeficiente de amortecimento. .	79
Figura 40 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento superamortecido, na janela do Modelo Matemático.	80
Figura 41 – Representação do movimento superamortecido para os três casos.	80
Figura 42 – Representação do movimento superamortecido para os três casos.	82
Figura 43 – Gráfico do movimento livre superamortecido para o caso 1, 2 e 3 mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$	83

Figura 44 – A curva laranja representa o gráfico de posição em função do tempo. A amplitude diminui rapidamente ao longo do tempo, indicando que o sistema converge para a posição de equilíbrio sem oscilar. A curva em verde representa o gráfico da velocidade em função do tempo também exibindo um decaimento exponencial. A velocidade diminui exponencialmente à medida que o sistema se aproxima do equilíbrio.	84
Figura 45 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento criticamente amortecido, na janela do Modelo Matemático.	84
Figura 46 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento criticamente amortecido, na janela do Modelo Matemático.	85
Figura 47 – Gráfico do deslocamento $x(t)$ em função do tempo para um sistema massa-mola em movimento criticamente amortecido.	86
Figura 48 – Gráfico da velocidade $v(t)$ para um sistema massa-mola em movimento criticamente amortecido no caso 1 . A velocidade parte de zero, atinge um valor negativo máximo e, em seguida, cresce suavemente em direção ao equilíbrio, aproximando-se de zero sem oscilações, conforme o sistema dissipa a energia gradualmente.	86
Figura 49 – Gráfico da velocidade $v(t)$ para um sistema massa-mola em movimento criticamente amortecido no caso 1 . A velocidade parte de zero, atinge um valor negativo máximo e, em seguida, cresce suavemente em direção ao equilíbrio, aproximando-se de zero sem oscilações, conforme o sistema dissipa a energia gradualmente.	87
Figura 50 – Gráfico do movimento criticamente amortecido, ilustrando a variação da posição (x) em função do tempo (t) para o caso 2	88
Figura 51 – Gráfico do movimento criticamente amortecido para o caso 2 , mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$. O sistema inicia com uma velocidade decrescente e converge para o equilíbrio sem oscilações. A tabela ao lado detalha os valores da velocidade nos instantes correspondentes.	88
Figura 52 – Gráfico do movimento criticamente amortecido, ilustrando a variação da posição (x) em função do tempo (t) para o caso 3	89
Figura 53 – Gráfico do movimento criticamente amortecido para o caso 3 , mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$. A tabela ao lado detalha os valores da velocidade nos instantes correspondentes.	89
Figura 54 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido, na janela do Modelo Matemático.	90
Figura 55 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido para uma força constante, na janela do Modelo Matemático	91
Figura 56 – Gráfico da posição em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido com força constante.	91

Figura 57 – O gráfico exibe uma curva senoidal característica de um movimento oscilatório forçado não amortecido, representando a posição $z(t)$ para o caso 1	92
Figura 58 – Gráfico da velocidade $v(t)$ no movimento forçado não amortecido para o caso 1	93
Figura 59 – O gráfico exibe uma curva senoidal característica de um movimento oscilatório forçado não amortecido, representando a posição $z(t)$ para o caso 2	93
Figura 60 – Gráfico da velocidade $v(t)$ no movimento forçado não amortecido para o caso 2	94
Figura 61 – O gráfico exibe uma curva senoidal característica de um movimento oscilatório forçado não amortecido, representando a posição $z(t)$ para o caso 3	95
Figura 62 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força constante.	96
Figura 63 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido, na janela do Modelo Matemático.	97
Figura 64 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido, na janela do Modelo Matemático	98
Figura 65 – Representação da amplitude para o movimento forçado não amortecido para o caso 1	98
Figura 66 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força externa periódica para o caso 1	99
Figura 67 – Representação da amplitude para o movimento forçado não amortecido para o caso 2	100
Figura 68 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força externa periódica para o caso 2	100
Figura 69 – Representação da amplitude para o movimento forçado não amortecido para o caso 3	101
Figura 70 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força externa periódica para o caso 3	102
Figura 71 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado amortecido, na janela do Modelo Matemático.	103
Figura 72 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado amortecido, na janela do Modelo Matemático	104
Figura 73 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado subamortecido sobre a influencia de força externa constante.	104

Figura 74 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado subamortecido sob a influência de uma força constante, com diferentes condições iniciais ou diferentes coeficientes de amortecimento: Curva Laranja - Sistema com maior velocidade inicial ($v_0 = 50$ m/s) e maior resposta inicial à força. Curva Verde - Sistema com velocidade inicial intermediária ($v_0 = 30$ m/s). Curva Azul - Sistema com menor velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s).	106
Figura 75 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado subamortecido, na janela do Modelo Matemático	107
Figura 76 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado subamortecido ao longo do tempo.	107
Figura 77 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado subamortecido sob a influência de uma força periódica, com diferentes condições iniciais.	109
Figura 78 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado superamortecido, na janela do Modelo Matemático.	110
Figura 79 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado superamortecido ao longo do tempo sobre a influencia de uma força constante.	111
Figura 80 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado superamortecido sob a influência de uma força constante, com diferentes condições iniciais.	112
Figura 81 – Parâmetros e Condições iniciais inseridas na janela do Modo Matemático para o movimento forçado superamortecido.	113
Figura 82 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado superamortecido ao longo do tempo.	114
Figura 83 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado superamortecido sob a influência de uma força periódica, com diferentes condições iniciais.	115
Figura 84 – Parâmetros e Condições iniciais inseridas na janela do Modo Matemático para o movimento forçado Criticamente amortecido.	116
Figura 85 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado criticamente amortecido ao longo do tempo sobre a influencia de uma força constante.	117
Figura 86 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado criticamente amortecido sob a influência de uma força constante, com diferentes condições iniciais.	118
Figura 87 – Parâmetros e Condições iniciais inseridas na janela do Modo Matemático para o movimento forçado Criticamente amortecido.	119
Figura 88 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado criticamente amortecido ao longo do tempo.	119

Figura 89 – Gráfico da velocidade $v(t)$ submetido ao movimento forçado criticamente amortecido sob a influência de uma força periódica.	120
Figura 90 – Guia animação, indicação do botão Imagem para inserção das figuras. . . .	147
Figura 91 – Representação da posição das imagens inseridas na janela de animação. . .	147
Figura 92 – Representação da posição das imagens inseridas na janela de animação. . .	148
Figura 93 – Janela de propriedades da figura que representa a mola.	148
Figura 94 – Janela do modo matemático, onde se estabeleceu uma condição para a dinâmica da figura da mola $l = 283 + x$	149
Figura 95 – Configuração da massa m para se movimentar em função da variável l	149
Figura 96 – A figura 96 (a) o objeto é posicionado na extremidade da mola como indicado. Após executar a simulação. Na figura 96 (b) o objeto assume a posição l conforme a configuração descrita na figura 95.	150
Figura 97 – Implementação do bloco na extremidade da mola.	150
Figura 98 – Posicionamento do esquema final da mola dentro da janela de simulação do <i>modellus</i>	151
Figura 99 – Modelo do movimento oscilatório de uma massa m fixada em uma mola de constante k , representando a vibração livres não amortecidas no <i>Software Modellus</i>	151

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDA	Equação Diferencial Aplicadas
EDO	Equação Diferencial Ordinária
FTC/UNL	Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova Lisboa
IFPI	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
MC	Mecânica Clássica
MHS	Movimento Harmônico Simples
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicações

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
2	SIMULAÇÃO COMO FERRAMENTA NO ENSINO DE FÍSICA . . .	23
2.1	O <i>SOFTWARE MODELLUS</i> E O ENSINO DE FÍSICA	24
2.2	INTERFACE DO <i>SOFTWARE MODELLUS</i>	25
3	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINE- ARES COM COEFICIENTES CONSTANTES	31
3.1	EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE ORDEM 2 HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES	34
3.1.1	Raízes reais e distintas	35
3.1.2	Raízes reais e iguais	35
3.1.3	Raízes complexas conjugadas	36
3.2	EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE ORDEM 2 NÃO HOMOGÊ- NEA COM COEFICIENTES CONSTANTES	37
3.2.1	Método da Variação dos Parâmetros	38
4	VIBRAÇÕES MECÂNICAS	41
4.1	VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS	41
4.2	VIBRAÇÕES LIVRES AMORTECIDAS	47
4.2.1	Movimento livre subamortecido	49
4.2.2	Movimento livre superamortecido	51
4.2.3	Movimento livre criticamente amortecido	53
4.3	VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO AMORTECIDAS	55
4.3.1	Aplicação de uma força constante no movimento forçado não amortecido	56
4.3.2	Aplicação de uma força periódica no movimento forçado não amortecido	57
4.4	VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS	57
4.4.1	Movimento forçado subamortecido	58
4.4.1.1	Aplicação de uma força constante no movimento forçado subamortecido . .	59
4.4.1.2	Aplicação de uma força periódica no movimento forçado subamortecido . .	60
4.4.2	Movimento forçado superamortecido	61
4.4.2.1	Aplicação de uma força constante no movimento forçado superamortecido .	62
4.4.2.2	Aplicação de uma força periódica no movimento forçado superamortecido .	63
4.4.3	Movimento forçado criticamente amortecido	63
4.4.3.1	Aplicação de uma força constante no movimento forçado criticamente amor- tecido	64

4.4.3.2	Aplicação de uma força periódica no movimento forçado criticamente amortecido	65
5	SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES MECÂNICAS NO SOFTWARE MODELUS	66
5.1	SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS	66
5.1.1	Análise da simulação do movimento vibratório não amortecido	66
5.2	SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES LIVRES AMORTECIDAS	74
5.2.1	Análise da simulação do movimento vibratório livre subamortecido . . .	75
5.2.2	Análise da simulação do movimento vibratório livre superamortecido .	79
5.2.3	Análise da simulação do movimento vibratório livre criticamente amortecido	84
5.3	SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO AMORTECIDAS	90
5.3.1	Aplicação de uma força constante no movimento não-amortecido	91
5.3.2	Análise do movimento forçado não amortecido quando aplicado uma força periódica	97
5.4	SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS	103
5.4.1	Movimento forçado subamortecido	103
5.4.1.1	Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso subamortecido quando aplicando uma força constante	103
5.4.1.2	Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso subamortecido quando aplicando uma força periódica externa	107
5.4.2	Movimento forçado superamortecido	110
5.4.2.1	Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso superamortecido quando aplicando uma força constante	110
5.4.2.2	Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso superamortecido quando aplicando uma força periódica externa	113
5.4.3	Movimento criticamente amortecido	116
5.4.3.1	Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso criticamente amortecido quando aplicando uma força constante	116
5.4.3.2	Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso criticamente amortecido quando aplicando uma força periódica externa	118
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	122
7	TRABALHOS FUTUROS	124
	REFERÊNCIAS	125
	APÊNDICE A – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.	127

APÊNDICE B – CÁLCULO DAS CONSTANTES C_1 E C_2 DAS SOLU- ÇÕES GERAIS PARA O MOVIMENTO FORÇADO	128
APÊNDICE C – CÁLCULO DAS INTEGRAIS QUE APARECEM NAS VIBRAÇÕES FORÇADAS	136
APÊNDICE D – ANIMAÇÃO DO MOVIMENTO VIBRATÓRIO . . .	147

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica é um ramo da Física centrada no estudo do comportamento de sistemas com corpos em movimento ou em equilíbrio estático, a partir de modelos matemáticos que descrevem sua dinâmica. Isaac Newton ¹ em sua obra clássica, *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (*Principia*), publicada em 1687, formalizou três leis fundamentais que regem o conjunto de fenômenos com caráter mecânico definidos sobre uma estrutura vetorial. Compreender e analisar sistemas mecânicos a partir das leis de Newton em suas mais variadas formas, são de fundamental importância para o entendimento de fenômenos físicos na escala macroscópica onde essas leis são válidas.

A primeira lei de Newton é conhecida como a lei da inércia, na qual Newton revisita a concepção de Galileu. Ele estipula que um corpo em movimento persistirá em seu estado, não sendo influenciado por forças externas, enquanto Galileu afirmava que os objetos têm a tendência de resistir a alterações em seu movimento (Hewitt, 2015). No *Principia*, de Newton, afirma-se que um objeto permanecerá em repouso ou em movimento uniforme em linha reta, a menos que uma força resultante não nula seja aplicada a ele. A segunda lei de Newton estabelece que a aceleração de um objeto é proporcional à força resultante agindo sobre ele, na mesma direção que essa força, e inversamente proporcional à sua massa. Quanto à terceira lei de Newton, ela estabelece que, sempre que um objeto exerce uma força sobre outro, este último reage com uma força igual, mas oposta. Essas forças são chamadas de força de ação e força de reação, e a terceira lei pode ser expressa como: para toda ação, há sempre uma reação de igual magnitude e em direção oposta (Marion; Thornton, 2014).

No ensino da Física, a aprendizagem dos conceitos mecânicos é de extrema importância no sentido em que no ensino superior as disciplinas requerem um aprofundamento maior dos conceitos físicos adquiridos no Ensino Médio, devido ao seu crescente nível de complexidade. Grande parte das dificuldades enfrentadas se deve aos alunos não possuírem habilidades necessárias no domínio da Matemática, por não terem vivenciado em etapas anteriores de sua formação as técnicas de modelagem como recurso para resolução de problemas, premissa necessária à vista que a modelagem matemática é um dos principais requisitos para ensino e o aprendizado da Física (Machado; Costa, 2009).

De modo geral, os alunos demonstram dificuldades em resolver analiticamente alguns sistemas usando expressões vetoriais, pois, apresentam problemas de entendimento e abstração relacionados a Mecânica Clássica, devido a falta de domínio dos conceitos Físicos e Matemáticos envolvidos (Monerat et al., 2007).

¹ Sir Issac Newton (1642-1727), filósofo natural inglês, foi professor de matemática na Universidade de Cambridge da Rolyal Society (Sociedade Real). Ele lançou os fundamentos do cálculo infinitesimal. Suas contribuições revolucionaram a compreensão do Universo com sua obra “*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*”(Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), conhecida como “*Principia*” umas das publicações mais relevantes da comunidade científica.

Por outro lado, para a aprendizagem conceitual não só basta a aplicação de conceitos, mas se faz necessário trabalhar diversas outras competências do conhecimento físico, abrangendo uma ampla visão dos diferentes métodos utilizados para proporcionar uma aprendizagem significativa como, por exemplo, o levantamento de problemas, a construção de modelos teóricos, trabalhar os conceitos matemáticos e elaborar simulações dos sistemas estudados (Silva; Sales, 2018).

Atualmente a educação vem passando por vários processos de reformulação, dentre os quais pode-se citar o uso das Tecnologia de Informação e da Comunicação (TIC's), atingindo o público escolar e sendo utilizado como tripé para sua integração no processo de Ensino e Aprendizagem. Em vista disso, a introdução de novas tecnologias envolvendo o uso de recursos computacionais, como as simulações, têm contribuído de forma construtiva na exploração do aluno como forma de integração entre os conhecimentos de bases científica, os fenômenos naturais e as aplicações tecnológicas (Macêdo; Dickman, 2009).

O uso de simuladores computacionais no ensino de Física vem se intensificando de modo que os mesmos podem ser utilizados como recursos que apresentam grande efetivação no processo de aprendizagem e permite ao professor utilizar tais ferramentas ao ministrar suas aulas, proporcionando aos alunos analisarem fenômenos físicos e desenvolverem os conceitos matemáticos. Dessa forma, muitos desses sistemas complexos podem ser simulados de modo a facilitar a verificação da dinâmica dos sistemas estudados.

Dessa maneira, com a utilização do *software* de simulação aliado a disciplina de Física, pode-se deixá-lo mais atrativo e eficiente tanto para os alunos quanto aos professores, possibilitando realizar análises de experimentos virtuais, permitindo uma exploração mais dinâmica e interativa devido a construção e manipulação de modelos matemáticos para a resolução de cálculos e construção de gráficos. Dentre essas ferramentas computacionais, destaca-se o *software Modellus* por possuir uma grande competência para o apoio às atividades de modelagem (Teodoro, 2002).

Neste contexto, o objetivo geral deste trabalho é desenvolver modelagens envolvendo problemas de Vibrações Mecânicas, fazendo uso do conhecimento básico sobre o emprego de métodos computacionais aplicados ao Ensino de Física e apresentando modelagens no *software Modellus*. Ao mesmo tempo, observar as possibilidades de integração envolvidas na aprendizagem dos cálculos que apresentam tais comportamentos vibratórios e com a prática da modelagem como apoio didático, podendo ser empregado como material auxiliar nas disciplinas de Mecânica Clássica (MC) e Equações Diferenciais Aplicadas (EDA) nos cursos de graduação em Física.

Nessa linha de pensamento, destaca-se a importância dos alunos do ensino superior em buscarem conhecer os conceitos apresentados pelas disciplinas mencionadas acima, pois, a abordagem conceitual é uma das principais ideias que fazem parte do contexto educacional que permite ao aluno perceber a influência do impacto científico em sua totalidade e os remetem a entender os conceitos Físicos, destacando a importância da elaboração e utilização de simulações,

onde a mesma possibilita ao aluno o desenvolvimento de cenários que podem ser testados e cujos resultados podem ser analisados e criticados.

Neste trabalho, será usado o *software Modellus* visando realizar modelagem computacional de sistemas físicos relacionados a vibrações mecânicas. A proposta apresentada tem em vista, relacionar por meio da modelagem matemática os conceitos físicos envolvidos e através da visualização no *software* computacional apresentando o comportamento da dinâmica dos sistemas vibratórios estudados.

Para alcançar os objetivos traçados, dividimos o trabalho da seguinte forma: o **capítulo 1** estabelece o contexto e a justificativa para o uso de simulações no Ensino de Física, apresentando o *Software Modellus* como uma ferramenta eficaz para a modelagem e análise de Sistemas Vibratórios; O **capítulo 2** aborda a importância das simulações computacionais no ensino de Física, destacando o papel dos computadores na investigação científica. Cita-se Teodoro (2002), que enfatiza o *Modellus* como uma ferramenta eficaz para a visualização e compreensão de fenômenos físicos complexos. A interface do software é apresentada como acessível, permitindo a experimentação e a observação das variáveis que influenciam os sistemas ao longo do tempo.

O **capítulo 3** destaca a importância das equações diferenciais ordinárias (EDOs) de segunda ordem na matemática e na física, essenciais para descrever fenômenos naturais. Ressalta-se a necessidade de conhecer métodos de resolução, como a solução geral, variável independente, coeficientes independentes e variação de parâmetros. O capítulo enfatiza que a compreensão desses métodos é fundamental para a modelagem e análise de sistemas dinâmicos em diversas áreas da ciência e engenharia; o **Capítulo 4** explora a relevância das vibrações em sistemas físicos e no cotidiano, destacando sua presença em fenômenos naturais e tecnologias. Apresenta os principais tipos de vibrações – livres não amortecidas, amortecidas e forçadas – explicando suas características e a matemática envolvida.

O **capítulo 5** aborda as simulações de vibrações mecânicas no *Modellus*, destacando sua importância no ensino de Física. O software permite visualizar e manipular modelos dinâmicos interativamente, facilitando a compreensão teórica. O capítulo explora simulações aplicáveis em sala de aula, incluindo vibrações livres e forçadas, amortecidas e não amortecidas. Ressalta-se a relevância do *Modellus* como ferramenta didática para ilustrar conceitos em Mecânica Clássica e Equações Diferenciais, promovendo a integração entre teoria e prática e incentivando a análise crítica dos estudantes. Por fim, o **capítulo 6** reúne os principais aprendizados e a aplicação dos conceitos discutidos, sublinhando a importância das simulações no ensino de Física. Enfatiza que a integração de métodos computacionais no aprendizado de vibrações mecânicas representa uma evolução significativa na educação.

2 SIMULAÇÃO COMO FERRAMENTA NO ENSINO DE FÍSICA

Segundo Teodoro (2002), no contexto das Escolas e Universidades, os computadores são ferramentas essenciais na investigação e no desenvolvimento do conhecimento científico. Quase todos os campos científicos e tecnológicos fazem uso de ferramenta de modelação como instrumento chave no processo de aprendizagem. Um grande destaque é dada ao fato que as novas tecnologias educacionais, tais como as simulações computacionais, possibilitarem uma mudança significativa ao modo em que a Física é apresentada aos alunos.

Yamamoto e Barbeta (2001) mencionam que o computador pode propiciar as condições para os estudantes exercitarem a capacidade de procurar e selecionar informações, resolver problemas e aprender de forma independente. O uso do computador pode ser um recurso didático auxiliar tanto para o próprio ensino de informática e computação, quanto para desenvolver o ensino de diferentes áreas de conhecimento.

Diante do grande avanço tecnológico e da grande falta de recursos didáticos e estruturais no ambiente escolar, algumas instituições veem na modelagem computacional um forte aliado no processo de desenvolvimento de ensino. A modelagem computacional faz uso da linguagem computacional para chegar a soluções simuladas de problemas científicos, ou seja, utiliza técnicas matemáticas em computadores com a ideia de assemelhar o processo real do fenômeno (Macêdo; Dickman; Andrade, 2012).

Moreira (2019) ressalta que para haver uma aprendizagem significativa do aluno, é necessário criar maneiras que faça este imaginar, fazer aproximações, comparações, argumentar, para que haja construção do conhecimento através desta modelagem criada pelo aluno. As ferramentas computacionais são uma ótima forma de o aluno criar estas modelagens.

Para Veit e Teodoro (2002), a introdução da modelagem no Ensino de Física contribui para uma melhor compreensão da mesma como disciplina muitas vezes encarada como difícil, em que basta memorizar equações sem a compreensão de suas origens e definições.

Para Yamamoto e Barbeta (2001) as simulações permitem o estudo de condições que seriam difíceis ou inviáveis de serem realizadas em um laboratório didático, além de possibilitar uma melhor compreensão de certos fenômenos físicos. As simulações possibilitam a inclusão de elementos gráficos e de animação em um mesmo ambiente, o que pode tornar o processo de aprendizagem mais eficiente e agradável. Além disso, a utilização de uma ferramenta que faz parte do cotidiano dos alunos pode ajudá-los a voltar toda a sua atenção para a essência do problema em estudo.

O Ensino de Física, dentre muitos programas de modelagem e simulação, existe o *software Modellus*, que permite abordagens exploratórias de alguns sistemas físicos e estes serão abordados no desenvolvimento deste trabalho.

2.1 O SOFTWARE MODELLUS E O ENSINO DE FÍSICA

O *Modellus* é um *software* de distribuição gratuita desenvolvido para a aplicação de simulação de fenômenos que usa modelagem matemática, foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FTC/UNL) e distribuído livremente para fins educacionais.

Segundo Veit e Teodoro (2002) o *software Modellus* permite a construção de um laboratório virtual, para que os alunos e professores realizem experimentos, que, a partir de equações matemáticas, simulem modelos de fenômenos físicos para resolução de cálculos e construção de gráficos que permitem uma exploração mais dinâmica e interativa. Deste modo, quando o aluno descreve o modelo matemático que traduz um determinado fenômeno, o *Modellus* permite simulações computacionais, possibilitando ao aluno uma análise diferenciada da situação física partindo da modelagem matemática das teorias vista em aula.

Muitos conceitos matemáticos e físicos podem ser abstratos e difíceis de compreender apenas com fórmulas e teoria. O *Modellus* permite que os alunos visualizem esses conceitos por meio de modelos e simulações interativas. Isso torna mais fácil ver como as variáveis se relacionam e como as mudanças em uma variável afetam o sistema como um todo. Dessa forma, o *Modellus* promove a aprendizagem ativa, permitindo que os alunos experimentem e interajam com modelos em tempo real. Eles podem ajustar parâmetros, iniciar simulações e observar as consequências de suas ações, o que ajuda a consolidar o entendimento.

O *software* é flexível e pode ser usado para modelar uma ampla variedade de fenômenos matemáticos e físicos. Isso o torna adequado para uma variedade de disciplinas, desde matemática e física a biologia e economia. Sendo projetado para ser fácil de usar, mesmo para pessoas que não tem experiência em programação ou modelagem computacional. Isso o torna atraente para estudantes de diferentes idades e níveis de habilidade.

Os professores podem personalizar modelos ou criar novos para atender às necessidades de seus planos de ensino. Os alunos também podem explorar cenários diferentes e desenvolver habilidades de resolução de problemas. O *Modellus* pode ser usado para criar exercícios e tarefas que avaliam o conhecimento dos alunos. Além disso, os alunos podem receber *feedback* imediato com base em suas simulações. O *Modellus* é projetado para se alinhar com o currículo escolar, facilitando sua integração em aulas e atividades educacionais.

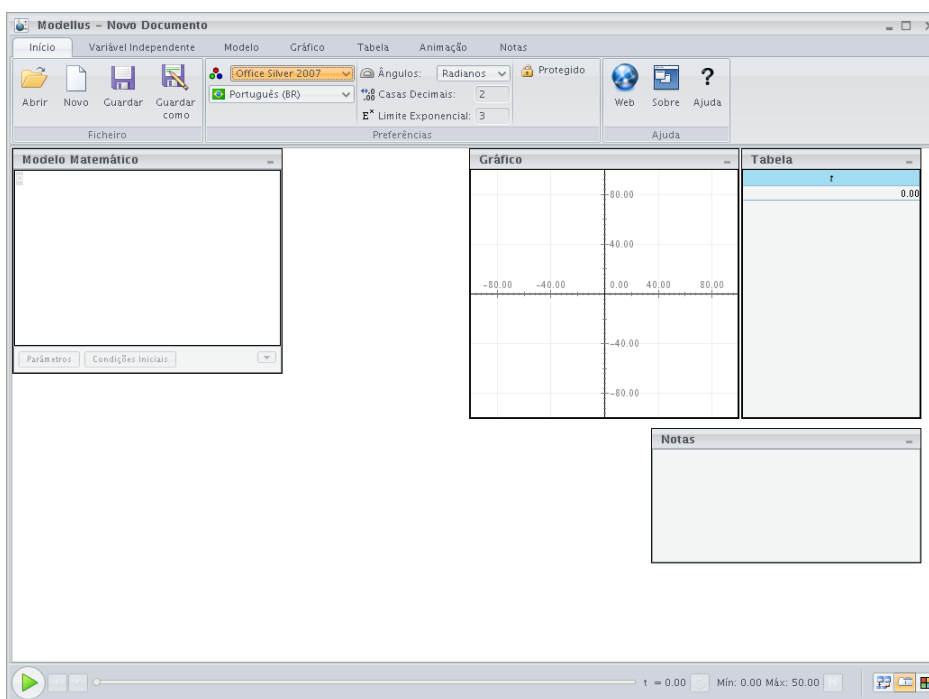
No geral, o *Modellus* tem como objetivo tornar o ensino e a aprendizagem de matemática e física mais interativos, visuais e envolventes, contribuindo para uma compreensão mais sólida e profunda desses conceitos. Ele é uma ferramenta valiosa para educadores que desejam melhorar a qualidade do ensino e o envolvimento dos alunos em suas aulas.

2.2 INTERFACE DO SOFTWARE MODELLUS

A interface do *Modellus* foi projetada para facilitar a criação e a visualização de modelos matemáticos. É um ambiente de modelagem e simulação usado principalmente no ensino de matemática e física, permitindo que os alunos experimentem os modelos criados e observem como as variáveis afetam o comportamento do sistema ao longo do tempo, tornando-o uma ferramenta acessível para estudantes e professores.

A Figura 1 representa a tela inicial após a abertura do *software Modellus*, com destaque para a versão 4.05, onde é exibida a área de trabalho com as principais janelas utilizadas na modelagem.

Figura 1 – Tela inicial do *software modellus* após o carregamento inicial.

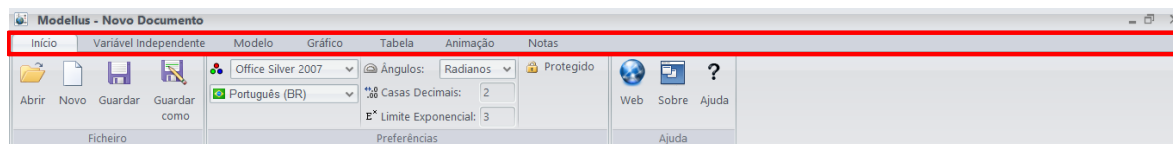


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para aprimorar a experiência de modelagem, o *software Modellus* oferece em sua interface uma barra de menus com abas dedicadas com aspectos específicos do processo de modelagem. Abaixo da barra de menu, encontram-se a barra de ferramentas que fornece acesso rápido a funções comuns, como criar um novo projeto, abrir um arquivo existente, salvar, iniciar a simulação, pausar e parar. Cada barra de ferramenta é organizada em guias que exibem uma faixa de opções que fornecem acesso a comandos básicos, ferramentas especializadas e opções de personalização, permitindo que os usuários simulações mais elaboradas.

Observe a área destacada na Figura 2, que ressalta a parte superior da janela que contém a barra de menu com as abas: início, variável independente, modelo, gráfico, tabela, animação e notas.

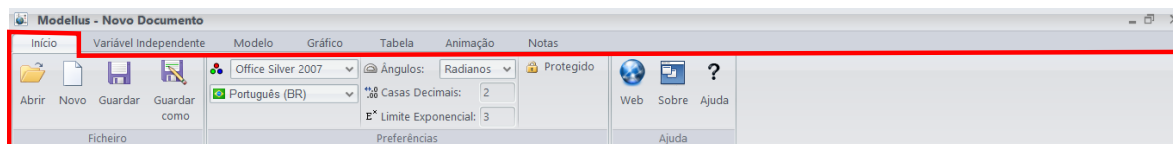
Figura 2 – Barra de menu, onde são apresentados comandos básicos na aba início e comandos relacionados à modelagem através das abas: variável independente, modelo, gráfico, tabela, animação e notas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao explorar o *software*, os usuários encontrarão comandos essenciais para a utilização do programa. Na Figura 3 destaca-se a aba **início**, nela encontra-se a guia ‘**ficheiro**’ com as opções para abrir uma simulação existente, criar um novo projeto, salvar e exportar modelos; na guia ‘**preferências**’ tem-se as opções de acessar as configurações e recursos adicionais, como selecionar opções como estilo da interface, idioma, configurar as unidades de medida para ângulos, quantidade de casas decimais incluindo as potências das exponenciais e a opção proteger caso o usuário possa optar por proteger o seu trabalho com uma senha; na guia ‘**ajuda**’ tem-se as opções de web que direciona o usuário para o site do projeto, a opção sobre que informa o usuário sobre a versão do *software* e a opção de ajuda que informa de forma rápida aos usuários de como utilizar as ferramentas do *software*.

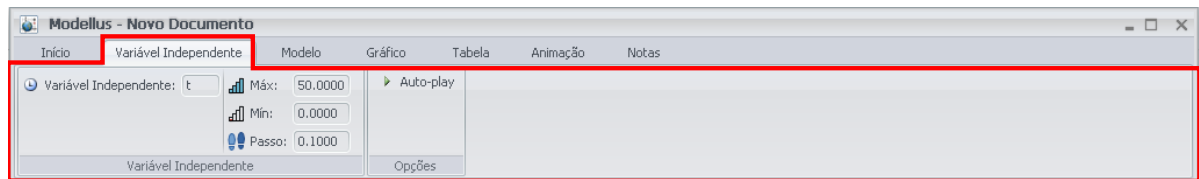
Figura 3 – Barra de menu em destaque a aba início e as funcionalidades da guia início.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Figura 4 destaca-se a aba **Variável Independente**, nela encontra-se duas guias na barra de ferramentas, onde uma das principais funcionalidades do *Modellus* é apresentada. Na primeira guia, pode-se definir a variável independente da simulação. Isso geralmente envolve especificar o nome da variável, seu valor inicial (mínimo), valor final (máximo) e a taxa de variação ao longo do tempo (passos). Geralmente seleciona-se a variável independente t que permite a construção de gráficos criando uma situação interativas com uma linha de tempo. A segunda guia, tem-se a opção de Auto-play, que quando selecionada a simulação se inicia automaticamente. Contudo, a guia “**Variável Independente**” é fundamental para a criação e análise de modelos dinâmicos no *Modellus*, permitindo a exploração e a compreensão das relações entre as variáveis em seu sistema ao longo do tempo.

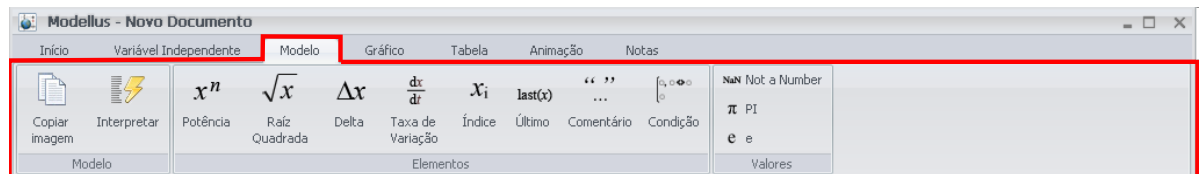
Figura 4 – Barra de menu em destaque a aba variável independente e as funcionalidades da guia variável independente.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Figura 5 destaca-se a aba **Modelo**, na qual sua barra de ferramenta encontram-se as guias “**Modelo**”, “**Elementos**” e “**Valores**”: na guia “**Modelo**”, existem os botões copiar imagem e interpretar o modelo; na guia “**Elementos**” estão localizados os botões que facilitam a escritas das equação como, Potência, Raiz Quadrada, Delta (Variação), Taxa de Variação, Índices, Last, Comentários e a opção de inserir Condições; na aba “**Valores**” onde se insere constantes matemáticas como os valore de Pi e exponenciais.

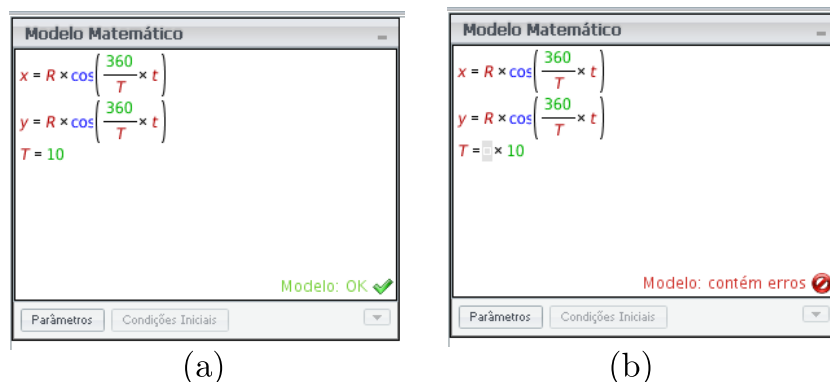
Figura 5 – Barra de menu em destaque a aba modelo e as funcionalidades da guia modelo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Após a digitação das equações na janela do modelo matemático, ao inseri-las no *software* é necessária a utilização do botão “interpretar”, no qual verifica a sintaxe das equações escritas e as valida, se houver algum erro de sintaxe com as equações, a janela informa ao usuário o erro. As Figuras em 5 e 6 mostram a aba Modelo e a Janela do modo matemático.

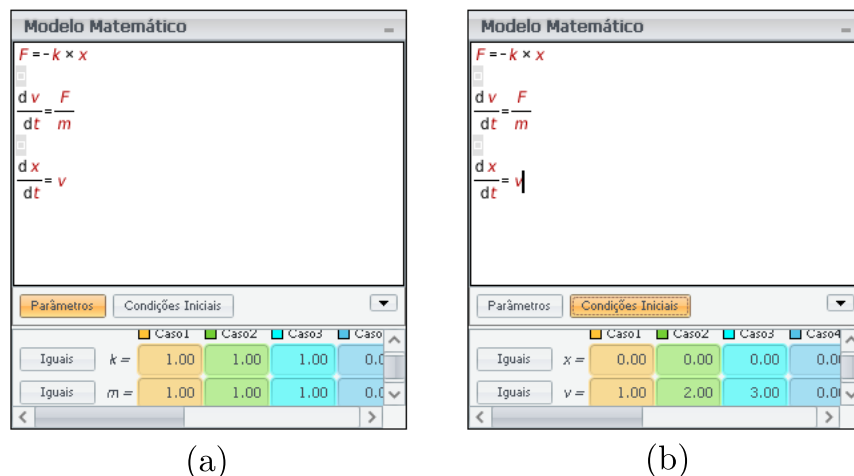
Figura 6 – Representação da janela do modelo matemático. Em (a) destaca-se que após digitar as equações e clicar no botão interpretar a janela matemática informar que as equações estão digitadas de forma correta. Em (b) a janela do modelo matemática informar que contem erros na digitação das equações matemáticas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ainda na janela do modelo matemático, tem-se o **Painel de Variáveis** à esquerda no canto inferior da janela, logo, à direita da área de desenho, onde há um painel de variáveis. Neste painel, pode-se ver e manipular as variáveis do modelo. Isso é útil para controlar e modificar as entradas do modelo durante a simulação. Ainda na mesma janela ao lado do painel de variáveis, encontra-se o **Painel de Parâmetros** que é outro painel similar ao painel de variáveis, o painel de parâmetros permite definir valores iniciais, limites e outros parâmetros para as variáveis do modelo. Isso é útil para configurar as condições iniciais e as restrições do modelo, quando se usa equações diferenciais nas modelagens. As Figuras em 7 mostram os painéis de parâmetros e condições iniciais na janela do modo matemático:

Figura 7 – Representação da janela do modelo matemático destacando os painéis. Em (a) destaca-se o painel para inserção dos valores das variáveis. Em (b) destaca-se o painel para inserção das condições iniciais.



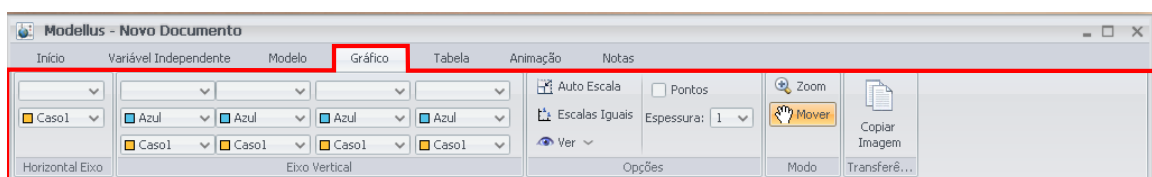
(a)

(b)

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Figura 8 temos a aba **Gráfico** que permite visualizar uma ou mais variáveis graficamente. Este painel permite que o usuário adicione gráficos para acompanhar as variáveis do modelo ao longo do tempo. Pode-se personalizar esses gráficos e escolher quais variáveis serão exibidas. Ao selecionar o gráfico, ativa-se a Aba **Gráfico** que apresenta controles de configuração dos gráficos nos eixos verticais e horizontais apresentados pelo *software Modellus*, como cor, espessura da linha, auto escala ou escalas iguais, dentre outras configurações.

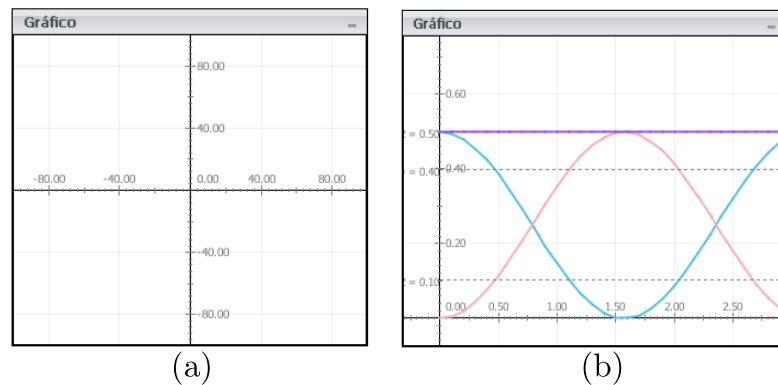
Figura 8 – Barra de menu em destaque a aba Gráfico e as funcionalidades da guia gráfico.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O *Modellus* possui uma janela de saída que exibe informações relevantes durante a simulação, como os gráficos mostrado na Figura 9.

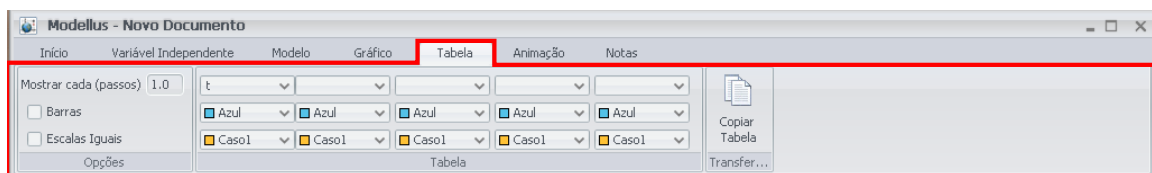
Figura 9 – Representação da janela Gráfico. Em (a) tem-se um gráfico em branco. Em (b), temos um exemplo de um gráfico plotado.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na aba **Tabela** são disponibilizados comando que permitem a alteração da formatação dos dados exibidos, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Barra de menu em destaque a aba Tabela e as funcionalidades da guia tabela.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Normalmente, a aba **Tabela** em *softwares* de modelagem e simulação como o *Modellus* é usada para exibir e manipular dados tabulares associados ao modelo em questão. Isso pode incluir valores de variáveis ao longo do tempo, resultados de simulações e outros dados relevantes para a análise do modelo, como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Representação da janela Tabela. Em (a) tem-se a tabela em branco. Em (b) tem-se um exemplo da tabela preenchida com dados sobre a posição x e tempo t após a simulação.

(a)

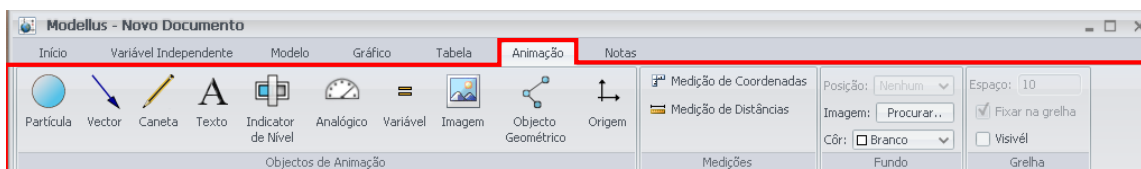
(b)

t	x
0.00	0.00
0.10	0.10
0.20	0.20
0.30	0.30
0.40	0.39
0.50	0.48
0.60	0.56
0.70	0.64
0.80	0.72
0.90	0.78
1.00	0.84
1.10	0.89

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A aba de **Animação** é uma parte crucial do *software modellus*. Nesta aba, encontramos a guia “**Objetos de Animação**” com as opções de incluir objetos, como partículas ou objetos que variam dependendo da necessidade da situação problema que se deseje simular. Além disto, é possível incluir vetores, uma caneta que desenha o gráfico dinamicamente, textos, indicadores de nível, imagens, dentre outros.

Figura 12 – Barra de menu em destaque a aba Animação e as funcionalidades da guia animação.

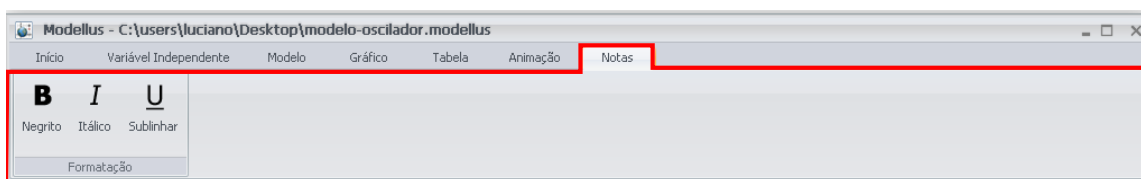


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Com guia “**Medições**” pode-se realizar medições de coordenadas ou de distâncias durante a simulação. Na guia “**Fundo**” é possível inserir uma imagem como plano de fundo da animação ou escolher uma cor sólida. Na guia “**Grelha**” é possível ativar uma malha quadriculada como plano de fundo possibilitando ao usuário, posicionar melhor o objeto com mais precisão. Essa malha pode ser configurada conforme o usuário deseje, modificando os espaços de cada quadrado.

Por fim, na aba **Notas**, na guia “**Formatação**” há opções que permitem inserir e formatar as notas como os botões de negrito, itálico e sublinhado, que possibilitando desde anotações de dados para referências futuras a simples orientações sobre o modelo.

Figura 13 – Barra de menu em destaque a aba Notas e as funcionalidades da guia notas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O *Modellus* tem em sua interface uma Barra de Navegação de Tempo. Esta barra permite que o usuário observe facilmente para diferentes momentos da simulação, o que é útil para examinar o comportamento do modelo em momentos específicos.

Figura 14 – Barra de Tarefas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Nesta barra, encontram-se controles para dar início a simulação, pausar, avançar ou retroceder no tempo, replay e resetar a simulação. Isso permite, observar o comportamento do modelo em diferentes momentos.

3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Neste capítulo entraremos na discussão das Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem (EDO's), pela importância deste tipo de equação na Matemática e na Física. Dessa forma, um número bastante notável de fenômenos físicos é descrito de alguma forma por algum tipo de Equação Diferencial (ED) e, assim, é extremamente útil conhecer alguns métodos de resolução dessas equações, bem como interpretar fisicamente o que elas significam (Simon; Simon, 1978).

Denomina-se Equação Diferencial uma equação em que a incógnita é uma função de variável dependente com uma ou mais variáveis independentes, envolvendo as derivadas dessas funções. Esses tipos de equações desempenham um papel fundamental na modelagens de fenômenos naturais de cunho complexo, sendo uma ferramenta utilizadas em muitas áreas da ciência e da engenharia.

Há algumas notações que possibilitam a escrita de EDO's. Por exemplo, a derivada de uma função $y = y(t)$, segundo a notação de Newton, é escrita como y' (y-linha) a derivada de primeira ordem, y'' a derivada de segunda ordem, $y^{(3)}$ a derivada de ordem 3 e sendo $y^{(n)}$ a derivada de ordem n de y . Contudo, a mesma derivada da função y pode ser escrita de acordo com a notação de Leibniz como, $y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ e $y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}}$ como a respectiva derivada de ordem n . Neste trabalho, será utilizado as duas notação.

Dessa forma, uma EDO Linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita da seguinte forma,

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \quad (3.1)$$

onde $y(t)$ é a função desconhecida e os coeficientes $a_j(t)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) dependem somente da variável independente t .

Se o termo $g(t) = 0$ a equação é escrita da seguinte forma,

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (3.2)$$

é chamada de homogênea, e caso contrário, não-homogênea.

Para a equação (3.2), dá-se o nome de **Equação Diferencial homogênea com coeficientes constantes** quando os termos $a_0(t) = a_0, a_1(t) = a_1, \dots, a_n(t) = a_n$, ou seja, se todos os coeficientes $a_j(t)$ são constantes; se um ou mais destes coeficientes não seja constante, a equação (3.2) tem coeficientes variáveis.

