



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS CORRENTE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

TALITA NOGUEIRA ALVES

**ESTUDO COMPARATIVO DOS MODELOS DE MALTHUS E LOGÍSTICO DE
VERHULST NA DINÂMICA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE
CORRENTE-PIAUÍ**

CORRENTE

2019

TALITA NOGUEIRA ALVES

ESTUDO COMPARATIVO DOS MODELOS DE MALTHUS E LOGÍSTICO DE
VERHULST NA DINÂMICA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE
CORRENTE-PIAUÍ

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus Corrente.

Orientador: Prof. Me. Hilquias Santos de Oliveira.

CORRENTE-PI

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Alves, Talita Nogueira

A472e Estudo comparativo dos modelos de Malthus e Lógico de Verhulst na dinâmica do crescimento populacional da cidade de Corrente - Piauí / Talita Nogueira Alves. - 2019.

29 p.: il. p&b.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente Licenciatura em Matemática, 2019.

Orientador : Prof Me. Hilquias Santos de Oliveira.

1. Matematica - estudo e ensino. 2. Modelo Malthus. 3. Logístico de Verhulst. 4. Crescimento populacional - Corrente(PI). 5. Alves,Talita Nogueira. I.Título.

CDD - 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB 3/1251

TALITA NOGUEIRA ALVES

ESTUDO COMPARATIVO DOS MODELOS DE MALTHUS E LOGÍSTICO DE
VERHULST NA DINÂMICA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE
CORRENTE-PIAUÍ

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus Corrente.

Aprovada em: 11/03/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Hilquias dos Santos oliveira (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Flávio de Ligório Silva
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Esp. Renata Resende Ibiapina
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Aos meus pais e toda família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu Senhor Jesus e ao meu Deus por toda força nos momentos que mais precisei. À toda minha família por todo o apoio nessa jornada.

Agradeço também todos os professores que tiveram uma grande contribuição, direta ou indiretamente, para a realização desse trabalho.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível. ”

Charles Chaplin

RESUMO

O presente trabalho surge na perspectiva de comparar modelos de crescimento populacional, Modelo de Malthus e Modelo Logístico de Verhulst, e analisar qual deles mais se aproxima dos dados reais fornecidos pelo IBGE. O procedimento metodológico aplicado nesta pesquisa foi dividido em etapas: de início com a coleta de dados realizada no site do IBGE obtendo as populações da cidade de Corrente-PI; em seguida os cálculos das previsões das populações, no período de 2012 a 2018, de acordo com cada modelo estudado; e por fim a análise dos resultados obtidos. Ao final da pesquisa é possível concluir que o melhor modelo é o Modelo Logístico de Verhulst, pois suas projeções se aproximaram mais dos dados reais.

Palavras-chave: Crescimento populacional. Modelo de Malthus. Modelo Logístico.

ABSTRACT

The present paper emerges from the perspective of comparing models of population growth, Malthus model and logistic model of Verhulst, and to analyze which one most closely approximates the actual data provided by IBGE. The methodological procedure applied in this study was divided into steps: from the beginning with data collection performed on the IBGE website obtaining the populations of the city of Corrente-PI; then the calculations of population forecasts, in the period 2012 to 2018, according to each model studied; and finally the analysis of the results obtained. At the end of the research it is possible to conclude that the best model is the Verhulst logistic model, because its projections were closer to the actual data.

Keywords: Population growth. Malthus model. Logistic model.

Sumário

1 INTRODUÇÃO	9
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	11
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	11
2.2 MODELO DE MALTHUS.....	12
2.3 MODELO LOGÍSTICO.....	14
3 MATERIAIS E MÉTODOS	18
4 RESULTADOS	19
5 CONCLUSÃO	25
REFERÊNCIAS	27

1 INTRODUÇÃO

O uso de modelagem matemática ou apenas modelos matemáticos não se aplica apenas na matemática, mas em diversos campos das ciências. Segundo Biembengut e Hein (2003, p.12) “a modelagem é um meio de interagir a matemática com a realidade”. Já Bassanezi (2013, p. 16) afirma que “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Dessa forma, com o uso da modelagem é possível resolver matematicamente problemas oriundos de outras disciplinas.

Dentre os problemas provenientes de outros campos dos conhecimentos tratados pela modelagem, encontram-se aqueles relacionados à física, química, biomatemática, engenharia, ciência da computação, entre outros. Neste trabalho é destacado o problema relacionado à dinâmica populacional, originado de estudos no campo da demografia.

A pesquisa teve como objetivo analisar dois modelos de crescimento populacional realizando os cálculos necessários para verificar se as populações obtidas pelos modelos se assemelham aos dados oficiais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Os dados utilizados foram os da cidade de Corrente-PI.

Esse estudo da dinâmica populacional é importante não somente para testar os modelos já conhecidos, mas também para questões da sociedade do próprio município, já que a partir dessas previsões é possível planejar estratégias para melhorias na cidade. De acordo com resultados obtidos pelos modelos, os dados são pertinentes para um planejamento futuro da cidade, como saneamento básico, organização do sistema educacional, disponibilidade de alimentos, instalações de água e previsão de demanda de energia elétrica, infraestrutura e equipamentos urbanos para as futuras populações, mercado de trabalho para a população crescente, acesso a saúde, entre outros aspectos.

A pesquisa em si foi norteadas por modelos de crescimento populacional, tendo como objetivo comparar o modelo Malthusiano e modelo Logístico e analisar qual mais se aproxima dos dados fornecidos pelo IBGE.

O modelo conhecido por malthusiano foi criado por Thomas Malthus¹ (1776-1834) estabelecia que a população cresceria em progressão geométrica e a produção de alimentos cresceria em progressão aritmética. Já o modelo Logístico foi formulado por Pierre F. Verhurst² (1804-1849) supõe que uma população tende a crescer até se estabilizar (BASSANEZI, 2013).

No modelo de Malthus, parte-se do pressuposto que o meio ambiente tem pouca ou quase não tem influência no crescimento ou decrescimento da população, enquanto o modelo logístico leva os fatores limitadores, gerados pelo próprio meio ambiente da população, em conta (SODRÉ, 2007).

Ao final desta análise pudemos constatar qual o modelo mais adequado para esse tipo de dinâmica. Existem alguns estudos como, por exemplo, (BERTOLDO, 2017), (BEZERRA, 2016), (SOUSA; SANCHES, 2011) e (DIAS; PESSOA, 2016) que exploram essa temática em lugares específicos, fazendo a mesma comparação entre tais modelos.

Vale ressaltar que outros estudos, como em (SODRÉ, 2007), (SETI *et al.*, 1999) e