Um caso particular das equações (3.1) e (3.2) ocorre quando $n = 2$. Para que sejam consideradas equações diferenciais lineares e de segunda ordem, estas equações devem obedecer ao seguinte formato geral,

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \quad (3.3)$$

onde a_2, a_1 e a_0 são funções com coeficiente $a_2 \neq 0$. Podemos dividir toda equação por $a_2(t)$, temos:

$$\frac{a_2(t)}{a_2(t)}y'' + \frac{a_1(t)}{a_2(t)}y' + \frac{a_0(t)}{a_2(t)}y = \frac{g(t)}{a_2(t)} \quad (3.4)$$

Fazendo,

$$\frac{a_1(t)}{a_2(t)} = p(t), \quad \frac{a_0(t)}{a_2(t)} = q(t) \quad \text{e} \quad \frac{g(t)}{a_2(t)} = G(t) \quad (3.5)$$

Conclui-se que a EDO linear de segunda ordem pode ser escrita na forma,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = G(t) \quad (3.6)$$

Nesta seção estudaremos o caso onde $G(t) = 0$ para todo t na equação (3.6). Tais equações são chamadas de equações lineares homogêneas. Assim, a forma de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem é,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (3.7)$$

Tomaremos à resolução dessas equações com condições que especificam o valor da função desconhecida em um dado ponto. Quando uma ED está associada a uma condição inicial $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$, denomina-se Problema de Valor Inicial (PVI). No caso das EDOs lineares de segunda ordem, um PVI é da forma,

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = G(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Consideramos o PVI dado na equação (3.8), onde p, q, G são contínuas em um intervalo aberto I , com $t_0 \in I$. Então, pelo teorema da existência e unicidade de solução o PVI possui exatamente uma solução em I .

Proposição 1. *O princípio da superposição é um resultado que garante que se y_1 e y_2 são soluções da EDO homogênea de segunda ordem do tipo $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, então a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, também é uma solução.*

Vamos seguir com os seguintes passos da demonstração.

Por hipótese, y_1 e y_2 são soluções da EDO. Então, implica nas substituições y_1 e y_2 e suas derivadas na equação (3.7), segue que:

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0 \quad (3.9)$$

Considerando a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Então,

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \text{e} \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' \quad (3.10)$$

Substituindo y, y', y'' no lado esquerdo da EDO $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, teremos,

$$\begin{aligned}
 y'' + p(t)y' + q(t)y &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p(t)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\
 &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p(t)c_1 y_1' + p(t)c_2 y_2' + q(t)c_1 y_1 + q(t)c_2 y_2 \\
 &= c_1 \underbrace{(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2)}_{=0} \\
 &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ é solução da EDO em (3.7).

Então, para determinar as constantes c_1 e c_2 de forma que y seja solução para o PVI, basta utilizar as condições iniciais. Assim,

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Resolvendo o sistema em (3.11), obtemos,

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y'_0 y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{y'_0 y_1(t_0) - y_0 y_1'(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)} \quad (3.12)$$

Note que os resultados para as constantes c_1 e c_2 , pode ser reescrita como determinantes tanto em seus numeradores quanto nos denominadores,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \quad (3.13)$$

Portanto, para que os valores de c_1 e c_2 possam existir,

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.14)$$

Esse determinante é conhecido como Wronskiano $W(y_1, y_2)(t_0)$. O Wronskiano entre duas funções, y_1 e y_2 , no ponto t_0 , é dado pelo determinante,

$$\begin{aligned}
 W(y_1, y_2)(t_0) &= \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \\
 &= y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se y_1 e y_2 são soluções da EDO (3.7), e se existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$, então a família de soluções $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ inclui todas as soluções da EDO. As soluções y_1 e y_2 são denominadas soluções fundamentais ou conjunto fundamental de soluções (Boyce; DiPrima, 2010).

Proposição 2. *Se a função complexa $y = z(t) + iv(t)$ é solução de (3.7), então as partes reais e imaginária, $z(t)$ e $v(t)$, respectivamente também o são.*

Prova: suponha que $y = z(t) + iv(t)$ seja uma solução complexa da equação (3.7). Agora, vamos considerar as partes real e imaginária de y , onde $z(t)$ e $v(t)$ são funções reais de t . Vamos calcular as derivadas de y em relação a t :

$$y' = u'(t) + iv'(t) \quad \text{e} \quad y'' = u''(t) + iv''(t) \quad (3.16)$$

Substitua essas derivadas na equação (3.7):

$$\begin{aligned} y'' + p(t)y' + q(t)y &= (u''(t) + iv''(t)) + p(t)(u'(t) + iv'(t)) + q(t)(u(t) + iv(t)) \\ &= u''(t) + iv''(t) + p(t)u'(t) + p(t)iv'(t) + q(t)u(t) + q(t)iv(t) \\ &= u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) + i[v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t)] \end{aligned}$$

Note que para um número complexo seja zero, ambas as partes real e imaginária devem ser nulas:

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0 \quad \text{e} \quad v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t) = 0 \quad (3.17)$$

Portanto, as funções reais $z(t)$ e $v(t)$ são soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, como afirmado.

3.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE ORDEM 2 HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES

Determinaremos quais as funções do tipo $y = e^{rt}$, com $r \in \mathbb{R}$, que sejam soluções da equação. Substituindo na equação diferencial, obtém-se a equação característica:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3.18)$$

Tomando suas derivadas $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$, e substituindo y , y' e y'' na equação (3.18), obtemos,

$$\begin{aligned} ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} &= 0 \\ e^{rt}(ar^2 + br + c) &= 0 \\ ar^2 + br + c &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

A equação em (3.19) é chamada de equação característica da EDO. Note que, o termo e^{rt} é sempre diferente de zero para todos t pertencente aos números reais. Portanto, os valores de r que fazem $y = e^{rt}$ ser solução da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ são as raízes da equação característica em (3.19).

Observe que o discriminante poderá ter como resultado $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. Como consequência, provocará a existência de raízes reais distintas, reais iguais ou no campo dos números complexos respectivamente. Em suma:

- $r_1 \neq r_2$ (raízes reais e distintas, $\Delta > 0$)
- $r_1 = r_2$ (raízes reais e iguais, $\Delta = 0$)
- $r_1 = \lambda + iv$ e $r_2 = \lambda - iv$, com $\lambda, v \in \mathbb{R}$ (raízes reais conjugadas, $\Delta < 0$)

Temos, então, três casos para analisar em relação às raízes r_1 e r_2 .

3.1.1 Raízes reais e distintas

Analisando o caso em que r_1 e r_2 são raízes reais e distintas ($\Delta > 0$), sejam soluções da equação (3.18), tem-se que $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$.

Além disso, o Wronskiano entre y_1 e y_2 é igual a,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \\ &= r_2 e^{r_1 t} e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t} e^{r_2 t} \\ &= (r_2 - r_1) e^{r_1 t} e^{r_2 t} \neq 0. \end{aligned}$$

Então, y_1 e y_2 , são soluções fundamentais da EDO em (3.18), e a solução geral é dada por,

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

em que os termos c_1 e c_2 são constantes cujos valores podem ser encontrados através de condições iniciais.

3.1.2 Raízes reais e iguais

Se a EDO em (3.18) possui a equação característica com $\Delta = 0$ essa equação característica possui duas raízes iguais $r_1 = r_2 = r$, onde,

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} r &= -\frac{b}{2a} \\ 2ar + b &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tem-se então, apenas solução da EDO: $y_1 = e^{rt}$. Precisa-se, portanto, determinar outra solução y_2 , que forme um conjunto fundamental soluções com y_1 .

Para tanto, fazemos $y_2 = te^{rt}$ e é possível mostrar que essa função também é solução da EDO. Para verificar essa ideia, tomaremos a substituição de y_2 e suas derivadas na equação característica e demonstrar passo a passo que a igualdade é satisfeita.

$$y' = (1 + rt)e^{rt} \quad \text{e} \quad y'' = (2r + r^2t)e^{rt} \quad (3.22)$$

aplicando os valores de y_2 , y'_2 e y''_2 na (3.18), obtemos,

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(2r + r^2t)e^{rt} + b(1 + rt)e^{rt} + cte^{rt} \\ &= 2are^{rt} + ar^2te^{rt} + be^{rt} + brte^{rt} + cte^{rt} \\ &= \underbrace{(2ar + b)}_{=0} e^{rt} + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} te^{rt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Além disso, o Wronskiano entre y_1 e y_2 é igual a,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & e^{rt} + tre^{rt} \end{vmatrix} \\ &= e^{2rt} + \cancel{tre^{2rt}} - \cancel{tre^{2rt}} \\ &= e^{2rt} \neq 0 \end{aligned}$$

Então, y_1 e y_2 , são soluções fundamentais da EDO em (3.18), e a solução geral é dada por,

$$y = c_1e^{rt} + c_2te^{rt} \quad (3.23)$$

3.1.3 Raízes complexas conjugadas

Se $\Delta < 0$ segue que as raízes da equação característica são complexas e conjugadas, dadas por,

$$r_1 = \lambda + iv \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - iv, \quad v \neq 0. \quad (3.24)$$

Então, temos que,

$$y_1 = e^{(\lambda+iv)t} = e^{\lambda t}e^{ivt} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{(\lambda-iv)t} = e^{\lambda t}e^{-ivt}. \quad (3.25)$$

Para encontrar soluções fundamentais e reais a partir dessas soluções complexas, tomaremos a identidade de Euler, dada por, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Ao utilizar essa identidade, as soluções de uma EDO de segunda ordem com raízes complexas conjugadas podem ser expressas em termos de funções exponenciais complexas, que por sua vez podem ser decompostas em

termos de funções seno e cosseno, devido ao fato de o cosseno ser uma função par e o seno ser uma função ímpar. Portanto, temos,

$$e^{ivt} = \cos vt + i \sin vt \quad \text{e} \quad e^{-ivt} = \cos vt - i \sin vt \quad (3.26)$$

Por tanto, as soluções podem ser escritas como,

$$y_1 = e^{\lambda t} [\cos vt + i \sin vt] \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\lambda t} [\cos vt - i \sin vt] \quad (3.27)$$

Como procuramos nas soluções os valores reais, considerando a Proposição 2, temos que

$$k_1 = e^{\lambda t} \cos vt \quad \text{e} \quad k_2 = e^{\lambda t} \sin vt, \quad (3.28)$$

são soluções.

É fácil mostrar que $W(k_1, k_2)(t) = ve^{2\lambda t} \neq 0$ para todos valores de t pertencentes aos números reais, pois $v \neq 0$, vamos seguir com os seguintes passos da demonstração.

$$\begin{aligned} W(k_1, k_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda t} \cos vt & e^{\lambda t} \sin vt \\ \lambda e^{\lambda t} \cos vt - ve^{\lambda t} \sin vt & \lambda e^{\lambda t} \sin vt + ve^{\lambda t} \cos vt \end{vmatrix} \\ &= \cancel{\lambda e^{2\lambda t} \sin vt \cos vt} + ve^{2\lambda t} \cos^2 vt - \cancel{\lambda e^{2\lambda t} \sin vt \cos vt} + ve^{2\lambda t} \sin^2 vt \\ &= ve^{2\lambda t} (\underbrace{\sin^2 vt + \cos^2 vt}_{=1}) \\ &= ve^{2\lambda t} \neq 0 \end{aligned}$$

Note que o Wronskiano $W(k_1, k_2)(t)$ não pode ser igual a zero para todos os valores de t no conjunto dos números reais quando v não é igual a zero. Logo, as funções k_1 e k_2 são soluções fundamentais e a solução geral para EDO é dada por:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos vt + c_2 e^{\lambda t} \sin vt \quad (3.29)$$

O cálculo do Wronskiano e a prova de que as soluções k_1 e k_2 formam um conjunto fundamental. Isso justifica a formulação da solução geral da EDO homogênea.

Vistos os passos para a obtenção da solução homogênea de uma Equação Diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, resta agora encontrar a solução de uma Equação Diferencial não-homogênea com coeficientes constantes.

3.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE ORDEM 2 NÃO HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES

No contexto das vibrações forçadas, o caso não-homogêneo é crucial para compreender o comportamento dinâmico de sistemas vibratórios sob a influência de forças externas variáveis

no tempo. Enquanto nas vibrações livres, consideramos sistemas que oscilam naturalmente sem influências externas, nas vibrações forçadas, a presença de uma força externa altera significativamente o comportamento do sistema.

Uma EDO de ordem 2 não-homogênea é uma equação diferencial que envolve uma função desconhecida e suas derivadas até segunda ordem, e também inclui um termo não homogêneo. Essa não homogeneidade significa que há uma função específica do lado direito da equação que não é igual a zero.

A forma geral de uma EDO linear de ordem 2 com coeficientes constantes não-homogênea é descrita na equação (3.6). Para encontrar suas soluções, podem ser utilizados os métodos dos coeficientes a determinar, variação dos parâmetros ou transformada de Laplace. Para esse trabalho utilizaremos o método da variação dos parâmetros.

3.2.1 Método da Variação dos Parâmetros

Suponha que, após resolver a equação homogênea dada por (3.7), considerando que $z_1(t)$ e $z_2(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções para EDO, a sua solução geral da equação homogênea é escrita como,

$$y_h(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) \quad (3.30)$$

O método da Variação de Parâmetros é uma abordagem para encontrar a solução particular. A ideia é substituir essa suposição na equação original e resolvê-la para encontrar $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$. Isso permite transformar a equação não-homogênea em um sistema de duas equações diferenciais mais simples que podem ser resolvidas separadamente.

Tomaremos, a substituição dos parâmetros c_1 e c_2 da equação (3.30) pelas funções arbitrárias $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$. Procuramos uma solução particular para equação não-homogênea da forma,

$$y_p(t) = \mu_1(t) z_1(t) + \mu_2(t) z_2(t) \quad (3.31)$$

em que $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ são funções a serem determinadas. Essas funções são encontradas substituindo $y_p(t)$ e suas derivadas na equação diferencial original e comparando os coeficientes de $z_1(t)$ e $z_2(t)$ para encontrar $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$.

A solução geral da equação diferencial é então a soma da solução homogênea e da solução particular, ou seja,

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (3.32)$$

Tomando a derivada da função particular $y_p(t)$ dada em (3.31) em relação a t , obtemos,

$$\begin{aligned} y'_p &= \mu'_1(t) z_1(t) + \mu_1(t) z'_1(t) + \mu'_2(t) z_2(t) + \mu_2(t) z'_2(t) \\ &= \underbrace{(\mu'_1(t) z_1(t) + \mu'_2(t) z_2(t))}_{=0} + (\mu_1(t) z'_1(t) + \mu_2(t) z'_2(t)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Considerando o termo $\mu'_1(t)z_1(t) + \mu'_2(t)z_2(t) = 0$ na equação em (3.33), para evitar as segundas derivadas das funções arbitrárias $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$, tomaremos a condição de que a soma dos termos envolvendo $\mu'_1(t)$ e $\mu'_2(t)$ seja igual a zero, ou seja,

$$\mu'_1(t)z_1(t) + \mu'_2(t)z_2(t) = 0. \quad (3.34)$$

Com isso, a $y'_p(t)$ fica na forma,

$$y'_p = \mu_1(t)z'_1(t) + \mu_2(t)z'_2(t) \quad (3.35)$$

Tomando a derivada de $y'_p(t)$ em relação a t , obtemos,

$$y''_p(t) = \mu'_1(t)z'_1(t) + \mu_1(t)z''_1(t) + \mu'_2(t)z'_2(t) + \mu_2(t)z''_2(t) \quad (3.36)$$

Substituindo os valores $y_p(t)$, $y'_p(t)$ e $y''_p(t)$ na equação (3.6), obtemos,

$$\begin{aligned} \mu'_1 z'_1 + \mu_1 z''_1 + \mu'_2 z'_2 + \mu_2 z''_2 + p(t)(\mu_1 z'_1 + \mu_2 z'_2) + q(t)(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2) &= G(t) \\ \mu'_1 z'_1 + \mu_1 z''_1 + \mu'_2 z'_2 + \mu_2 z''_2 + p(t)\mu_1 z'_1 + p(t)\mu_2 z'_2 + q(t)\mu_1 z_1 + q(t)\mu_2 z_2 &= G(t) \\ \mu_1 [z''_1 + p(t)z'_1 + q(t)z_1] + \mu_2 [z''_2 + p(t)z'_2 + q(t)z_2] + \mu'_1 z'_1 + \mu'_2 z'_2 &= G(t) \end{aligned}$$

Note que as expressões dentro dos colchetes são nulas. Isso se deve a fato de que, as funções $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são soluções da equação homogênea associada, na forma, $z''_1 + p(t)z'_1 + q(t)z_1 = 0$ e $z''_2 + p(t)z'_2 + q(t)z_2 = 0$, então a equação fica,

$$\mu'_1(t)z'_1(t) + \mu'_2(t)z'_2(t) = G(t) \quad (3.37)$$

Em suma, as equações (3.34) e (3.37) formam um sistema de duas equações lineares algébricas para as derivadas t e das funções desconhecidas na variável t . Tem-se o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \mu'_1(t)z_1(t) + \mu'_2(t)z_2(t) = 0 \\ \mu'_1(t)z'_1(t) + \mu'_2(t)z'_2(t) = G(t) \end{cases} \quad (3.38)$$

Resolvendo o sistema, obtemos,

$$\mu'_1(t) = -\frac{z_2(t)G(t)}{W(z_1, z_2)(t)} \quad \text{e} \quad \mu'_2(t) = \frac{z_1(t)G(t)}{W(z_1, z_2)(t)} \quad (3.39)$$

em que $W(z_1, z_2)(t)$ é o wronskiano de $z_1(t)$ e $z_2(t)$. Note que a divisão pelo wronskiano W é permitida, já que $z_1(t)$ e $z_2(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções e, portanto, seu wronskiano não se anula. Integrando as equações (3.39), encontramos as funções desejadas $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$, a saber,

$$\mu_1(t) = -\int \frac{z_2(t)G(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \quad \text{e} \quad \mu_2(t) = \int \frac{z_1(t)G(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt. \quad (3.40)$$

Portanto, a solução particular em (3.31), fica,

$$y_p(t) = -z_1(t) \int_{t_0}^t \frac{z_2(t')G(t')}{W(z_1, z_2)(t')} dt' + z_2(t) \int_{t_0}^t \frac{z_1(t')G(t')}{W(z_1, z_2)(t')} dt' \quad (3.41)$$

em que t_0 é qualquer ponto escolhido convenientemente no intervalo I . Dessa forma, a solução geral é dada pela soma da solução homogênea dada em (3.30) e a solução particular dada em (3.41) substituindo-as na solução geral em (3.32), obtemos,

$$y(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) - z_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(t')G(t')}{W(y_1, y_2)(t')} dt' + z_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(t')G(t')}{W(y_1, y_2)(t')} dt' \quad (3.42)$$

Essa equação mostra que a resposta do sistema é composta por uma combinação das soluções homogêneas $z_1(t)$ e $z_2(t)$, além de uma integral que leva em conta o efeito da força externa $G(t)$.

4 VIBRAÇÕES MECÂNICAS

A maior parte das atividades humanas envolvem vibrações, nas quais os objetos se movem incessantemente de um lado para o outro. A título de exemplo, temos a respiração de um indivíduo que está correlacionada com a vibração dos pulmões e o simples ato de andar requer o movimento oscilatório (periódico) dos membros superiores e inferiores.

As vibrações são encontradas em todos os campos da física. Alguns desses sistemas mecânicos vibratórios estão presentes no comportamento de pêndulo oscilante, de um relógio e em cordas de instrumentos musicais como o violão. Além das oscilações mecânicas citadas, pode-se mencionar as oscilações eletromagnéticas, como as correntes elétricas geradas pelos elétrons ao se mover para frente e para trás nos circuitos responsáveis pela recepção dos sinais eletrônicos que tem inúmeras aplicações importantes.

Estes sistemas oscilantes, mecânicos, eletromagnéticos, dentre outros, possuem uma construção matemática comum entre si e são modelados por expressões em termos de senos e cossenos. Esse capítulo é dedicado ao estudos das vibrações mecânicas e suas descrições quanto à existência ou não da ação de forças atuando sobre o sistema.

4.1 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

A teoria vibratória dedica-se ao estudo de movimentos de corpos oscilantes e as forças associadas a ele, de forma geral, todo movimento que se repete após um intervalo de tempo é denominado *vibração* ou *oscilação*, onde um dado sistema sofre vibração livre quando oscila somente sob uma perturbação inicial, sem ação de nenhuma força após essa perturbação (Rao, 2008).

Neste contexto, podemos citar exemplos práticos de osciladores, como: o pêndulo simples, o potencial de Lennard-Jonnes e o potencial entre partículas na mecânica quântica.

O pêndulo simples, é considerado um oscilador, pois se tomarmos o limite para ângulos pequenos o $\sin \theta$, torna-se aproximadamente igual ao ângulo θ expresso em radianos, portanto, podemos converter a equação do pêndulo em uma equação de um oscilador harmônico simples (MHS). De fato, o limite para ângulos pequenos o sistema entra em equilíbrio estável ficando para sempre neste movimento oscilante desde que não haja resistência (Nussenzveig, 2018).

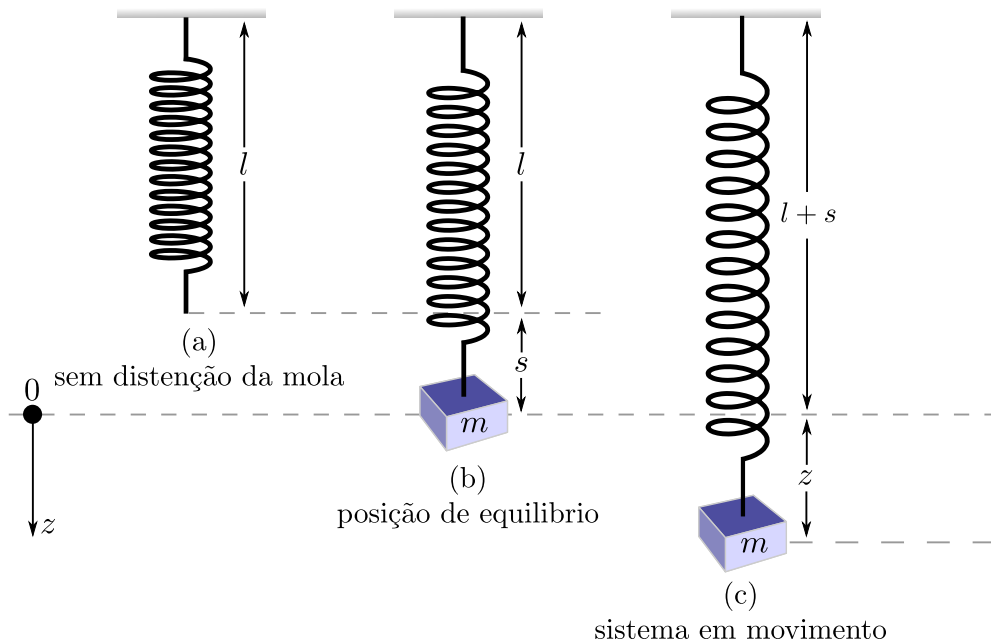
O potencial de Lennard-Jonnes é um modelo matemático que mostra a interação de dois átomos ou moléculas. Se as duas partículas aproximam-se muito uma da outra haverá uma poderosa força de repulsão. Para o caso de afastamento das partículas a força se torna de atração e para um certa distância, os dois corpos começam a oscilar entre si. Se o sistema tiver uma quantidade específica de energia os dois átomos entram em equilíbrio estático e ficam interligados entre si. Podemos, portanto, em uma certa região, aproximar o potencial de Lennard-Jones a potencial de um oscilador harmônico (Nussenzveig, 2013).

Na Mecânica Quântica, podemos aproximar o potencial entre partículas de sistemas quânticos para um potencial harmônico em torno de um ponto de equilíbrio, quantizando o oscilador harmônico e a partir dele, por exemplo, pode-se determinar a energia de estados quânticos e estudar sistemas complexos através de algo bem familiar que possuem funções analíticas conhecidas (Young, 2016).

Tomaremos um modelo de movimento harmônico simples descrito na Figura 15 que ilustra um sistema massa-mola constituído por uma mola de constante elástica k presa em um anteparo fixo e uma partícula de massa m presa em uma das extremidades.

A partícula descreve um deslocamento unidimensional para baixo (no sentido positivo) e para cima (no sentido negativo) sobre o eixo de movimento quando retirada da posição de equilíbrio. Podemos dizer que o sistema está em equilíbrio estático quando a mola não estiver comprimida, logo o bloco estará em repouso na posição de equilíbrio dado por $s = 0$.

Figura 15 – Representação de um sistema massa-mola. Em (a) mostra a mola em seu comportamento inicial sem distensão. Em (b) temos a posição de equilíbrio estável, em que a força devida à distensão da mola equilibra o peso. Em (c) a mola foi esticada, sofrendo um deslocamento $s > 0$ em relação ao nível de equilíbrio estável correspondente a $s = 0$ desenvolvendo um movimento dinâmico descrito por $z(t)$.



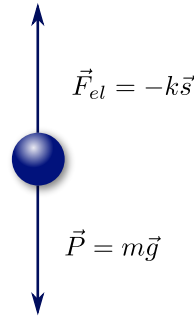
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Se o deslocamento $\vec{s}$ for positivo, a mola está distendida, e a força elástica $\vec{F}_{el}$ é negativa, atuando no sentido oposto ao deslocamento. Se $\vec{s}$ for negativo, a mola está comprimida, e $\vec{F}_{el}$ é positiva, sempre agindo no sentido de restaurar a posição de equilíbrio.

No **problema estático**, existem duas forças atuando sobre o ponto em que a massa está presa à mola. Dentre elas, a força gravitacional ou força peso atuando sobre a massa que está fixada na extremidade da mola e que puxa o sistema para baixo no sentido positivo do movimento

e tem módulo igual a $m\vec{g}$, onde $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade. Outra força atuante no sistema é a força elástica $\vec{F}_{el}$ que é devido a propriedade elástica da mola e que puxa a massa para o sentido oposto do movimento. Como podemos observar no diagrama de corpo livre, descrito na Figura 16.

Figura 16 – Diagrama de forças para um sistema de mola-massa.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Se o deslocamento sofrido pela massa m a partir da posição de equilíbrio não for excessivamente grande e desprezando o atrito, a força elástica $\vec{F}_{el}$ aplicada na partícula é do tipo restauradora, obedecendo a lei de Hooke¹, que matematicamente é dada por:

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{s} \quad (4.1)$$

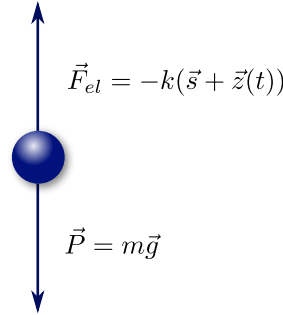
onde k é a constante elástica da mola e $\vec{s}$ é a deformação sofrida pela mola ao longo do movimento. O sinal negativo é devido força da mola puxar a massa m para cima no sentido negativo do movimento.

Inicialmente, o sistema estando em equilíbrio, pela segunda lei de Newton, temos que a força resultante é dada por:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= 0 \\ \vec{P} + \vec{F}_{el} &= 0 \\ m\vec{g} - k\vec{s} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para o **problema dinâmico**, tomaremos o estudo do movimento da massa no caso de um deslocamento inicial na presença de uma força externa. Denotaremos $z(t)$ o deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio, onde será medido positivamente para baixo. Note que o deslocamento $z(t)$ está correlacionado com a força restauradora $\vec{F}_{el} = -k(\vec{s} + \vec{z}(t))$.

¹ Robert Hooke (1635 - 1703) foi um cientista experimental inglês do século XVII, nascido em Freshwater. Hooke descreveu a estrutura celular da cortiça após o descobrimento da célula, desenvolveu a primeira teoria sobre as propriedades elásticas da matéria, criou a lei de Hooke que descreve que a deformação sofrida pelo corpo é proporcional a força aplicada sobre o mesmo.

Figura 17 – Diagrama de forças para um sistema de mola-massa com o deslocamento dinâmico.**Fonte:** Elaborado pelo Autor.

Aplicando a segunda lei de Newton ao sistema em movimento, obteremos:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_R &= m \frac{d^2 \vec{z}(t)}{dt^2} \\
 \vec{P} + \vec{F}_{el} &= m \frac{d^2 \vec{z}(t)}{dt^2} \\
 m\vec{g} - k(\vec{s} + \vec{z}(t)) &= m \frac{d^2 \vec{z}(t)}{dt^2} \\
 \underbrace{m\vec{g} - k\vec{s}}_{=0} - k\vec{z}(t) &= m \frac{d^2 \vec{z}(t)}{dt^2} \\
 m \frac{d^2 \vec{z}(t)}{dt^2} + k\vec{z}(t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

A expressão (4.3) é uma equação diferencial linear, ordinária de ordem 2 e homogênea que descreve o movimento de um corpo de massa m sujeita a uma força de restituição linear, sendo uma das equações mais importantes para modelagem de alguns sistemas físicos, como os que listamos acima.

Para equação diferencial dada em (4.3), podemos escrever a equação característica na forma

$$p^2 + \frac{k}{m} = 0. \tag{4.4}$$

A equação acima está na forma de uma equação do segundo grau. Resolvendo-a, obteremos o valor para o parâmetro p .

$$p^2 = -\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad p = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} \tag{4.5}$$

Como a solução recai no campo dos números complexos usaremos $i^2 = -1$. Dessa forma, podemos reescrever o parâmetro p como:

$$p_1 = i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad p_2 = -i \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.6}$$

onde $\sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência angular natural não amortecida de oscilação do sistema. Com isso, podemos definir:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.7)$$

Note que a frequência natural não amortecida vai depender somente das características intrínsecas do sistema com a rigidez da mola k e da massa m do sistema. Ou seja, se a massa do sistema aumenta, a frequência de vibrações do sistema diminui, ou seja, a rigidez do sistema aumenta e a frequência de oscilação fica mais alta. Caso contrario, se a rigidez do sistema for baixa, o sistema vibra mais lentamente.

Desse modo, teremos:

$$p_1 = i\omega \quad \text{e} \quad p_2 = -i\omega. \quad (4.8)$$

Para equação diferencial homogênea em (4.3) a solução geral é dado por,

$$z(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (4.9)$$

Note que a equação em (4.9) é a solução geral da equação movimento de um sistema não amortecido em vibração livre.

Aplicando a condição inicial $z(0) = z_0$ na equação (4.9), resulta em,

$$C_1 = z_0. \quad (4.10)$$

Derivando a equação em (4.9) em relação a t , obteremos,

$$\frac{dz(t)}{dt} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (4.11)$$

Aplicando a condição inicial $dz(0)/dt = v_0$ na equação (4.11), resulta em,

$$v_0 = C_2 \omega \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}. \quad (4.12)$$

Substituindo os valores em (4.10) e (4.12), na equação (4.9), teremos então,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (4.13)$$

A equação em (4.13) é a solução geral da equação movimento para um sistema não amortecido em vibração livre, escrita na forma explícita com todas as condições iniciais que descreve o movimento harmônico. Descrevendo, como a massa m vai vibrar para cima e para baixo com uma dada frequência natural ω do sistema em [rad/s] ou podemos escrever como oscilações por segundo, tomando a relação entre a frequência angular com a frequência linear é

dado por $\omega/2\pi$ em [Hz]. Note que o movimento do sistema vai depender das condições iniciais, ou seja, do deslocamento inicial z_0 e da velocidade inicial v_0 .

Como z_0 , v_0 e ω são quantidades constantes, podemos fazer a seguinte substituição:

$$z_0 = A \cos \phi_0 \quad \text{e} \quad \frac{v_0}{\omega} = -A \sin \phi_0. \quad (4.14)$$

Deste modo, teremos com a seguinte expressão:

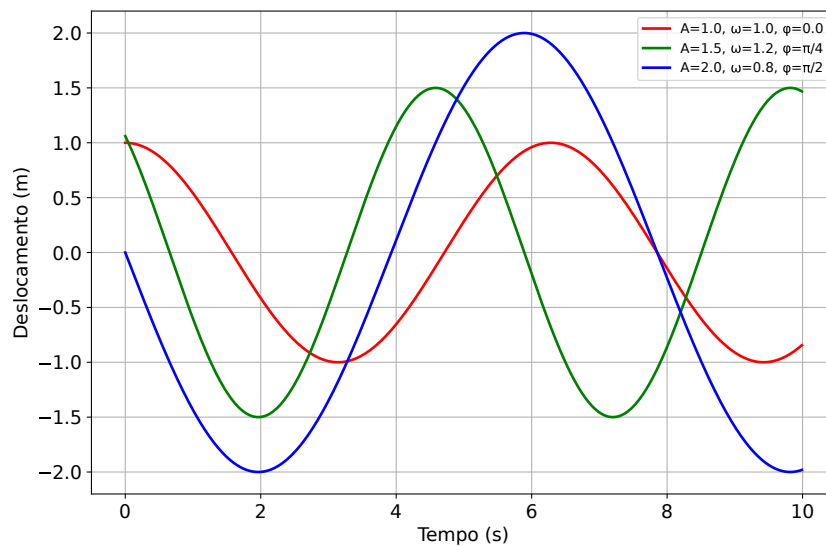
$$\begin{aligned} z(t) &= A \cos \phi_0 \cos \omega t - A \sin \phi_0 \sin \omega t \\ z(t) &= A \left[\cos \phi_0 \cos \omega t - \sin \phi_0 \sin \omega t \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Podemos reescrever a equação acima usando a propriedade trigonometria: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, obtemos:

$$z(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (4.16)$$

A equação (4.16) representa a solução geral do movimento livre não amortecido, permitindo determinar a posição que o corpo oscilante está ocupando ao longo do tempo. Onde A é a amplitude do movimento, ω é a frequência angular de oscilação do corpo e o ϕ_0 é o ângulo inicial em que o movimento oscilatório iniciou ou fase do movimento.

Figura 18 – Este gráfico compara três casos diferentes para o movimento livre não amortecido em um sistema massa-mola. As curvas representam oscilações com diferentes amplitudes A , frequências ω e fases φ , onde a **curva vermelha** ($A = 1.0, \omega = 1, \varphi = 0.0$) não possui deslocamento de fase, a **curva verde** ($A = 1.5, \omega = 1.2, \varphi = \pi/4$) apresenta um pequeno deslocamento de fase, e a **curva em azul** ($A = 2.0, \omega = 0.8, \varphi = \pi/2$) possui um deslocamento de fase mais significativo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico na Figura 18 descreve o movimento dada pela equação (4.16) ou da equação equivalente, dada em (4.13), com aplicações de condições iniciais. Nota-se que, o gráfico é uma onda cossenoidal deslocada ao longo do eixo horizontal, descrevendo um movimento periódico ou harmônico da massa, com amplitude constante, ou seja, sua amplitude não diminui com o passar do tempo. Essa dinâmica se dá na ausência de forças de amortecimento, o sistema não possui dissipação de energia dado pelos deslocamentos e velocidades iniciais.

Para encontrar o valor da amplitude A , tomaremos o quadrado das equações em (4.14), obtemos,

$$z_0^2 = A^2 \cos^2 \phi_0 \quad \text{e} \quad \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \sin^2 \phi_0$$

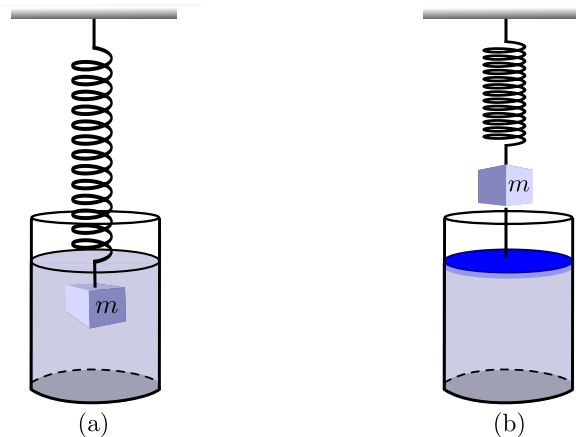
Agora, tomando a soma para se obter o valor da amplitude A' , teremos,

$$\begin{aligned} z_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} &= A^2 \sin^2 \phi_0 + A^2 \cos^2 \phi_0 \\ z_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} &= A^2 (\sin^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_0) \\ A &= \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2 VIBRAÇÕES LIVRES AMORTECIDAS

Tomando o modelo mais realístico, representado na Figura 19, onde mostra-se um sistema com um bloco de massa m que está preso a uma mola de constante k , mergulhado em recipiente, com um dado fluido com viscosidade ρ . Ao aplicar uma força no bloco para baixo, o sistema começará a oscilar dentro do recipiente, onde irá exercer uma força dissipativa no sistema.

Figura 19 – Representação de um dispositivo de amortecimento onde a massa poderia estar suspensa em um meio viscoso como destacado em (a) ou conectada a um dispositivo de amortecimento como em (b).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

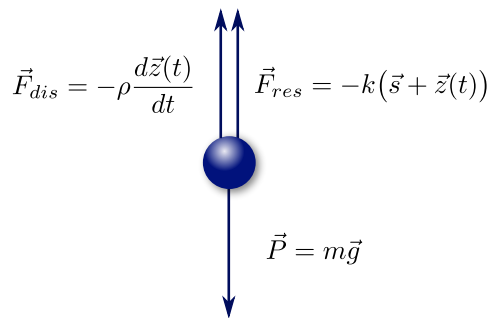
A força de amortecimento sempre age em oposição ao sentido do movimento da massa, onde ocorre uma dissipação de energia interna devido à prolongamento ou compressão da mola. Considerando que a força dissipativa ou amortecida exercida pelo fluido no sistema seja proporcional ao módulo da velocidade em que a massa está oscilando dentro do recipiente. Isso é denominado de amortecimento viscoso, onde teremos:

$$\vec{F}_{dis} = -\rho \frac{d\vec{z}(t)}{dt}. \quad (4.18)$$

A força $\vec{F}_{dis}$ irá dissipar a energia dos sistema à medida em que o tempo passa, diminuindo a oscilação. A equação (4.18) é válida para baixos valores da velocidade quando comparada com a lei de Stokes para o arrasto em fluidos, que estabelece que a força de resistência experimentada por uma esfera em movimento dentro de um fluido viscoso é proporcional à sua velocidade dado por $\vec{F}_{arrasto} = -6\pi\eta R\vec{v}$, onde η é a viscosidade do fluido, R é o raio da esfera e $\vec{v}$ é a velocidade. Essa relação é válida no regime de baixa velocidade (ou seja, para baixos números de Reynolds), onde o arrasto é predominantemente viscoso e não inercial. Assim como no amortecimento viscoso, a força dissipativa reduz gradualmente a energia do sistema.

Levando em consideração que a força restauradora exercida no bloco é contrária a distensão da mola dada por $\vec{F}_{el} = -k(\vec{s} + \vec{z}(t))$, onde k é a constante elástica da mola, $\vec{s}$ representa a posição de equilíbrio e $\vec{z}(t)$ a perturbação em relação a essa posição, essa força tende a trazer o bloco de volta ao equilíbrio sempre que ele for deslocado.. Analisaremos o sistema através do diagrama do diagrama de corpo livre na Figura 20.

Figura 20 – Diagrama de forças para um sistema de mola-massa para o movimento livre amortecido.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento, tomando a somatória de todas as forças, obteremos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= m \frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} \\ \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{dis} &= m \frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m\vec{g} - k(\vec{s} + \vec{z}(t)) - \rho \frac{d\vec{z}(t)}{dt} &= m \frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} \\
\underbrace{m\vec{g} - ks}_{=0} - k\vec{z}(t) - \rho \frac{d\vec{z}(t)}{dt} &= m \frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} \\
m \frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} + \rho \frac{dz(t)}{dt} + k\vec{z}(t) &= 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Dividindo toda equação (4.19) pela massa m e, tomando as seguintes substituições $\gamma = \frac{\rho}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$ chegaremos à seguinte equação diferencial,

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = 0 \tag{4.20}$$

A equação (4.20) é a equação diferencial que descreve o comportamento de um oscilador harmônico amortecido na presença de uma força dissipativa $\vec{F}_{dis} = -\rho \frac{d\vec{z}(t)}{dt}$.

Para equação diferencial dada em (4.20), podemos escrever a equação característica na forma,

$$p^2 + \gamma p + \omega^2 = 0 \tag{4.21}$$

Logo, a solução será dada por:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \\
p &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{4 \left[\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \omega^2 \right]}}{2} \\
p &= -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \omega^2}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Fazendo as seguintes substituições $\beta = \frac{\gamma}{2}$ e $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \omega^2}$, as duas soluções ficam na forma,

$$p_1 = -\beta + \omega_0 \quad \text{e} \quad p_2 = -\beta - \omega_0 \tag{4.23}$$

Nas soluções encontrada em (4.23), existe uma subtração dentro do radical que, para esta configuração, dependendo do valor do termo dentro do radical, existem três casos possíveis para o movimento. Por tanto, vamos estudar os três casos separadamente.

4.2.1 Movimento livre subamortecido

Assumindo que o termo $\beta < \omega$ dentro da raiz resulte em um valor negativo, então as raízes p_1 e p_2 serão complexas, dessa forma teremos:

$$p_1 = -\beta + i\omega_0 \quad \text{e} \quad p_2 = -\beta - i\omega_0.$$

Como o problema nos dá duas soluções distintas, a solução geral vai ser dada por uma combinação linear entre as duas soluções dada na equação (3.29), onde as constantes serão determinadas a partir das condições iniciais do problema, teremos:

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \right] \quad (4.24)$$

Aplicando a condição inicial do tipo $z(0) = z_0$, obteremos,

$$C_1 = z_0$$

Derivando a equação (4.24) em relação a variável t , resulta em,

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\beta e^{-\beta t} \left[C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \right] + e^{-\beta t} \left[-C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t \right]$$

Aplicando a condição inicial $dz(0)/dt = v_0$ e substituindo o valor $C_1 = z_0$, obtemos,

$$\begin{aligned} v_0 &= -\beta z_0 + C_2 \omega_0 \\ C_2 &= \frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de C_1 e C_2 na equação (4.24), teremos,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t \right]. \quad (4.25)$$

Fazendo as seguintes substituições, obteremos,

$$z_0 = A \cos \phi_0 \quad \text{e} \quad \frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} = -A \sin \phi_0 \quad (4.26)$$

Substituindo os valores na $z(t)$ dada em (4.25), fica,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[A \cos \phi_0 \cos \omega_0 t - A \sin \phi_0 \sin \omega_0 t \right] \quad (4.27)$$

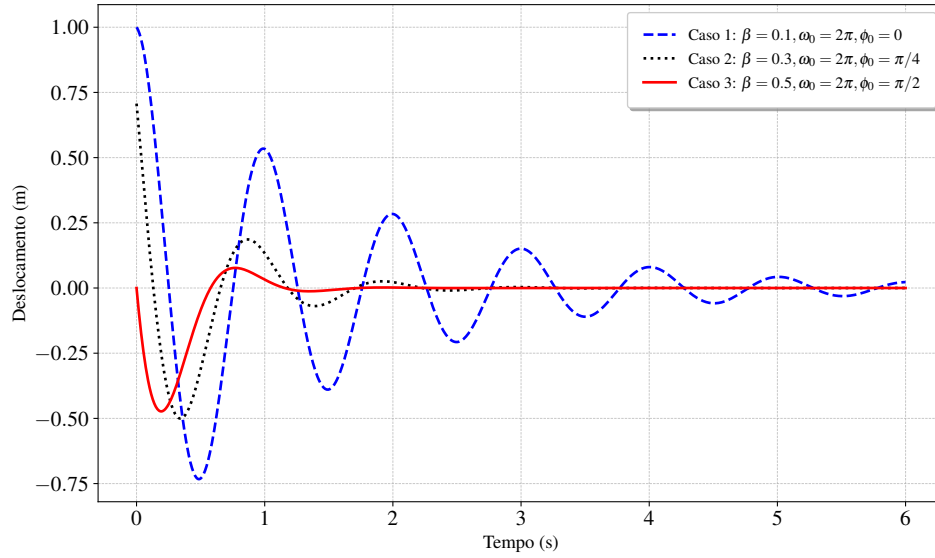
Note que podemos reescrever a expressão dentro do colchetes, utilizando a propriedade trigonométrica do cosseno da soma dada na item 11 do apêndice A, obteremos,

$$z(t) = A e^{-\beta t} \cos (\omega_0 t + \phi_0) \quad (4.28)$$

O termo $A e^{-\beta t}$ nos diz que ao multiplicar a amplitude de oscilação A pela exponencial, a medida que o tempo passa a amplitude decai a zero. Como $\beta < \omega$ esse movimento é chamado de subamortecido.

Conforme mostrado na Figura 21, o movimento descrito pela equação (4.28) é oscilatório, mas por causa do fator $e^{-\beta t}$, as amplitudes de vibrações tendem a zero ($A \rightarrow 0$) quando o tempo t tende ao infinito ($t \rightarrow \infty$).

Figura 21 – Representação gráfica do deslocamento de um sistema massa-mola submetido a amortecimento subcrítico ($\beta < \omega$), para três diferentes coeficientes de amortecimento. Observa-se que quanto maior o coeficiente de amortecimento β , mais rapidamente as oscilações são dissipadas. Os parâmetros utilizados em cada caso são: **Caso 1** (linha azul tracejada): $\beta = 0.1, \omega_0 = 2\pi, \phi_0 = 0$. **Caso 2** (linha preta pontilhada): $\beta = 0.3, \omega_0 = 2\pi, \phi_0 = \pi/4$. **Caso 3** (linha vermelha sólida): $\beta = 0.5, \omega_0 = 2\pi, \phi_0 = \pi/2$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para encontrar o valor da amplitude A , tomaremos o quadrado das equações em (4.26), obtemos,

$$z_0^2 = A^2 \cos^2 \phi_0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right)^2 = A^2 \sin^2 \phi_0$$

Agora, tomando a soma para se obter o valor da amplitude A , teremos,

$$\begin{aligned} z_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right)^2 &= A^2 \sin^2 \phi_0 + A^2 \cos^2 \phi_0 \\ z_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right)^2 &= A^2 (\sin^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_0) \\ A &= \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.2.2 Movimento livre superamortecido

Assumindo que o termo $\beta > \omega$ resulte em um valor positivo e real, neste caso, teremos a seguinte situação:

$$p_1 = -\beta + \omega_0 \quad \text{e} \quad p_2 = -\beta - \omega_0$$

Para solução geral, teremos uma combinação linear entre as suas soluções particulares, teremos,

$$z(t) = e^{-\beta t} [C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}] \quad (4.30)$$

Aplicando a condição inicial $z(0) = z_0$ na equação (4.30), obteremos,

$$z_0 = C_1 + C_2 \quad \text{e} \quad C_1 = z_0 - C_2$$

Derivando a $z(t)$ em relação a variável t , teremos,

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= -\beta e^{\beta t} [C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}] + e^{\beta t} [C_1 \omega_0 e^{\omega_0 t} - C_2 \omega_0 e^{-\omega_0 t}] \\ \frac{dz(t)}{dt} &= e^{\beta t} \left[-\beta C_1 e^{\omega_0 t} - \beta C_2 e^{-\omega_0 t} + C_1 \omega_0 e^{\omega_0 t} - C_2 \omega_0 e^{-\omega_0 t} \right] \\ \frac{dz(t)}{dt} &= e^{\beta t} \left[C_1 e^{\omega_0 t} (\omega_0 - \beta) - C_2 e^{-\omega_0 t} (\omega_0 + \beta) \right] \end{aligned}$$

Aplicando a condição inicial $dz(0)/dt = v_0$ e em seguida aplicando o valor encontrado da variável $C_1 = z_0 - C_2$, teremos,

$$\begin{aligned} v_0 &= C_1 (\omega_0 - \beta) - C_2 (\omega_0 + \beta) \\ v_0 &= (z_0 - C_2) (\omega_0 - \beta) - C_2 (\omega_0 + \beta) \\ v_0 &= z_0 (\omega_0 - \beta) - C_2 (\omega_0 - \cancel{\beta}) - C_2 (\omega_0 + \cancel{\beta}) \\ v_0 &= z_0 (\omega_0 - \beta) - 2\omega_0 C_2 \\ 2\omega_0 C_2 &= z_0 (\omega_0 - \beta) - v_0 \\ C_2 &= \frac{\omega_0 z_0 - \beta z_0 - v_0}{2\omega_0} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo o valor da variável C_2 em para encontrar a variável C_1 , teremos,

$$\begin{aligned} C_1 &= z_0 - C_2 \\ C_1 &= z_0 - \left(\frac{\omega_0 z_0 - \beta z_0 - v_0}{2\omega_0} \right) \\ C_1 &= \frac{2\omega_0 z_0 - \omega_0 z_0 + \beta z_0 + v_0}{2\omega_0} \\ C_1 &= \frac{\omega_0 z_0 + \beta z_0 + v_0}{2\omega_0} \end{aligned} \quad (4.32)$$

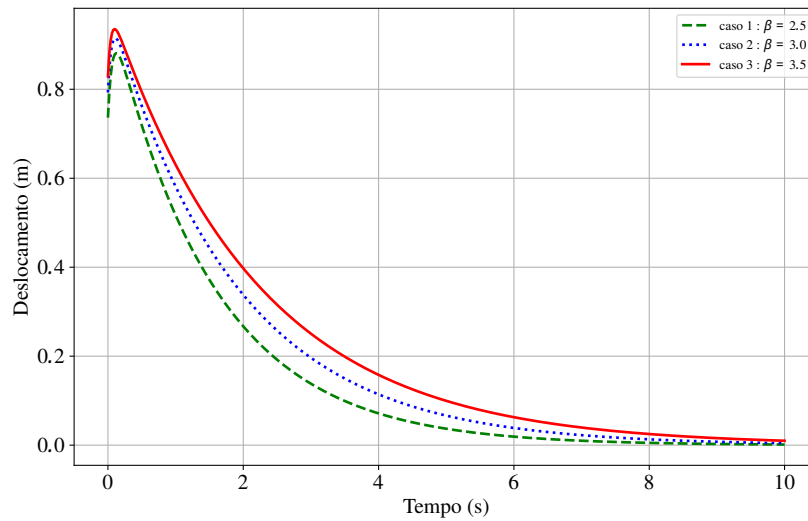
Substituindo os valores encontrado das variáveis C_1 e C_2 na equação (4.30), teremos,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[\left(\frac{\omega_0 z_0 + \beta z_0 + v_0}{2\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} + \left(\frac{\omega_0 z_0 - \beta z_0 - v_0}{2\omega_0} \right) e^{-\omega_0 t} \right] \quad (4.33)$$

Obtemos a equação geral do oscilador harmônico de movimento para $\beta > \omega$. Esta equação nos diz que, a partir do momento em que o sistema começa a oscilar, a força dissipativa imediatamente age de uma forma mais severa e a oscilação é levada a zero, ou seja, o sistema começa com uma amplitude e percebemos que a oscilação cai a zero rapidamente. Esse tipo de amortecimento é conhecido como superamortecido.

O movimento superamortecido é típico em sistemas que precisam evitar qualquer oscilação, como em alguns sistemas de controle de vibrações em engenharia civil e mecânica. A Figura 22 demonstra a resposta do sistema para três diferentes valores de β , todos superiores ao valor crítico, evidenciando como o aumento do coeficiente de amortecimento afeta o tempo de resposta do sistema e sua dissipação de energia.

Figura 22 – Gráfico do deslocamento de sistemas superamortecidos ($\beta > 1$), onde o amortecimento é suficientemente grande para impedir oscilações. O gráfico ilustra a influência do coeficiente de amortecimento β na taxa de decaimento da resposta do sistema, evidenciando que valores maiores de β resultam em um retorno mais lento à posição de equilíbrio. Os casos representados são: **caso 1** (linha verde tracejada): $\beta = 2.5$. **Caso 2** (linha azul pontilhada): $\beta = 3.0$. **Caso 3** (linha vermelha sólida): $\beta = 3.5$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observe que nesta situação, a Figura 22 representa um sistema superamortecido, pois o coeficiente de amortecimento β é maior quando comparado com a constante da mola k . Logo, a equação (4.33) representa um movimento suave e não oscilatório.

4.2.3 Movimento livre criticamente amortecido

O amortecimento crítico é um caso especial em que a resposta do sistema atinge seu estado estacionário o mais rápido possível sem ultrapassar a posição de equilíbrio. Em vista, disso quando $\beta = \omega$, ocorrerá o movimento criticamente amortecido. A equação característica para esse movimento resulta em raízes reais e iguais,

$$p_1 = p_2 = -\beta \quad (4.34)$$

Para solução geral, será escrita como combinação linear entre as suas soluções particulares.

$$z(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} \quad (4.35)$$

Aplicando a primeira condição inicial na equação (4.35), onde a posição inicial será dado por $z(0) = z_0$, obtemos:

$$C_1 = z_0 \quad (4.36)$$

Para aplicação da segunda condição inicial, tomamos a derivada em relação ao tempo da equação (4.35), obtemos:

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\beta C_1 e^{-\beta t} + C_2 e^{-\beta t} - \beta C_2 t e^{-\beta t} \quad (4.37)$$

Aplicando a condição em que $dz(0)/dt = v_0$ e substituindo o valor da variável $C_1 = z_0$, obtemos:

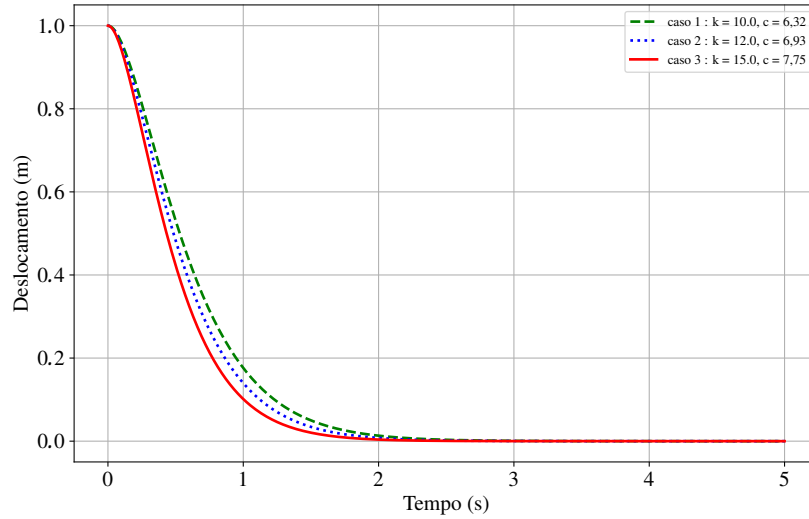
$$\begin{aligned} v_0 &= -\beta C_1 + C_2 \\ C_2 &= v_0 + \beta z_0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Substituindo C_1 e C_2 na equação (4.35), teremos:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 e^{-\beta t} + (v_0 + \beta z_0) t e^{-\beta t} \\ z(t) &= \left[z_0 + (v_0 + \beta z_0) t \right] e^{-\beta t} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dadas as condições iniciais, este oscilador alcançará o equilíbrio mais rápido que o oscilador subamortecido e o superamortecido.

Figura 23 – Gráfico do deslocamento de sistemas criticamente amortecidos, onde o coeficiente de amortecimento c é igual ao amortecimento crítico ($c = c_c$), resultando na eliminação de oscilações e no retorno mais rápido à posição de equilíbrio sem ultrapassagem. O gráfico apresenta três diferentes configurações de rigidez k e seus respectivos coeficientes de amortecimento crítico: **caso 1** (linha verde tracejada): $k = 10.0, c = 6.32$. **Caso 2** (linha azul pontilhada): $k = 12.0, c = 6.93$. **Caso 3** (linha vermelha sólida): $k = 15.0, c = 7.75$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

As curvas mostram como o aumento da constante de rigidez k e, conseqüentemente, do coeficiente de amortecimento crítico, influencia a resposta do sistema, acelerando a dissipação do movimento oscilatório. Podemos observar que o movimento é bem semelhante ao sistema superamortecido. Dessa forma, dizemos que o sistema é criticamente amortecido, pois para qualquer decrescimento na força de amortecimento, resulta em um movimento oscilatório.

4.3 VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO AMORTECIDAS

Relembrando que a equação diferencial que descreve um oscilador harmônico forçado não-amortecido pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega^2 z(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (4.40)$$

Tomando a equação homogênea expressa em (4.3) com as condições iniciais $z(0) = z_0$ e $dz(t)/dt = v_0$. As duas soluções fundamentais da equação complementar, são: $z_1(t) = \cos \omega t$ e $z_2(t) = \sin \omega t$, logo, a solução homogênea fica,

$$z_h(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (4.41)$$

Seguindo o método descrito na seção 3.2.1, a solução particular da equação não-homogênea em (4.3) pode ser obtida por,

$$z_p(t) = -\cos \omega t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' + \sin \omega t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \quad (4.42)$$

dada os valores de $z_1(t)$ e $z_2(t)$ o cálculo do wronskiano resulta em $W(z_1, z_2)(t) = \omega$. Observe que a $F(t')$ é uma função genérica, logo, os extremos inferiores da integração t_0 são escolhidos de forma arbitrariamente.

A solução geral em (3.42) é, então, dado por:

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \cos \omega t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' + \sin \omega t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \\ z(t) &= \cos \omega t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \right) + \sin \omega t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Manipulando as condições iniciais para obter as constantes C_1 e C_2 , obtêm-se a solução geral cujo os cálculos estão no Apêndice B.

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin [\omega(t - t')] dt'$$

Essa equação descreve completamente a dinâmica de um oscilador harmônico forçado sem amortecimento, separando a resposta natural e a resposta à força externa. O comportamento do sistema depende da frequência da força aplicada, podendo levar à ressonância, dependendo das condições iniciais e da natureza de $F(t)$.

4.3.1 Aplicação de uma força constante no movimento forçado não amortecido

Tomaremos o exemplo, para uma força constante aplicada no sistema na forma $F(t) = F_0$, obteremos,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega} \int_0^t \sin [\omega(t - t')] dt' \quad (4.44)$$

Calculando a integral conforme o Apêndice C, a equação em (4.44) para uma força constante obtemos o seguinte resultado,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (4.45)$$

A equação (4.45) descreve o comportamento de um oscilador simples (como uma massa presa a uma mola) sob a influência de uma força externa constante, sem amortecimento, resistência ou atrito. Observe que, o primeiro e o segundo termos descrevem a vibração livre do sistema, ou seja, como ele se comportaria na ausência de uma força externa, dependendo de sua posição inicial z_0 e velocidade inicial v_0 . A terceira parcela da equação descreve o movimento adicional induzido pela força externa F_0 , que inclui uma vibração com uma mesma frequência ω .

Esse comportamento é observado em sistemas suspensos por molas ou cabos elásticos, onde uma força externa constante pode alterar o equilíbrio dinâmico do sistema sem introduzir amortecimento ou atrito.

Um exemplo prático para a equação (4.45) é o **movimento vertical de um elevador submetido a uma força constante**, como a força gerada por um motor no cabo de sustentação.

Imagine um elevador inicialmente parado ($v_0 = 0$) em um andar (z_0), preso por cabos que possuem elasticidade, funcionando como uma mola. Quando o motor do elevador aplica uma força constante F_0 , ele começa a oscilar em torno de uma posição de equilíbrio devido à elasticidade dos cabos.

Os dois primeiros termos da equação representam as oscilações naturais do elevador devido à elasticidade dos cabos. O terceiro termo mostra como a força aplicada pelo motor modifica esse movimento, adicionando um deslocamento adicional à oscilação.

4.3.2 Aplicação de uma força periódica no movimento forçado não amortecido

Tomaremos agora uma força periódica do tipo $F(t) = F_0 \cos \varphi t$ no movimento,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega} \left[\int_0^t \cos \varphi t' (\sin \omega t \cos \omega t' - \sin \omega t' \cos \omega t) dt' \right] \quad (4.46)$$

Calculando a integral conforme o Apêndice C, a equação em (4.46) para uma força periódica obtemos o seguinte resultado,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega} \left[\frac{\sin \omega t (2\omega t + \sin 2\omega t) - \cos \omega t (\cos 2\omega t - 1)}{4\omega} \right] \quad (4.47)$$

sendo a resposta forçada do sistema, devido à força externa aplicada. A forma do termo particular indica a presença de um crescimento linear no tempo, característico da ressonância quando a frequência da força se aproxima da frequência natural do sistema. A presença do termo linear $2\omega t$ mostra que o sistema exibe um crescimento no tempo devido à ressonância. Quando a frequência de excitação se iguala à frequência natural do sistema, o movimento se torna não limitado (teoricamente), causando amplitudes crescentes. A solução homogênea decai com o tempo devido à condição inicial, enquanto a solução particular se torna dominante.

4.4 VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS

Um oscilador harmônico forçado é um sistema físico que se comporta de acordo com a equação diferencial do oscilador harmônico simples, mas com a adição de uma força externa que o impulsiona a oscilar. O comportamento do oscilador harmônico forçado pode ser bastante variado e inclui fenômenos interessantes, como ressonância, onde a amplitude de oscilação

atinge um pico em determinada frequência de força externa, e efeitos de amortecimento, que podem atenuar ou amplificar a resposta do sistema dependendo dos parâmetros envolvidos.

Lembrando que equação diferencial que descreve um oscilador harmônico forçado pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \beta \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (4.48)$$

A equação diferencial acima representa um oscilador harmônico forçado com um termo de amortecimento proporcional à velocidade, caracterizado pelo coeficiente β . A solução dessa equação depende do valor de β em relação à frequência natural do sistema ω , o que nos leva a três regimes distintos de amortecimento.

A seguir, analisaremos cada um desses casos em detalhes, observando como o fator de amortecimento influencia o comportamento do oscilador.

4.4.1 Movimento forçado subamortecido

Para a equação homogênea dada na equação (4.19), considerando o caso em que $\beta < \omega$, para se obter uma solução com condições iniciais do tipo $z(0) = z_0$ e $dz(t)/dt = v_0$. As duas soluções fundamentais da equação complementar, são: $z_1(t) = e^{-\beta t} \cos \omega_0 t$ e $z_2(t) = e^{-\beta t} \sin \omega_0 t$. Logo a solução homogênea fica,

$$z_h(t) = C_1 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t + C_2 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t,$$

sendo o wronskiano $W(z_1, z_2)(t) = \omega_0 e^{-2\beta t}$, a solução particular, fica,

$$z_p(t) = -e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' + e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt'$$

A solução geral em (3.42) é, então, dado por:

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t + C_2 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t - e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \\ &\quad + e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \\ z(t) &= e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) + e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(C_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) \quad (4.49) \end{aligned}$$

Manipulando as condições iniciais para obter as constantes C_1 e C_2 , obtêm-se a solução geral cujo os cálculos estão no Apêndice B.

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin [\omega_0(t - t')] dt' \right]. \quad (4.50)$$

Essa solução pode ser interpretada como a soma de três termos principais. Os dois primeiros termos representa a solução homogênea, que caracteriza a resposta natural do sistema na ausência de forças externas. A exponencial $e^{-\beta t}$ caracteriza o amortecimento, indicando que a amplitude da oscilação diminui ao longo do tempo. Os coeficientes z_0 e v_0 são as condições iniciais de posição e velocidade, respectivamente, e a frequência ω_0 está relacionada à oscilação do sistema sem amortecimento. A terceira parcela, expressa a influência da força externa $F(t)$ sobre o movimento do vibratório. A integral descreve como a força aplicada contribui para o deslocamento atual.

4.4.1.1 Aplicação de uma força constante no movimento forçado subamortecido

Tomaremos o exemplo, para uma força constante aplicada no sistema na forma $F(t) = F_0$, obteremos,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0} \int_0^t e^{\beta t'} \sin [\omega_0(t - t')] dt' \right] \quad (4.51)$$

Calculando a integral conforme o Apêndice C, dessa forma a equação em (4.51) para uma força constante obtemos o seguinte resultado,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0} \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) \right] \quad (4.52)$$

A equação acima apresentada descreve o movimento forçado subamortecido de um sistema massa-mola sob a influência de uma força constante. o termo exponencial $e^{-\beta t}$ representa o amortecimento do sistema, reduzindo a amplitude com o tempo. A solução homogênea $z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t$, descreve a oscilação natural do sistema amortecido com frequência ω_0 . A solução particular dador $\frac{F_0}{m\omega_0} \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right)$ esse termo representa a resposta forçada devido à influência da força constante.

4.4.1.2 Aplicação de uma força periódica no movimento forçado subamortecido

Para uma força periódica aplicada no sistema na forma $F(t) = F_0 \cos \varphi t$ na equação (4.50), obteremos,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0} \int_0^t e^{\beta t'} \sin [\omega_0(t - t')] \cos \varphi t' dt' \right] \quad (4.53)$$

Calculando a integral conforme o Apêndice C, dessa forma a equação em (4.53) para uma força periódica obtemos os seguintes resultados,

Considerando o caso em que $\varphi \neq \omega_0$. Dessa forma a integral $z_1(t)$ na equação (4.53), resulta em,

$$\begin{aligned} z_1(t) = e^{-\beta t} & \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0} \left(\cos \varphi t \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t}{\beta^2 + \omega_0^2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) + \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} \left[-\beta \left(\frac{\omega_0 \sin \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi \sin \omega_0 t \cos \varphi t}{\varphi^2 - \omega_0^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega_0 \left(\frac{\beta e^{\beta t} \sin \varphi t - \varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\beta^2 + \omega_0^2} - \left(\frac{\omega_0 \sin \varphi t \sin \omega_0 t - \varphi \cos \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi}{\varphi^2 - \omega_0^2} \right) \right) \right] \right] \quad (4.54) \end{aligned}$$

A equação apresentada descreve o movimento forçado subamortecido de um sistema massa-mola sob a influência de uma força periódica. O termo exponencial $e^{-\beta t}$ representa o amortecimento do sistema, reduzindo a amplitude com o tempo. Na solução particular que contém a influência da força periódica $F(t) = F_0 \cos \varphi t$ a resposta desta força oscila com a mesma frequência da força externa φ podendo ocorrer ressonância se $\varphi \approx \omega_0$.

Agora, considerando que $\varphi = \omega_0$. Dessa forma, a integral $z_2(t)$ na equação (4.53), resulta em,

$$\begin{aligned} z_2(t) = e^{-\beta t} & \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0} \left(\cos \varphi t \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t}{\beta^2 + \omega_0^2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) + \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} \left[-\beta \left(\frac{2\omega_0 t - \sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega_0 \left(\frac{\beta e^{\beta t} \sin \varphi t - \varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\beta^2 + \omega_0^2} - \left(\frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right) \right) \right] \right] \quad (4.55) \end{aligned}$$

Na solução particular que contém a influência da força periódica $F(t) = F_0 \cos \varphi t$ a resposta desta força oscila com a mesma frequência da força externa φ podendo ocorrer ressonância se $\varphi = \omega_0$.

4.4.2 Movimento forçado superamortecido

Para equação homogênea dada em (4.19). As duas soluções fundamentais da equação complementar, considerando o caso em que $\beta > \omega$, para a equação homogênea com as condições iniciais $z(0) = z_0$ e $dz(t)/dt = v_0$, dessa forma a equação homogênea fica,

$$z_h(t) = C_1 e^{-\zeta_1 t} + C_2 e^{-\zeta_2 t}, \quad (4.56)$$

para facilitar as contas, foram feitas as seguintes substituições $p_1 = -\zeta_1$ e $p_2 = -\zeta_2$ nas soluções dada em (4.30).

Com as expressões de $z_1(t)$ e $z_2(t)$, o wronskiano é $W(z_1, z_2)(t) = (\zeta_1 - \zeta_2)e^{-(\zeta_1 + \zeta_2)t}$. Portanto, a solução particular fica,

$$\begin{aligned} z_p(t) &= -e^{-\zeta_1 t} \int_{t_0}^t \frac{e^{-\zeta_2 t'} F(t')/m}{(\zeta_1 - \zeta_2)e^{-(\zeta_1 + \zeta_2)t'}} dt' + e^{-\zeta_2 t} \int_{t_0}^t \frac{e^{-\zeta_1 t'} F(t')/m}{(\zeta_1 - \zeta_2)e^{-(\zeta_1 + \zeta_2)t'}} dt' \\ z_p(t) &= -e^{-\zeta_1 t} \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + e^{-\zeta_2 t} \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \end{aligned}$$

A solução geral do movimento superamortecido, fica,

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 e^{-\zeta_1 t} + C_2 e^{-\zeta_2 t} - e^{-\zeta_1 t} \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + e^{-\zeta_2 t} \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \\ z(t) &= e^{-\zeta_1 t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) + e^{-\zeta_2 t} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Manipulando as condições iniciais para obter as constantes C_1 e C_2 , obtêm-se a solução geral cujo os cálculos estão no Apêndice B.

$$z(t) = e^{-\zeta_2 t} \left(\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) - e^{-\zeta_1 t} \left(\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) \quad (4.58)$$

A expressão acima representa a solução geral do movimento de um sistema oscilatório amortecido sob a ação de uma força externa $F(t)$, considerando um regime superamortecido. Esse comportamento ocorre quando o coeficiente de amortecimento é suficientemente grande para impedir oscilações, resultando em um retorno exponencial à posição de equilíbrio sem ultrapassagens.

A equação pode ser interpretada como a soma de dois termos fundamentais. A resposta natural (homogênea)

$$e^{-\zeta_2 t} \left(\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} \right) - e^{-\zeta_1 t} \left(\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} \right).$$

Esse termo descreve o decaimento exponencial da resposta livre do sistema, onde ζ_1 e ζ_2 são as raízes da equação característica associada à equação diferencial do oscilador amortecido. Essas raízes governam a taxa de decaimento da solução. Como ζ_1 e ζ_2 são distintos e reais (caso superamortecido), a solução consiste em uma combinação de dois expoentes negativos que não geram oscilações.

A resposta forçada

$$e^{-\zeta_2 t} \int_0^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' - e^{-\zeta_1 t} \int_0^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt'$$

Esse termo descreve a influência da força externa $F(t)$ sobre o movimento do sistema. Os fatores exponenciais $e^{\zeta_1 t'}$ e $e^{\zeta_2 t'}$ ajustam a contribuição da força externa de acordo com o comportamento do sistema superamortecido.

4.4.2.1 Aplicação de uma força constante no movimento forçado superamortecido

Aplicando uma força contante do tipo $F(t) = F_0$ no movimento superamortecido dada em (4.58), obtemos,

$$z(t) = e^{-\zeta_2 t} \left[\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^t \frac{F_0 e^{\zeta_2 t'} dt'}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \right] - e^{-\zeta_1 t} \left[\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^t \frac{F_0 e^{\zeta_1 t'} dt'}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \right] \quad (4.59)$$

Calculando as integrais conforme o Apêndice C, dessa forma a equação em (4.59) para uma força constante obtemos o seguinte resultado,

$$z(t) = e^{-\zeta_2 t} \left(\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} \right) - e^{-\zeta_1 t} \left(\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} \right) + \frac{F_0 [\zeta_1 (1 - e^{-\zeta_2 t}) - \zeta_2 (1 - e^{-\zeta_1 t})]}{m \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1 - \zeta_2)} \quad (4.60)$$

Para o movimento forçado superamortecido ocorre quando o coeficiente de amortecimento β é grande o suficiente para impedir oscilações. A solução homogênea contém dois termos exponenciais $e^{-\zeta_1 t}$ e $e^{-\zeta_2 t}$, que descrevem um decaimento suave sem oscilações na Solução particular representa o efeito da força constante F_0 no deslocamento do sistema. O sistema atinge um deslocamento final de equilíbrio, onde a força externa equilibra a resistência do amortecimento.

4.4.2.2 Aplicação de uma força periódica no movimento forçado superamortecido

Agora aplicando uma força periódica do tipo $F(t) = F_0 \cos \varphi t$ na equação (4.58), teremos,

$$z(t) = e^{-\zeta_2 t} \left[\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \frac{F_0}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' \right] - e^{-\zeta_1 t} \left[\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \frac{F_0}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_1 t'} dt' \right] \quad (4.61)$$

Calculando as integrais conforme o Apêndice C. Note que as duas integrais na equação (4.61) possuem o mesmo resultado obtido em (C.17). Dessa forma, a expressão $z(t)$ fica na forma,

$$z(t) = e^{-\zeta_2 t} \left[\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \frac{F_0}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \left(\frac{\zeta_2 \cos \varphi t e^{\zeta_2 t} + \varphi \sin \varphi t e^{\zeta_2 t} - \zeta_2}{\varphi^2 + \zeta_2^2} \right) \right] - e^{-\zeta_1 t} \left[\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \frac{F_0}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \left(\frac{\zeta_1 \cos \varphi t e^{\zeta_1 t} + \varphi \sin \varphi t e^{\zeta_1 t} - \zeta_1}{\varphi^2 + \zeta_1^2} \right) \right]. \quad (4.62)$$

A solução $z(t)$ em (4.62) apresenta a resposta transitória associada ao amortecimento e a resposta forçada oscilatória devido à excitação externa. Os termos exponenciais assim como no caso de força constante, o sistema tende a um estado estacionário à medida que os transientes desaparecem.

4.4.3 Movimento forçado criticamente amortecido

Considerando o caso em que $\beta = \omega$, para se obter uma solução com condições iniciais, para a equação homogênea com as condições iniciais $z(0) = z_0$ e $dz(t)/dt = v_0$.

A equação homogênea é dada por,

$$z_h(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} \quad (4.63)$$

Com as expressões de $z_1(t)$ e $z_2(t)$, o wronskiano é $W(z_1, z_2)(t) = e^{-2\beta t}$. Portanto, a solução particular fica:

$$z_p(t) = -e^{-\beta t} \int_{t_0}^t \frac{t' e^{-\beta t'} F(t')}{m e^{-2\beta t'}} dt' + t e^{-\beta t} \int_{t_0}^t \frac{e^{-\beta t'} F(t')}{m e^{-2\beta t'}} dt' \quad (4.64)$$

$$z_p(t) = -e^{-\beta t} \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' + t e^{-\beta t} \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \quad (4.65)$$

A solução geral, fica,

$$\begin{aligned}
z(t) &= C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} - e^{-\beta t} \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' + t e^{-\beta t} \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \\
z(t) &= e^{-\beta t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \right) + t e^{-\beta t} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Manipulando as condições iniciais para obter as constantes C_1 e C_2 , obtêm-se a solução geral cujo os cálculos estão no Apêndice B.

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 - \int_0^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' + t \left(v_0 + \beta z_0 + \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) \right] \quad (4.67)$$

A expressão acima representa a solução do movimento de um sistema amortecido criticamente sob a ação de uma força externa $F(t)$.

A resposta natural (homogênea),

$$e^{-\beta t} \left[z_0 + t(v_0 + \beta z_0) \right]$$

descreve um decaimento exponencial sem oscilações, com um componente linear característico do amortecimento crítico.

A resposta forçada

$$e^{-\beta t} \left[- \int_0^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' + t \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right].$$

Esse termo representa a resposta particular do sistema devido à força externa $F(t)$. A primeira integral modela a influência da força externa ponderada pelo tempo t' , enquanto a segunda integral, multiplicado por t , influencia diretamente o deslocamento de maneira proporcional ao tempo. A função exponencial $e^{\beta t'}$ ajusta a contribuição da força de acordo com o amortecimento do sistema.

4.4.3.1 Aplicação de uma força constante no movimento forçado criticamente amortecido

Aplicando uma força constante do tipo $F(t) = F_0$, obtemos,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 - \frac{F_0}{m} \int_0^t t' e^{\beta t'} dt' + t \left(v_0 + \beta z_0 + \frac{F_0}{m} \int_0^t e^{\beta t'} dt' \right) \right] \quad (4.68)$$

Calculando as integrais conforme o Apêndice C. Note que, o resultado da segunda integral calculada em (C.18) será adicionado na segunda parcela da equação (4.68) pois se trata da mesma integral. Com isso, o resultado da integração em (4.68), é dada por,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 - \frac{F_0}{m} \left(\frac{te^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) + t \left(v_0 + \beta z_0 + \frac{F_0}{m} \left(\frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} \right) \right) \right] \quad (4.69)$$

A solução particular inclui o termo $e^{-\beta t}$, que causa uma diminuição exponencial do deslocamento ao longo do tempo. A solução particular representa a influência da força constante F_0 no sistema e inclui um termo proporcional ao tempo, que afeta a taxa de deslocamento do sistema.

4.4.3.2 Aplicação de uma força periódica no movimento forçado criticamente amortecido

Aplicando uma força periódica do tipo $F(t) = F_0 \cos \varphi t$, obtemos,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left(z_0 - \underbrace{\frac{F_0}{m} \int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt'}_{(\square)} \right) + t e^{-\beta t} \left(v_0 + \beta z_0 + \underbrace{\frac{F_0}{m} \int_0^t e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt'}_{(\square \square)} \right) \quad (4.70)$$

Calculando as integrais conforme o Apêndice C. Voltando para equação $z(t)$ em (4.70), substituindo os valores das integrais $(\square)$ dada em (C.23) e a $(\square \square)$ já calculado anteriormente na equação (C.17), obteremos,

$$\begin{aligned} z(t) = e^{-\beta t} & \left[z_0 - \frac{F_0}{m} \left(\frac{\cos \varphi t (\beta t e^{\beta t} - e^{\beta t}) + \varphi \sin \varphi t (t e^{\beta t} - \beta e^{\beta t})}{\beta^2 + \varphi^2} + \right. \right. \\ & + \frac{\beta (1 - \varphi \sin \varphi t - \cos \varphi t) + \beta \varphi^2 (\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \sin \varphi t e^{\beta t} - \beta)}{\beta^2 + \varphi^2} - \\ & \left. \left. \frac{\beta \varphi^2 (\beta \sin \varphi t e^{\beta t} - \varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi)}{\beta^2 + \varphi^2} \right) + t \left(v_0 + \beta z_0 + \frac{F_0}{m} \left(\frac{\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \sin \varphi t e^{\beta t} - \beta}{\beta^2 + \varphi^2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

O termo exponencial $e^{-\beta t}$ representa o amortecimento do sistema, reduzindo a amplitude com o tempo. A solução homogênea z_0 descreve a resposta do sistema sem a força externa. A solução particular contém a influência da força periódica $F(t) = F_0 \cos \varphi t$, a resposta forçada oscila com a mesma frequência da força externa φ . O sistema não apresenta oscilações naturais devido ao amortecimento crítico, mas sim um deslocamento modificado pela força periódica.

Neste caso, a equação incorpora tanto um termo de deslocamento exponencialmente amortecido quanto um termo de resposta particular da força periódica. A resposta do sistema exibe um decaimento mais rápido do que o caso subamortecido e não apresenta oscilações livres, apenas a oscilação forçada pela força externa.

5 SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES MECÂNICAS NO *SOFTWARE MODELLUS*

Nesta seção, exploraremos as simulações utilizando o *software Modellus*, uma ferramenta poderosa que permite a criação e análise interativa de modelos dinâmicos. Como já dito anteriormente, o objetivo geral deste trabalho é elaborar um conjunto de simulações que possam ser aplicadas em sala de aula, fazendo uso do *software Modellus* na modelagem de experimentos virtuais voltados ao conteúdo de vibrações mecânicas vitais nas disciplinas de Equações Diferenciais e Mecânica Clássica.

A compreensão profunda das vibrações mecânicas muitas vezes é aprimorada por meio da aplicação prática e visualização de conceitos teóricos. As simulações apresentadas não apenas enriquecerão a compreensão teórica das vibrações mecânicas, mas também servirão como valiosos tutoriais práticos, destinadas especialmente a educadores e professores, as simulações nesta seção se tornarão recursos didáticos eficazes para serem implementados em aulas de Equações Diferenciais e Mecânica Clássica. Ao proporcionar uma abordagem prática e visual dos conceitos fundamentais vistos na sessão anterior, essas simulações visam enriquecer o processo de aprendizagem dos alunos e facilitar a assimilação de princípios complexos.

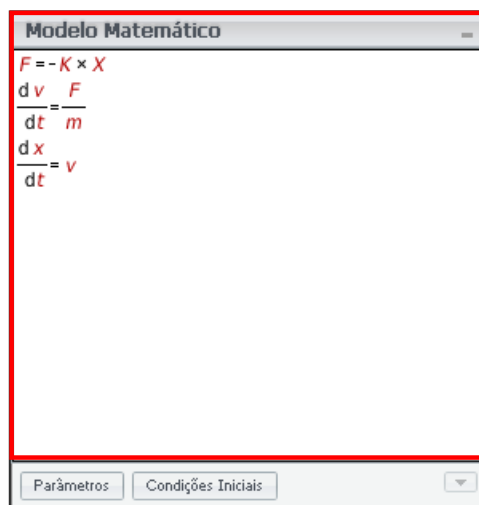
5.1 SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

Compreender o movimento do sistema massa-mola é crucial para nossa análise das vibrações mecânicas. Os princípios discutidos nas sessões anteriores, fornecem a base teórica necessária para interpretar os resultados das simulações, contribuindo assim para a compreensão mais profunda do comportamento vibratório em nosso estudo. Pode-se empregar as funcionalidades de animação no *Modellus* para desenvolver representações distintas dos resultados anteriores.

No Apêndice D está disponível um guia detalhado para auxiliar os professores na implementação da simulação de vibrações mecânicas em suas aulas. O intuito desse material é fornecer orientações claras sobre como criar e utilizar as simulações como uma ferramenta para o ensino eficiente dessa matéria. O tutorial explica cada etapa do processo da criação da simulação de forma acessível e didática para garantir a correta aplicação dos conceitos essenciais no contexto da simulação.

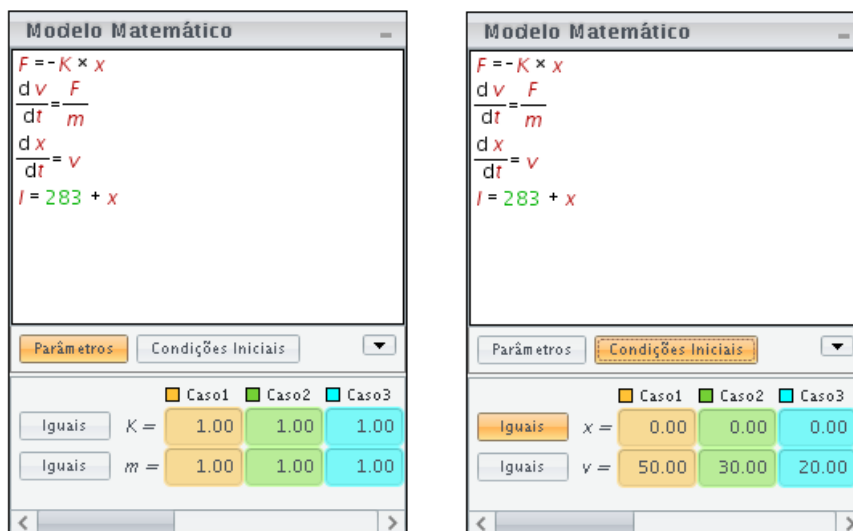
5.1.1 Análise da simulação do movimento vibratório não amortecido

A construção do modelo para a análise do movimento começa através da inserção das equações na janela Modelo Matemático do *Modellus*. Inicialmente, será necessário digitar a equação $\vec{F} = -k\vec{x}$ e inserir as definições de velocidade e aceleração, conforme a Figura 24.

Figura 24 – Equações das oscilações livres não amortecidas inseridas na janela Modelo Matemático.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Estudaremos o movimento de um sistema massa-mola para três casos, onde as massas serão iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica com valor de $k = 1$ N/m, com condições iniciais diferentes. Estas englobam as velocidades $v_1 = 50$ m/s, $v_2 = 30$ m/s e $v_3 = 20$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 0$ m, $x_2 = 0$ m e $x_3 = 0$ m no instante $t = 0$ s.

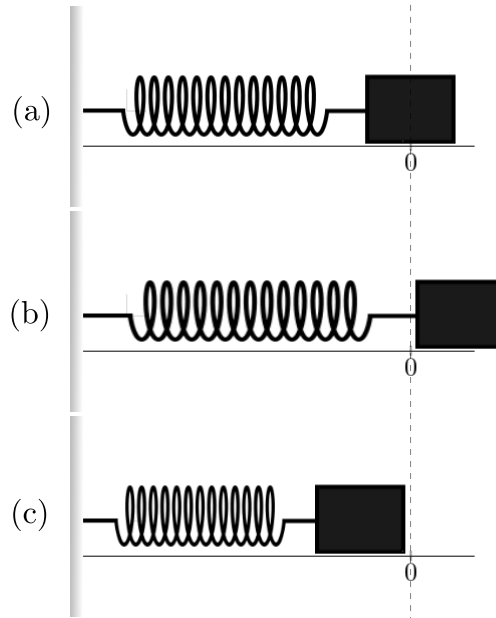
Figura 25 – Representação das condições iniciais propostas, na janela do Modelo Matemático.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Uma vez determinadas as condições iniciais, o software realiza cálculos baseados nas equações de entrada fornecidas, computando as grandezas necessárias para a construção do gráfico de movimento e a criação da animação.

Note que, ao iniciar a simulação o sistema massa-mola começa a executar sua dinâmica, como podemos observar na Figura 26.

Figura 26 – Representação da dinâmica do sistema massa-mola: Em (a) o sistema está inicialmente em repouso. Isso ocorre quando a mola está nem esticada nem comprimida, representando o ponto de referência para o sistema. Em (b) note que, em alguns instantes o sistema alcança um alongamento máximo da mola em relação ao ponto de equilíbrio. Em (c) a mola está comprimida em relação ao ponto de origem.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao deslocar a massa m a partir da posição de equilíbrio, definimos um deslocamento $x(t)$ de acordo com a equação 4.1, que reflete a natureza linear da restauração elástica da mola em resposta o deslocamento sofrido pelo sistema, o gráfico abaixo representa a dinâmica do movimento.

A semelhança dos resultados entre o sistema massa-mola na **vertical** tratado na capítulo 4 e o sistema na **horizontal** tratado nas simulações ocorre porque, em ambos os casos, a equação diferencial que governa o movimento é essencialmente a mesma. Vamos analisar isso em detalhe.

No caso de um sistema massa-mola **horizontal** sem atrito. A única força atuando na direção do movimento é a força restauradora da mola, dada pela Lei de Hooke na forma $F = -kx(t)$. Aplicado a segunda lei de Newton, obtemos

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

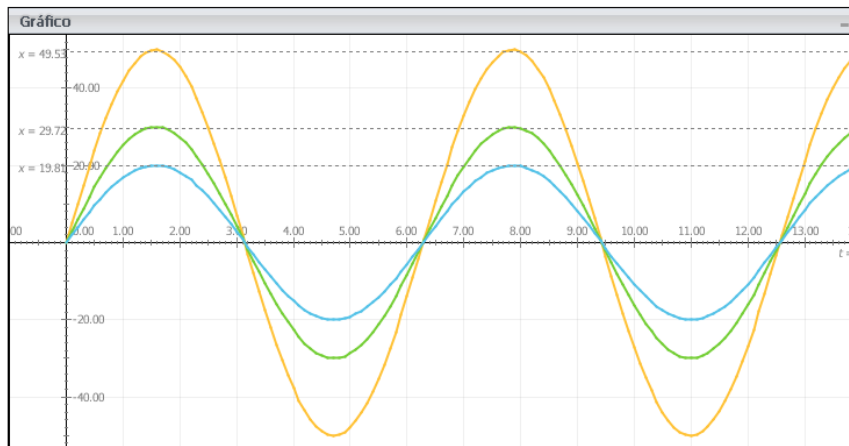
a expressão acima é a equação diferencial do movimento harmônico simples (MHS).

No caso de uma mola pendurada **verticalmente** com uma massa, precisamos levar em conta a gravidade. O sistema entra em equilíbrio quando a força elástica se iguala ao peso da massa resultando na equação (4.2), para o sistema em movimento a expressão (4.3) é uma equação diferencial que modela o movimento na horizontal.

A gravidade não afeta a frequência do sistema porque ela apenas desloca a posição de

equilíbrio, mas não altera a natureza do movimento oscilatório. Isso significa que a frequência natural de oscilação para ambos os sistemas é $\omega = \sqrt{k/m}$. Ou seja, independentemente de estar na horizontal ou na vertical, a massa oscila da mesma forma, pois a equação diferencial é idêntica.

Figura 27 – Gráfico para o movimento nos três casos definidos na Figura 25: a **curva laranja** representa a função de deslocamento com maior amplitude. A **curva verde** representa uma função com amplitude intermediária. A **curva azul** representa a função com menor amplitude.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Note que, o *Modellus* gerou gráficos na janela **Gráfico** observados na Figura 27 que exibem a variação da amplitude do movimento de cada massa m ao longo do tempo para os três casos estudados. As cores diferenciam cada caso: a **curva laranja** representa o **caso 1**, com as condições iniciais $x_1 = 0$ m e $v_1 = 50$ m/s; a **curva verde** representa o **caso 2**, com $x_2 = 0$ m e $v_2 = 30$ m/s e a **curva azul** representa o **caso 3**, com a condição inicial $x_3 = 0$ m e $v_3 = 20$ m/s. É possível notar que, apesar das variações significativas na amplitude de oscilação entre os diferentes casos o período se mantém constante.

Para determinação do valor de t para alcançar o valor máximo da amplitude do movimento vibratório livre, aplica-se a análise da equação do movimento dada em (4.16) utilizando as condições iniciais do sistema $z(0) = 0$ e $dz/dt = v_0$ onde definiu-se $\omega = \sqrt{k/m}$ como a frequência angular de oscilação do corpo. Tomando a derivada em relação ao tempo da equação (4.16) e igualando a derivada a zero resultando em $-A\omega \sin(\omega t + \phi_0) = 0$. Observe que, para a equação seja realmente zero o argumento da função $\sin$ deve ser igual a um múltiplo de π .

Como $-A\omega \neq 0$. Dessa forma, temos que $\omega t + \phi_0 = n\pi$, onde o valor de t é dado por $t = (n\pi - \phi_0)/\omega$ onde n é um número natural na forma $n = 1, 2, 3, \dots$. Aplicando a condição inicial em que $n = 1$ e $\omega = 1$, onde $k = 1$ e $m = 1$ são valores definindo nos parâmetros da janela **Modelo Matemático** para a constante elástica k e a massa m dados representados na Figura 25, obtemos que $t = \pi - \phi_0$.

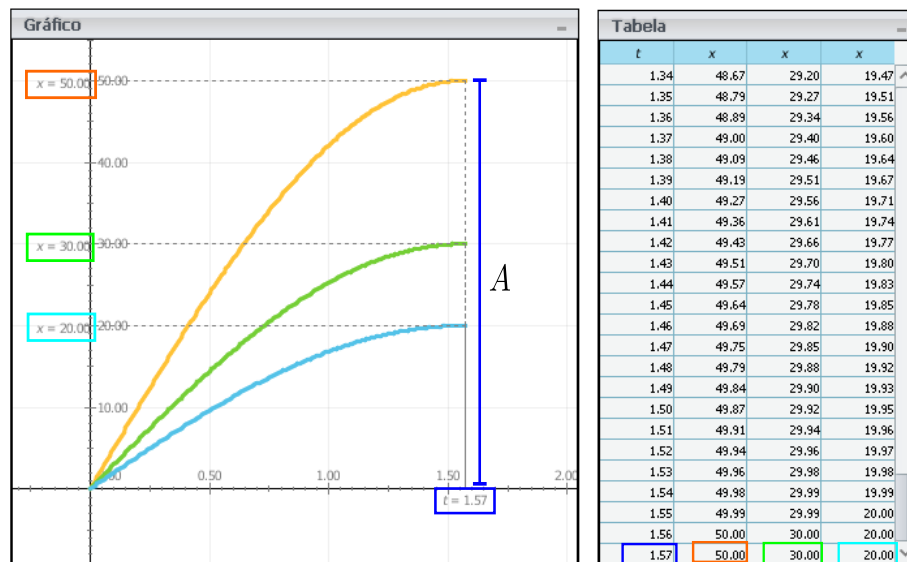
Com o valor de t definido, podemos encontrar o valor da amplitude A máxima para o

movimento vibratório livre no caso 1 através da equação $A = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ dada em 4.17, onde $x_1 = 0$ m e $v_1 = 50$ m/s a amplitude máxima é de $A_1 = 50$ m; para o caso 2, as condições iniciais são $x_2 = 0$ m e $v_2 = 30$ m/s a amplitude máxima é $A_2 = 30$ m; para o caso 3, as condições iniciais são $x_3 = 0$ m e $v_3 = 20$ m/s a amplitude máxima é $A_3 = 20$ m. Esses valores representam o maior deslocamento das massas m em relação às suas posições de equilíbrio.

Para obter o valor de t máximo para o valor da amplitude máxima no caso 1. Substituímos os valores $A = 50$ m e $z_0 = 0$ m na equação $z_0 = A \cos \phi_0$ dada na equação (4.14) para determinar o valor de t para o valor da amplitude máxima. Obtemos $50 \cos \phi_0 = 0$, onde ϕ_0 é dado por $\phi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k pertence aos inteiros. Tomando o valor de $k = 0$, o valor de ϕ_0 resulta em $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ dessa forma o valor de t fica $t = \pi - \frac{\pi}{2}$ resultando em $t = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ s.

A Figura 28 a seguir ilustra a amplitude máxima do movimento vibratório livre para os três casos estudados, destacando o ponto de maior deslocamento em relação à posição de equilíbrio. Observa-se o comportamento oscilatório típico, onde a amplitude atinge um valor máximo determinado pelas condições iniciais do sistema. Essa representação gráfica permite visualizar claramente o limite de oscilação da massa nos 3 casos, evidenciando os valores dos instantes através da janela **Tabela**.

Figura 28 – Gráfico que representa a amplitude total do movimento livre não amortecido, quando a mola é distendida ao máximo nos três casos estudados.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

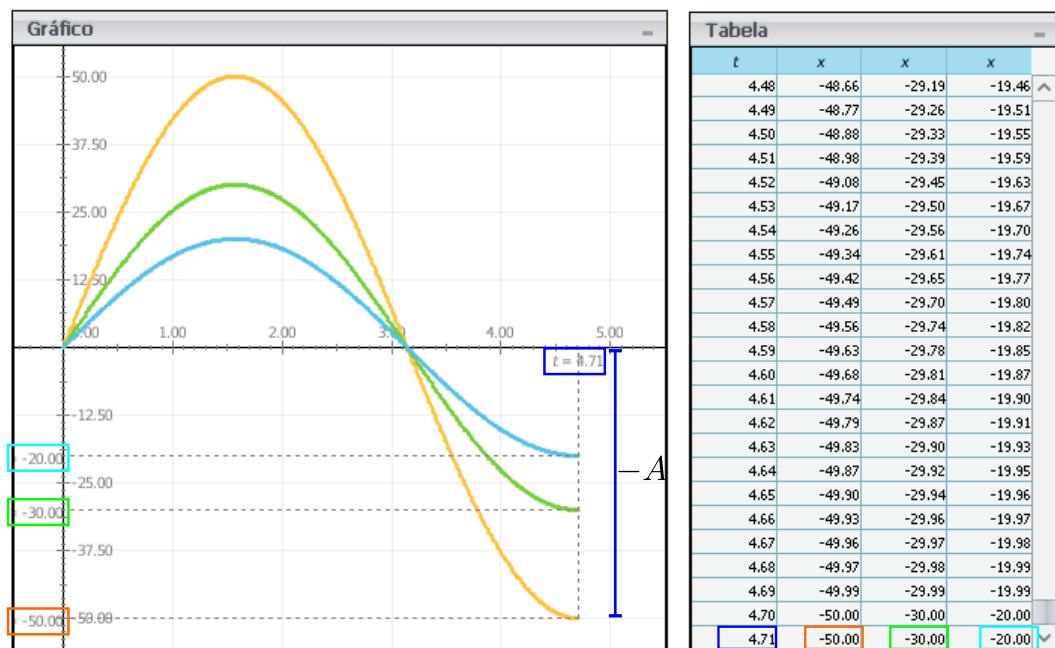
Observar-se que a amplitude máxima é alcançada realmente no tempo $t = 1,57$ s como indicado na Figura 28 e suas respectivas posições: para o caso 1 a massa alcança a posição $x_1 = 50$ m, no caso 2 temos $x_2 = 30$ m e no caso 3 a massa alcança a posição $x_3 = 20$ m. A Figura 28, portanto, facilita a compreensão da dinâmica da amplitude ao longo do tempo, proporcionando uma análise visual do comportamento do sistema.

No gráfico apresentado na Figura 27, o sistema massa-mola que apresenta amplitudes tanto positivas quanto negativas. Pode-se observar com os mesmos procedimentos anteriores para encontrar o deslocamento máximo da mola quando comprimida.

A amplitude negativa observada na Figura 29 é resultado do deslocamento máximo da massa em direção contrária ao ponto de equilíbrio para os casos em que $x_1 = -50$ m, $x_2 = -30$ m e $x_3 = -20$ m o que indica uma distensão da mola além do ponto de repouso inicial.

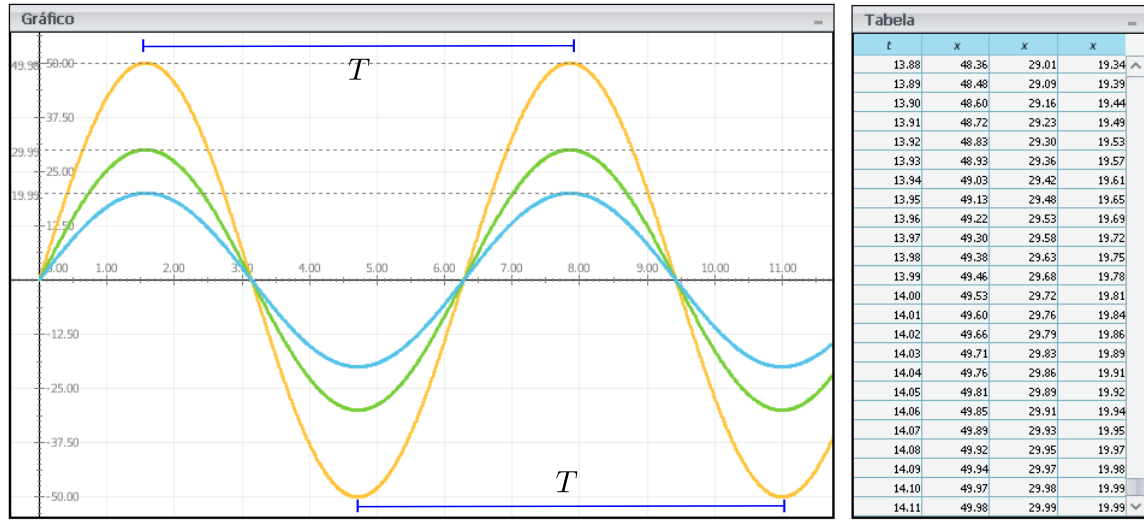
No movimento vibratório livre, a amplitude representa a máxima distância da posição de equilíbrio, e como a oscilação ocorre em torno deste ponto, o sistema exibe simetria entre amplitudes positivas e negativas. Observando a Figura 29 quando a mola é distendida ao máximo, sua amplitude assume valores negativos, evidenciando o momento em que a força restauradora dada em (4.1) está direcionada para trazer a massa de volta ao equilíbrio, o que resulta na oscilação característica do movimento harmônico.

Figura 29 – Gráfico que representa a amplitude mínima do movimento livre não amortecido, quando a mola é distendida ao máximo nos três casos estudados.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Figura 29, o *software modellus* apresenta o gráfico do movimento livre não amortecido, ilustrando o deslocamento máximo da mola quando comprimida. Note que, para os três casos a amplitude máxima da mola comprimida é alcançada no tempo $t = 4.71$ s.

Figura 30 – Gráfico representando a periodicidade do movimento livre não amortecido.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 30, mostra que quando o sistema é perturbado, ele entra em um movimento harmônico simples (MHS), caracterizado por um padrão oscilatório. Sendo o período T , o tempo que leva para a partícula em movimento harmônico simples retornar à sua posição inicial. A amplitude A representa a máxima distância que a massa se desloca da posição de equilíbrio, enquanto a frequência f determina a taxa de oscilação.

Para determinação do valor de t para que se alcance o máxima amplitude ou mínima no gráfico da velocidade $v(t)$, tomaremos a segunda derivada da equação do movimento livre não amortecido dado em (4.16) e igualando a zero resultando na equação $-A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = 0$.

Como $-A\omega^2 \neq 0$, a equação se reduz a $\cos(\omega t + \phi_0) = 0$ a solução neste é dado para um $\cos(x) = 0$ é $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, para todo valor de n pertencentes ao conjunto dos inteiros. Logo obteremos,

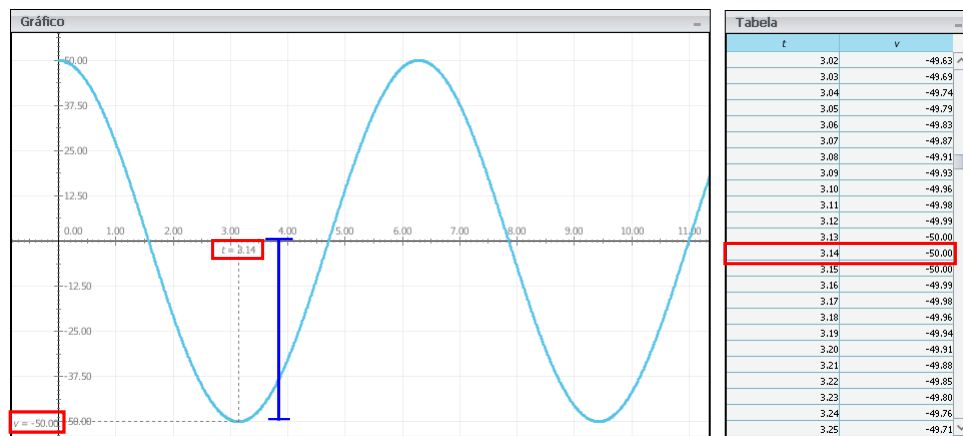
$$\begin{aligned}\omega t + \phi_0 &= \frac{\pi}{2} + n\pi \\ t &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \phi_0 \right)\end{aligned}$$

Lembrando que o valor de ϕ_0 foi calculado anteriormente com os valores do **caso 1**. Onde ϕ_0 é dado por $\phi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, considerando o valor de $k = 0$, temos como resultado $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Substituindo encontramos,

$$t = \frac{n\pi}{\omega},$$

considerando $n = 1$ e substituindo os demais valores, encontramos que $t = \pi \approx 3,14$ s, como mostra o gráfico na Figura 31.

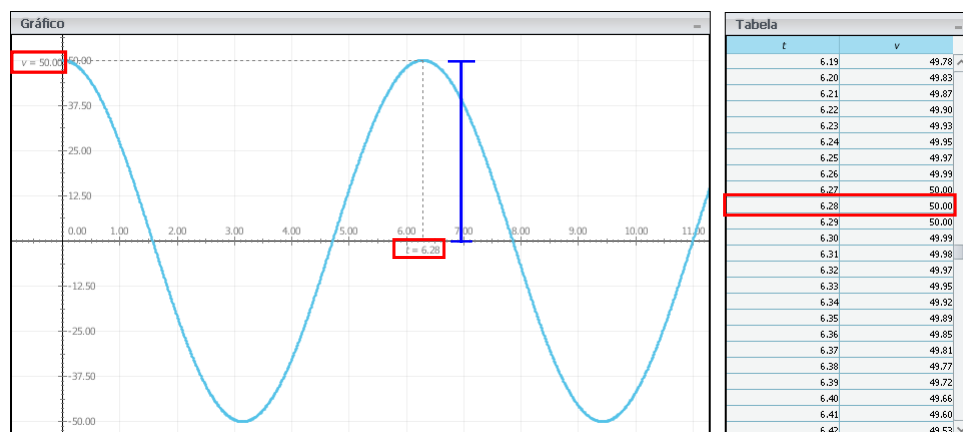
Figura 31 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o movimento livre não amortecido, evidenciando um dos pontos de velocidade mínima, bem como a periodicidade do sistema.



Note que, a velocidade $v(t)$ varia periodicamente, apresentando um padrão senoidal característico de sistemas harmônicos simples. Este movimento é caracterizado pela ausência de forças dissipativas, como o atrito ou resistência do ar, o que preserva a amplitude das oscilações ao longo do tempo. À direita, a tabela apresenta um dos valores de mínimo em detalhados destacando os extremos de $v = -50$ m/s em $t = 3, 14$ s.

Na Figura 32, o gráfico destaca um dos valores de máxima amplitude para velocidade $v(t)$.

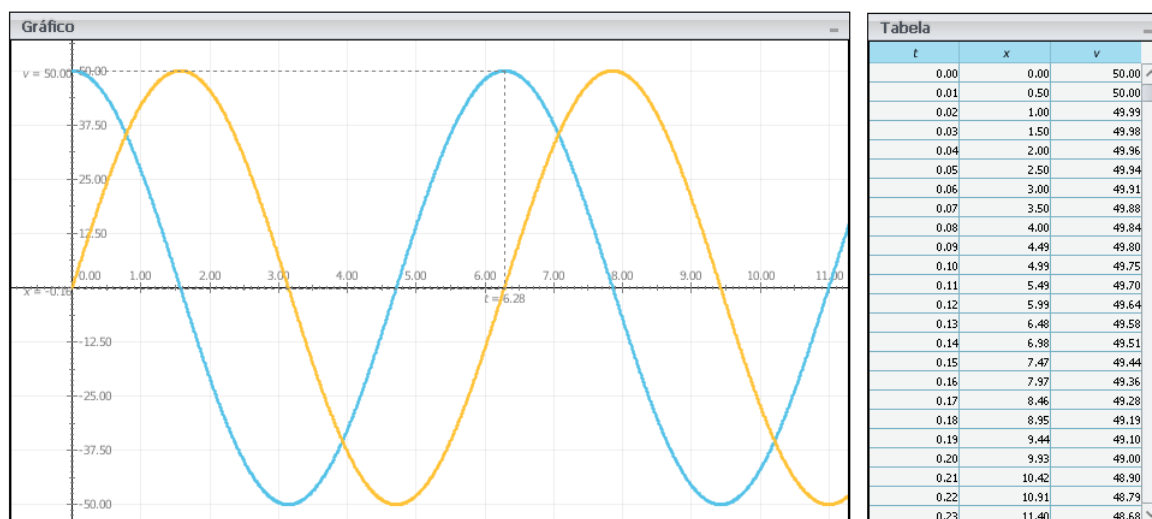
Figura 32 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o movimento livre não amortecido, evidenciando um dos pontos de velocidade máxima, bem como a periodicidade do sistema.



A tabela à direita apresenta um dos valores de máximo em detalhados destacando os extremos de $v = 50$ m/s em $t = 6, 28$ s.

A relação entre os gráficos de posição $x(t)$ em função do tempo t e velocidade $v(t)$ em função do tempo t para um Movimento Harmônico Simples (MHS) é importante para compreender o comportamento dinâmico do sistema massa-mola durante sua oscilação.

Figura 33 – A **curva laranja**, representa o gráfico da posição em função do tempo $x(t)$. Note que, a posição da partícula varia senoidalmente com o tempo. A **curva azul**, representa o gráfico de velocidade em função do tempo $v(t)$ também é uma função senoidal, mas deslocada em relação ao gráfico de posição.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

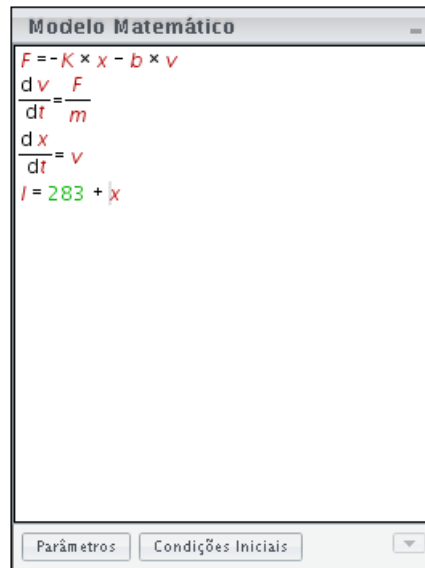
Observe que, quando a posição está no máximo ou mínimo de sua amplitude A , a velocidade é zero. Isso ocorre porque a velocidade é uma função senoidal em relação à posição. Quando a massa passa pela posição de equilíbrio, a velocidade é máxima. Nesse ponto, a velocidade é máxima e positiva quando a partícula se move para longe da posição de equilíbrio e máxima e negativa quando se move em direção à posição de equilíbrio.

Portanto, a relação fundamental entre os gráficos de $x(t)$ e $v(t)$ para o MHS é que eles compartilham a mesma forma senoidal, mas a velocidade está defasada em relação à posição. Essa relação é essencial para compreender a dinâmica do MHS e as interações entre posição e velocidade ao longo do tempo.

5.2 SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES LIVRES AMORTECIDAS

Nos cenários do mundo real, os osciladores não mantêm um movimento oscilatório indefinido. Fatores dissipativos, como forças de atrito e resistência do ar, estão sempre presentes, agindo para reduzir gradualmente o movimento até que cesse completamente. Se a força dissipativa estiver relacionada à velocidade, a força resultante sobre o oscilador harmônico será expressa como $\vec{F} = -k\vec{x} - b\vec{v}$.

Figura 34 – Modelo das oscilações livres amortecidas.



The screenshot shows a window titled "Modelo Matemático" with the following equations:

$$F = -K \times x - b \times v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$I = 283 + x$$

At the bottom of the window, there are two buttons: "Parâmetros" and "Condições Iniciais".

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Podemos utilizar o *Modellus* para analisar os impactos da dissipação no oscilador harmônico. Adicionar o termo $-b\vec{v}$ à força de Hooke, na primeira linha da Figura 34, é uma maneira simples de incorporar a força dissipativa ao modelo que temos utilizado até agora.

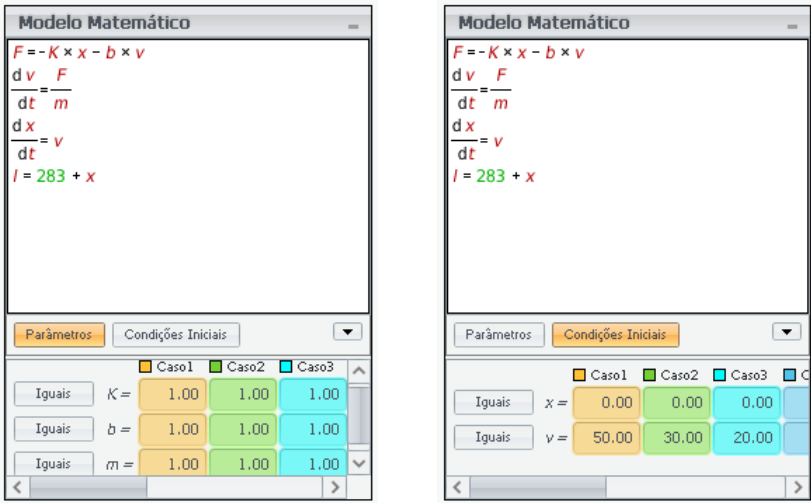
Para produção das simulações subsequentes, seguirá o mesmo padrão adotado na simulação do movimento livre não amortecido. Permitindo-nos focar especificamente nas variações introduzidas por diferentes parâmetros ou condições.

5.2.1 Análise da simulação do movimento vibratório livre subamortecido

O amortecimento subamortecido ocorre quando o coeficiente de amortecimento em um sistema vibratório é menor do que o valor crítico, isso acontece quando $\omega > \beta$. O valor crítico é aquele em que o sistema está no limiar entre o amortecimento excessivo (supercrítico) e o amortecimento insuficiente (subamortecido).

Note que, ao adicionar o termo que dissipa o movimento, surge uma nova variável no painel **Parâmetros** na janela do **Modelo Matemático**. Para obedecer a condição do movimento subamortecido, usaremos o termo do coeficiente de dissipação muito pequeno igual a $b = 1$ e a frequência angular igual a $\omega = 1$. Será utilizado a variável b no *modellus* para substituir o γ , como ilustra a Figura 35.

Figura 35 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento subamortecido, na janela do Modelo Matemático.

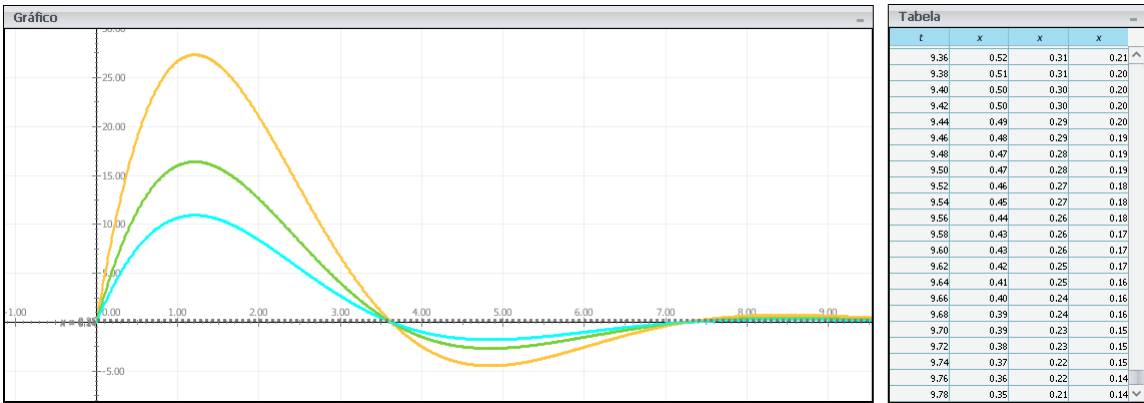


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao analisar este modelo com $b = 1$ representando o ‘coeficiente de dissipação’, observamos o comportamento do movimento descrito na Figura 36. É importante notar que continuamos a utilizar os valores $k = 1$ e a massa $m = 1$, enquanto o intervalo de tempo agora se estende até $t = 10$ s. Destaca-se o efeito amortecedor da dissipação nas oscilações, resultando na gradual aproximação do sistema ao ponto de equilíbrio.

A interpretação do gráfico do movimento vibratório subamortecido é crucial para entender as características dinâmicas de sistemas vibratórios sujeitos a amortecimento moderado.

Figura 36 – Representação do movimento subamortecido para os três casos.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico gerado do movimento subamortecido exibe também um padrão senoidal, indicando oscilações periódicas. No entanto, a amplitude dessas oscilações diminuirá gradualmente devido ao efeito do amortecimento b . Se alterarmos o coeficiente de amortecimento isso afetará a taxa de decaimento da amplitude, um aumento no coeficiente de amortecimento resulta em um decaimento mais rápido, enquanto uma diminuição leva a um decaimento mais lento.

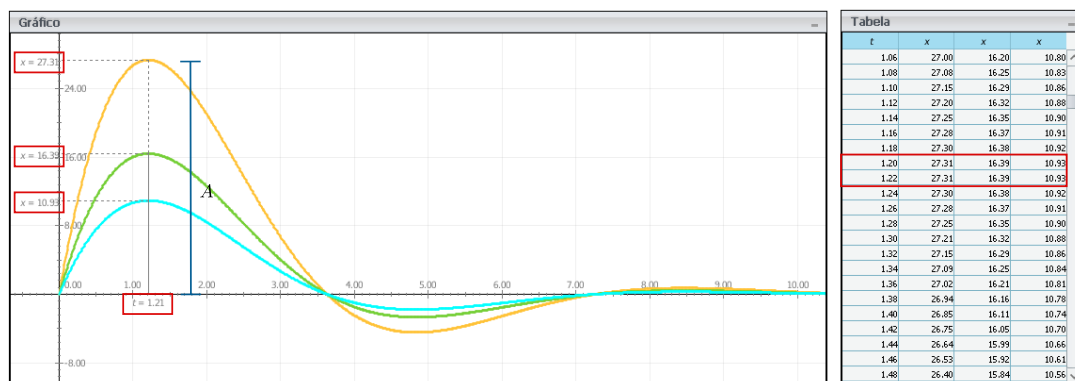
Observe, na Figura 36, que o movimento vibratório também apresenta uma amplitude máxima, representando o deslocamento máxima alcançada pelo sistema massa-mola. Para determinar o tempo t máximo para se alcançar a amplitude máxima, analisaremos a equação do movimento dado em (4.28) com as condições iniciais para sistema $z(0) = 0$ e $dz/dt = v_0$, definiu-se $\omega_0 = \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$, onde $\beta = \gamma/2$ pois, assumindo que expressão dentro da raiz seja $\beta < \omega$, isso, resultará em soluções complexas.

Tomando a derivado da equação (4.28) e igualando a zero, resultara em $\text{tg}(\omega_0 t + \phi_0) = -\beta/\omega_0$, onde, a tangente descreve o ângulo formado pela fase total em função do amortecimento e da frequência angular indicando que o sistema tem uma relação entre a frequência e o amortecimento. Dessa forma, calculando o arco tangente dos dois lados da equação e isolando o valor de t é encontra-se que $t = [\text{arctg}(-\beta/\omega_0) - \phi_0]/\omega_0$. Onde, o arco tangente negativa indica que o sistema tem uma relação entre a frequência e o amortecimento que inverte a direção esperada da oscilação em relação ao movimento não amortecido.

A fim de determinar o valor de ϕ_0 na equação acima para que o valor da amplitude seja máxima, utilizaremos os valores $A = 50$ m e $x_1 = 0$ m do **caso 1** na equação $z_0 = A \cos \phi_0$ dada em (4.26). Obtemos $50 \cos \phi_0 = 0$, onde ϕ_0 é dado por $\phi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k pertence ao conjunto dos inteiros incluindo múltiplos de π devido à periodicidade da tangente. Note que, se os valores de k forem maior que zero ($k > 0$) os valores para o tempo t serão negativos. Para esse caso, tomando o valor de k igual a ($k = -1$), contudo, o valor de ϕ_0 resulta em $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \pi$, dessa forma, o valor de t fica $t = [\text{arctg}(-\beta/\omega_0) + \pi/2]/\omega_0$.

Substituindo os valores inseridos na janela **Modelo Matemático** na Figura 35, entramos que $t \approx 1,21$ s, conforme mostra a Figura 37. Essa representação gráfica permite visualizar claramente o limite de oscilação da massa nos 3 casos, evidenciando os valores dos instantes através da janela **Tabela**.

Figura 37 – Valores das amplitudes máximas no o movimento subamortecido na vibração livre para os **caso 1, 2 e 3**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 37 ilustra a amplitude máxima do movimento vibratório livre amortecido para o caso subamortecido nos três casos estudados, destacando o ponto de maior deslocamento em relação à posição de equilíbrio alcançado no tempo $t \approx 1,21$ s para os três casos. A posição alcançada para o **caso 1** (curva em **laranja**) foi de $x = 27,31$ m, no **caso 2** (curva em **verde**) o máximo se alcança em $x = 16,39$ m e no **caso 3** (curva em **azul**) quando o $x = 10,93$ m. Observa-se o comportamento oscilatório típico, onde a amplitude atinge um valor máximo determinado pelas condições iniciais do sistema e decai de acordo o valor do coeficiente de dissipação.

Para determinação do tempo t para alcançar os máximos e mínimos no gráfico da velocidade $v(t)$, tomaremos a segunda derivada da equação do movimento subamortecido dado em 4.28 e igualando a zero, resultando na equação,

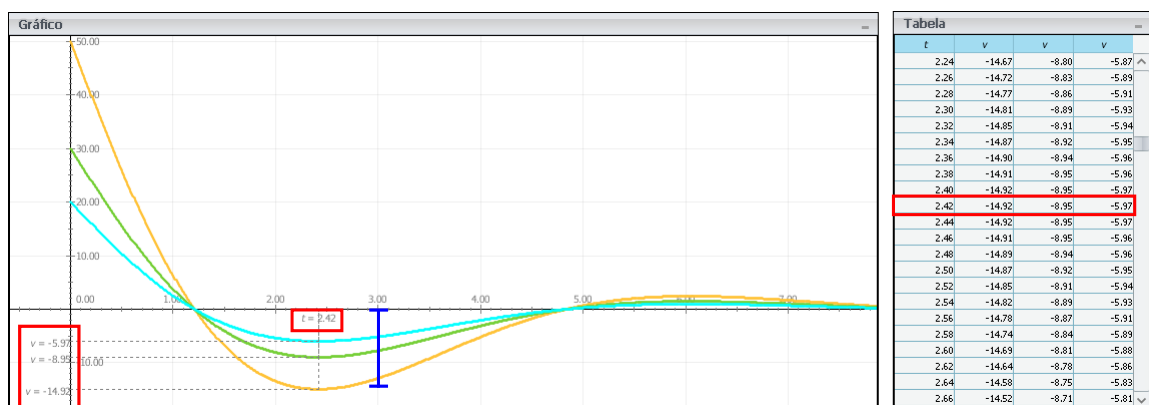
$$\begin{aligned}\frac{d^2z(t)}{dt^2} &= 2\beta\omega_0 Ae^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \phi_0) + (\beta^2 - \omega_0^2) Ae^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ 2\beta\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) &= (\omega_0^2 - \beta^2) \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ \operatorname{tg}(\omega_0 t + \phi_0) &= \frac{\omega_0^2 - \beta^2}{2\beta\omega_0}\end{aligned}$$

Aplicando o arctangente nos dois lados da equação e isolando o valor de t e substituindo o valor de $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ resultando em,

$$t = \frac{1}{\omega_0} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_0^2 - \beta^2}{2\beta\omega_0} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Aplicando os valores dados na Figura 35 para o **caso 1** na equação acima e encontramos o valor de mínima amplitude em relação o gráfico da velocidade $v(t)$ que é dada em $t \approx 2,42$ s.

Figura 38 – Gráfico do movimento livre subamortecido para o **caso 1, 2 e 3** mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$.



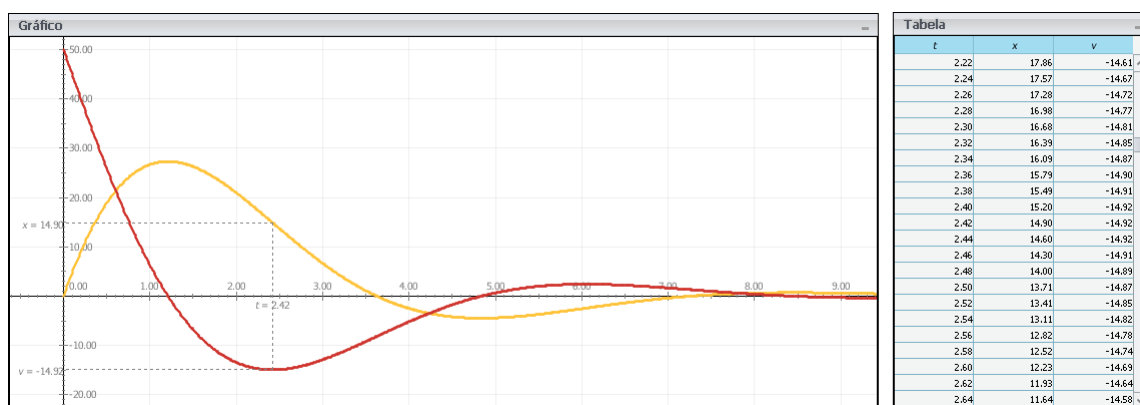
Fonte: Elaborado pelo Autor.

O sistema inicia com uma velocidade decrescente e converge para o equilíbrio sem oscilações. A tabela ao lado detalha os valores da velocidade nos instantes correspondentes

$v = -14,92$ m/s para o **caso 1** (curva em **laranja**), $v = -8,95$ m/s para o **caso 2** (curva em **verde**) e $v = -5,97$ m/s para o **caso 3** (curva em **azul**) no tempo $t = 2,42$ s para mínimo da velocidade para os três casos estudados.

O amortecimento subamortecido em um sistema massa-mola resulta em gráficos de posição $x(t)$ em função do tempo t e velocidade $v(t)$ em função do tempo t que refletem características específicas desse tipo de amortecimento. Os gráficos $x(t)$ e $v(t)$ proporcionam uma representação visual do comportamento dinâmico ao longo do tempo, mostrando como a posição e a velocidade evoluem em resposta ao amortecimento, como mostra a Figura 39.

Figura 39 – A **curva laranja**, representa o gráfico da posição $x(t)$ em função do tempo t . Note que, a posição da partícula varia senoidalmente com o tempo e sua amplitude diminui com o tempo até chegar ao ponto de equilíbrio. A **curva vermelho**, representa o gráfico de velocidade $v(t)$ em função do tempo t também é uma função senoidal. Observe que a velocidade também exibirá um decaimento exponencial ao longo do tempo. Essa taxa de decaimento é determinada pelo coeficiente de amortecimento.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Note que, o gráfico de posição $x(t)$ exibi um decaimento exponencial ao longo do tempo devido ao efeito do amortecimento subcrítico para o **caso 1**. A amplitude diminuirá gradualmente, mas a oscilação persistirá. A velocidade também exibirá um decaimento exponencial ao longo do tempo. A taxa de decaimento é determinada pelo coeficiente de amortecimento. A defasagem entre os gráficos de posição e velocidade é evidente.

Quando a posição é máxima (ou mínima), a velocidade é zero, e vice-versa. O ponto onde a velocidade atinge zero é o ponto de inflexão no gráfico, indicando uma mudança na direção do movimento da massa. Isso é característico do comportamento oscilatório e do efeito do amortecimento.

5.2.2 Análise da simulação do movimento vibratório livre superamortecido

O movimento vibratório superamortecido ocorre em sistemas massa-mola quando o coeficiente de amortecimento é grande o suficiente para impedir completamente a ocorrência de oscilações. Nesse cenário, o amortecimento é tão forte que a massa não realiza oscilações, mas

retorna à posição de equilíbrio sem ultrapassá-la, resultando em um decaimento exponencial da amplitude. O sistema atinge rapidamente o equilíbrio sem ultrapassá-lo.

Para obedecer a condição do movimento subamortecido, usaremos o termo do coeficiente de dissipação muito grande igual a $b = 4$, como ilustra a Figura 40.

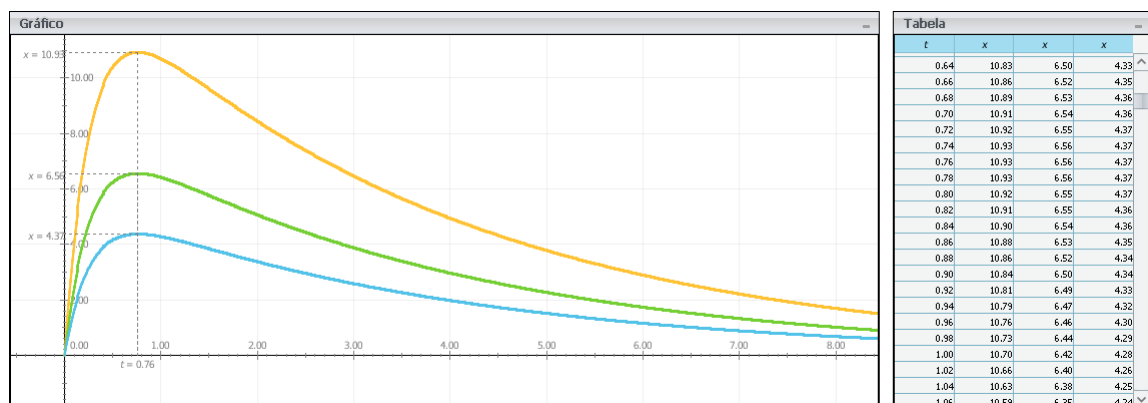
Figura 40 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento superamortecido, na janela do Modelo Matemático.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico do movimento no amortecimento supercrítico é útil para visualizar a rápida resposta do sistema ao amortecimento, especialmente em situações onde é necessário evitar oscilações prolongadas e atingir rapidamente o equilíbrio como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Representação do movimento superamortecido para os três casos.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico de posição em função do tempo exibe um decaimento exponencial da amplitude. Isso significa que a posição da massa em relação ao equilíbrio diminui com o tempo de uma maneira exponencialmente rápida. Ao contrário dos casos subamortecidos, onde há oscilações prolongadas, o sistema superamortecido converge rapidamente para o equilíbrio. O decaimento exponencial reflete a rápida atenuação da amplitude até a posição de equilíbrio.

Observamos que, o gráfico para este movimento não oscila mas exibe uma amplitude máxima e após decai exponencialmente com o tempo. Qual será o valor para o tempo t que mostra o momento exato da amplitude máxima? Para obtermos, este valor retomaremos a equação (4.33) e derivaremos em relação ao tempo t e igualando a zero e após aplicando as condições para sistema, definiu-se $\omega_0 = \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$, onde $\beta = \gamma/2$, pois, assumindo que expressão dentro da raiz seja $\beta > \omega$.

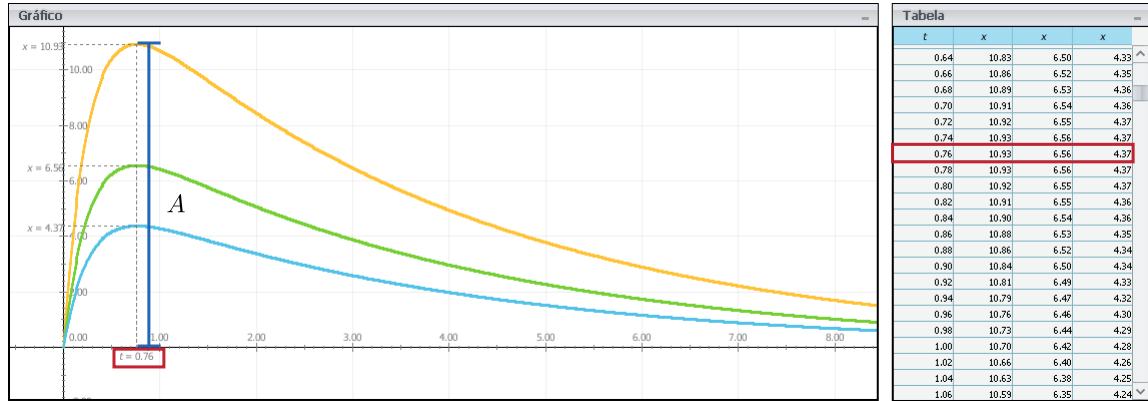
$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= -\beta e^{-\beta t} \left[\frac{v_0}{2\omega_0} e^{\omega_0 t} - \frac{v_0}{2\omega_0} e^{-\omega_0 t} \right] + e^{-\beta t} \left[\frac{v_0}{2} e^{\omega_0 t} + \frac{v_0}{2} e^{-\omega_0 t} \right] \\ 0 &= \frac{-\beta v_0}{2\omega_0} (e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}) + \frac{v_0}{2} (e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) \\ 0 &= e^{\omega_0 t} \left(\frac{v_0}{2} - \frac{\beta v_0}{2\omega_0} \right) + e^{-\omega_0 t} \left(\frac{v_0}{2} + \frac{\beta v_0}{2\omega_0} \right),\end{aligned}$$

tomaremos a seguinte substituição $a = \left(\frac{v_0}{2} - \frac{\beta v_0}{2\omega_0} \right)$ e $b = \left(\frac{v_0}{2} + \frac{\beta v_0}{2\omega_0} \right)$ e logo após aplicaremos logaritmo nos dois lados da equação, resultando em,

$$\begin{aligned}ae^{\omega_0 t} + be^{-\omega_0 t} &= 0 \\ e^{-2\omega_0 t} &= -\frac{a}{b} \\ -2\omega_0 t &= \log \left(-\frac{a}{b} \right) \\ t &= -\frac{1}{2\omega_0} \log \left(-\frac{a}{b} \right)\end{aligned}$$

Aplicando os valores dados na Figura 40 na equação acima e encontramos $t \approx 0,76$ s.

O gráfico na Figura 42 apresenta o comportamento das vibrações para diferentes condições iniciais ou parâmetros do sistema superamortecido ocorrendo quando o coeficiente de amortecimento é maior que o crítico ($\beta > 1$). Note que, todas as curvas atingem uma amplitude máxima em $t = 0,76$ segundos, conforme destacado na tabela e no gráfico. Esse valor é o ponto onde a energia potencial do sistema atinge o valor máximo antes do amortecimento reduzir progressivamente as vibrações.

Figura 42 – Representação do movimento superamortecido para os três casos.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A tabela associada a simulação fornece os valores numéricos para o tempo (t) e deslocamentos (x) correspondentes de cada curva. No instante $t = 0,76$ s, os deslocamentos são $x = 10,93$ m para **caso 1** (curva em **laranja**), $x = 6,56$ m para o **caso 2** (curva em **verde**), e $x = 4,37$ m para o **caso 3** (curva em **azul**), como destacado na janela **Tabela**.

Para o gráfico da velocidade em relação ao tempo no movimento superamortecido, tomaremos a segunda derivada da equação do movimento dado em (4.33) obteremos,

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \beta^2 e^{-\beta t} \left(\frac{v_0}{2\omega_0} e^{\omega_0 t} - \frac{v_0}{2\omega_0} e^{-\omega_0 t} \right) + e^{-\beta t} \left(\frac{v_0 \omega_0}{2} e^{\omega_0 t} - \frac{v_0 \omega_0}{2} e^{-\omega_0 t} \right) - 2\beta e^{-\beta t} \left(\frac{v_0}{2} e^{\omega_0 t} + \frac{v_0}{2} e^{-\omega_0 t} \right),$$

igualando a segunda derivada a zero e em seguida agrupando alguns termos em comum, obtemos,

$$e^{-\beta t} e^{\omega_0 t} \left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} - \beta v_0 \right) = e^{-\beta t} e^{-\omega_0 t} \left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} + \beta v_0 \right)$$

Dividindo toda equação pelo termo exponencial $e^{-\beta t} e^{-\omega_0 t}$ e aplicando o logaritmo dos dois lados para que se isole o termo t e tomando a seguinte substituição $a = \left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} + \beta v_0 \right)$ e $b = \left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} - \beta v_0 \right)$, obteremos,

$$e^{2\omega_0 t} \left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} - \beta v_0 \right) = \left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} + \beta v_0 \right)$$

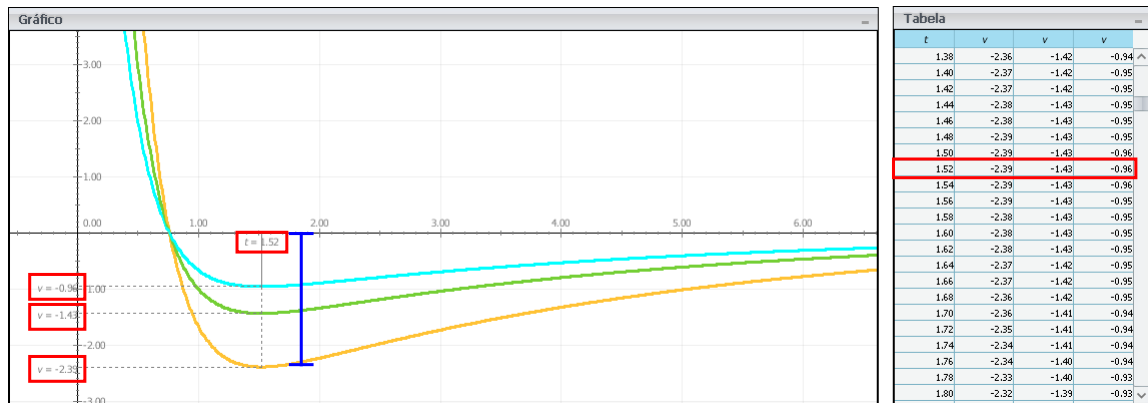
$$e^{2\omega_0 t} = \frac{\left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} + \beta v_0 \right)}{\left(\frac{\beta^2 v_0}{2\omega_0} + \frac{v_0 \omega_0}{2} - \beta v_0 \right)}$$

$$2\omega_0 t = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$t = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{a}{b}\right)$$

Aplicando os valores para calcular o tempo para amplitude mínima da velocidade para este caso, obtemos $t \approx 1.52$ s. O gráfico a seguir ilustra esse instante, na tabela ao lado exibe os valores das velocidades alcançadas neste tempo para os três casos.

Figura 43 – Gráfico do movimento livre superamortecido para o **caso 1, 2 e 3** mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$.

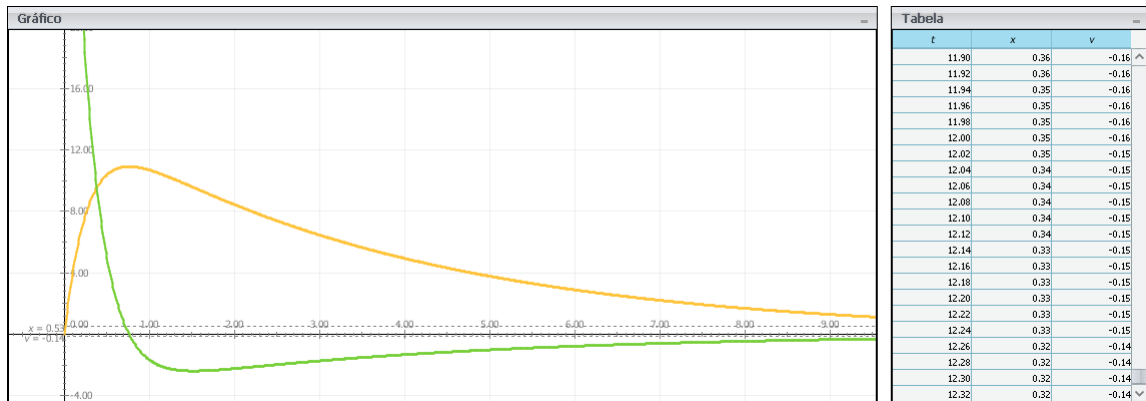


O gráfico, na Figura 43 observa-se que a velocidade inicial de cada caso diminui rapidamente, atingindo valores negativos antes de estabilizar no tempo. Esse comportamento evidencia a ação dominante do amortecimento, que elimina rapidamente a energia cinética do sistema.

Cada curva corresponde a condições iniciais distintas, resultando em respostas diferentes, conforme mostrado pelas velocidades mínimas e os tempos em que essas velocidades ocorrem. A tabela ao lado fornece os valores numéricos para a velocidade $v(t)$ em instantes específicos, permitindo a análise precisa dos tempos e amplitudes características de cada caso. A marcação no gráfico destaca os pontos em que $t = 1,52$ s, indicando momentos importantes de transição na dinâmica do sistema no **caso 1** (curva em **laranja**) a posição indica $x = -2,39$ m, no **caso 2** (curva em verde) marca a posição $-1,43$ m e no **caso 3** (curva em azul) a posição $x = -0,96$ m.

A Figura 44 exibe o gráfico do movimento posição $x(t)$ e velocidade $v(t)$ em um sistema massa-mola submetido a amortecimento supercrítico exibe características específicas que refletem o comportamento do sistema para o **caso 1**.

Figura 44 – A **curva laranja** representa o gráfico de posição em função do tempo e a **curva verde** representa o gráfico da velocidade em função do tempo. Ambas exibem um decaimento exponencial da amplitude. A amplitude diminui rapidamente ao longo do tempo, indicando que o sistema converge para a posição de equilíbrio sem oscilar. A velocidade diminui exponencialmente à medida que o sistema se aproxima do equilíbrio.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O decaimento exponencial é evidente tanto no gráfico de posição $x(t)$ quanto no de velocidade $v(t)$. Ambos exibem uma rápida convergência para zero à medida que o sistema se aproxima do equilíbrio. A posição e a velocidade atingem zero simultaneamente, indicando que a massa está em repouso na posição de equilíbrio.

5.2.3 Análise da simulação do movimento vibratório livre criticamente amortecido

O amortecimento crítico é aquele em que o coeficiente de amortecimento é ajustado de maneira a proporcionar a resposta mais rápida ao equilíbrio sem ultrapassá-lo.

Figura 45 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento criticamente amortecido, na janela do Modelo Matemático.



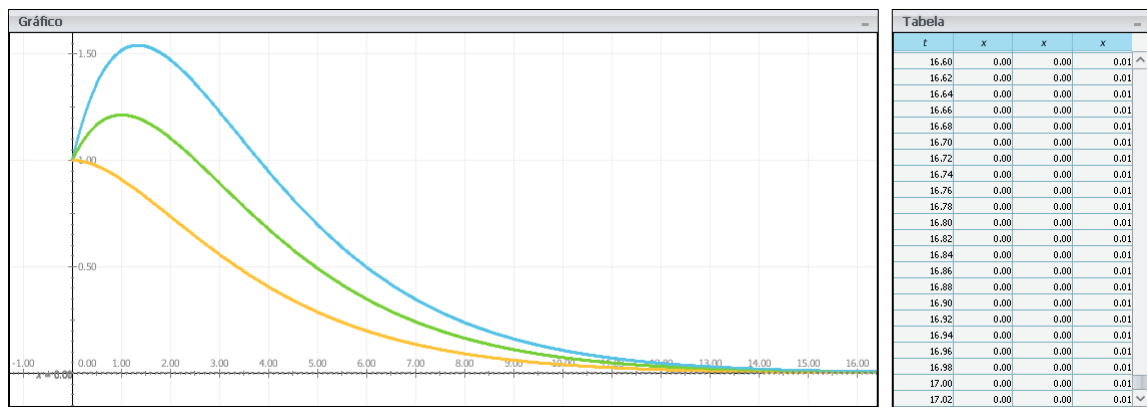
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para estudar o comportamento desse movimento nos **casos 1, 2 e 3**, utilizaremos a

condição em que $\beta = \omega = 1/2$ e os valores para as posições $x = 1$ m, a constante elástica iguais a $k = 0,25$ kg/s², o coeficiente de amortecimento iguais a $b = 1$ kg/s e as massas iguais a $m = 1$ kg e variando somente os valores das velocidades $x_1 = 0$ m/s, $v_2 = 0,5$ m/s e $v_3 = 1$ m/s, como se pode observar na Figura 45.

O gráfico abaixo na Figura 46, exibe o comportamento do sistema com amortecimento crítico para o sistema massa-mola, em resposta aos valores inseridos na janela **Parâmetros e Condições Iniciais**, o gráfico exibe características distintas que refletem o comportamento do sistema crítico.

Figura 46 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento criticamente amortecido, na janela do Modelo Matemático.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

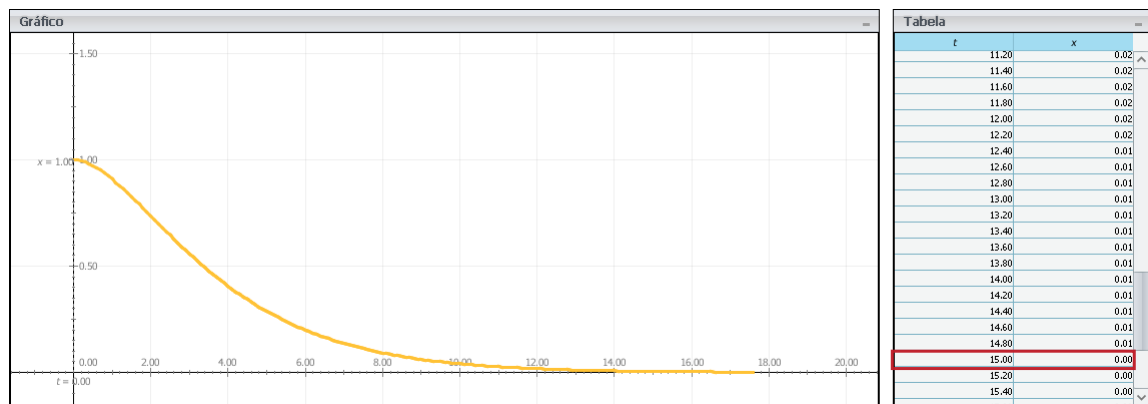
Note-se que, os gráficos exibem uma amplitude máxima em tempos diferentes dependendo dos valores das velocidades definidas nas condições iniciais. É possível analisar o tempo máximo para cada amplitude, nesse caso, utilizaremos a equação do movimento criticamente amortecido dado em (4.39), aplicando a derivado em relação ao tempo t e após igualando a zero e isolando a variável t , obteremos,

$$t = \frac{v_0}{\beta v_0 + \beta^2 z_0},$$

com a equação para tempo t acima, aplicaremos os valores das condições iniciais para entrar o valor de t para cada amplitude máxima em cada caso.

Iniciando aplicando os valores para o **caso 1**, onde o valor da velocidade inicial é definida como $v_0 = 0$ m/s, podemos observar o gráfico do movimento na Figura 47 abaixo.

Figura 47 – Gráfico do deslocamento $x(t)$ em função do tempo para um sistema massa-mola em movimento criticamente amortecido.

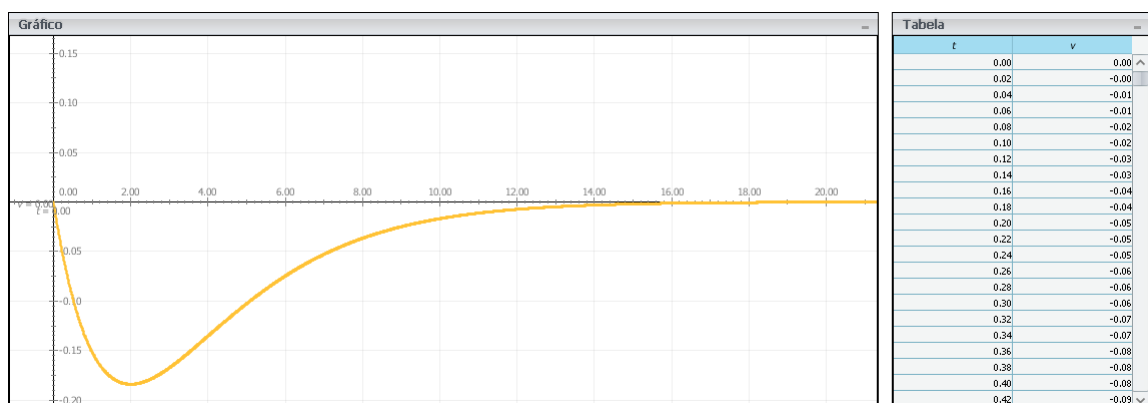


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Analisando o gráfico, pode-se observar que o sistema inicia seu deslocamento a partir da posição $x = 1$ m (posição inicial). O deslocamento $x(t)$ do sistema retorna para a posição de equilíbrio sem oscilar e diminui rapidamente nos primeiros instantes, atingindo a posição de equilíbrio por volta de $t \approx 15$ s onde os valores para posição de equilíbrio são muito próximos de zero, conforme os valores dados na tabela à direita.

A Figura 48, exibe o gráfico da velocidade em função do tempo para o mesmo sistema criticamente amortecido. A velocidade inicial é nula, aumentando em módulo no início do movimento devido à aceleração negativa, alcançando um valor mínimo negativo. Em seguida, a velocidade cresce suavemente em direção ao equilíbrio, aproximando-se de zero conforme o sistema dissipa a energia e retorna à posição de repouso sem oscilações. Esse comportamento é característico do amortecimento crítico, no qual a velocidade apresenta uma transição suave sem inversões bruscas ou oscilações.

Figura 48 – Gráfico da velocidade $v(t)$ para um sistema massa-mola em movimento criticamente amortecido no **caso 1**. A velocidade parte de zero, atinge um valor negativo máximo e, em seguida, cresce suavemente em direção ao equilíbrio, aproximando-se de zero sem oscilações, conforme o sistema dissipa a energia gradualmente.



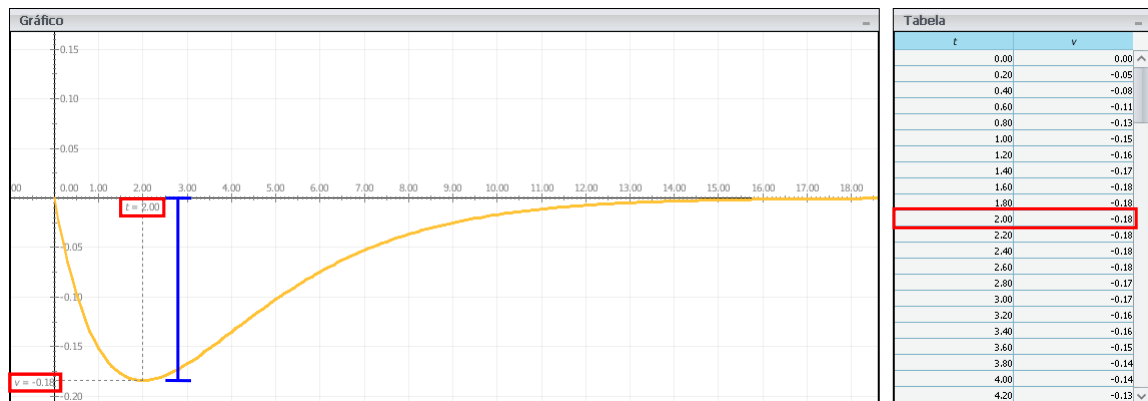
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observa-se na Figura 48 o gráfico da velocidade $v(t)$, que exibe uma amplitude mínima pode ser calculada tomando derivada segunda da equação do movimento dada em (4.39), que é descrita por uma expressão exponencial envolvendo as constantes do sistema. Calculando a segunda derivada da $z(t)$ e igualando a zero para encontrar os pontos críticos. Esses pontos correspondem aos valores máximos ou mínimos da função descritas no gráfico da velocidade. Por fim, isolando o valor de t encontra-se,

$$t = \frac{2v_0 + \beta z_0}{\beta^2 z_0 + \beta v_0},$$

Aplicando os valores para o **caso 1**, encontra-se que o máximo para a velocidade do sistema é $v = -18$ m/s quando o valor do tempo é $t = 2$ s, como pode-se observar na Figura 49.

Figura 49 – Gráfico da velocidade $v(t)$ para um sistema massa-mola em movimento criticamente amortecido no **caso 1**. A velocidade parte de zero, atinge um valor negativo máximo e, em seguida, cresce suavemente em direção ao equilíbrio, aproximando-se de zero sem oscilações, conforme o sistema dissipa a energia gradualmente.



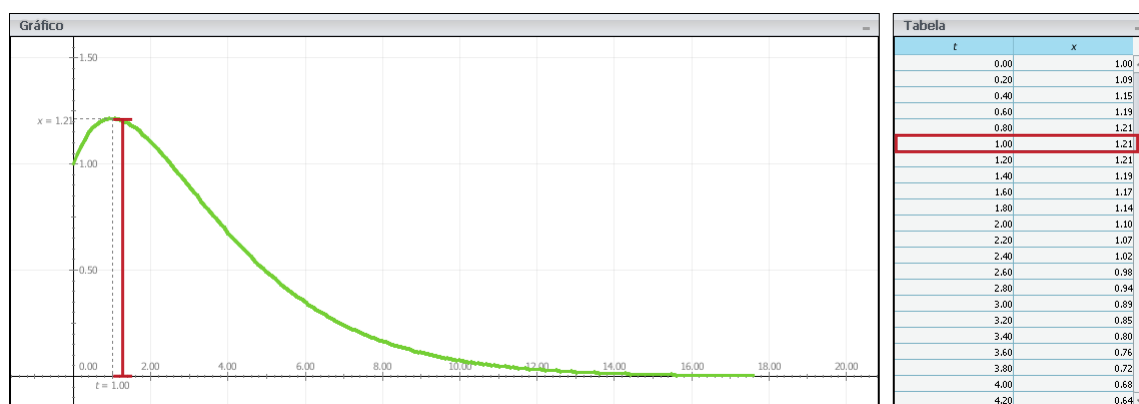
Fonte: Elaborado pelo Autor.

O sistema parte de um valor inicial próximo de $v_0 = 0$ m/s e, rapidamente, a velocidade diminui, alcançando um valor mínimo de $v = -0,18$ m/s em aproximadamente $t = 2$ s. Este mínimo é destacado pela marca vermelha no gráfico.

Após atingir o mínimo, a velocidade começa a crescer em direção ao equilíbrio. Com o passar do tempo, o sistema se aproxima assintoticamente de $v = 0$ m/s, indicando que o sistema está gradualmente cessando seu movimento sem oscilar.

No **caso 2** e o **caso 3**, foi aplicado os valores iniciais para as velocidades $v_0 = 0,5$ e $v_0 = 1$ m/s respectivamente. Os gráficos na Figura 50 e Figura 52 apresentam os deslocamentos $x(t)$, caracterizando um movimento criticamente amortecido.

Figura 50 – Gráfico do movimento criticamente amortecido, ilustrando a variação da posição (x) em função do tempo (t) para o **caso 2**.

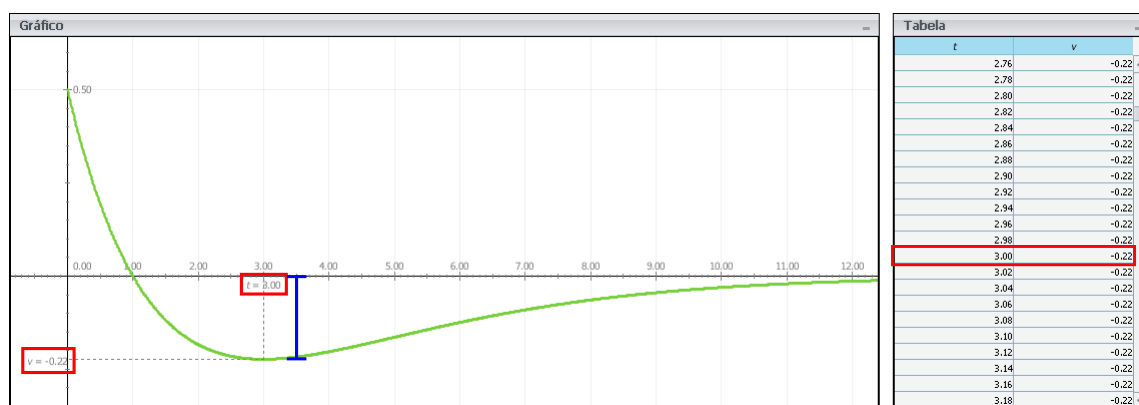


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Analisando o comportamento para o **caso 2**, o sistema parte da posição inicial igual a 1 m a parcela da velocidade inicial $v_0 = 0,5$ m/s faz com que o sistema se desloque além da posição inicial, atingindo um pico antes de retornar ao equilíbrio no tempo de $t = 1$ s. A tabela ao lado apresenta os valores de x para cada instante de t .

O gráfico da velocidade $v(t)$ para o **caso 2** é dado na Figura 51 abaixo.

Figura 51 – Gráfico do movimento criticamente amortecido para o **caso 2**, mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$. O sistema inicia com uma velocidade decrescente e converge para o equilíbrio sem oscilações. A tabela ao lado detalha os valores da velocidade nos instantes correspondentes.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

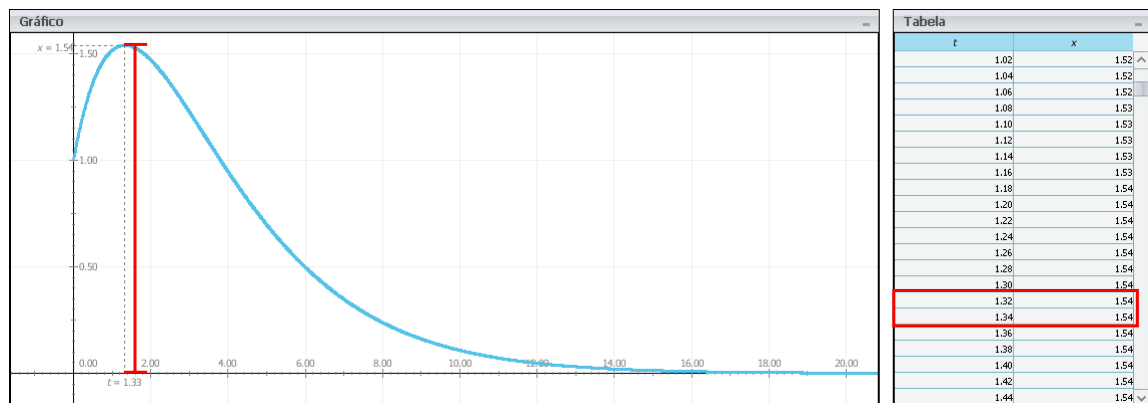
No gráfico, observa-se uma curva suavemente decrescente no início, indicando que o sistema começa em uma posição inicial elevada e se move em direção ao equilíbrio. Segundo, a tabela anexa mostra a velocidade $v(t)$ em diferentes instantes (t), com valores próximos a $-0,22$ m/s para $t = 3$ s. Isso indica que o sistema está se desacelerando, próximo ao ponto de equilíbrio. O ponto mais baixo da curva é o instante de máxima deflexão (mínimo absoluto).

Após $t = 3$ s, a curva se estabiliza, mostrando que o sistema rapidamente retorna ao estado de equilíbrio sem oscilações adicionais. A continuidade do gráfico sugere uma

convergência à posição de equilíbrio.

Aplicando os valores para o **caso 3** onde o valor da velocidade é $v_0 = 1$ m/s, o comportamento do deslocamento é similar como podemos observar na Figura 52.

Figura 52 – Gráfico do movimento criticamente amortecido, ilustrando a variação da posição (x) em função do tempo (t) para o **caso 3**.

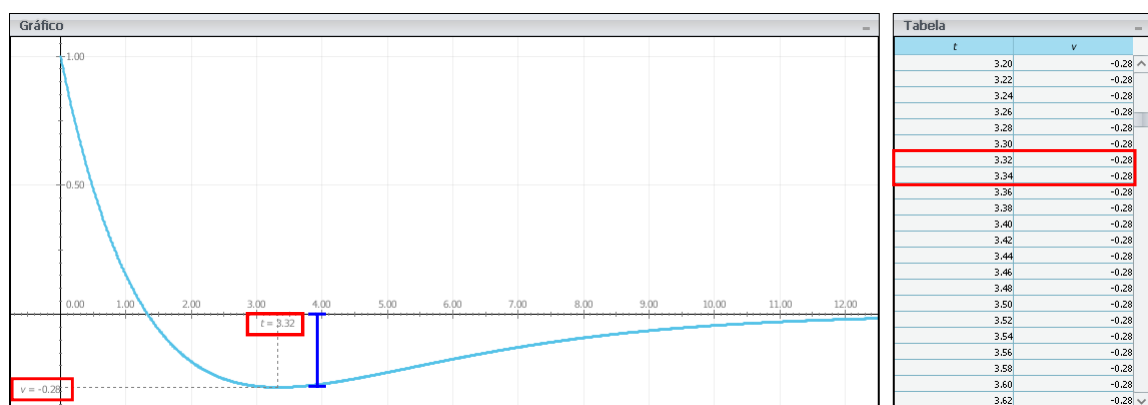


Fonte: Elaborado pelo Autor.

O sistema também parte da posição inicial igual a 1 m a parcela da velocidade inicial $v_0 = 1$ m/s é somada fazendo com que o sistema se desloque além da posição inicial, atingindo um pico antes de retornar ao equilíbrio no tempo de $t \approx 1,33$ s.

O gráfico da velocidade $v(t)$ para o **caso 3** é dado na Figura 53 abaixo.

Figura 53 – Gráfico do movimento criticamente amortecido para o **caso 3**, mostrando a variação da velocidade em função do tempo $v(t)$. A tabela ao lado detalha os valores da velocidade nos instantes correspondentes.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

No gráfico acima, a velocidade inicial decresce rapidamente, atingindo um valor mínimo negativo de $v = -0,28$ m/s próximo de $t = 3,32$ s, como destacado na figura. Após esse ponto, a velocidade tende gradualmente a zero, indicando o restabelecimento do equilíbrio do sistema. A tabela ao lado fornece os valores da velocidade em tempos específicos, permitindo uma análise quantitativa mais detalhada.

O decaimento exponencial é evidente tanto no gráfico de posição quanto no de velocidade. Ambos exibem uma rápida convergência para zero à medida que o sistema se aproxima do equilíbrio. Sendo que, a posição e a velocidade atingem zero simultaneamente, indicando que a massa está em repouso na posição de equilíbrio.

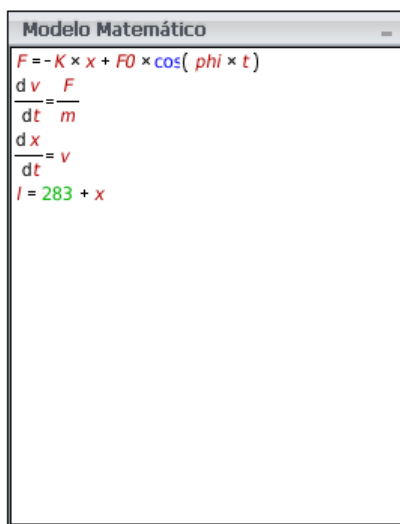
Comparado ao subamortecimento, o amortecimento crítico leva a uma convergência mais rápida para o equilíbrio. Em comparação com o superamortecimento, o amortecimento crítico resulta em um decaimento mais lento, mas ainda mais rápido do que o subamortecimento.

5.3 SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO AMORTECIDAS

As vibrações forçadas não amortecidas são vibrações que ocorrem quando um sistema é submetido a uma força externa constante ou periódica sem a presença de mecanismos de dissipação de energia, como o amortecimento. Nesse contexto, o sistema oscila em torno de sua posição de equilíbrio com uma amplitude constante, desde que a força externa continue aplicada.

A construção do modelo para a análise do movimento forçado não amortecido começa através da inserção das equações na janela Modelo Matemático do *Modellus*. Inicialmente, será necessário digitar a equação $F = -kx + F_0 \cos \varphi t$ e inserir as definições de velocidade e aceleração, conforme a Figura 54.

Figura 54 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido, na janela do Modelo Matemático.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para analisarmos os tempos de máximos e mínimos da posição e velocidade em cada caso, daqui pra frente será feito utilizando-se os próprios dados obtidos nas simulações, devido a complexidade das expressões da posição e velocidade impedir explicitar estes valores, o que pode ser feito de forma numérica utilizando *softwares* como o *Scientific WorkPlace* (SWP).

5.3.1 Aplicação de uma força constante no movimento não-amortecido

Consideramos as mesmas condições iniciais para as massas iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica igual a $k = 1$ N/m as velocidades $v_1 = 50$ m/s, $v_2 = 30$ m/s e $v_3 = 20$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 0$ m, $x_2 = 0$ m e $x_3 = 0$ m no instante $t = 0$ s.

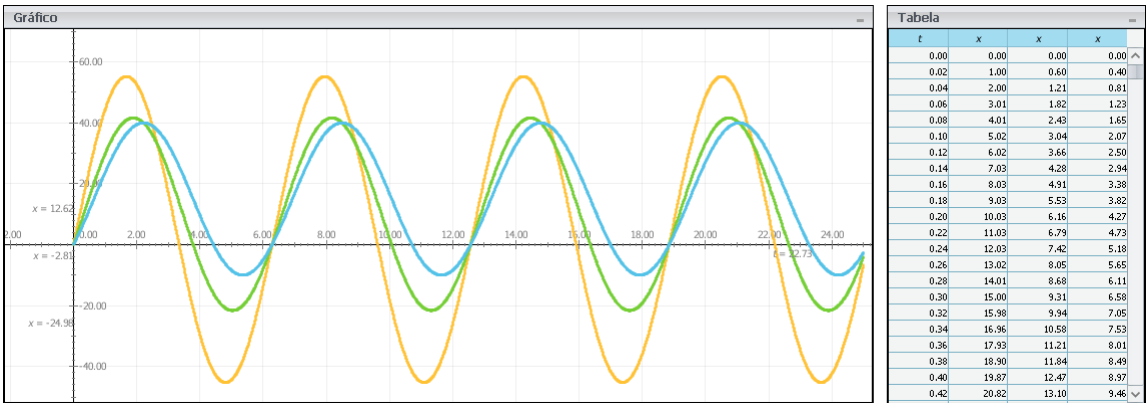
Figura 55 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido para uma força constante, na janela do **Modelo Matemático**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A simulação do movimento forçado não amortecido foi iniciada, gerando o gráfico acima com base nos valores fornecidos na janela Modelo Matemático na Figura 55, representando a evolução da posição em função do tempo, conforme a Figura 56.

Figura 56 – Gráfico da posição em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido com força constante.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

As curvas exibidas correspondem às diferentes condições iniciais e parâmetros do sistema definidos anteriormente na Figura 55. Estas exibem um comportamento oscilatório periódico, indicando que o sistema responde a uma força externa constante aplicada. A amplitude das oscilações varia entre as curvas, sugerindo diferentes níveis de resposta à excitação. Esse

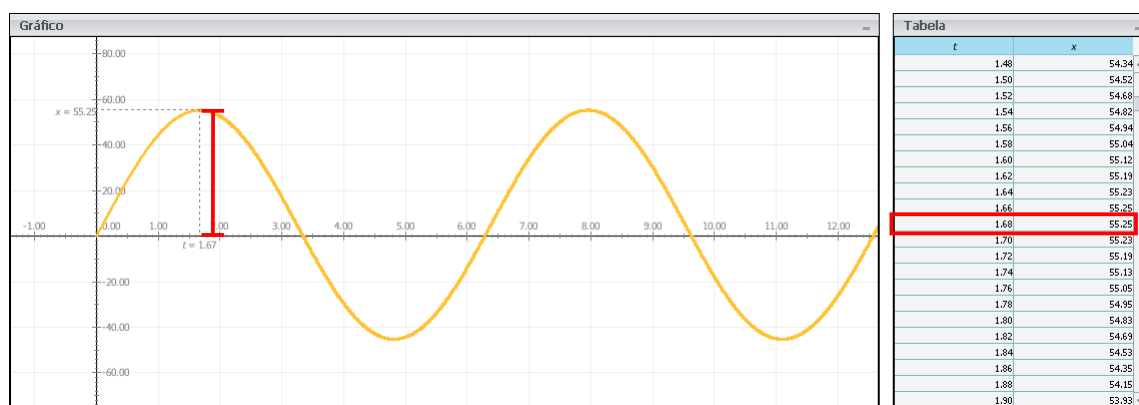
comportamento é esperado em um movimento forçado não amortecido, onde a resposta do sistema é diretamente influenciada pela força externa aplicada.

Esse comportamento tem aplicações diretas em engenharia e física, especialmente na análise de vibrações mecânicas em estruturas, máquinas e sistemas dinâmicos. A ausência de amortecimento pode levar à ressonância, um fenômeno crítico que ocorre quando a frequência de excitação coincide com a frequência natural do sistema, podendo causar falhas estruturais em construções, pontes e componentes mecânicos.

Podemos analisar o valor da amplitude máxima conforme o tabela de valores para cada caso.

O gráfico da posição $z(t)$ para o **caso 1** é dado pela Figura abaixo.

Figura 57 – O gráfico exibe uma curva senoidal característica de um movimento oscilatório forçado não amortecido, representando a posição $z(t)$ para o **caso 1**.

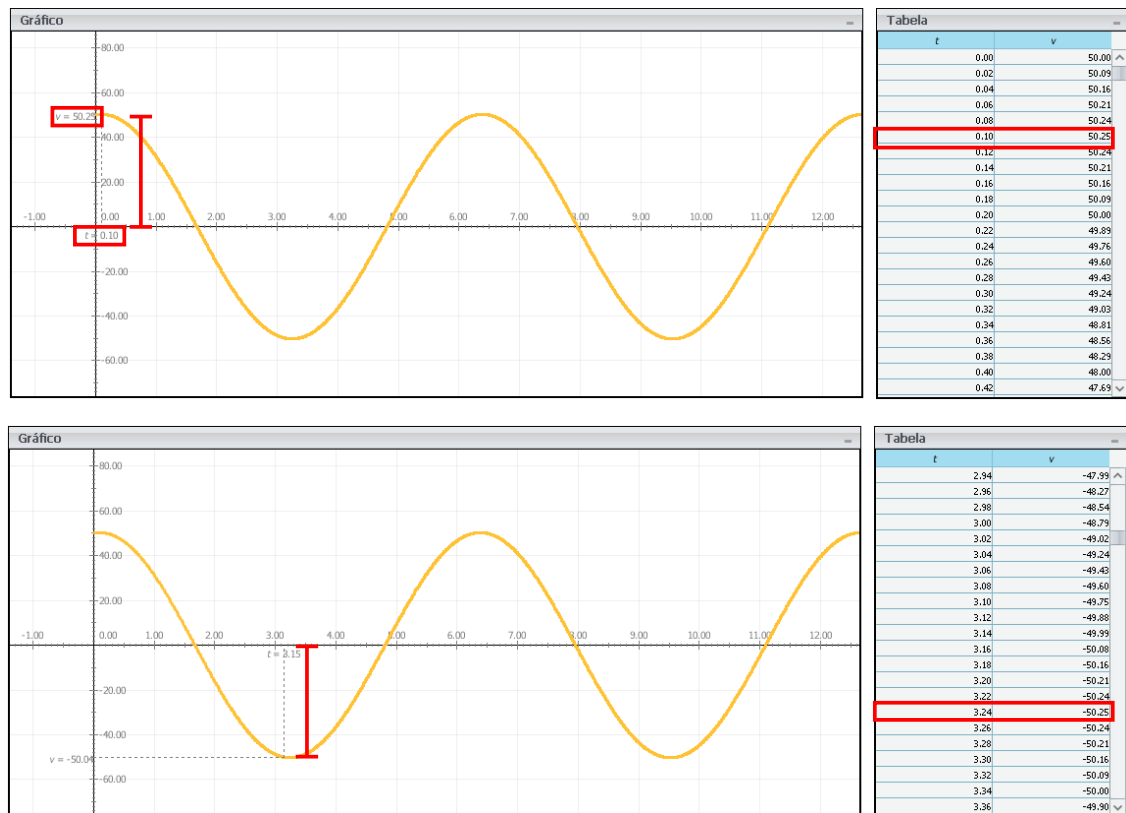


Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico mostra a resposta do sistema à excitação periódica. A curva senoidal indica que a oscilação atinge uma amplitude constante, característica do regime estacionário do movimento forçado. A região destacada em vermelho no gráfico representa um ponto de máximo, evidenciado pelo valor constante $x = 55,25$ m em diferentes instantes onde a primeira amplitude é dada no tempo de $t = 1,68$ s, conforme mostrado na tabela reforçando que a oscilação segue um padrão regular, sem decaimento, confirmando a ausência de amortecimento no sistema.

O gráfico da velocidade $v(t)$ para o **caso 1** é dado na Figura 58 abaixo.

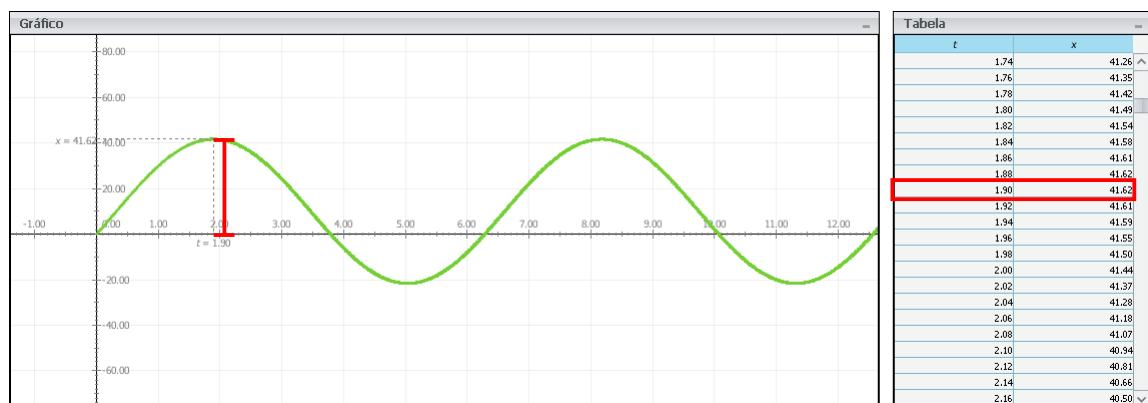
Para o **caso 1** a velocidade atinge valores máximos e mínimos alternadamente, ocorrendo com um desfasamento de $\pi/2$ em relação à posição. Isso significa que, quando a posição atinge seu máximo ou mínimo, a velocidade é zero, e quando a posição cruza a linha do equilíbrio, a velocidade atinge seus valores extremos.

Figura 58 – Gráfico da velocidade $v(t)$ no movimento forçado não amortecido para o **caso 1**.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observando os pontos destacados na Figura 58, no primeiro gráfico, em $t = 0$ s, a velocidade é $v = 50$ m/s, indicando um momento de máxima velocidade positiva. No segundo gráfico, em $t = 3,14$ s, a velocidade é $v = -50$ m/s, representando o valor mínimo de velocidade.

O gráfico da posição $z(t)$ para o **caso 2** é dado pela Figura abaixo.

Figura 59 – O gráfico exibe uma curva senoidal característica de um movimento oscilatório forçado não amortecido, representando a posição $z(t)$ para o **caso 2**.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

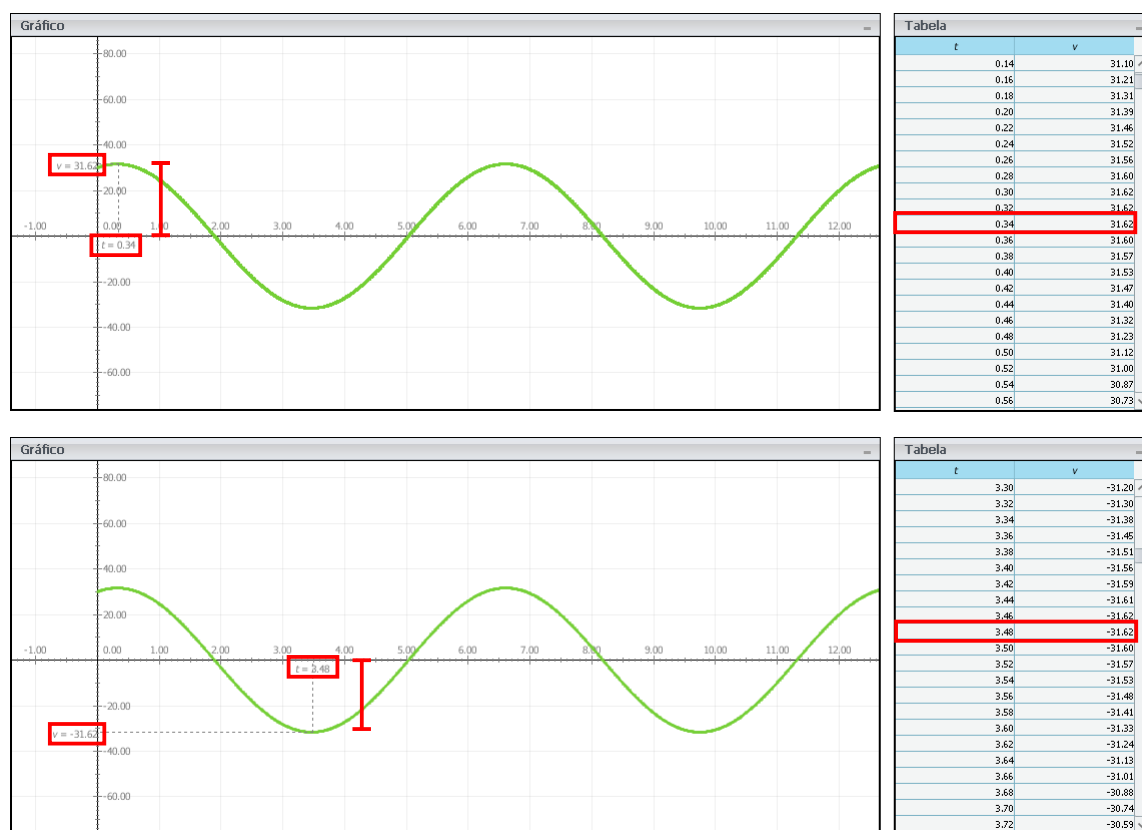
No gráfico na Figura 59, o movimento inicia com as condições iniciais de posição igual a $x = 0$ m e velocidade igual a $v = 20$ m/s. Destacando em vermelho em torno do tempo

$t = 1,90$ s, correspondente à amplitude máxima da oscilação naquele instante, com a posição $z(t)$ atingindo aproximadamente 41,62 m. Esse mesmo valor é também realçado na tabela ao lado, confirmando a máxima elongação positiva da oscilação, ou seja, a amplitude máxima instantânea gerada pela força externa aplicada no sistema.

O gráfico reforça a dependência do movimento oscilatório forçado em relação às condições iniciais, mas mantendo a periodicidade característica de um sistema sem amortecimento. Isso significa que, independentemente dos valores iniciais, o sistema continua oscilando com a mesma frequência, apenas variando a amplitude e o deslocamento inicial.

O gráfico da velocidade $v(t)$ para o **caso 2** é dado na Figura 60 abaixo.

Figura 60 – Gráfico da velocidade $v(t)$ no movimento forçado não amortecido para o **caso 2**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 60 apresenta o gráfico da velocidade $v(t)$ para o **caso 2** do movimento oscilatório forçado não amortecido, complementando a análise feita anteriormente para a posição $z(t)$ na Figura 59. O comportamento da função velocidade também assume uma forma senoidal, coerente com a derivada da função posição típica em sistemas harmônicos.

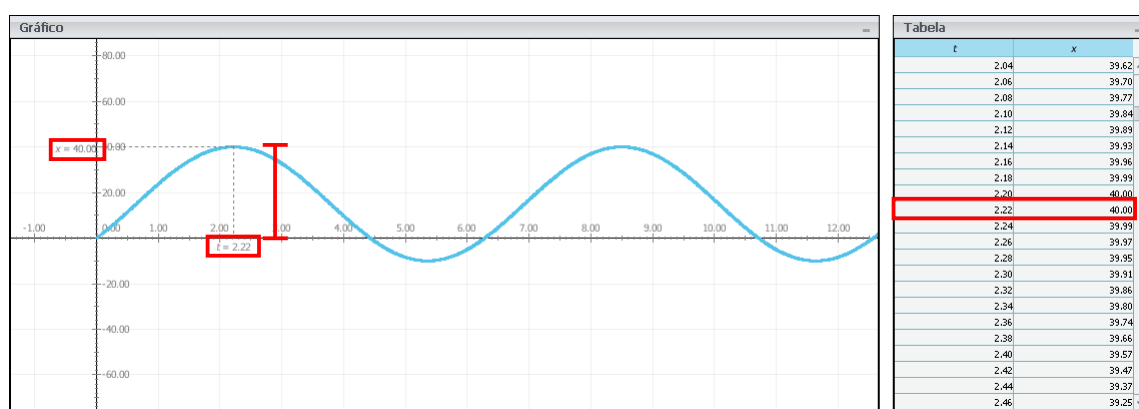
No primeiro gráfico (parte superior da figura), observa-se que, no instante $t = 0,34$ s, a velocidade atinge um valor máximo de aproximadamente $x = 31,62$ m. Este valor representa o momento em que a partícula atravessa a posição de equilíbrio no sentido positivo com a maior velocidade possível. Já no segundo gráfico (parte inferior da figura), o ponto de velocidade

mínima é destacado em $t = 3,48$ s, apresentando um valor de $x = -31,62$ m, indicando a maior velocidade no sentido oposto.

A constância dos valores máximos e mínimos da velocidade ao longo do tempo é um indicativo claro da ausência de amortecimento no sistema. Como não há dissipação de energia, a energia fornecida pela força externa é inteiramente convertida em energia cinética e potencial, mantendo a amplitude da velocidade constante durante todo o movimento.

O gráfico da posição $z(t)$ para o **caso 3** é dado pela Figura 61 abaixo.

Figura 61 – O gráfico exibe uma curva senoidal característica de um movimento oscilatório forçado não amortecido, representando a posição $z(t)$ para o **caso 3**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 61 o gráfico apresenta a evolução temporal da posição $z(t)$ para o **caso 3** mantendo a forma senoidal característica desse tipo de movimento, evidenciando a ação de uma força externa periódica e a ausência de dissipação de energia.

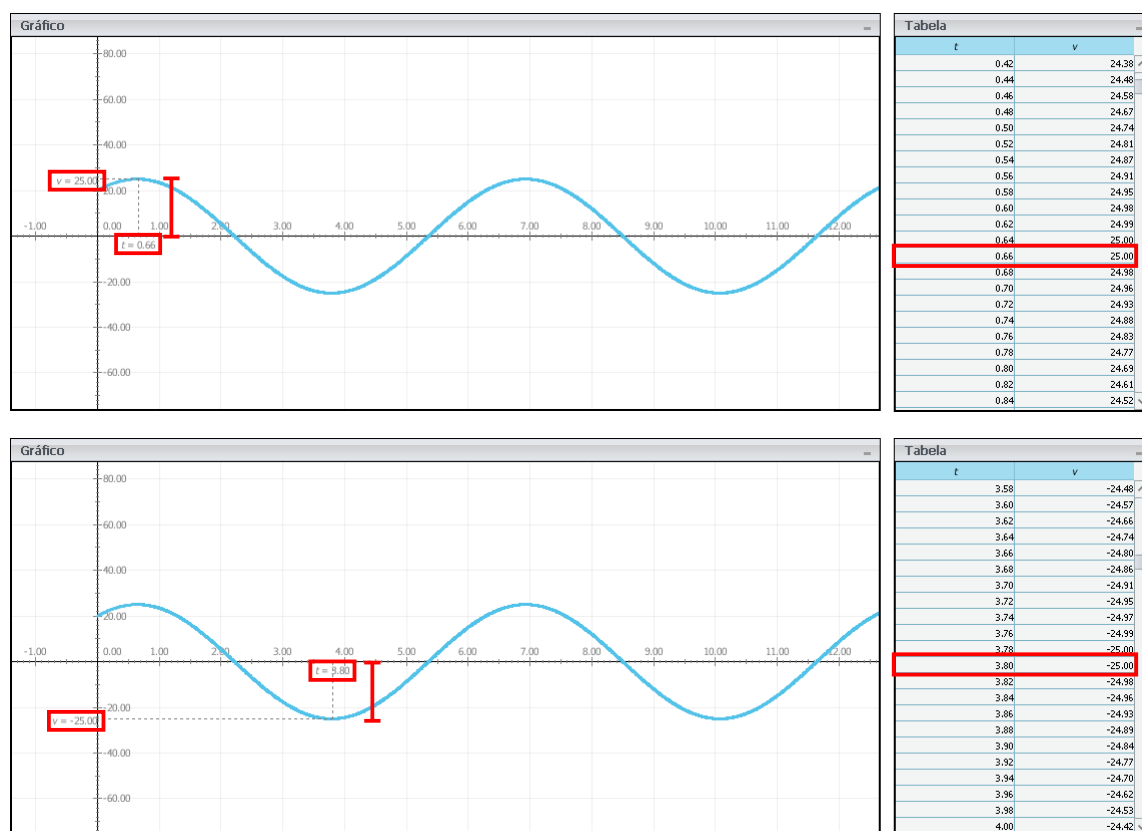
Destaca-se o instante $t = 2,22$ s, no qual a posição da partícula atinge um valor máximo de aproximadamente $x = 40,0$ m. Esse valor está também evidenciado na tabela à direita da figura, confirmando numericamente o pico da oscilação naquele instante de tempo. A repetição periódica da forma de onda sugere que o sistema continua oscilando de forma contínua e regular, com amplitude constante.

Ao comparar este gráfico com o do **caso 2** (Figura 59), nota-se que, embora a natureza do movimento continue sendo não amortecida, há uma diferença na amplitude da oscilação: no **caso 2**, a amplitude da posição máxima era de 41,62 m, enquanto que no **caso 3**, observamos 40,0 m.

Essa pequena diferença pode ser atribuída a variação nos parâmetros do sistema, como a frequência da força externa ou a fase inicial. Ainda assim, a constância da amplitude e o comportamento senoidal puro confirmam que o movimento permanece não amortecido.

O gráfico da velocidade $v(t)$ para o **caso 3** é dado na Figura 62 abaixo.

Figura 62 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força constante.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 62 ilustra o comportamento da velocidade $v(t)$ para o **caso 3**, em que o sistema oscila sob uma força externa periódica sem amortecimento, mas sob a influência adicional de uma força constante que impactando diretamente os valores de velocidade máxima e mínima observados.

No primeiro gráfico (parte superior), observa-se que no instante $t = 0,66$ s, a velocidade atinge um valor máximo de aproximadamente 25 m/s. No segundo gráfico (parte inferior), o valor mínimo da velocidade ocorre em $t = 3,80$ s, com $v = -25$ m/s.

Esses dois pontos revelam uma simetria de amplitude em torno do eixo horizontal, mantendo-se constantes ao longo do tempo. Isso confirma que, mesmo com a presença da força constante, não há perda de energia no sistema, e portanto, o movimento continua sendo não amortecido.

Ao se comparar os valores das velocidades máximas e mínimas com os do **caso 2** (Figura 60), percebe-se que: no **caso 2**, os valores extremos de velocidade estavam em torno de $v = \pm 31,62$ m/s. No **caso 3**, os valores extremos caíram para cerca de $v = \pm 25$ m/s.

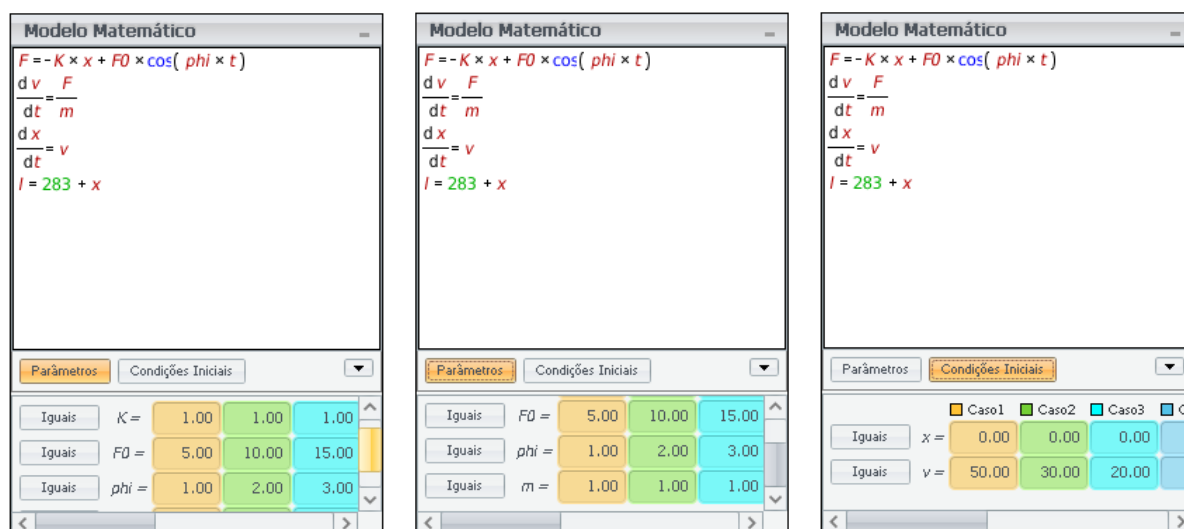
Essa redução da amplitude da velocidade pode ser interpretada como um efeito indireto da força constante, que modifica a distribuição da energia no sistema. Embora não provoque

dissipação como faria um amortecedor, a força constante altera a condição de equilíbrio, influenciando a amplitude das oscilações. Em particular, a força constante pode deslocar o ponto de equilíbrio do sistema, resultando em uma oscilação em torno de um novo valor médio, o que afeta a forma e os extremos do gráfico da velocidade.

5.3.2 Análise do movimento forçado não amortecido quando aplicado uma força periódica

Estudaremos o movimento de um sistema massa-mola considerando três casos. Para isso, consideramos as mesmas condições iniciais para as massas iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica igual a $k = 1$ N/m as velocidades $v_1 = 50$ m/s, $v_2 = 30$ m/s e $v_3 = 20$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 0$ m, $x_2 = 0$ m e $x_3 = 0$ m no instante $t = 0$ s.

Figura 63 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido, na janela do Modelo Matemático.



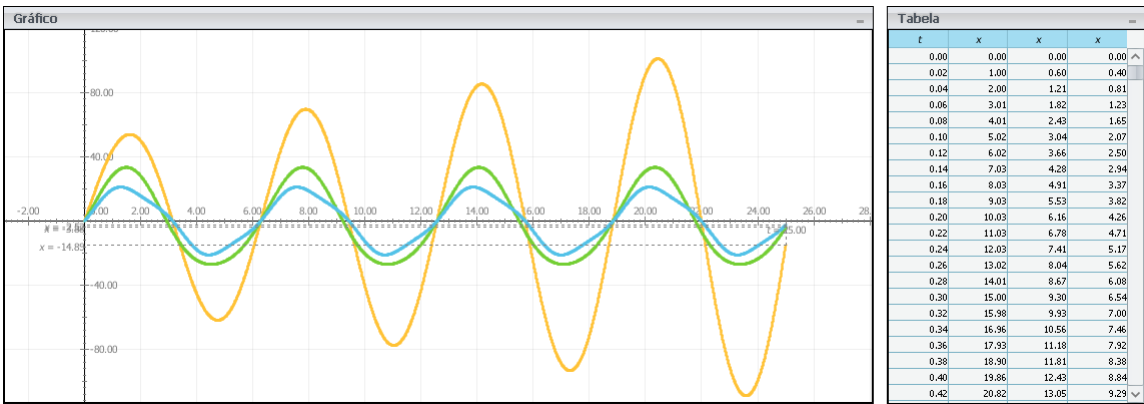
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observe que, foi adicionado novas variáveis na janela **Parâmetros** devido a força externa $F(t) = F_0 \cos \phi t$, as variáveis serão iniciais da seguinte forma, no caso 1 $F_0 = 5$ N e $\phi = 1$, no caso 2 $F_0 = 10$ N e $\phi = 2$ e no caso 3 $F_0 = 15$ N e $\phi = 3$.

Uma vez determinadas as condições iniciais na janela **Modelo Matemático** na Figura 63 o software realiza cálculos baseados nas equações de entrada fornecidas, computando as grandezas necessárias para a construção do gráfico de movimento e a criação da animação.

É gerado o gráfico da posição em relação ao tempo para o movimento forçado não amortecido dado na Figura 64. O gráfico demonstra como diferentes condições podem afetar o comportamento do sistema, as curvas mostram a variação da amplitude do movimento ao longo do tempo, com base em diferentes condições iniciais ou forças aplicadas.

Figura 64 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado não amortecido, na janela do **Modelo Matemático**.

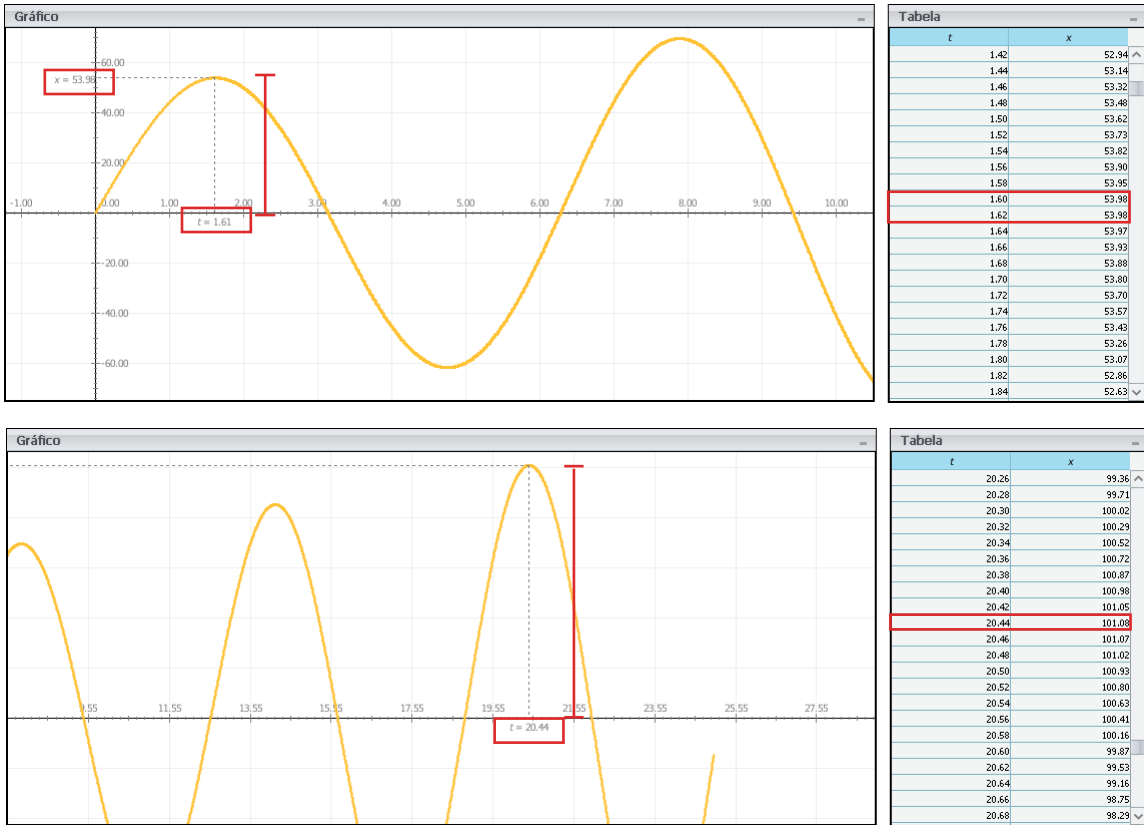


Fonte: Elaborado pelo Autor.

A comparação das três curvas permite observar como a amplitude do movimento varia ao longo do tempo em resposta a diferentes forças aplicadas.

A Figura 64, exibe o **caso 1** (curva em **laranja**) onde pode-se observar que o gráfico do movimento apresenta uma amplitude que cresce de forma linear conforme o tempo passa. Indicando que a força aplicada é constante e resulta em uma aumento uniforme da amplitude ao longo do tempo.

Figura 65 – Representação da amplitude para o movimento forçado não amortecido para o **caso 1**.

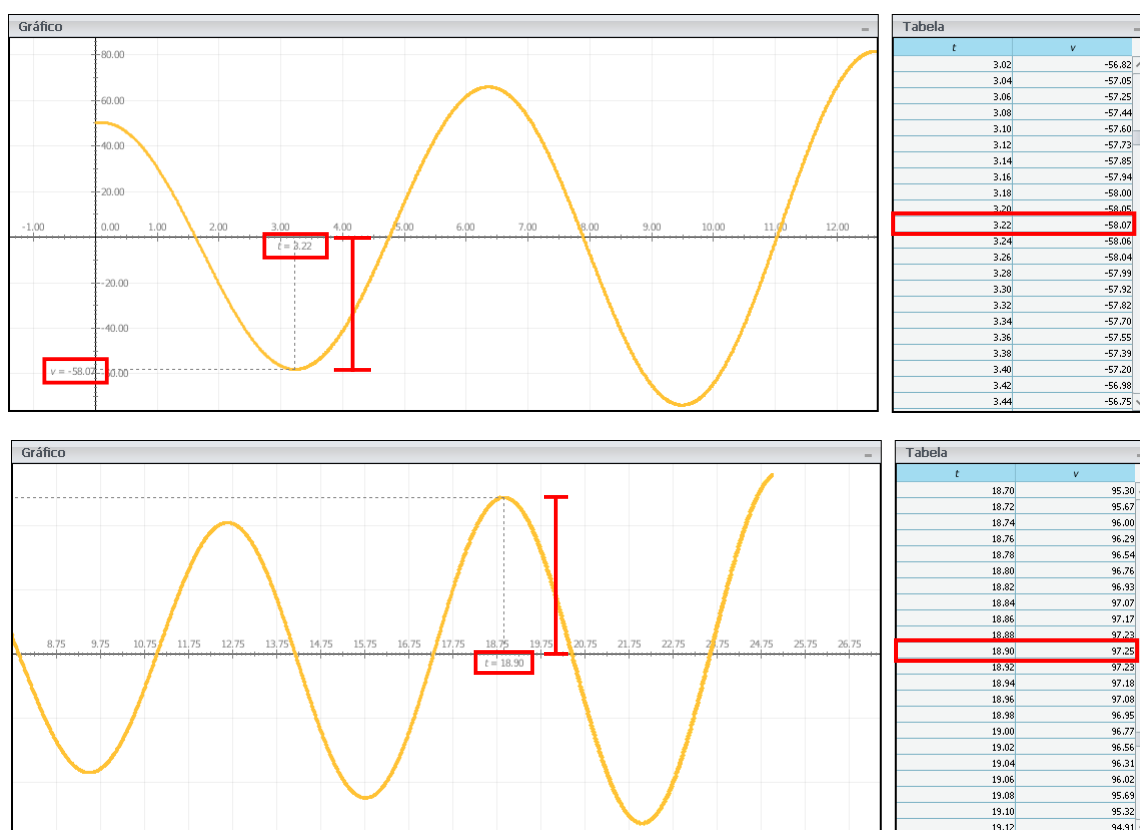


Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 65, exibe a amplitude do movimento, correspondente aos valores de $x = 53,98$ m em $t = 1,61$ s para o primeiro valor para amplitude e $x = 101,08$ m e $t = 20,44$ s para a ultima amplitude no intervalo de 0 à 25 s. Estes valores medem a maior e a menor distância entre a posição do corpo e o ponto de equilíbrio.

O gráfico da velocidade $v(t)$ para o **caso 1** é dado na Figura 66 abaixo.

Figura 66 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força externa periódica para o **caso 1**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

No primeiro gráfico (parte superior), temos a velocidade mínima registrada no instante $t = 3,22$ s, com valor $v = -58,07$ m/s. Já no segundo gráfico (parte inferior), o valor da velocidade máxima é observado em $t = 18,90$ s, com $v = 97,25$ m/s.

A comparação entre esses dois pontos evidencia um aumento progressivo da amplitude da velocidade ao longo do tempo. Isso indica que o sistema está acumulando energia, o que é característico do regime de ressonância — situação em que a frequência da força externa coincide com a frequência natural do sistema, provocando um crescimento contínuo na amplitude da oscilação.

Esse fenômeno é típico de sistemas não amortecidos, nos quais não há mecanismos de dissipação de energia (como atrito ou resistência). Assim, a energia fornecida pela força externa periódica se soma ciclicamente ao sistema, aumentando cada vez mais a amplitude da velocidade.

No **caso 2** (curva **verde**), a curva do movimento mostra uma amplitude constante, mas de forma menos acentuada em comparação com a **curva amarela**. Isso sugere que a força aplicada ao sistema é menor, ou que as condições iniciais diferente do **caso 1** resultam em uma resposta menos intensa ao sistema.

Figura 67 – Representação da amplitude para o movimento forçado não amortecido para o **caso 2**.

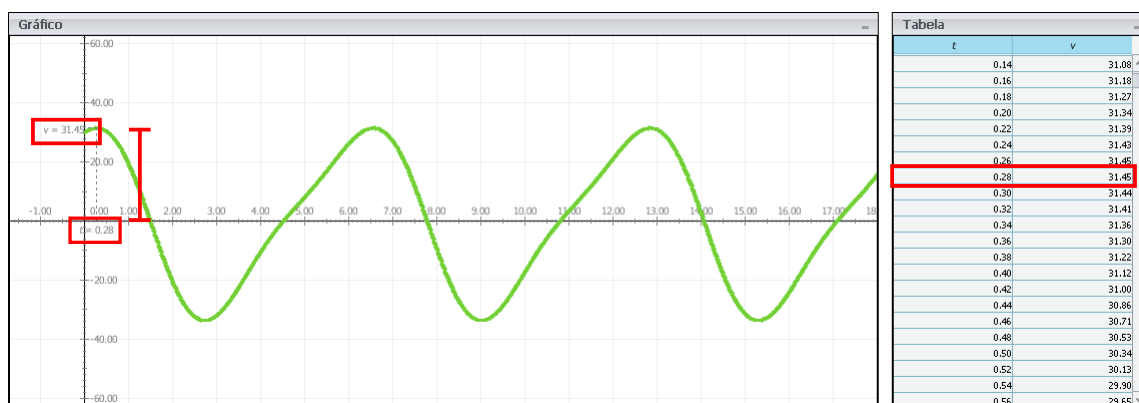


Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 67, exibe a amplitude máxima do movimento, correspondente ao valor de $x = 33,46$ m em $t = 1,49$ s para o primeiro valor da amplitude que se mantém constante durante o intervalo de 0 à 25 s.

O gráfico da posição para o caso 2 (Figura 67) representa um movimento forçado não amortecido sem ressonância, sob influência de uma força externa periódica. O sistema responde com uma oscilação de amplitude constante, demonstrando que atingiu uma resposta periódica estacionária. Esse comportamento é comum quando a frequência da força externa é próxima, mas não igual à frequência natural do sistema. A ausência de amortecimento permite essa resposta estável e sustentada, sem crescimento nem decaimento da amplitude.

Figura 68 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força externa periódica para o **caso 2**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 68 representa a evolução da velocidade $v(t)$ de um sistema oscilatório forçado sem amortecimento, quando submetido a uma força externa periódica. A curva apresenta um comportamento senoidal, característico de sistemas harmônicos com regime estável.

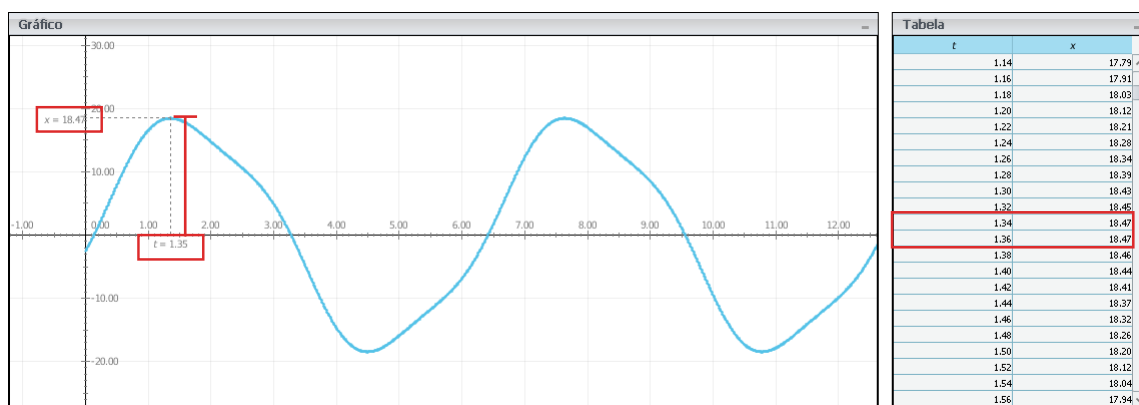
No instante $t = 0,28$ s, a velocidade atinge um valor máximo de aproximadamente $v = 31,45$ m/s. A amplitude da velocidade, assim como foi observado para a posição (Figura 67), permanece constante ao longo do tempo.

A constância da amplitude da velocidade reforça que o sistema alcançou um estado estacionário, em que há equilíbrio entre a energia fornecida pela força externa periódica e o movimento oscilatório do sistema. Isso confirma que não há ressonância, pois, nesse fenômeno, a amplitude da velocidade aumentaria continuamente em um sistema não amortecido.

O gráfico de velocidade para o **caso 2** confirma que o sistema encontra-se em um regime forçado estável, com amplitude constante e comportamento harmônico. A ação da força externa periódica gera uma resposta oscilatória na velocidade que não se intensifica com o tempo, indicando que não ocorre ressonância. A constância da amplitude e a regularidade das oscilações são marcas claras de um sistema não amortecido em regime estacionário.

No **caso 3** (curva **azul**), A curva azul exibe um aumento inicial mais pronunciado na amplitude, que se estabiliza após certo tempo. Isso pode indicar que a força aplicada é forte no início, mas diminui ou se mantém constante posteriormente, levando a uma estabilização da amplitude.

Figura 69 – Representação da amplitude para o movimento forçado não amortecido para o **caso 3**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

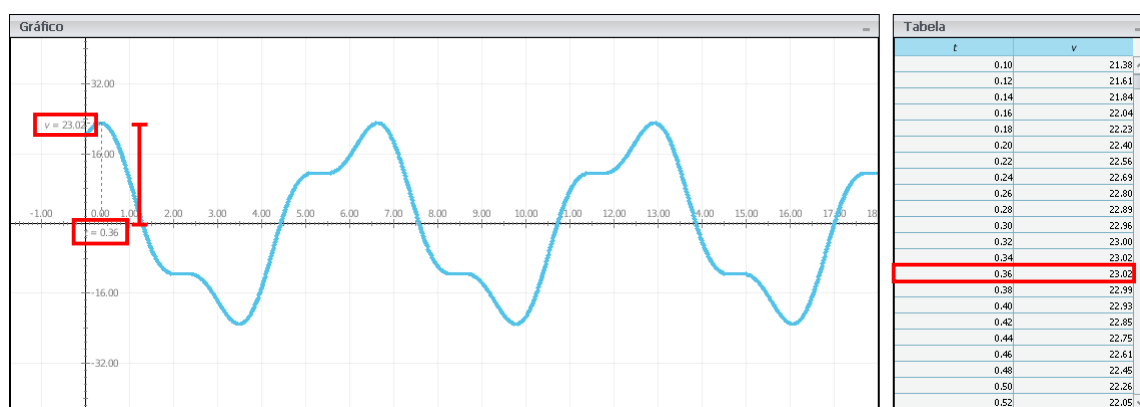
A Figura 69, o gráfico exibe a amplitude máxima do movimento, correspondente ao valor de $x = 18,47$ m em $t = 1,35$ s para o primeiro valor da amplitude que se mantém constante durante o intervalo de 0 à 25 s.

Diferentemente do que ocorre em regimes próximos da ressonância, neste caso, não há crescimento da amplitude com o tempo. Isso indica que a frequência da força externa aplicada não coincide com a frequência natural do sistema, ou seja, o sistema opera fora da condição ressonante. O movimento forçado, embora contínuo, apenas mantém a oscilação sem amplificá-

la, uma vez que a energia fornecida pela força externa é compensada ciclicamente pelo próprio sistema.

Portanto, no **caso 3**, apesar da ausência de amortecimento, o sistema apresenta uma resposta estável, com amplitude finita e constante, sem indícios de crescimento exponencial ou ressonância. Este comportamento ilustra a importância da frequência da força externa na determinação do regime de resposta oscilatória.

Figura 70 – Gráfico da velocidade em função do tempo para um sistema submetido a um movimento forçado não amortecido sob a influência de uma força externa periódica para o **caso 3**.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Figura 69, no gráfico observa-se que a amplitude da posição permanece constante ao longo do tempo, com oscilações bem definidas e sem crescimento progressivo. Isso evidencia que o sistema opera fora da condição de ressonância.

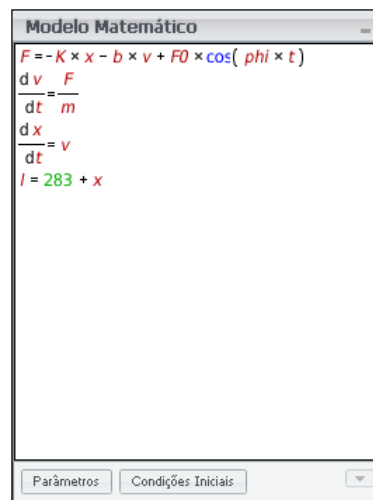
O gráfico na Figura 70, que mostra a velocidade do sistema, reforça essa conclusão. O gráfico apresenta oscilações periódicas bem definidas, com amplitude praticamente constante ao longo do tempo. O valor máximo evidenciado é $v = 23,02$ m/s no instante $t = 0,36$ s, o que confirma que o sistema está em um regime estacionário. Não há indícios de crescimento acumulativo de energia no sistema, o que seria típico em uma situação de ressonância não amortecida.

Ambos os gráficos caracterizam um comportamento harmônico forçado e estável, regido por uma força externa periódica que atua com frequência diferente da frequência natural do sistema. A ausência de amortecimento não implica crescimento indefinido da amplitude, uma vez que o sistema não está em ressonância. Essa condição gera um regime não explosivo, no qual a energia fornecida pela força externa é absorvida e redistribuída de maneira equilibrada pelo sistema.

5.4 SIMULAÇÕES DAS VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS

As vibrações forçadas amortecidas ocorrem quando um dado sistema é submetido a uma força externa periódica, enquanto simultaneamente sofre influência de uma força de amortecimento ou dissipação, se esta força estiver relacionada à velocidade ela será expressa como $F_{dis} = -bv$.

Figura 71 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado amortecido, na janela do Modelo Matemático.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Agora, a construção do modelo para análise do movimento forçado amortecido iniciará através da inserção das equações na janela **Modelo Matemático**. A expressão da força resultante é parecido com o caso anterior (Vibrações forçadas não amortecidas), para este caso será acrescentado o termo que caracteriza o amortecimento no sistema, então, temos $F = -kx - bv + F_0 \cos \varphi t$ como mostra a Figura 71.

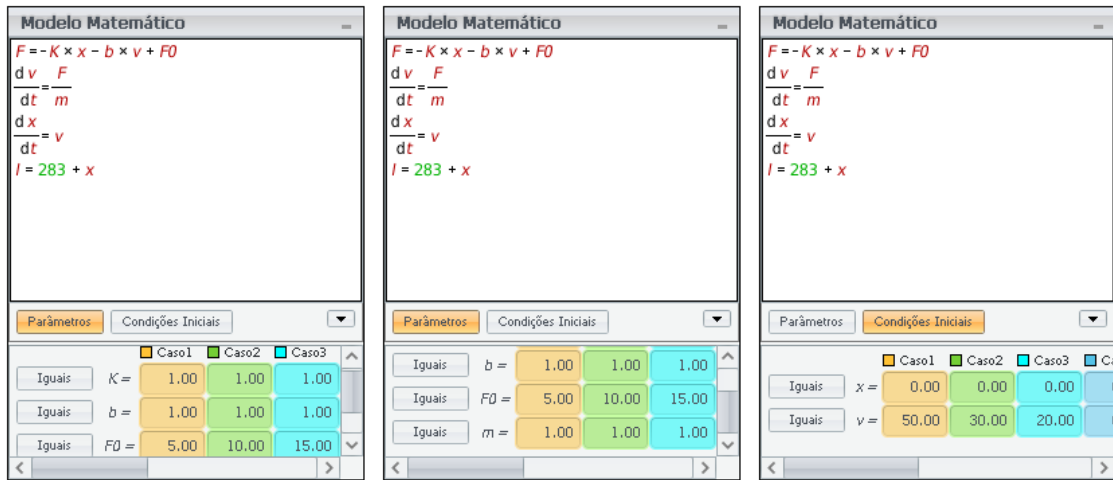
5.4.1 Movimento forçado subamortecido

Para o caso forçado subamortecido, o sistema oscila com uma amplitude que decresce exponencialmente ao longo do tempo. Esse regime ocorre quando o amortecimento é insuficiente para impedir as oscilações.

5.4.1.1 Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso subamortecido quando aplicando uma força constante

Consideramos as mesmas condições iniciais para as massas iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica igual a $k = 1$ N/m as velocidades $v_1 = 50$ m/s, $v_2 = 30$ m/s e $v_3 = 20$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 0$ m, $x_2 = 0$ m e $x_3 = 0$ m no instante $t = 0$ s.

Figura 72 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado amortecido, na janela do **Modelo Matemático**.

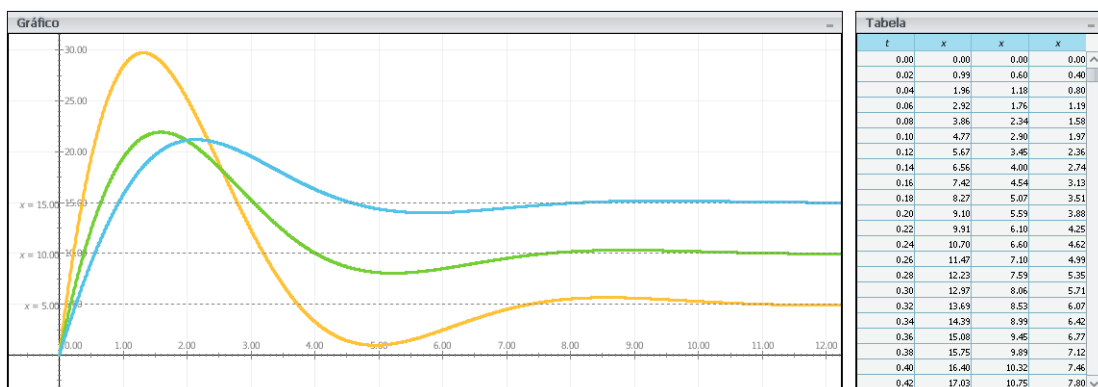


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observe que, foi adicionado novas variáveis na janela **Parâmetros** devido a força externa $F(t) = F_0$ e a força dissipativa $F_{dis}(t) = -bv$, as variáveis serão iniciais da seguinte forma, no **caso 1** $F_0 = 5$ N e $b = 1$, no **caso 2** $F_0 = 10$ N e $b = 1$ e no **caso 3** $F_0 = 15$ N e $b = 1$, conforme a Figura 72.

Ao iniciar a simulação é gerado o gráfico da posição em relação ao tempo do movimento forçado amortecido aplicado uma força externa constante, conforme a Figura 73.

Figura 73 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado subamortecido sobre a influencia de força externa constante.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para analisar o gráfico do movimento forçado subamortecido dada na Figura 73 mais a fundo, tomaremos o limite da equação do movimento forçado amortecido dada em 4.52 quando $t \rightarrow \infty$.

Relembrando a equação $z(t)$,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m \omega_0} \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) \right]$$

Aplicando a distributiva do termo exponencial $e^{-\beta t}$ e em seguida aplicando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na $z(t)$ resultando em,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)} \quad (5.1)$$

Note que, o limite resulta em uma constante porque todos os termos dependentes do tempo tendem a se anular ou a convergir para zero com o passar do tempo. Isso ocorre devido ao fator exponencial $e^{-\beta t}$, que domina o comportamento do sistema. Como $\beta < 0$ para um sistema amortecido, os termos que contêm $e^{-\beta t}$ ou seu produto com as funções $\sin \omega_0 t$ e $\cos \omega_0 t$ por serem funções limitadas desaparecem no limite de tempo infinito. Assim, a oscilação do sistema se estabiliza e o movimento converge para uma posição de equilíbrio estático.

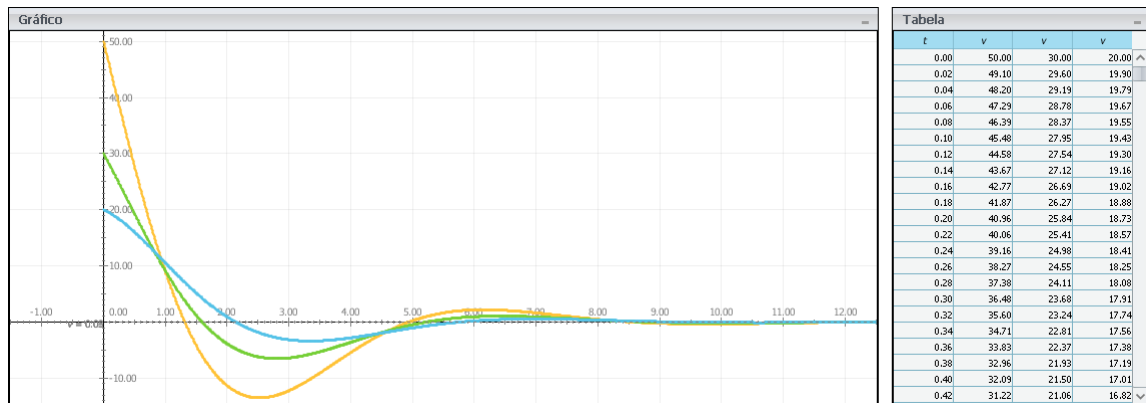
A estabilização dada no resultado em (5.1) pela constante no movimento forçado subamortecido reflete o fato de que, a força gera um deslocamento estático no sistema, que é proporcional à força F_0 e inversamente proporcional ao fator de resistência $m(\beta^2 + \omega_0^2)$.

Na Figura 73 o gráfico do movimento forçado subamortecido, vemos que as oscilações iniciais apresentam amplitudes que diminuem ao longo do tempo devido ao amortecimento. Eventualmente, o sistema não oscila mais, e o deslocamento se estabiliza na constante dada pelo limite calculado em (5.1).

Se a força externa F_0 for igual a zero ($F_0 = 0$) o limite de $z(t)$ quando t tende para o infinito vai para zero, ou seja, a mola converge para posição de equilíbrio. Neste caso, o movimento é puramente amortecido, as oscilações decaem exponencialmente devido ao fator $e^{-\beta t}$ e o deslocamento $z(t)$ tende a zero conforme o tempo tende ao infinito recai no sistema forçado não amortecido conforme a Figura 36.

Se a força externa F_0 for diferente de zero ($F_0 \neq 0$), o limite quando t vai para o infinito converge para a constante $F_0/m(\beta^2 + \omega_0^2)$. Pode-se observar no gráfico na Figura 73 que a curva se estabiliza em uma posição constante, proporcional a $F_0/m(\beta^2 + \omega_0^2)$, que é o deslocamento estático gerado pela força constante F_0 . Portanto, o gráfico não recai completamente no movimento forçado não amortecido, porque no caso amortecido ($\beta > 0$), as oscilações decaem até que o movimento seja dominado pela força constante, enquanto no caso não amortecido, as oscilações persistem indefinidamente com amplitude constante.

Figura 74 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado subamortecido sob a influência de uma força constante, com diferentes condições iniciais ou diferentes coeficientes de amortecimento: **Curva Laranja** - Sistema com maior velocidade inicial ($v_0 = 50$ m/s) e maior resposta inicial à força. **Curva Verde** - Sistema com velocidade inicial intermediária ($v_0 = 30$ m/s). **Curva Azul** - Sistema com menor velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s).



O gráfico acima ilustra a variação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado subamortecido, todos influenciados por uma força externa constante $F(t) = F_0$.

No regime subamortecido, o sistema exibe oscilações amortecidas, ou seja, oscilações que diminuem gradualmente de amplitude ao longo do tempo devido à presença de um amortecimento moderado. Isso fica evidente no gráfico, onde todas as curvas apresentam flutuações em torno de um valor central antes de se estabilizarem.

Inicialmente, a força constante gera uma resposta de alta velocidade, mas, conforme o tempo avança, o sistema começa a dissipar energia através do amortecimento. Esse comportamento leva à diminuição gradual da amplitude das oscilações até que a velocidade tenda a zero, evidenciando a perda progressiva de energia cinética do sistema.

A **curva laranja** ($v_0 = 50$) mostra a resposta mais intensa, com oscilações de maior amplitude e duração. A **curva verde** ($v_0 = 30$) tem resposta intermediária, ainda com oscilações, porém menos acentuadas. A **curva azul** ($v_0 = 20$) apresenta um amortecimento mais visível, com oscilações menores e uma aproximação mais rápida ao estado de equilíbrio.

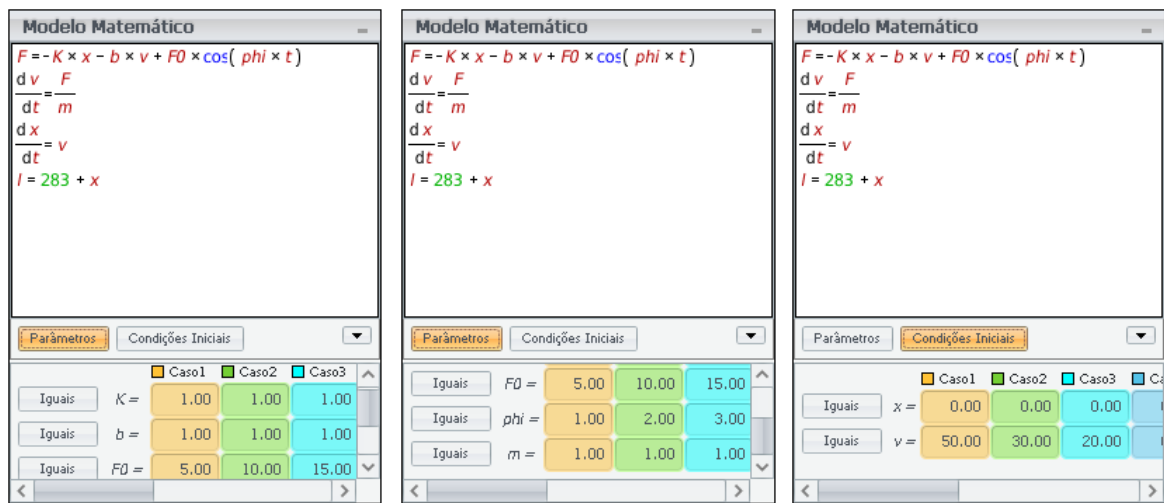
Esse tipo de movimento é característico de sistemas reais onde o amortecimento não é suficientemente forte para eliminar completamente as oscilações, mas é capaz de reduzi-las ao longo do tempo. A força constante atua como estímulo inicial, mas, por não ser periódica, não sustenta as oscilações indefinidamente.

Portanto, o gráfico evidencia um comportamento transiente típico do regime subamortecido, com oscilações decrescentes que convergem para o repouso, validando o efeito do amortecimento na dissipação da energia mecânica do sistema.

5.4.1.2 Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso subamortecido quando aplicando uma força periódica externa

Consideramos as mesmas condições iniciais para as massas iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica igual a $k = 1$ N/m as velocidades $v_1 = 50$ m/s, $v_2 = 30$ m/s e $v_3 = 20$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 0$ m, $x_2 = 0$ m e $x_3 = 0$ m no instante $t = 0$ s.

Figura 75 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado subamortecido, na janela do **Modelo Matemático**.

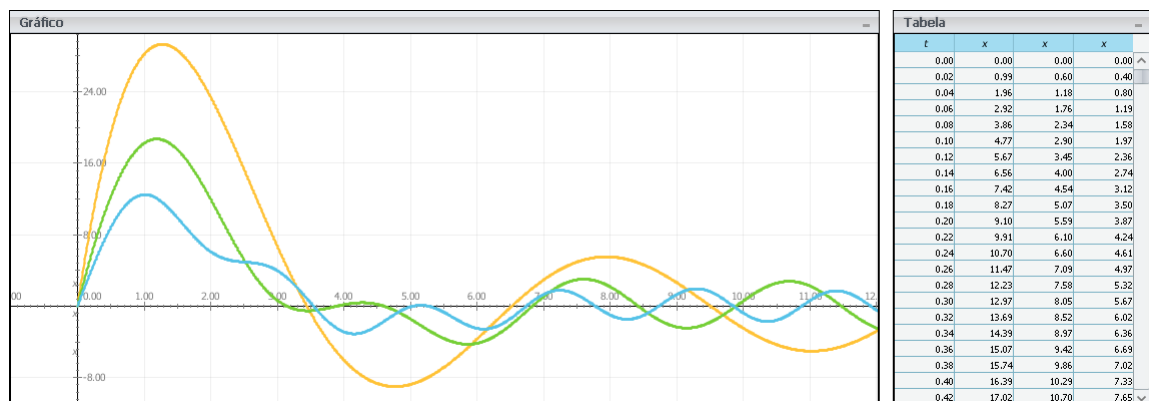


Fonte: Elaborado pelo Autor.

As demais variáveis serão iniciais da seguinte forma, no **caso 1** $F_0 = 5$ N, $\varphi = 1$, $b = 1$, no **caso 2** $F_0 = 10$ N, $\varphi = 2$, $b = 1$ e no **caso 3** $F_0 = 15$ N, $\varphi = 3$ e $b = 1$, conforme a Figura 75.

O gráfico na Figura 76, exibe curvas que oscilam ao longo do tempo com amplitudes que diminuem gradualmente. Essa característica é típica de um movimento subamortecido, onde o sistema perde energia devido ao amortecimento, mas continua a oscilar antes de estabilizar.

Figura 76 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado subamortecido ao longo do tempo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Note que, as curvas se cruzam em vários pontos ao longo do eixo do tempo. Isso mostra que, em determinados momentos, os sistemas podem estar em fase ou fora de fase, resultando nestas interações complexas.

Para analisar o gráfico do movimento forçado subamortecido dada na Figura 76 mais a fundo, tomaremos o limite da equação do movimento forçado amortecido para os casos em que $\varphi \neq \omega_0$ dada em (4.54) e $\varphi = \omega_0$ dada em (4.55) quando o $t \rightarrow \infty$.

Relembrando a equação $z_1(t)$,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0} \left(\cos \varphi t \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t}{\beta^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) + \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} \left[-\beta \left(\frac{\omega_0 \sin \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi \sin \omega_0 t \cos \varphi t}{\varphi^2 - \omega_0^2} \right) + \omega_0 \left(\frac{\beta e^{\beta t} \sin \varphi t - \varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\beta^2 + \omega_0^2} - \left(\frac{\omega_0 \sin \varphi t \sin \omega_0 t - \varphi \cos \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi}{\varphi^2 - \omega_0^2} \right) \right] \right] \right]$$

Relembrando a equação $z_2(t)$,

$$z_2(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0} \left(\cos \varphi t \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t}{\beta^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) + \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} \left[-\beta \left(\frac{2\omega_0 t - \sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right) + \omega_0 \left(\frac{\beta e^{\beta t} \sin \varphi t - \varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\beta^2 + \omega_0^2} - \left(\frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right) \right) \right] \right] \right]$$

Aplicando a distributiva do termo exponencial $e^{-\beta t}$ nas equações $z_1(t)$ e $z_2(t)$ e em seguida aplicando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na $z(t)$. Note que, para as duas equações terá como resultando,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0} \left[\frac{\omega_0 \cos \varphi t}{\beta^2 + \omega_0^2} + \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} \left(\frac{\beta \sin \varphi t - \varphi \cos \varphi t}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) \right] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)} \left[\cos \varphi t + \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} (\beta \sin \varphi t - \varphi \cos \varphi t) \right] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)} \left[\frac{\varphi \beta \sin \varphi t}{\beta^2 + \omega_0^2} + \left(1 - \frac{\varphi^2}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) \cos \varphi t \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

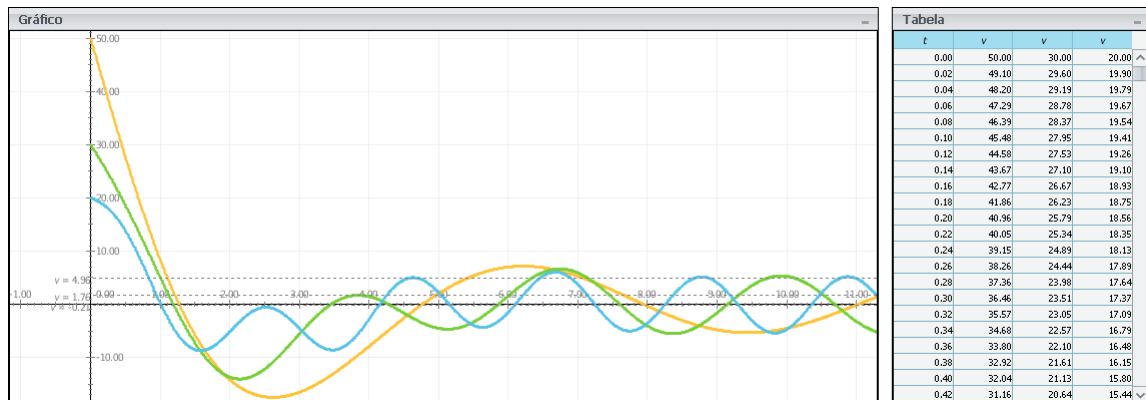
Note que, o limite resultou em uma constante porque todos os termos dependentes do tempo tendem a se anular ou a convergir para zero com o passar do tempo. Isso ocorre devido ao fator exponencial $e^{-\beta t}$, que domina o comportamento do sistema. Os termos que contêm o

produto entre $e^{-\beta t}$ e as funções $\sin \omega_0 t$ e $\cos \omega_0 t$ por serem funções limitadas desaparecem no limite de tempo infinito.

De acordo com o limite calculado em (5.2), se a força externa F_0 é igual a zero o limite tende à zero. Portanto, a $z_1(t)$ e $z_2(t)$ convergem para posição de equilíbrio $z_1(t) = 0$ e $z_2(t) = 0$ assim com o caso movimento livre não forçado subamortecido.

Agora, se a força externa F_0 for diferente de zero ($F_0 \neq 0$), o lado direito do limite em (5.2) se torna uma função periódica, portanto, a mola fica oscilando periodicamente e não converge para um valor específico. Neste caso, com a força externa, o sistema não converge para um valor estático, mas sim mantém oscilações forçadas, com amplitude e frequência influenciadas pela interação entre a força externa, o amortecimento e as características do sistema.

Figura 77 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado subamortecido sob a influência de uma força periódica, com diferentes condições iniciais.



O gráfico acima apresenta o comportamento da velocidade em função do tempo de um sistema oscilatório submetido a um movimento forçado subamortecido, sob a influência de uma força externa periódica. Três curvas são exibidas, representando diferentes condições iniciais de velocidade: 50, 30 e 20 m/s, destacadas respectivamente pelas curvas laranja, verde e azul.

O sistema é caracterizado por apresentar amortecimento moderado (subamortecido), o que implica que ele ainda oscila, mas com uma perda gradual de energia ao longo do tempo. Entretanto, ao contrário do caso em que a força externa é constante, aqui a força externa é periódica, isto é, ela varia harmonicamente no tempo. Essa característica introduz uma oscilação sustentada no sistema.

A análise do gráfico mostra que, após um breve período transiente (inicial), as oscilações se tornam mais regulares e mantêm uma amplitude praticamente constante. Esse comportamento é típico de um estado estacionário forçado, no qual a influência da força periódica compensa as perdas de energia causadas pelo amortecimento. O sistema, portanto, passa a oscilar com a mesma frequência da força externa, estabilizando a amplitude da velocidade.

Os diferentes valores iniciais afetam apenas a resposta transitória: a **curva laranja** ($v_0 = 50$) apresenta maiores oscilações iniciais antes de se ajustar à oscilação periódica sustentada. A **curva verde** ($v_0 = 30$) estabiliza-se mais rapidamente. A **curva azul** ($v_0 = 20$) já parte de uma condição mais próxima do regime estacionário.

Este gráfico demonstra claramente a natureza do movimento forçado subamortecido: após a dissipação da resposta inicial livre (transitória), a resposta forçada domina, fazendo com que o sistema continue oscilando com amplitude constante e frequência igual à da força externa. Esse fenômeno é fundamental em diversas aplicações práticas, como em sistemas mecânicos e elétricos sujeitos a vibrações, mostrando como a escolha de parâmetros (frequência, amortecimento e força aplicada) influencia o comportamento final do sistema.

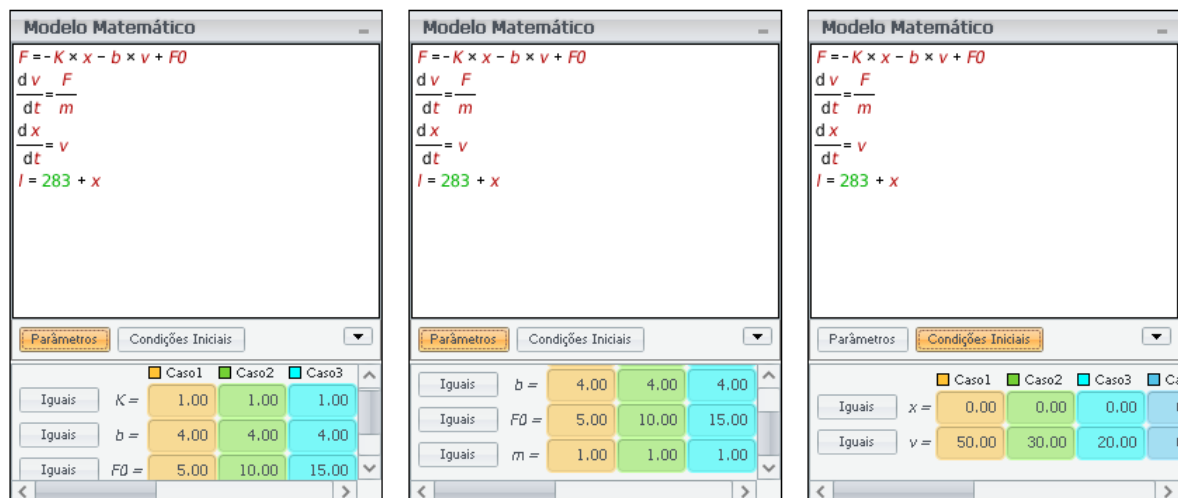
5.4.2 Movimento forçado superamortecido

Para o caso superamortecido, o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio de maneira lenta e não oscilatória. Nesse regime, o amortecimento é tão alto que inibe completamente as oscilações.

5.4.2.1 Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso superamortecido quando aplicando uma força constante

Consideramos as mesmas condições iniciais para as massas iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica igual a $k = 1$ N/m as velocidades $v_1 = 50$ m/s, $v_2 = 30$ m/s e $v_3 = 20$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 0$ m, $x_2 = 0$ m e $x_3 = 0$ m no instante $t = 0$ s.

Figura 78 – Representação das condições iniciais propostas para o movimento forçado superamortecido, na janela do Modelo Matemático.



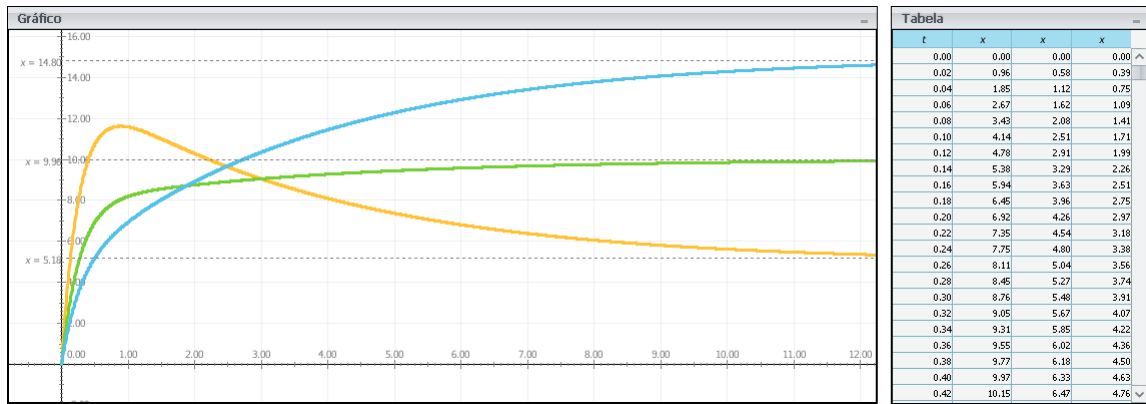
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observe que, as demais variáveis serão iniciais da seguinte forma, no **caso 1** $F_0 = 5$ N e $b = 4$, no **caso 2** $F_0 = 10$ N e $b = 4$ e no **caso 3** $F_0 = 15$ N e $b = 4$, conforme a Figura 78.

Ao iniciar a simulação é gerado o gráfico da posição em relação ao tempo do movimento forçado superamortecido aplicado uma força externa constante. Além disso, o comportamento do sistema é analisado em função das condições iniciais z_0 e v_0 , bem como da intensidade da força externa F_0 .

O gráfico ilustra como o deslocamento do sistema evolui ao longo do tempo, destacando o regime de decaimento exponencial típico do movimento superamortecido, conforme a Figura 79.

Figura 79 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado superamortecido ao longo do tempo sobre a influencia de uma força constante.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observa-se que, dependendo do valor de F_0 , o sistema pode atingir uma posição de equilíbrio estático ou permanecer próximo ao ponto de origem em casos de ausência de força externa. Essa análise permite compreender as contribuições individuais dos parâmetros do sistema na dinâmica total do movimento.

Para analisar o gráfico do movimento forçado superamortecido dada na Figura 79 mais a fundo, tomaremos o limite da equação do movimento forçado superamortecido dada em 4.60 quando o $t \rightarrow \infty$.

Relembrando a equação $z(t)$,

$$z(t) = e^{-\zeta_2 t} \left(\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} \right) - e^{-\zeta_1 t} \left(\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} \right) + \frac{F_0 \left[\zeta_1 (1 - e^{-\zeta_2 t}) - \zeta_2 (1 - e^{-\zeta_1 t}) \right]}{m \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1 - \zeta_2)}$$

Aplicando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na equação $z(t)$ acima resultando em,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{F_0}{m \zeta_1 \zeta_2} \quad (5.3)$$

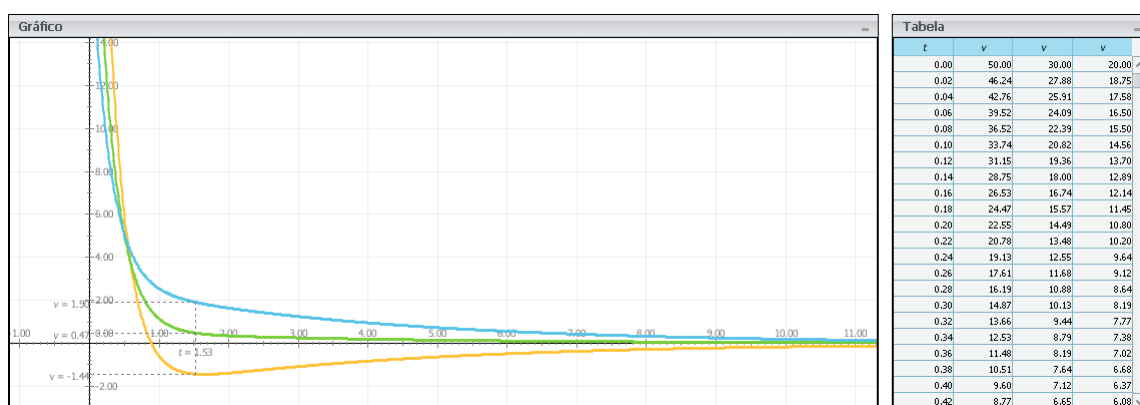
Pode-se observar que, as oscilações iniciais causadas pelas condições iniciais z_0 e v_0 desaparecem devido ao amortecimento. O sistema atinge um deslocamento estacionário, que depende apenas da força externa F_0 , da massa m e dos coeficientes de amortecimento ζ_1 e ζ_2 .

O deslocamento estacionário em (5.3) aumenta se a força externa F_0 aumenta ou diminui se os coeficientes de amortecimento ζ_1 e ζ_2 aumentam, indicando que um amortecimento mais forte reduz a resposta do sistema à força externa.

De acordo com a equação 5.3 se a força externa for igual a zero $F_0 = 0$, o lado direito do limite vai para zero, ou seja, a mola converge para posição de equilíbrio $z(t) = 0$, assim, como o caso forçado superamortecido. Neste caso, o movimento é governado apenas pelas condições iniciais z_0 e v_0 . O gráfico exibirá um decaimento exponencial sem oscilações, com o deslocamento $z(t)$ tendendo a zero conforme $t \rightarrow \infty$.

Para a força externa for diferente de zero ($F_0 \neq 0$), o lado do limite converge para uma constante dada por 5.3. Neste caso, o gráfico se estabiliza em uma posição constante como podemos observar no gráfico na Figura 79, a força constante compensa completamente o amortecimento, levando o sistema a um equilíbrio estático.

Figura 80 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado superamortecido sob a influência de uma força constante, com diferentes condições iniciais.



O gráfico na Figura 80 ilustra o comportamento da velocidade em função do tempo de um sistema submetido a um movimento forçado superamortecido, quando uma força constante é aplicada. As curvas representadas referem-se a diferentes condições iniciais de velocidade (50, 30 e 20 m/s), destacadas pelas cores azul, verde e laranja, respectivamente.

Em um regime superamortecido, o sistema retorna ao equilíbrio sem oscilar, com uma desaceleração suave e contínua. Observa-se que todas as curvas exibem uma rápida queda de velocidade logo após o instante inicial ($t = 0$), seguida de uma aproximação assintótica ao valor de equilíbrio, que é zero neste caso ausência de velocidade final após o efeito da força constante se estabilizar.

A resposta é completamente não oscilatória, característica típica do superamortecimento. Isso ocorre quando a força resistiva é suficientemente intensa para evitar qualquer oscilação, mesmo sob a presença de uma força externa constante. O sistema atinge o equilíbrio de forma lenta, mas direta.

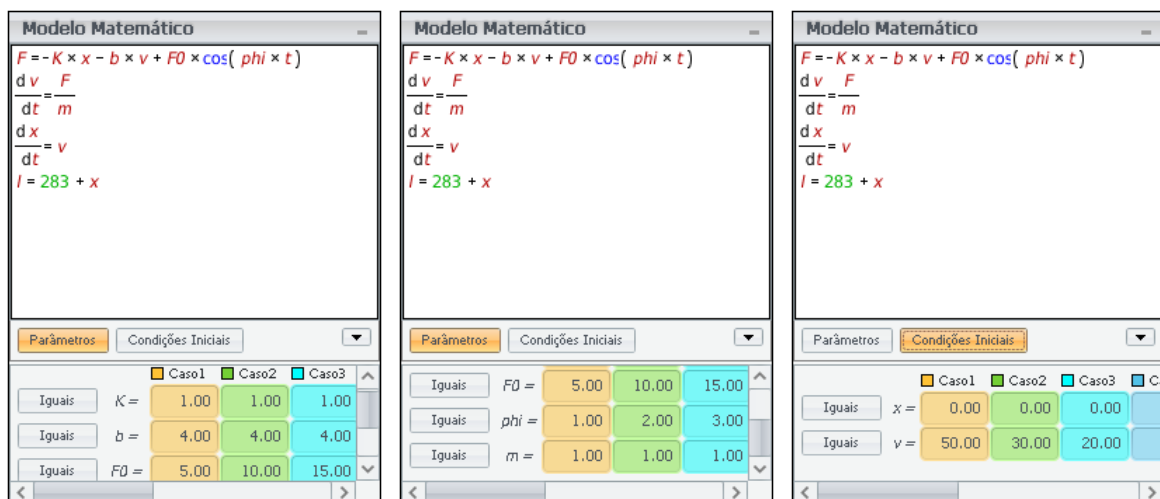
A **curva azul** ($v_0 = 50$) parte de uma velocidade inicial mais alta e leva mais tempo para se estabilizar. A **curva laranja** ($v_0 = 20$) chega mais rapidamente ao regime de equilíbrio. A **curva verde** ($v_0 = 30$) representa uma resposta intermediária.

Esse tipo de comportamento é comum em sistemas projetados para evitar oscilações, como em dispositivos de absorção de choques ou circuitos RLC superamortecidos, onde se deseja estabilidade sem ultrapassagens.

5.4.2.2 Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso superamortecido quando aplicando uma força periódica externa

Consideramos as mesmas condições iniciais para as massas iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica igual a $k = 1$ N/m as velocidades $v_1 = 50$ m/s, $v_2 = 30$ m/s e $v_3 = 20$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 0$ m, $x_2 = 0$ m e $x_3 = 0$ m no instante $t = 0$ s.

Figura 81 – Parâmetros e Condições iniciais inseridas na janela do **Modo Matemático** para o movimento forçado superamortecido.

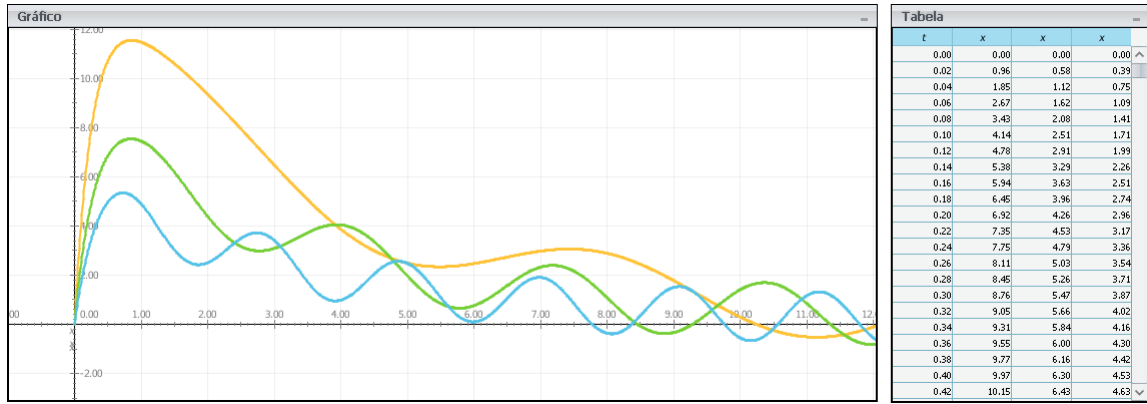


Fonte: Elaborado pelo Autor.

As demais variáveis serão iniciais da seguinte forma, no **caso 1** $F_0 = 5$ N, $b = 1$ e o $\varphi = 1$, no **caso 2** $F_0 = 10$ N, $b = 1$ e o $\varphi = 2$, e no **caso 3** $F_0 = 15$ N, $b = 1$ e o $\varphi = 3$, conforme a Figura 81.

Iniciando a simulação é gerado o gráfico a seguir para o movimento forçado superamortecido. O gráfico a seguir ilustra como o deslocamento do sistema evolui ao longo do tempo, destacando o regime de decaimento exponencial típico do movimento superamortecido sobre a influência de uma força periódica, conforme a Figura 82.

Figura 82 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado superamortecido ao longo do tempo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Note que, para este as curvas se cruzam em vários pontos ao longo do eixo do tempo. Isso mostra que, em determinados momentos, os sistemas podem estar em fase ou fora de fase, resultando em interações complexas.

Para analisar o gráfico do movimento forçado superamortecido sobre influencia de uma força externa periódica dada na Figura 82 mais a fundo, tomaremos o limite da equação do movimento forçado superamortecido dada em (4.62) quando o $t \rightarrow \infty$.

Relembrando a equação $z(t)$ movimento superamortecido sobre a influência de uma força periódica é dado por,

$$z(t) = e^{-\zeta_2 t} \left[\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \frac{F_0}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \left(\frac{\zeta_2 \cos \varphi t e^{\zeta_2 t} + \varphi \sin \varphi t e^{\zeta_2 t} - \zeta_2}{\varphi^2 + \zeta_2^2} \right) \right] - e^{-\zeta_1 t} \left[\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \frac{F_0}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \left(\frac{\zeta_1 \cos \varphi t e^{\zeta_1 t} + \varphi \sin \varphi t e^{\zeta_1 t} - \zeta_1}{\varphi^2 + \zeta_1^2} \right) \right]$$

Aplicando a distributiva dos termos exponenciais $e^{-\zeta_1 t}$ e $e^{-\zeta_2 t}$, e, em seguida, o limite quando $t \rightarrow \infty$ na $z(t)$, obtém-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{F_0}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \left[\frac{\zeta_2 \cos \varphi t + \varphi \sin \varphi t}{\varphi^2 + \zeta_2^2} - \frac{\zeta_1 \cos \varphi t + \varphi \sin \varphi t}{\varphi^2 + \zeta_1^2} \right] \quad (5.4)$$

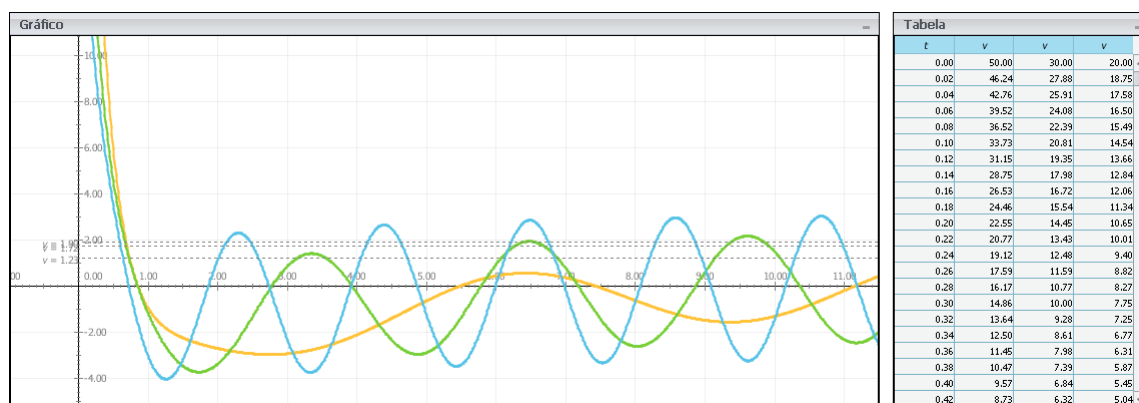
Quando a força externa é nula ($F_0 = 0$) o sistema não é forçado externamente. Portanto, a $z(t)$ converge para a posição de equilíbrio $z(t) = 0$ assim como o caso forçado livre superamortecido.

Como no caso anterior, a $z(t)$ é governado apenas pelas condições iniciais z_0 e v_0 . O gráfico exibirá um decaimento exponencial sem oscilações, com o deslocamento $z(t)$ tendendo a zero conforme $t \rightarrow \infty$. As oscilações diminuem exponencialmente até que o sistema retorne ao estado de equilíbrio sem mais perturbações. Neste caso, não haverá a formação de um regime estacionário, já que não existe uma força externa para sustentar oscilações periódicas.

No caso em que a força externa é diferente de zero ($F_0 \neq 0$), a força constante F_0 introduz um deslocamento estático no sistema. No limite $t \rightarrow \infty$, as contribuições associadas às condições iniciais desaparecem, resultando em (5.4) o lado direito do limite se torna uma função periódica, portanto, não converge para um valor específico.

Conforme a Figura 82, o gráfico apresentará um regime transitório inicial, com oscilações que se reduzem devido ao amortecimento. Após o decaimento do regime transitório, o sistema atinge um regime permanente em que a oscilação segue a periodicidade da força externa. A amplitude das oscilações no regime permanente será proporcional à intensidade de F_0 e inversamente proporcional aos coeficientes de amortecimento (ζ_1, ζ_2) e à frequência (φ).

Figura 83 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado superamortecido sob a influência de uma força periódica, com diferentes condições iniciais.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico exibe a variação da velocidade em função do tempo para um sistema físico submetido a um movimento forçado superamortecido, sendo influenciado por uma força externa periódica. As curvas apresentadas, identificadas pelas cores azul, verde e laranja, correspondem a diferentes condições iniciais de velocidade ($v_0 = 50, 30$ e 20 m/s, respectivamente).

Neste cenário, o sistema é caracterizado por uma forte dissipação de energia devido ao amortecimento elevado, o que impede oscilações naturais livres, mas permite oscilações induzidas pela força periódica aplicada.

A velocidade inicial decai rapidamente em todas as curvas, devido à dissipação promovida pelo amortecimento elevado. Apesar do amortecimento ser intenso, a força periódica gera oscilações que se manifestam de forma suave e atenuada com o tempo. As curvas **azul** e **verde** (com velocidades iniciais menores) apresentam oscilações mais evidentes, mas ainda controladas, sem crescimento de amplitude, evidência de que não há ressonância.

Ao contrário do caso subamortecido, aqui o sistema responde de forma amortecida e sem ultrapassagens significativas, o que significa que ele tende ao regime forçado estável com pequenas oscilações ao redor da velocidade média imposta pela força externa.

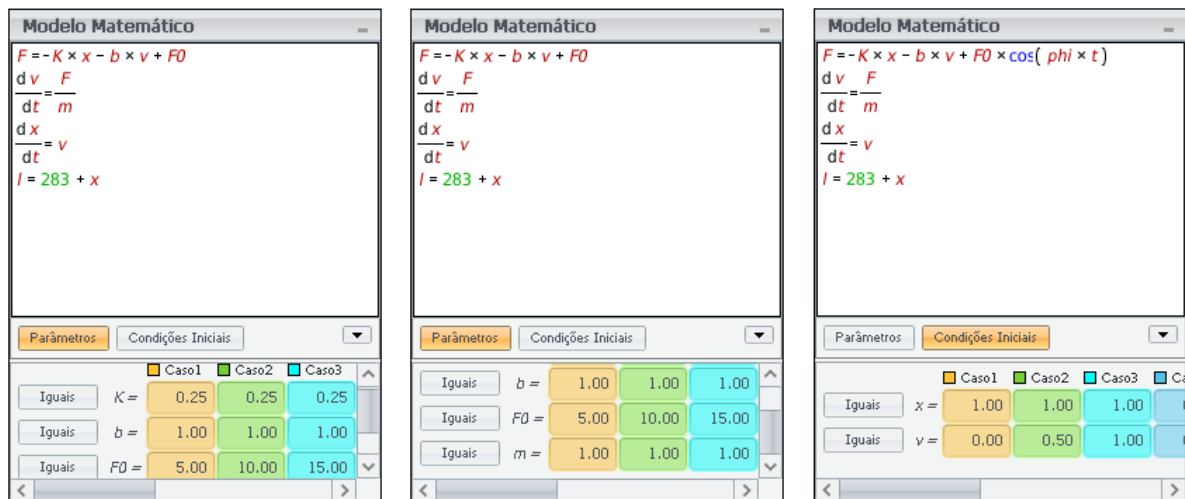
5.4.3 Movimento criticamente amortecido

Para o caso criticamente amortecido, o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio sem oscilar. Esse é o regime em que o amortecimento é exatamente igual à quantidade necessária para evitar oscilações.

5.4.3.1 Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso criticamente amortecido quando aplicando uma força constante

Consideramos as mesmas condições iniciais para as massas iguais a $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, a constante elástica igual a $k = 1$ N/m as velocidades $v_1 = 0$ m/s, $v_2 = 0,5$ m/s e $v_3 = 1$ m/s e as posições de cada massa $x_1 = 1$ m, $x_2 = 1$ m e $x_3 = 1$ m no instante $t = 0$ s.

Figura 84 – Parâmetros e Condições iniciais inseridas na janela do **Modo Matemático** para o movimento forçado Criticamente amortecido.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

As demais variáveis serão iniciais da seguinte forma, no **caso 1** $F_0 = 5$ N e $b = 0,25$, no **caso 2** $F_0 = 10$ N e $b = 0,25$ e no **caso 3** $F_0 = 15$ N e $b = 0,25$, conforme a Figura 84.

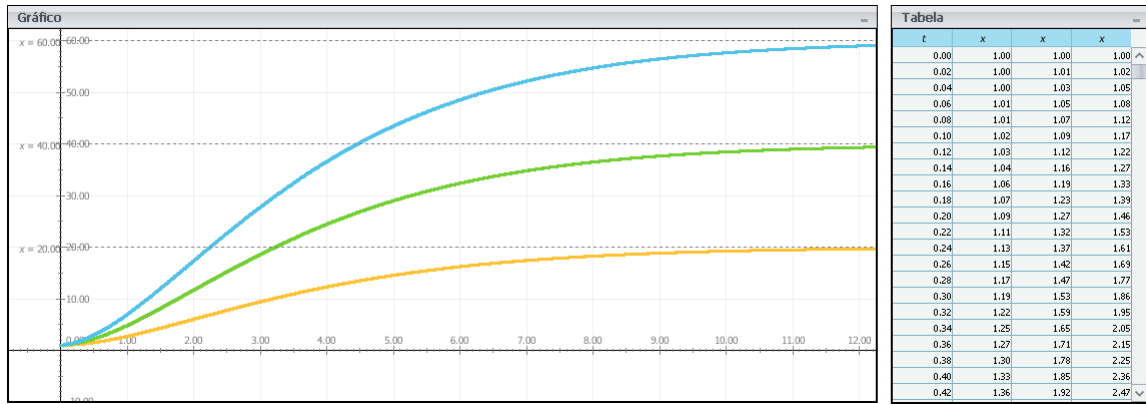
Ao iniciar a simulação é gerado o gráfico da posição em relação ao tempo do movimento forçado amortecido aplicado uma força externa constante, conforme a Figura 85.

Observa-se que, dependendo do valor de F_0 , o sistema pode atingir uma posição de equilíbrio estático ou permanecer próximo ao ponto de origem em casos de ausência de força externa.

Para analisar o gráfico do movimento forçado criticamente amortecido dada na Figura 85 mais a fundo, tomaremos o limite da equação do movimento forçado criticamente amortecido dada em (4.69) quando o $t \rightarrow \infty$.

Relembrando a equação $z(t)$ para o movimento forçado criticamente amortecido é dado

Figura 85 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado criticamente amortecido ao longo do tempo sobre a influencia de uma força constante.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

por,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 - \frac{F_0}{m} \left(\frac{te^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) + t \left(v_0 + \beta z_0 + \frac{F_0}{m} \left(\frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} \right) \right) \right] \quad (5.5)$$

Aplicando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na equação $z(t)$ acima resultando em,

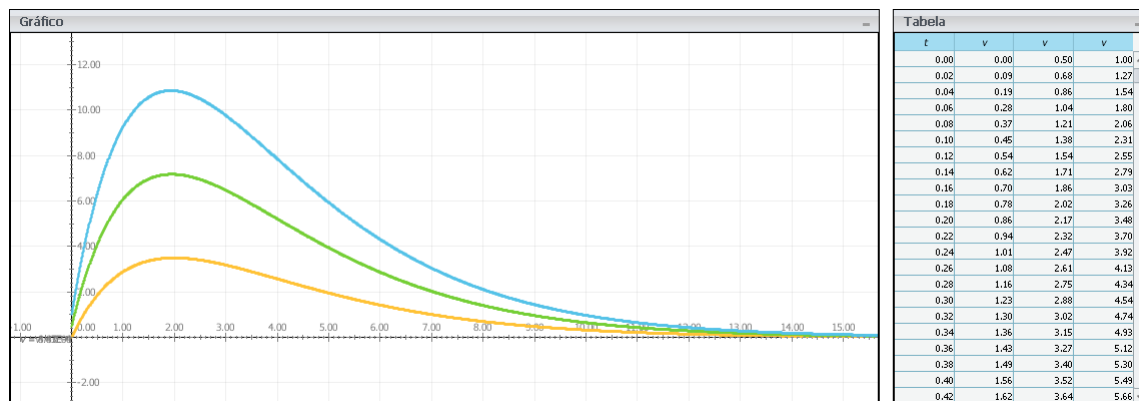
$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{F_0}{m\beta^2} \quad (5.6)$$

O resultado encontrado em (5.6) é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento β^2 e à massa m , o que significa que um amortecimento mais forte ou uma massa maior reduzirá a amplitude da posição final. Representa o ponto de equilíbrio estático do sistema, onde a força constante F_0 é exatamente balanceada pelo amortecimento crítico.

Quando a força externa é nula ($F_0 = 0$), o sistema não é influenciado por forças externas constantes. Por tanto, a $z(t)$ converge para a posição de equilíbrio $z(t) = 0$, assim, como o caso forçado criticamente amortecido. Neste caso, o gráfico reflete apenas o comportamento transitório determinado pelas condições iniciais (z_0 e v_0). A posição do sistema tenderá a zero $z(t) \rightarrow 0$ ao longo do tempo, sem atingir um deslocamento estacionário, conforme observamos no gráfico do movimento livre criticamente amortecido dado na Figura 46.

No caso em que a força externa é diferente de zero ($F_0 \neq 0$), a força constante F_0 introduz um deslocamento estático no sistema. A presença de uma força constante F_0 faz com que o sistema atinja uma nova posição de equilíbrio estático em $F_0/m\beta^2$. Na Figura 85 o gráfico mostra uma curva que se estabiliza nesse novo valor, com um decaimento exponencial no início e a transição suave para o estado estacionário.

Figura 86 – Representação da velocidade em função do tempo para três sistemas submetidos a um movimento forçado criticamente amortecido sob a influência de uma força constante, com diferentes condições iniciais.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico na Figura 86 apresentado ilustra a variação da velocidade em função do tempo para um sistema mecânico submetido a um movimento forçado criticamente amortecido, sob a ação de uma força constante. Observa-se que o comportamento dinâmico do sistema é caracterizado por uma resposta que atinge um valor máximo e, em seguida, decai suavemente até se estabilizar.

A **curva azul** representa a resposta do sistema com maior intensidade de força aplicada, enquanto as **curvas verde e amarela** correspondem a forças constantes de menor intensidade, respectivamente.

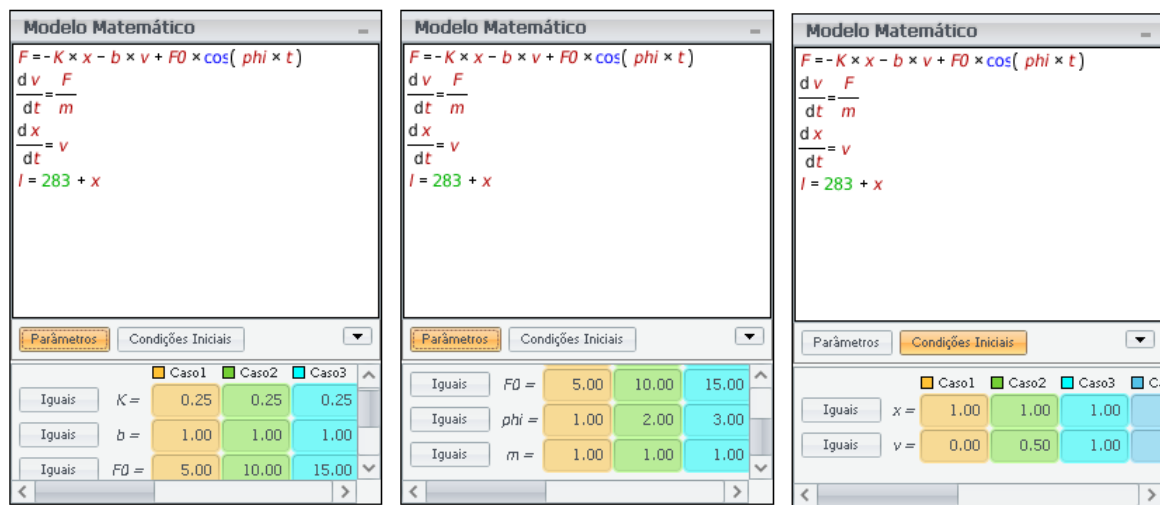
Nos instantes iniciais, ocorre um aumento gradual da velocidade, à medida que a força constante imprime aceleração ao sistema. Esse crescimento, no entanto, não é indefinido: a ação do amortecimento crítico limita esse aumento, fazendo com que a velocidade atinja um valor máximo e, logo em seguida, comece a decrescer exponencialmente. Isso ocorre porque, no regime de amortecimento crítico, o sistema dissipa energia de forma eficiente, retornando rapidamente à sua posição de equilíbrio sem oscilações.

Dessa forma, o gráfico evidencia que não há crescimento contínuo da velocidade. Pelo contrário, ela apresenta um pico e, depois, tende gradualmente a um valor estacionário, compatível com a condição de regime permanente imposta pela força constante.

5.4.3.2 Análise da simulação do movimento vibratório forçado para o caso criticamente amortecido quando aplicando uma força periódica externa

Consideramos as mesmas condições iniciais do caso em que a força externa é constante. As demais variáveis serão iniciais da seguinte forma, no **caso 1** $F_0 = 5 \text{ N}$, $b = 0,25$ e $\varphi = 1$, no **caso 2** $F_0 = 10 \text{ N}$, $b = 0,25$ e $\varphi = 2$, e no **caso 3** $F_0 = 15 \text{ N}$, $b = 0,25$ e $\varphi = 3$, conforme a Figura 87.

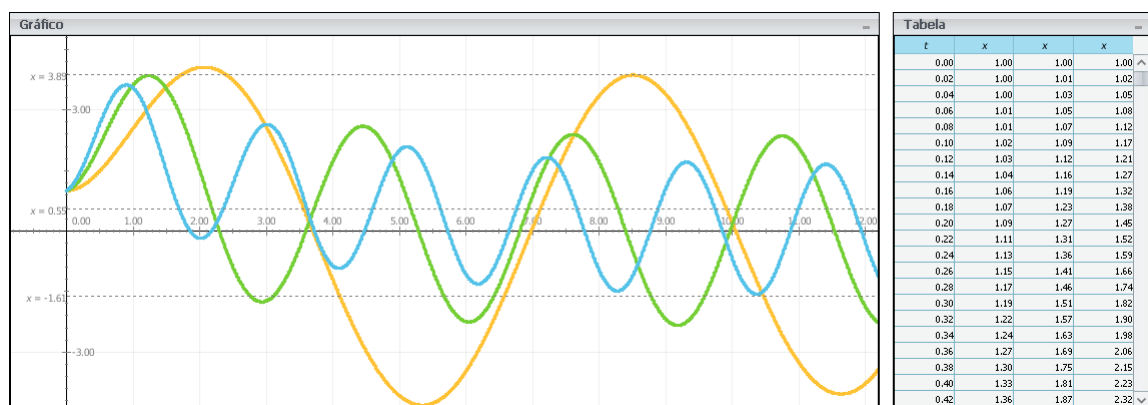
Figura 87 – Parâmetros e Condições iniciais inseridas na janela do **Modo Matemático** para o movimento forçado Criticamente amortecido.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao iniciar a simulação é gerado o gráfico da posição em relação ao tempo do movimento forçado criticamente amortecido aplicado uma força externa periódica, conforme a Figura 88.

Figura 88 – O gráfico exibe a posição de um sistema em um movimento forçado criticamente amortecido ao longo do tempo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para analisar o gráfico do movimento forçado criticamente amortecido dada na Figura 88 mais a fundo, tomaremos o limite da equação do movimento forçado criticamente amortecido dada em (4.71) quando o $t \rightarrow \infty$.

Relembrando a equação $z(t)$ para o movimento forçado criticamente amortecido é dado por,

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 - \frac{F_0}{m} \left(\frac{\cos \varphi t (\beta t e^{\beta t} - e^{\beta t}) + \varphi \sin \varphi t (t e^{\beta t} - \beta e^{\beta t}) + \beta (1 - \varphi \sin \varphi t - \cos \varphi t)}{\beta^2 + \varphi^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta \varphi^2 (\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \sin \varphi t e^{\beta t} - \beta) - \beta \varphi^2 (\beta \sin \varphi t e^{\beta t} - \varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi)}{\beta^2 + \varphi^2} \right) \right. \\ \left. + t \left(v_0 + \beta z_0 + \frac{F_0}{m} \left(\frac{\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \sin \varphi t e^{\beta t} - \beta}{\beta^2 + \varphi^2} \right) \right) \right]$$

Aplicando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na equação $z(t)$ acima resultando em,

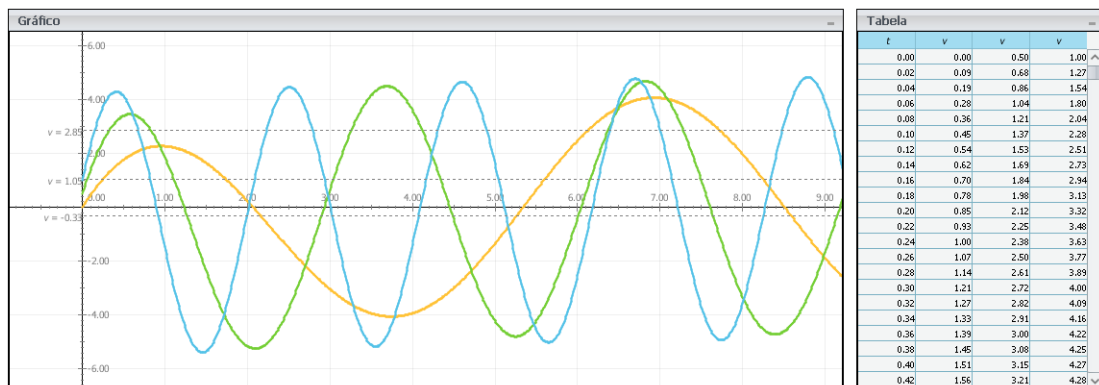
$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{F_0}{m(\beta^2 + \varphi^2)} \left[\cos \varphi t (1 + \beta \varphi^2 (\beta + \varphi)) + \beta \varphi \sin \varphi t (1 + \varphi (\varphi - \beta)) \right] \quad (5.7)$$

A expressão no limite quando $t \rightarrow \infty$ mostra que a posição $z(t)$ do sistema depende da força aplicada F_0 , da massa m , do coeficiente de amortecimento β e da frequência angular φ . No limite, o sistema continua a oscilar com uma amplitude que depende desses parâmetros.

Quando a força externa é nula ($F_0 = 0$), significa que não há força periódica aplicada, portanto, a $z(t)$ converge para a posição de equilíbrio $z(t) = 0$ assim como o caso criticamente forçado. O gráfico mostra um decaimento exponencial da oscilação devido ao amortecimento crítico, eventualmente atingindo uma posição de equilíbrio estável, conforme observamos no gráfico do movimento livre criticamente amortecido dado na Figura 46.

No caso em que a força externa é diferente de zero ($F_0 \neq 0$) o lado direito do limite (5.7) se torna uma função periódica, portanto, não converge para um valor específico. Nesse caso, a força periódica aplicada não é zero, o que significa que o sistema é continuamente forçado. O gráfico na Figura (88) mostra oscilações contínuas com uma amplitude que depende da magnitude de F_0 , conforme descrito pela expressão no limite calculado em 5.7.

Figura 89 – Gráfico da velocidade $v(t)$ submetido ao movimento forçado criticamente amortecido sob a influência de uma força periódica.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 89 apresenta os gráficos da velocidade $v(t)$ para três sistemas distintos submetidos a um movimento forçado criticamente amortecido, sob a ação de uma força periódica. Cada curva colorida (azul, verde e laranja) representa a resposta de um sistema diferente, possivelmente com diferentes amplitudes ou frequências da força aplicada.

Neste regime, o sistema encontra-se no limite entre o subamortecimento e o superamortecimento, o que significa que ele retorna ao equilíbrio o mais rápido possível sem oscilações livres. No entanto, como há uma força periódica atuando continuamente, a resposta do sistema é dominada pela frequência dessa força externa — resultando em um movimento oscilatório forçado.

As curvas evidenciam oscilações periódicas e estáveis, sem crescimento ou decaimento acentuado da amplitude ao longo do tempo. Isso indica que o sistema entrou em regime permanente, no qual a energia fornecida pela força externa é exatamente dissipada pelo amortecedor, mantendo a amplitude constante.

A tabela ao lado do gráfico complementa a visualização, apresentando valores numéricos da velocidade para diferentes instantes de tempo. Esses dados reforçam que as velocidades oscilam ao redor de zero, com amplitudes controladas pela interação entre a força periódica e o amortecimento crítico.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho discute a importância de uma aprendizagem significativa, que vai além da mera aplicação de conceitos, e envolve a construção de modelos teóricos e a realização de simulações para facilitar a compreensão dos fenômenos físicos. Destaca-se que a educação está passando por um processo de reformulação, com a integração das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) no ensino, se usada de forma correta, pode tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas. O uso de ferramentas como o *software Modellus* é enfatizado, pois permite a modelagem de sistemas físicos e a visualização de comportamentos dinâmicos, contribuindo para uma melhor assimilação dos conceitos.

O *Software Modellus* é utilizado em diversas disciplinas e contextos educacionais, sendo uma ferramenta valiosa para complementar o ensino tradicional. Ele é particularmente eficaz em cursos de Física, onde a visualização de conceitos como vibrações, movimento e ondas é crucial para a compreensão do conteúdo.

O uso de modelagens no ensino da Física tem se mostrado uma abordagem pedagógica eficaz e inovadora, contribuindo para uma melhor compreensão e aprendizado dos conceitos físicos. A modelagem permite que os alunos visualizem fenômenos físicos complexos que, de outra forma, seriam difíceis de compreender apenas por meio de fórmulas e descrições textuais. Por exemplo, simulações de Vibrações Mecânicas podem ajudar os alunos a observar diretamente como um sistema massa-mola se comporta em diferentes condições. Ressalta-se a importância dos alunos do ensino superior compreenderem estes conceitos apresentados nas disciplinas de Mecânica Clássica e Equações Diferenciais, promovendo uma abordagem conceitual que os ajude a entender a influência da ciência em suas vidas.

Embora as modelagens apresentem inúmeros benefícios no ensino de Física, é importante que os educadores sejam treinados adequadamente para utilizar essas ferramentas e que sejam integradas ao currículo de forma coerente. A combinação entre métodos tradicionais e inovações tecnológicas pode resultar em uma educação mais robusta e significativa. É fundamental ressaltar que o uso do *Software Modellus*, ou de qualquer outro software educacional, não solucionará todos os desafios enfrentados no ensino de Física ou nas ciências em geral. Essas ferramentas devem ser encaradas como um recurso complementar, oferecendo suporte tanto para professores que já dispõem de diversos recursos quanto para aqueles que atuam em escolas com infraestrutura limitada ou inexistente.

Nesse contexto, as TICs desempenham um papel essencial ao integrar tecnologias, amplamente presentes no cotidiano dos estudantes, ao ambiente de ensino. Essa integração não apenas aproxima o conteúdo da realidade dos alunos, mas também transforma a sala de aula em um espaço mais dinâmico e atrativo, favorecendo o engajamento e promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados de forma satisfatória, uma

vez que as modelagens desenvolvidas com o *software Modellus* demonstraram ser eficazes na representação de problemas de Vibrações Mecânicas. As simulações realizadas possibilitaram uma melhor compreensão dos comportamentos vibratórios, integrando os cálculos matemáticos desenvolvidas no decorrer do trabalho às práticas didáticas de modelagem, conforme planejado. Além disso, o uso do *Modellus* como ferramenta computacional mostrou-se adequado para apoiar o ensino de conteúdos abordados nas disciplinas de Mecânica Clássica e Equações Diferenciais Aplicadas, contribuindo tanto para a consolidação do aprendizado teórico quanto para o desenvolvimento de habilidades práticas dos estudantes em cursos de graduação em Física e áreas afins.

Em suma, as modelagens no ensino da Física não apenas facilitam a compreensão de conceitos complexos, mas também promovem uma formação mais completa e envolvente para os alunos.

7 TRABALHOS FUTUROS

Uma possível melhoria para este trabalho seria a utilização da ferramenta de Condições do *Modellus* para definir automaticamente as condições iniciais do sistema diretamente na janela Matemática. No presente estudo, as condições iniciais foram inseridas manualmente, o que pode demandar mais tempo e aumentar a possibilidade de erros na configuração da simulação.

Ao implementar essa funcionalidade, o usuário poderia definir parâmetros como deslocamento inicial, velocidade inicial e constantes do sistema diretamente na interface matemática do software, tornando a modelagem mais eficiente e flexível. Isso também facilitaria a realização de múltiplas simulações com diferentes condições iniciais, permitindo análises comparativas mais detalhadas sem a necessidade de ajustes manuais constantes.

Além disso, essa abordagem possibilitaria futuras implementações de simulações mais automatizadas, onde os parâmetros poderiam ser ajustados dinamicamente, promovendo maior precisão e praticidade na análise das vibrações mecânicas. Esse aprimoramento tornaria o uso do *Modellus* ainda mais intuitivo e eficiente para estudos na área de dinâmica e vibrações.

Como uma possível extensão deste trabalho, sugere-se a implementação de uma mola adicional no sistema modelado, permitindo a análise de vibrações em sistemas com múltiplos graus de liberdade. A introdução de uma segunda mola possibilita o estudo de configurações mais complexas, como sistemas acoplados e modos normais de vibração, ampliando a compreensão sobre a dinâmica de sistemas vibratórios.

Essa modificação permitiria investigar a influência da rigidez relativa entre as molas e sua relação com a frequência natural do sistema. Além disso, seria possível explorar o comportamento do sistema sob diferentes condições de amortecimento e excitação externa, tornando a simulação mais próxima de aplicações reais em engenharia.

A implementação no *Modellus* poderia incluir a resolução numérica das equações diferenciais do sistema utilizando métodos adequados, como Runge-Kutta, e a visualização gráfica das oscilações individuais e combinadas das massas. Esse aprimoramento contribuiria para uma análise mais detalhada de sistemas vibratórios, oferecendo uma base sólida para estudos avançados na área de dinâmica estrutural e controle de vibrações.

REFERÊNCIAS

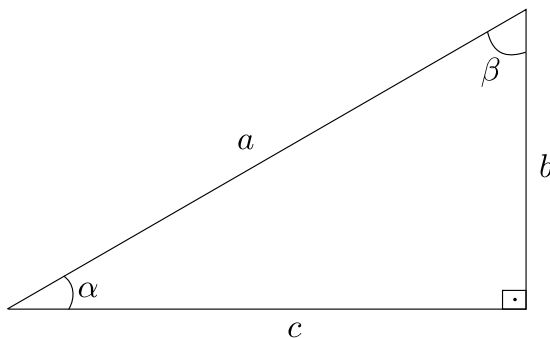
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Guanabara Dois, 2010.
- HEWITT, P. G. **Física Conceitual [recurso eletrônico]**. 2015.
- MACÊDO, J. A. d.; DICKMAN, A. G. **Simulações computacionais como ferramentas auxiliares ao ensino de conceitos básicos de eletricidade**. *SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA*, v. 18, p. 1–12, 2009.
- MACÊDO, J. A. de; DICKMAN, A. G.; ANDRADE, I. S. F. de. **Simulações computacionais como ferramentas para o ensino de conceitos básicos de eletricidade**. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 29, p. 562–613, 2012.
- MACHADO, A. F.; COSTA, L. de M. **A utilização do software MODELLUS no ensino da Física**. *Interagir: pensando a extensão*, n. 14, 2009.
- MARION, J. B.; THORNTON, S. T. **Dinâmica Clássica de Sistemas e Partículas – tradução da 5ª edição norte-americana**. CENGAGE Learning, 2014.
- MONERAT, G. A. et al. **O Formalismo Variacional de Lagrange e Hamilton no ensino de Mecânica Básica na graduação em Engenharia**. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 26, n. 1, p. 10, 2007.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)**. Editora Blucher, v. 394, 2013.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. Editora Blucher, v. 2, 2018.
- PUBLICAÇÃO, B. P. na. **Modelagem Computacional num curso de formação continuada: percepções dos professores**. 2019.
- RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, v. 4, p. 26–27, 2008.
- SILVA, D. de O.; SALES, G. L. **O ENSINO CONCEITUAL DE FÍSICA E A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UMA REVISÃO ATUALIZADA DA PRODUÇÃO ACADÊMICA**. *Educere et Educare*, v. 13, n. 30, p. 10–17648, 2018.
- SIMON, D. P.; SIMON, H. A. **Individual differences in solving physics problems**. Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 1978.
- TEODORO, V. **Modellus: learning physics with mathematical modelling**. Universidade Nova de Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2002.
- VEIT, E. A.; TEODORO, V. D. **Modelagem no ensino: aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. *Revista brasileira de ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 24, n. 2, p. 87–96, 2002.

YAMAMOTO, I.; BARBETA, V. B. **Simulações de experiências como ferramenta de demonstração virtual em aulas de teoria de física.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 23, n. 2, p. 215–225, Jun 2001. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172001000200013>>.

YOUNG, H. D. **Física IV: Sears e Zemansky: Ótica e física moderna**/hugh d. young, roger a. freedman; colaborador a. lewis ford; tradução daniel vieira; revisão técnica adir moysés luiz. – 14. ed. – são paulo: Pearson education do brasil. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

APÊNDICE A – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

Sendo dado o triângulo abaixo.



As seguintes relações são válidas:

1. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a}$
2. $\cos \alpha = \frac{c}{a}$
3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$
4. $\operatorname{csc} \alpha = \frac{a}{b}$
5. $\sec \alpha = \frac{a}{c}$
6. $\cot \alpha = \frac{c}{b}$
7. $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$
8. $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
9. $\sec^2 \alpha - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$
10. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
11. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
12. $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
13. $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
14. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
15. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
16. $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
17. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
18. $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
19. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$
20. $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
21. $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

APÊNDICE B – CÁLCULO DAS CONSTANTES C_1 E C_2 DAS SOLUÇÕES GERAIS PARA O MOVIMENTO FORÇADO

VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO AMORTECIDAS

Aplicando a condição inicial $z(0) = z_0$ na equação geral dada em (4.43), obteremos,

$$z_0 = C_1 - \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \quad \Rightarrow \quad C_1 = z_0 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \quad (\text{B.1})$$

Derivando a equação (4.43) em relação a variável t , obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= -\omega \sin \omega t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \right) + \cos \omega t \left[\frac{d}{dt} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \right) \right] \\ &\quad + \omega \cos \omega t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) + \sin \omega t \left[\frac{d}{dt} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) \right] \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\omega \sin \omega t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \right) - \cancel{\frac{F(t)}{m\omega} \cos \omega t \sin \omega t} + \\ &\quad + \omega \cos \omega t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) + \cancel{\frac{F(t)}{m\omega} \cos \omega t \sin \omega t} \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\omega \sin \omega t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \right) + \omega \cos \omega t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Aplicando a condição inicial $dz(0)/dt = v_0$ na equação dada em (B.2), obteremos,

$$v_0 = \omega \left(C_2 + \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega} + \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \quad (\text{B.3})$$

Aplicando os valores das constantes C_1 e C_2 encontradas na equação geral dada em (4.43), obteremos,

$$\begin{aligned} z(t) &= \cos \omega t \left(z_0 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \right) + \\ &\quad + \sin \omega t \left(\frac{v_0}{\omega} + \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \cos \omega t \left(z_0 - \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' dt' \right) + \sin \omega t \left(\frac{v_0}{\omega} + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega} \cos \omega t' dt' \right) \\
 z(t) &= z_0 \cos \omega t - \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t' \cos \omega t dt' + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin \omega t \cos \omega t' dt' \\
 z(t) &= z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega} \sin [\omega(t - t')] dt' \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS

Movimento forçado subamortecido

Tomando, a condição inicial $z(0) = z_0$ na equação (4.49), obtemos:

$$z_0 = C_1 - \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m\omega} e^{\beta t'} \sin \omega t' dt' \Rightarrow C_1 = z_0 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega} e^{\beta t'} \sin \omega t' dt' \quad (B.5)$$

Derivando a equação (4.49) com relação a t , obtém-se a velocidade do sistema:

$$\begin{aligned}
 \frac{dz(t)}{dt} &= \left(-\beta e^{-\beta t} \cos \omega_0 t - \omega_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \right) \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{-\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) + \\
 &\quad + e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left[\frac{d}{dt} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{-\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) \right] + \\
 &\quad + \left(-\beta e^{-\beta t} \sin \omega_0 t + \omega_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \right) \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{-\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) + \\
 &\quad + e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left[\frac{d}{dt} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{-\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) \right] \\
 \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= \left(-\beta e^{-\beta t} \cos \omega_0 t - \omega_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \right) \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) - \\
 &\quad - e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \frac{F(t)}{m\omega_0} e^{\beta t} \sin \omega_0 t + \left(-\beta e^{-\beta t} \sin \omega_0 t + \omega_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \right) \left(C_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) + e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \frac{F(t)}{m\omega_0} e^{\beta t} \cos \omega_0 t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} = & -\beta e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) - \omega_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(C_1 - \right. \\ & \left. - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) - \beta e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) + \\ & + \omega_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} = & -\beta \left[e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) + e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(C_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) \right] - \omega_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) + \\ & + \omega_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right), \end{aligned}$$

note que a expressão dentro dos colchetes é a própria solução geral $z(t)$ dada em (4.49). Logo, poderemos reescrevê-la, na forma,

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} = & -\beta z(t) - \omega_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) + \\ & + \omega_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Tomando, $dz(0)/dt = v_0$ e $z(t) = z_0$ na (B.6), obtemos:

$$\begin{aligned} v_0 &= -\beta z_0 + \omega_0 \left(C_2 + \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right) \\ \frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} &= C_2 + \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \\ C_2 &= \frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} + \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Substituindo as constantes C_1 e C_2 na equação geral em (4.49), obtemos:

$$z(t) = e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(z_0 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) +$$

$$+ e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} + \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right)$$

$$z(t) = e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \left(z_0 - \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' \right) +$$

$$+ e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt' \right),$$

aplicando a propriedade distributiva e em seguida colocando a exponencial em evidência,

$$z(t) = z_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t - e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t' dt' +$$

$$+ e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) + e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t' dt'$$

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t' dt' - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t' dt' \right]$$

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \int_0^t \frac{F(t')}{m\omega_0} e^{\beta t'} \sin [\omega_0(t - t')] dt' \right] \quad (\text{B.8})$$

Movimento forçado superamortecido

Aplicando a condição inicial do tipo $z(0) = z_0$, obteremos,

$$z_0 = C_1 - \int_{t_0}^0 \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + C_2 + \int_{t_0}^0 \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt'$$

$$z_0 = C_1 + \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + C_2 - \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \quad (\text{B.9})$$

Tomando a derivada da equação (4.57), obteremos,

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} = & -\zeta_1 e^{-\zeta_1 t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) + e^{-\zeta_1 t} \left[\frac{d}{dt} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) \right] \\ & - \zeta_2 e^{-\zeta_2 t} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) + e^{-\zeta_2 t} \left[\frac{d}{dt} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} = & -\zeta_1 e^{-\zeta_1 t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) - \cancel{\frac{e^{-\zeta_1 t} e^{\zeta_1 t} F(t)}{m(\zeta_1 - \zeta_2)}} \\ & - \zeta_2 e^{-\zeta_2 t} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) + \cancel{\frac{e^{-\zeta_2 t} e^{\zeta_2 t} F(t)}{m(\zeta_1 - \zeta_2)}} \end{aligned}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\zeta_1 e^{-\zeta_1 t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) - \zeta_2 e^{-\zeta_2 t} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right)$$

Aplicando a condição inicial do tipo $dz/dt(0) = v_0$, obteremos,

$$\begin{aligned} v_0 &= -\zeta_1 \left(C_1 - \int_{t_0}^0 \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) - \zeta_2 \left(C_2 + \int_{t_0}^0 \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) \\ v_0 &= -\zeta_1 C_1 - \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' - \zeta_2 C_2 + \zeta_2 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Com os resultados encontrado nas equações (B.9) e (B.10), montaremos um sistema de equações para encontrar os valores das constantes C_1 e C_2 , teremos,

$$\begin{cases} z_0 = C_1 + \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + C_2 - \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \\ v_0 = -\zeta_1 C_1 - \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' - \zeta_2 C_2 + \zeta_2 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Multiplicando a primeira equação do sistema em (B.11) por ζ_1 , obteremos,

$$\begin{cases} \zeta_1 z_0 = \zeta_1 C_1 + \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + \zeta_1 C_2 - \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \\ v_0 = -\zeta_1 C_1 - \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' - \zeta_2 C_2 + \zeta_2 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Somando as duas equações do sistema em (B.12), obtemos,

$$\begin{aligned} \zeta_1 z_0 + v_0 = & \cancel{\zeta_1 C_1} + \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + \zeta_1 C_2 - \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' - \\ & - \cancel{\zeta_1 C_1} - \cancel{\zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt'} - \zeta_2 C_2 + \zeta_2 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 z_0 + v_0 &= \zeta_1 C_2 - \zeta_1 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' - \zeta_2 C_2 + \zeta_2 \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \\ C_2(\zeta_1 - \zeta_2) &= \zeta_1 z_0 + v_0 + (\zeta_1 - \zeta_2) \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \\ C_2 &= \frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Substituindo o valor da constante C_2 na primeira equação do sistema em (B.11), obtemos,

$$\begin{aligned} z_0 &= C_1 + \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + C_2 - \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \\ z_0 &= C_1 + \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + \frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \cancel{\int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt'} - \cancel{\int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt'} \\ C_1 &= \frac{-\zeta_2 z_0 - v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} - \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Substituindo os valores das constantes C_1 e C_2 na equação geral do movimento superamortecido dado em (4.57), obteremos,

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-\zeta_1 t} \left(\frac{-\zeta_2 z_0 - v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} - \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' - \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) + \\ &\quad + e^{-\zeta_2 t} \left(\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^{t_0} \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' + \int_{t_0}^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) \\ z(t) &= e^{-\zeta_2 t} \left(\frac{\zeta_1 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^t \frac{e^{\zeta_2 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) - e^{-\zeta_1 t} \left(\frac{\zeta_2 z_0 + v_0}{\zeta_1 - \zeta_2} + \int_0^t \frac{e^{\zeta_1 t'} F(t')}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} dt' \right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Movimento forçado criticamente amortecido

Tomando, a condição inicial $z(0) = z_0$ na equação (4.66), obtemos:

$$\begin{aligned} z_0 &= C_1 - \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \\ C_1 &= z_0 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Derivando em relação a t , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= -\beta e^{-\beta t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \right) + e^{-\beta t} \left[\frac{d}{dt} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \right) \right] + \\ &+ \left(e^{-\beta t} - t\beta e^{-\beta t} \right) \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) + t e^{-\beta t} \left[\frac{d}{dt} \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) \right] \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\beta e^{-\beta t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\frac{\gamma}{2} t'} dt' \right) - \cancel{\frac{F(t)}{m} t e^{\beta t} e^{-\beta t}} + \\ &+ \left(e^{-\beta t} - t\beta e^{-\beta t} \right) \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) + \cancel{\frac{F(t)}{m} t e^{\beta t} e^{-\beta t}} \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\beta e^{-\beta t} \left(C_1 - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \right) + \left(e^{-\beta t} - t\beta e^{-\beta t} \right) \left(C_2 + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Tomando, $dz(0)/dt = v_0$ na (B.18), obtemos:

$$\begin{aligned} v_0 &= -\beta \left(C_1 - \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \right) + C_2 + \int_{t_0}^0 \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \\ v_0 &= -\beta \left(z_0 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' + \cancel{\int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt'} \right) + C_2 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \\ v_0 &= -\beta z_0 + C_2 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \Rightarrow C_2 = v_0 + \beta z_0 + \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Substituindo as constantes C_1 e C_2 na equação geral (4.66), obtemos,

$$\begin{aligned}
 z(t) = e^{-\beta t} & \left(z_0 - \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' - \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' \right) + \\
 & + t e^{-\beta t} \left(v_0 + \beta z_0 + \int_0^{t_0} \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' + \int_{t_0}^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) \\
 z(t) = e^{-\beta t} & \left[z_0 - \int_0^t \frac{F(t')}{m} t' e^{\beta t'} dt' + t \left(v_0 + \beta z_0 + \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{\beta t'} dt' \right) \right] \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

APÊNDICE C – CÁLCULO DAS INTEGRAIS QUE APARECEM NAS VIBRAÇÕES FORÇADAS

VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO AMORTECIDAS

Aplicação de uma força constante no movimento forçado não amortecido

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \sin(\omega t - \omega t') dt' &= \int_0^t \sin \omega t \cos \omega t' - \sin \omega t' \cos \omega t dt' \\
 &= \sin \omega t \int_0^t \cos \omega t' dt' - \cos \omega t \int_0^t \sin \omega t' dt' \\
 &= \sin \omega t \left(\frac{\sin \omega t'}{\omega} \Big|_0^t \right) + \cos \omega t \left(\frac{\cos \omega t'}{\omega} \Big|_0^t \right) \\
 &= \frac{\sin^2 \omega t}{\omega} + \frac{\cos^2 \omega t - \cos \omega t}{\omega} \\
 &= \frac{1 - \cos \omega t}{\omega}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Dessa forma, a equação em (4.44) para uma força constante fica,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) \tag{C.2}$$

Aplicação de uma força periódica no movimento forçado não amortecido

Calculando a integral I dado em (4.46),

$$I = \int_0^t \cos \varphi t' (\sin \omega t \cos \omega t' - \sin \omega t' \cos \omega t) dt' \tag{C.3}$$

Calculando a Integral (I), obteremos,

$$\begin{aligned}
 I &= \sin \omega t \int_0^t \cos \varphi t' \cos \omega t' dt' - \cos \omega t \int_0^t \cos \varphi t' \sin \omega t' dt' \\
 I &= \frac{\sin \omega t}{2} \left[\int_0^t (\cos [(\varphi - \omega)t'] + \cos [(\varphi + \omega)t']) dt' \right] - \frac{\cos \omega t}{2} \left[\int_0^t (\sin [(\varphi - \omega)t'] + \right. \\
 &\quad \left. + \sin [(\varphi + \omega)t']) dt' \right]
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral I supondo que $\varphi \neq \omega$, obteremos,

$$I = \frac{\sin \omega t}{2} \left[\frac{\sin [(\varphi - \omega)t]}{(\varphi - \omega)} + \frac{\sin [(\varphi + \omega)t]}{(\varphi + \omega)} \right] + \frac{\cos \omega t}{2} \left[\frac{\cos [(\varphi - \omega)t]}{(\varphi - \omega)} + \frac{\cos [(\varphi + \omega)t]}{(\varphi + \omega)} - \frac{1}{(\varphi - \omega)} - \frac{1}{(\varphi + \omega)} \right]$$

$$I = \frac{\sin \omega t \sin [(\varphi - \omega)t] + \cos \omega t \cos [(\varphi - \omega)t] - \cos \omega t}{2(\varphi - \omega)} + \frac{\sin \omega t \sin [(\varphi + \omega)t] + \cos \omega t \cos [(\varphi + \omega)t] - \cos \omega t}{2(\varphi + \omega)}$$

Substituindo o valor encontrado para integral I na equação (4.46), obteremos,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega} \left[\frac{\sin \omega t \sin [(\varphi - \omega)t] + \cos \omega t \cos [(\varphi - \omega)t] - \cos \omega t}{2(\varphi - \omega)} + \frac{\sin \omega t \sin [(\varphi + \omega)t] + \cos \omega t \cos [(\varphi + \omega)t] - \cos \omega t}{2(\varphi + \omega)} \right] \quad (\text{C.4})$$

Agora, supondo que $\varphi = \omega$, a integral I em (4.46) fica,

$$I = \sin \omega t \int_0^t \cos^2 \omega t' dt' - \cos \omega t \int_0^t \cos \omega t' \sin \omega t' dt',$$

tomando as substituições trigonométricas 18 e 23 dadas no apêndice A. A integral I fica,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sin \omega t}{2} \int_0^t (1 + \cos 2\omega t') dt' - \frac{\cos \omega t}{2} \int_0^t (\sin 2\omega t') dt' \\ I &= \frac{\sin \omega t}{2} \left(t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) - \frac{\cos \omega t}{2} \left(\frac{\cos 2\omega t - 1}{2\omega} \right) \\ I &= \frac{\sin \omega t (2\omega t + \sin 2\omega t) - \cos \omega t (\cos 2\omega t - 1)}{4\omega} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Substituindo o valor encontrado para integral I dado em (C.5) na equação (4.46), obtemos,

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega} \left[\frac{\sin \omega t (2\omega t + \sin 2\omega t) - \cos \omega t (\cos 2\omega t - 1)}{4\omega} \right] \quad (\text{C.6})$$

VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS

Movimento forçado subamortecido

Aplicação de uma força constante no movimento forçado subamortecido

Calculando a integral em 4.51 temos,

$$\int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' \quad (C.7)$$

Calculando a integral na equação acima, utilizando o método de integração por partes,

$$\begin{aligned} u = \sin[\omega_0(t - t')] &\Rightarrow du = -\omega_0 \cos[\omega_0(t - t')] dt' \\ dV = e^{\beta t'} dt' &\Rightarrow V = \frac{e^{\beta t'}}{\beta} \end{aligned}$$

Montando a integral e aplicando os limites de integração, obteremos,

$$\int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' = -\frac{\sin \omega_0 t}{\beta} + \frac{\omega_0}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} \cos[\omega_0(t - t')] dt'$$

Integrando novamente por partes, teremos,

$$\begin{aligned} u' = \cos[\omega_0(t - t')] &\Rightarrow du' = \omega_0 \sin[\omega_0(t - t')] dt' \\ dV = e^{\beta t'} dt' &\Rightarrow V = \frac{e^{\beta t}}{\beta} \end{aligned}$$

Montando a integral e aplicando os limites de integração, obteremos,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' &= -\frac{\sin \omega_0 t}{\beta} + \frac{\omega_0}{\beta} \left[\frac{e^{\beta t} - \cos \omega_0 t}{\beta} - \frac{\omega_0}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' \right] \\ \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' &= -\frac{\sin \omega_0 t}{\beta} + \frac{\omega_0(e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2} - \frac{\omega_0^2}{\beta^2} \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' \end{aligned}$$

Organizando a integral, temos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta^2 + \omega_0^2}{\beta^2} \right) \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' &= \frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0(e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2} \\ \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t - t')] dt' &= \frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0(e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \quad (C.8) \end{aligned}$$

Substituindo o resultado encontrado em (C.8) na equação geral dada em (4.51), obtemos:

$$z(t) = e^{-\beta t} \left[z_0 \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_0 + \beta z_0}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m \omega_0} \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0(e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) \right] \quad (C.9)$$

Aplicação de uma força periódica no movimento forçado subamortecido

Calculando a integral em (4.53),

$$\int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] \cos \varphi t' dt' \quad (\text{C.10})$$

Para calcular a integral acima, usaremos a integração por partes, teremos,

$$\begin{aligned} u = \cos \varphi t' &\Rightarrow du = -\varphi \sin \varphi t' dt' \\ dV = e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] dt' &\Rightarrow V = \int e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] dt' \end{aligned}$$

A integral fica,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] \cos \varphi t' dt' &= \left[\cos \varphi t' \left(\int e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] dt' \right) \right]_0^t + \\ &+ \varphi \int_0^t \sin \varphi t' \left(\int e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] dt' \right) dt', \end{aligned}$$

substituindo o valor da integral dentro dos parenteses da equação acima, que já foi calculado na equação (C.8) e aplicando os limites de integração, a integral fica,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] \cos \varphi t' dt' &= \cos \varphi t \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) + \\ &+ \varphi \int_0^t \sin \varphi t' \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t' + \omega_0 (e^{\beta t'} - \cos \omega_0 t')}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) dt' \end{aligned}$$

Reorganizando a integral na segunda parcela, teremos,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\beta t'} \sin[\omega_0(t-t')] \cos \varphi t' dt' &= \cos \varphi t \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) + \\ &+ \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} \left[-\beta \underbrace{\int_0^t \sin \varphi t' \sin \omega_0 t' dt'}_{(*)} + \omega_0 \left(\underbrace{\int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt'}_{(**)} - \underbrace{\int_0^t \sin \varphi t' \cos \omega_0 t' dt'}_{(***)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Calculando a integral $(\star)$ supondo que $\varphi \neq \omega_0$, obteremos,

$$\begin{aligned}\star &= \int_0^t \sin \varphi t' \sin \omega_0 t' dt' \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos [(\varphi - \omega_0)t'] - \cos [(\varphi + \omega_0)t'] dt' \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin [(\varphi - \omega_0)t']}{\varphi - \omega_0} - \frac{\sin [(\varphi + \omega_0)t']}{\varphi + \omega_0} \right] \Big|_0^t\end{aligned}$$

Aplicando os limites de integração, obteremos,

$$\begin{aligned}\star &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin [(\varphi - \omega_0)t]}{\varphi - \omega_0} - \frac{\sin [(\varphi + \omega_0)t]}{\varphi + \omega_0} \right] \\ &= \frac{(\varphi + \omega_0) \sin [(\varphi - \omega_0)t] - (\varphi - \omega_0) \sin [(\varphi + \omega_0)t]}{2(\varphi - \omega_0)(\varphi + \omega_0)} \\ &= \frac{(\varphi + \omega_0)(\sin \varphi t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t \cos \varphi t) - [(\varphi - \omega_0)(\sin \varphi t \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t \cos \varphi t)]}{2(\varphi - \omega_0)(\varphi + \omega_0)}\end{aligned}$$

Aplicando a distributiva entre os termos, obteremos,

$$\begin{aligned}\star &= \frac{\cancel{\varphi \sin \varphi t \cos \omega_0 t} - \varphi \sin \omega_0 t \cos \varphi t + \omega_0 \sin \varphi t \cos \omega_0 t - \cancel{\omega_0 \sin \omega_0 t \cos \varphi t}}{2(\varphi^2 - \omega_0^2)} + \\ &+ \frac{\cancel{-\varphi \sin \varphi t \cos \omega_0 t} - \varphi \sin \omega_0 t \cos \varphi t + \omega_0 \sin \varphi t \cos \omega_0 t + \cancel{\omega_0 \sin \omega_0 t \cos \varphi t}}{2(\varphi^2 - \omega_0^2)} \\ \star &= \frac{\omega_0 \sin \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi \sin \omega_0 t \cos \varphi t}{\varphi^2 - \omega_0^2}\end{aligned}\tag{C.12}$$

Calculando a integral $(\star\star)$ pelo método de integração por partes, obteremos,

$$\begin{aligned}u &= \sin \varphi t' & \Rightarrow & du = \varphi \cos \varphi t' dt' \\ dV &= e^{\beta t'} dt' & \Rightarrow & V = \frac{e^{\beta t'}}{\beta}\end{aligned}$$

Montando a integral e aplicamos os limites de integração de 0 a t , obteremos,

$$\int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt' = \frac{e^{\beta t} \sin \varphi t}{\beta} - \frac{\varphi}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt'$$

Novamente calculando a integral por partes, teremos,

$$\begin{aligned}u &= \cos \varphi t' & \Rightarrow & du = -\varphi \sin \varphi t' dt' \\ dV &= e^{\beta t'} dt' & \Rightarrow & V = \frac{e^{\beta t'}}{\beta}\end{aligned}$$

Substituindo na integral acima e aplicando o limites de integração, obteremos,

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt' &= \frac{e^{\beta t} \sin \varphi t}{\beta} - \frac{\varphi}{\beta} \left[\frac{e^{\beta t} \cos \varphi t - 1}{\beta} + \frac{\varphi}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt' \right] \\
 \int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt' &= \frac{e^{\beta t} \sin \varphi t}{\beta} - \frac{\varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\beta^2} - \frac{\varphi^2}{\beta^2} \int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt' \\
 \left(\frac{\beta^2 + \omega_0^2}{\cancel{\beta^2}} \right) \int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt' &= \frac{\beta e^{\beta t} \sin \varphi t - \varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\cancel{\beta^2}} \\
 \int_0^t e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt' &= \frac{\beta e^{\beta t} \sin \varphi t - \varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\beta^2 + \omega_0^2} \quad (C.13)
 \end{aligned}$$

Calculando a integral (***), obteremos,

$$\begin{aligned}
 *** &= \int_0^t \sin \varphi t' \cos \omega_0 t' dt' \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin [(\varphi - \omega_0)t'] + \sin [(\varphi + \omega_0)t'] dt' \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos [(\varphi - \omega_0)t']}{\varphi - \omega_0} + \frac{\cos [(\varphi + \omega_0)t']}{\varphi + \omega_0} \right]_0^t \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos [(\varphi - \omega_0)t] - 1}{\varphi - \omega_0} + \frac{\cos [(\varphi + \omega_0)t] - 1}{\varphi + \omega_0} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(\varphi + \omega_0)(\cos [(\varphi - \omega_0)t] - 1) + (\varphi - \omega_0)(\cos [(\varphi + \omega_0)t] - 1)}{\varphi^2 - \omega_0^2} \right] \quad (C.14)
 \end{aligned}$$

Aplicando a distributiva e as propriedades trigonométricas (15) e (17) no Apêndice A, obteremos,

$$*** = \frac{\omega_0 \sin \varphi t \sin \omega_0 t - \varphi \cos \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi}{\varphi^2 - \omega_0^2}$$

Substituindo os valores encontrados na equação (C.11), obteremos,

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{\beta t'} \sin [\omega_0(t - t')] \cos \varphi t' dt' &= \cos \varphi t \left(\frac{-\beta \sin \omega_0 t + \omega_0 (e^{\beta t} - \cos \omega_0 t)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) + \\
 + \frac{\varphi}{\beta^2 + \omega_0^2} &\left[-\beta \left(\frac{\omega_0 \sin \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi \sin \omega_0 t \cos \varphi t}{\varphi^2 - \omega_0^2} \right) + \omega_0 \left(\frac{\beta e^{\beta t} \sin \varphi t - \varphi (e^{\beta t} \cos \varphi t - 1)}{\beta^2 + \omega_0^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\omega_0 \sin \varphi t \sin \omega_0 t - \varphi \cos \varphi t \cos \omega_0 t - \varphi}{\varphi^2 - \omega_0^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Agora, supondo que $\varphi = \omega_0$, para a integral (*), teremos,

$$\star = \int_0^t \sin^2 \omega_0 t' dt' = \frac{2\omega_0 t - \sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \quad (\text{C.15})$$

Para integral (***) obteremos,

$$\begin{aligned} *** &= \int_0^t \sin \omega_0 t' \cos \omega_0 t' dt' \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\omega_0 t') dt' \\ &= \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \end{aligned}$$

Movimento forçado superamortecido

Aplicação de uma força constante no movimento forçado superamortecido

Chamando de I as integrais da equação (4.58). O cálculo das integrais resultam em,

$$\begin{aligned} I &= e^{-\zeta_2 t} \int_0^t \frac{F_0 e^{\zeta_2 t'} dt'}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} - e^{-\zeta_1 t} \int_0^t \frac{F_0 e^{\zeta_1 t'} dt'}{m(\zeta_1 - \zeta_2)} \\ I &= e^{-\zeta_2 t} \left[\frac{F_0 (e^{\zeta_2 t} - 1)}{m\zeta_2(\zeta_1 - \zeta_2)} \right] - e^{-\zeta_1 t} \left[\frac{F_0 (e^{\zeta_1 t} - 1)}{m\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_2)} \right] \\ I &= \frac{F_0 (1 - e^{-\zeta_2 t})}{m\zeta_2(\zeta_1 - \zeta_2)} - \frac{F_0 (1 - e^{-\zeta_1 t})}{m\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_2)} \\ I &= \frac{F_0 [\zeta_1 (1 - e^{-\zeta_2 t}) - \zeta_2 (1 - e^{-\zeta_1 t})]}{m\zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1 - \zeta_2)} \quad (\text{C.16}) \end{aligned}$$

Aplicação de uma força periódica no movimento forçado superamortecido

Calculando a integral em (4.61) por partes, teremos,

$$\begin{aligned} u = \cos \varphi t' &\Rightarrow du = -\varphi \sin \varphi t' dt' \\ dV = e^{\zeta_2 t'} dt' &\Rightarrow V = \frac{e^{\zeta_2 t'}}{\zeta_2} \end{aligned}$$

Montando a integral, obtemos,

$$\int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' = \frac{\cos \varphi t e^{\zeta_2 t} - 1}{\zeta_2} + \frac{\varphi}{\zeta_2} \int_0^t \sin \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt'$$

Integrando novamente por partes, teremos,

$$\begin{aligned} u = \sin \varphi t' & \Rightarrow du = \varphi \cos \varphi t' dt' \\ dV = e^{\zeta_2 t'} dt' & \Rightarrow V = \frac{e^{\zeta_2 t'}}{\zeta_2} \end{aligned}$$

Dessa forma, a integral fica,

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' &= \frac{\cos \varphi t e^{\zeta_2 t} - 1}{\zeta_2} + \frac{\varphi}{\zeta_2} \left[\frac{\sin \varphi t e^{\zeta_2 t}}{\zeta_2} - \frac{\varphi}{\zeta_2} \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' \right] \\ \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' &= \frac{\cos \varphi t e^{\zeta_2 t} - 1}{\zeta_2} + \frac{\varphi \sin \varphi t e^{\zeta_2 t}}{\zeta_2^2} - \frac{\varphi^2}{\zeta_2^2} \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' \\ \left(\frac{\varphi^2 + \zeta_2^2}{\cancel{\zeta_2^2}} \right) \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' &= \frac{\zeta_2 \cos \varphi t e^{\zeta_2 t} + \varphi \sin \varphi t e^{\zeta_2 t} - \zeta_2}{\cancel{\zeta_2^2}} \\ \int_0^t \cos \varphi t' e^{\zeta_2 t'} dt' &= \frac{\zeta_2 \cos \varphi t e^{\zeta_2 t} + \varphi \sin \varphi t e^{\zeta_2 t} - \zeta_2}{\varphi^2 + \zeta_2^2} \end{aligned} \quad (C.17)$$

Movimento forçado criticamente amortecido

Aplicação de uma força constante no movimento forçado criticamente amortecido

Calculado a primeira integral da equação (4.68) pelo método da integração por partes,

$$\begin{aligned} u = t' & \Rightarrow du = dt' \\ dV = e^{\beta t'} dt' & \Rightarrow V = \frac{e^{\beta t'}}{\beta} \end{aligned}$$

Montado a integral, obtemos,

$$\int_0^t t' e^{\beta t'} dt' = \frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{1}{\beta} \int_0^t e^{\beta t'} dt'$$

Calculando a segunda integral, obteremos,

$$\int_0^t t' e^{\beta t'} dt' = \frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{1}{\beta} \left(\frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} \right) \quad (C.18)$$

Aplicação de uma força periódica no movimento forçado criticamente amortecido

Calculando a integral (□) em (4.70) pelo método de integração por partes,

$$\begin{aligned} u = \cos \varphi t' & \Rightarrow du = -\varphi \sin \varphi t' dt' \\ dV = t' e^{\beta t'} dt' & \Rightarrow V = \int t' e^{\beta t'} dt' \end{aligned}$$

Podemos reescrever a equação $z(t)$, na forma,

$$\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' = \left[\cos \varphi t' \left(\int t' e^{\beta t'} dt' \right) \right]_0^t + \varphi \left[\int_0^t \sin \varphi t' \left(\int t' e^{\beta t'} dt' \right) dt' \right] \quad (\text{C.19})$$

Note que as integrais dentro dos parenteses na equação (C.19) já foram calculada anteriormente na equação (C.18). Logo, podemos reescreve a ($\square$) já aplicando os limites de integração resultando em,

$$\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' = \cos \varphi t \left(\frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) + \varphi \left[\int_0^t \sin \varphi t' \left(\frac{t' e^{\beta t'}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t'} - 1)}{\beta^2} \right) dt' \right]$$

Reescrevendo a equação acima, obteremos,

$$\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' = \cos \varphi t \left(\frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) + \frac{\varphi}{\beta} \left[\underbrace{\int_0^t t' e^{\beta t'} \sin \varphi t' dt'}_{(I)} + \frac{1}{\beta} \left(\underbrace{\int_0^t \sin \varphi t' dt'}_{(II)} - \underbrace{\int_0^t \sin \varphi t' e^{\beta t'} dt'}_{(III)} \right) \right] \quad (\text{C.20})$$

Resolveremos a integral (I) pelo método de integração por partes,

$$\begin{aligned} u = \sin \varphi t' & \Rightarrow du = \varphi \cos \varphi t' dt' \\ dV = t' e^{\beta t'} dt' & \Rightarrow V = \int t' e^{\beta t'} dt' \end{aligned}$$

Montando a integral (I),

$$I = \left[\sin \varphi t' \left(\int t' e^{\beta t'} dt' \right) \right]_0^t - \varphi \left[\int_0^t \cos \varphi t' \left(\int t' e^{\beta t'} dt' \right) dt' \right]$$

Substituindo os valores já calculados da integral em (C.18) e aplicando os limites de integração, obteremos,

$$I = \sin \varphi t \left(\frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) - \varphi \left[\int_0^t \cos \varphi t' \left(\frac{t' e^{\beta t'}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t'} - 1)}{\beta^2} \right) dt' \right]$$

Reescrevendo a equação acima, obteremos,

$$I = \operatorname{sen} \varphi t \left(\frac{te^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) - \frac{\varphi}{\beta} \left[\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' + \frac{1}{\beta} \left(\underbrace{\int_0^t \cos \varphi t' dt'}_{(*)} - \underbrace{\int_0^t \cos \varphi t' e^{\beta t'} dt'}_{(**)} \right) \right]$$

Resolvendo as integral imediata (*) e substituindo o valor da integral (**) já calculada em (C.17), obteremos,

$$I = \operatorname{sen} \varphi t \left(\frac{te^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) - \frac{\varphi}{\beta} \left[\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi t}{\varphi} - \left(\frac{\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \operatorname{sen} \varphi t e^{\beta t} - \beta}{\varphi^2 + \beta^2} \right) \right) \right] \quad (\text{C.21})$$

Resolveremos a integral (III) pelo método de integração por partes,

$$\begin{aligned} u = \operatorname{sen} \varphi t' & \Rightarrow du = \varphi \cos \varphi t' dt' \\ dV = e^{\beta t'} dt' & \Rightarrow V = \frac{e^{\beta t'}}{\beta} \end{aligned}$$

A integral (III) fica como,

$$\int_0^t \operatorname{sen} \varphi t' e^{\beta t'} dt' = \frac{\operatorname{sen} \varphi t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{\varphi}{\beta} \int_0^t \cos \varphi t' e^{\beta t'} dt'$$

Novamente, calculando pelo método da integração por partes, obteremos,

$$\begin{aligned} u = \cos \varphi t' & \Rightarrow du = -\varphi \operatorname{sen} \varphi t' dt' \\ dV = e^{\beta t'} dt' & \Rightarrow V = \frac{e^{\beta t'}}{\beta} \end{aligned}$$

Montando a integral,

$$\begin{aligned} \int_0^t \operatorname{sen} \varphi t' e^{\beta t'} dt' &= \frac{\operatorname{sen} \varphi t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{\varphi}{\beta} \left[\frac{\cos \varphi t e^{\beta t} - 1}{\beta} + \frac{\varphi}{\beta} \left(\int_0^t \operatorname{sen} \varphi t' e^{\beta t'} dt' \right) \right] \\ \int_0^t \operatorname{sen} \varphi t' e^{\beta t'} dt' &= \frac{\operatorname{sen} \varphi t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{\varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi}{\beta^2} - \frac{\varphi^2}{\beta^2} \int_0^t \operatorname{sen} \varphi t' e^{\beta t'} dt' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\beta^2 + \varphi^2}{\cancel{\beta^2}} \right) \int_0^t \text{sen } \varphi t' e^{\beta t'} dt' &= \frac{\beta \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi}{\cancel{\beta^2}} \\
\int_0^t \text{sen } \varphi t' e^{\beta t'} dt' &= \frac{\beta \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi}{\beta^2 + \varphi^2} \quad (\text{C.22})
\end{aligned}$$

Substituindo os valores calculado das integrais (I) em (C.21) e (III) em (C.22) na integral (C.20) e resolvendo a integral imediata (II). Desta forma, obteremos,

$$\begin{aligned}
\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' &= \cos \varphi t \left(\frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) + \frac{\varphi}{\beta} \left[\text{sen } \varphi t \left(\frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varphi}{\beta} \left[\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\text{sen } \varphi t}{\varphi} - \left(\frac{\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \beta}{\beta^2 + \varphi^2} \right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - \cos \varphi t}{\varphi} - \left(\frac{\beta \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi}{\beta^2 + \varphi^2} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Aplicando a distributiva e isolando a integral no primeiro membro da igualdade, obtemos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\beta^2 + \varphi^2}{\beta^2} \right) \int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' &= \cos \varphi t \left(\frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) + \frac{\varphi \text{sen } \varphi t}{\beta} \left(\frac{t e^{\beta t}}{\beta} - \frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta^2} \right) \\
&\quad + \frac{1 - \varphi \text{sen } \varphi t - \cos \varphi t}{\beta^3} + \frac{\varphi^2}{\beta^3} \left(\frac{\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \beta}{\beta^2 + \varphi^2} \right) - \\
&\quad - \frac{\varphi^2}{\beta^3} \left(\frac{\beta \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi}{\beta^2 + \varphi^2} \right)
\end{aligned}$$

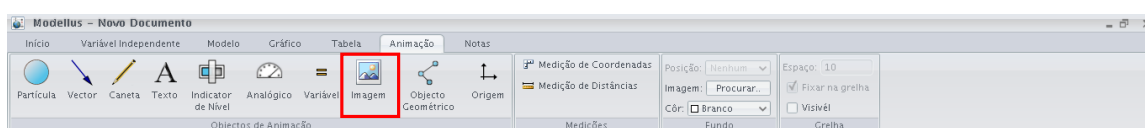
Multiplicando toda equação por $\frac{\beta^2}{\beta^2 + \varphi^2}$ e reorganizando alguns termos, obteremos,

$$\begin{aligned}
\int_0^t t' e^{\beta t'} \cos \varphi t' dt' &= \frac{\cos \varphi t (\beta t e^{\beta t} - e^{\beta t}) + \varphi \text{sen } \varphi t (t e^{\beta t} - \beta e^{\beta t})}{\beta^2 + \varphi^2} + \\
&\quad + \frac{\beta (1 - \varphi \text{sen } \varphi t - \cos \varphi t) + \beta \varphi^2 (\beta \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \beta)}{\beta^2 + \varphi^2} - \\
&\quad - \frac{\beta \varphi^2 (\beta \text{sen } \varphi t e^{\beta t} - \varphi \cos \varphi t e^{\beta t} + \varphi)}{\beta^2 + \varphi^2} \quad (\text{C.23})
\end{aligned}$$

APÊNDICE D – ANIMAÇÃO DO MOVIMENTO VIBRATÓRIO

Faça o download diretamente por meio deste link: <<https://drive.google.com/file/d/1p7Yb8Aggduk11N0L6HU5Z16A1FBUIQ99/view?usp=sharing>>, após o download do arquivo de imagens, extraia os arquivos de imagens e organize todas as imagens em uma pasta de fácil lembrança, com o nome ‘Imagens-Modellus’, por exemplo, em um local acessível.

Figura 90 – Guia animação, indicação do botão Imagem para inserção das figuras.

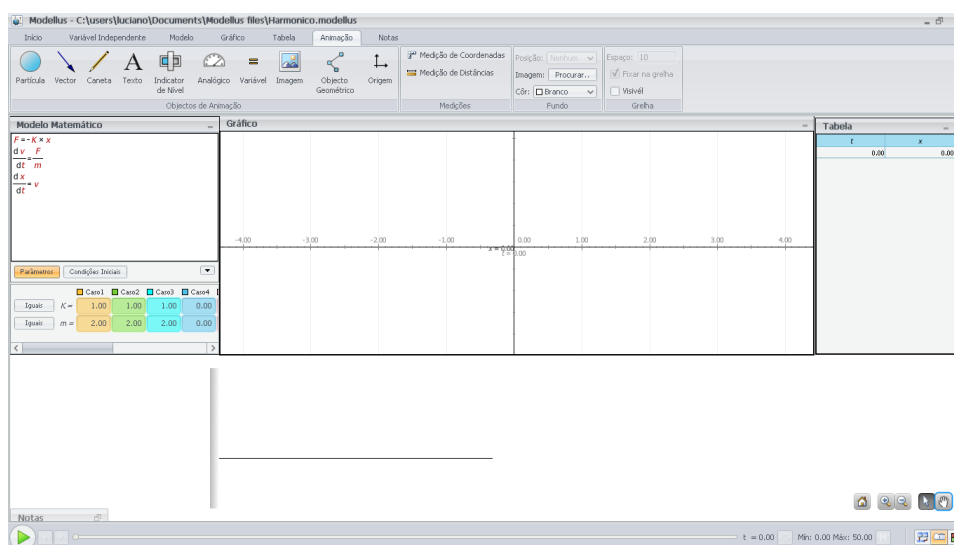


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para começar, o passo inicial consiste em localizar a imagem destinada à guia de **animação**, como destaca a figura 90.

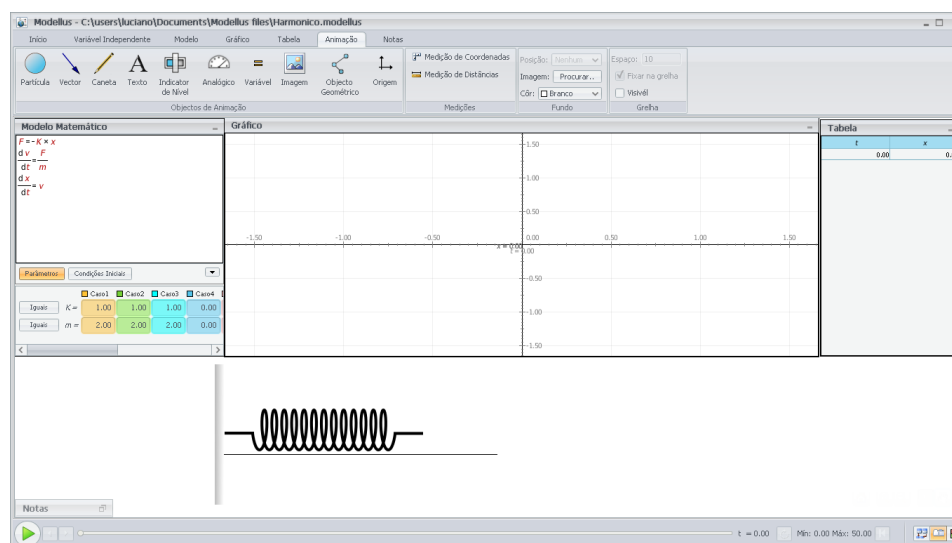
Clique no botão imagem, em seguida clique dentro do espaço em branco na janela de animação, logo após será aberto uma janela de diálogo, localize a imagem *barraVertical.png* selecione-a e cliquem em abrir. Em seguida, faça o mesmo processo e insira o figura *linhaHorizontal.png* e em cada imagem trave a posição da imagem selecionando-as uma por vez e clicando no botão Bloquear Posição. O software tem a capacidade de importar qualquer imagem para essa interface.

Figura 91 – Representação da posição das imagens inseridas na janela de animação.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

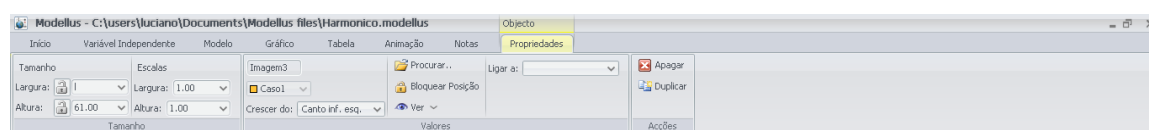
Fazendo o uso do mesmo processo, insira a imagem *molaHorizontal.png* e a posicione como mostra a figura 92 e, em seguida trave a posição da mesma.

Figura 92 – Representação da posição das imagens inseridas na janela de animação.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A imagem que acabamos de incorporar permanece inalterada ao longo do tempo, mantendo-se estática em termos de tamanho e posição. No entanto, para representar adequadamente o oscilador com uma mola, é crucial ajustar dinamicamente o comprimento da imagem, permitindo que ele varie conforme o sistema se move, expandindo e contraindo com a passagem do tempo.

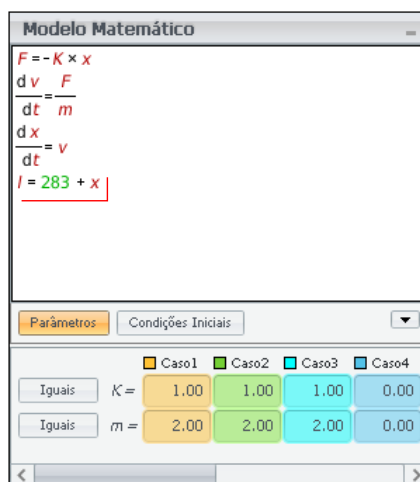
Para alcançar isso, é necessário editar as propriedades da imagem, clicando com o botão esquerdo do mouse sobre ela. Ao abrir a barra de propriedades da imagem, selecione a opção ‘Largura’ ou ‘Altura’ no painel ‘Tamanho’ e associe-a à variável l que controlará essa dimensão, como mostramos na figura 93.

Figura 93 – Janela de propriedades da figura que representa a mola.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Isso resultará no ajuste dinâmico do tamanho da figura de acordo com as variáveis do modelo. Atribua a variável l à dimensão ‘Largura’, utilizando uma escala de 100.00 (onde, por exemplo, quando l é igual a 1, a mola terá 100 pixels de comprimento). Mantendo, o tamanho da altura da mola e sua escala.

Figura 94 – Janela do modo matemático, onde se estabeleceu uma condição para a dinâmica da figura da mola $l = 283 + x$.



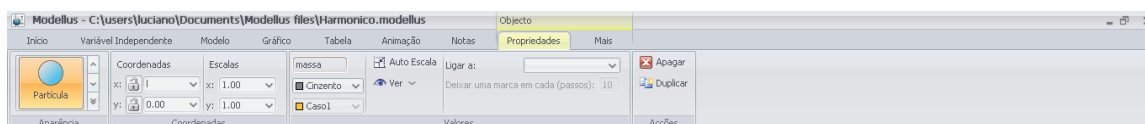
Fonte: Elaborado pelo Autor.

A criação de uma nova variável é essencial para definir o tamanho da mola, assegurando que ela tenha pelo menos um tamanho específico. Para assegurar que a mola tenha um comprimento mínimo superior à sua variação máxima de x , é essencial introduzir uma variável adicional para determinar o tamanho da mola. Assim, podemos estabelecer $l = 283 + x$, conforme ilustrado na Figura 94. Logo, a variável l terá o próprio comprimento da figura mais o deslocamento x na horizontal.

Inicie a simulação e, caso tenha ocorrido conforme o esperado, observe o estiramento e compressão da mola, acompanhando o movimento do oscilador. Se não conseguir visualizar o movimento, ajuste os valores de velocidade no painel de condições iniciais para níveis mais altos nos três cenários.

Para aprimorar a animação, vamos posicionar a partícula de massa m na extremidade da mola. Já estamos familiarizados com esse procedimento; crie um objeto chamado 'Partícula', onde sua posição horizontal será determinada pela variável l .

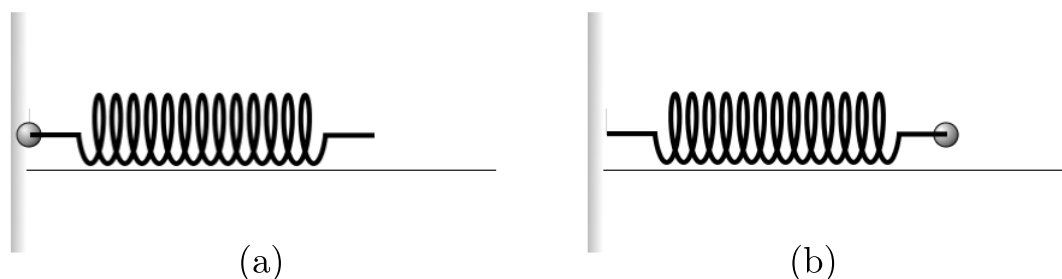
Figura 95 – Configuração da massa m para se movimentar em função da variável l .



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Utilize a mesma escala utilizada na dimensão horizontal da imagem, que é 100.00. Clicando no botão ver, desmarque todas as características (nome, eixos, etc.) e atribua um nome ao objeto, por exemplo, massa. Conforme a figura 95.

Figura 96 – A figura 96 (a) o objeto é posicionado na extremidade da mola como indicado. Após executar a simulação. Na figura 96 (b) o objeto assume a posição l conforme a configuração descrita na figura 95.

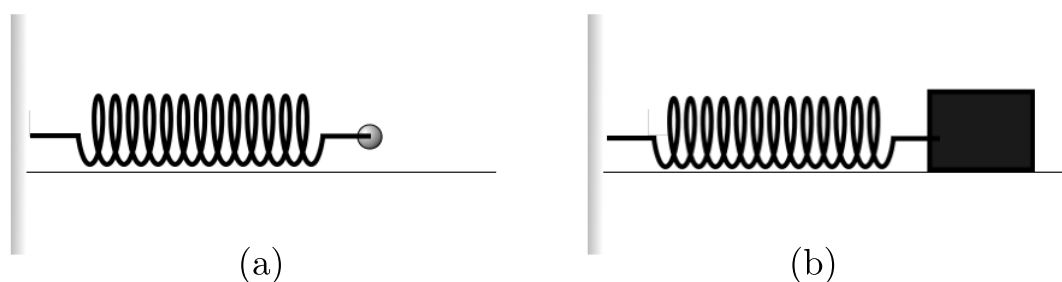


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao executar a simulação, observe que a massa e a mola oscilando harmoniosamente. Utilize o mouse para posicionar a partícula na extremidade da mola, garantindo que pareçam conectadas, conforme ilustrado na Figura 96 (b). Execute novamente a simulação e observe o sistema massa-mola que você construiu oscilando de acordo com as equações do modelo escrito na janela do Modelo Matemático em 94.

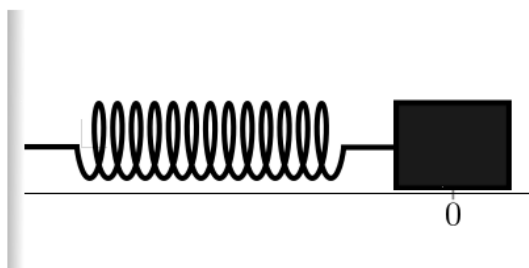
Tomaremos a implementar uma imagem que representará um bloco de massa m . Para isso, selecione a partícula, e na guia Aparência, clique na seta para selecionar uma imagem, após abrir a caixa de diálogo, clique na opção “Escolher imagem do disco...”. Selecione a imagem *blocoMassa.png* na pasta onde foi salva, conforme a figura 97.

Figura 97 – Implementação do bloco na extremidade da mola.



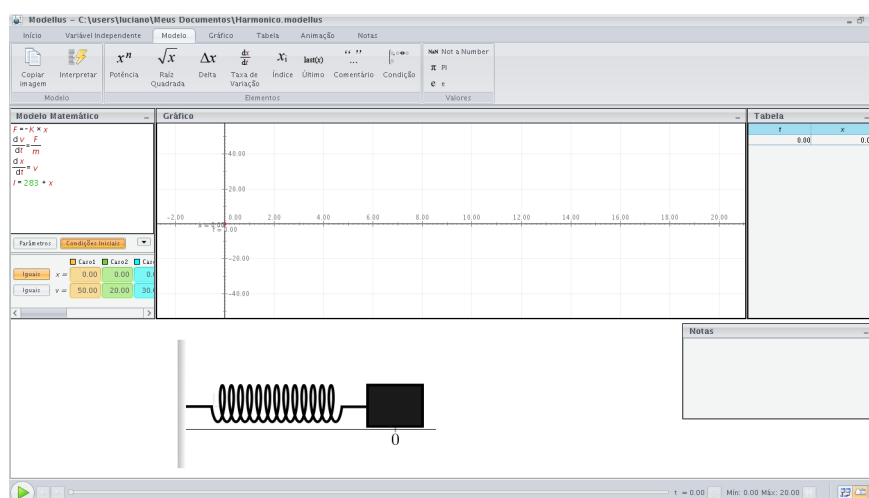
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Agora, será inserido um ponto de origem que, servirá como uma referência para analisarmos a dinâmica do sistema massa-mola. Utilizando os mesmo procedimento anteriores, insira a imagem “origem.png” e posicione-a como mostra a figura 98.

Figura 98 – Posicionamento do esquema final da mola dentro da janela de simulação do *modellus*.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A figura 99, representa o modelo final da simulação do movimento descrito pelo $x(t)$ na seção das vibrações livres não amortecidas.

Figura 99 – Modelo do movimento oscilatório de uma massa m fixada em uma mola de constante k , representando a vibração livres não amortecidas no *Software Modellus*.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A figura 99 será usada como referência para todas as simulações propostas neste trabalho. Ela apresenta a configuração inicial e os parâmetros fundamentais que serão aplicados em cada uma das simulações, garantindo consistência e uniformidade nos experimentos virtuais realizados.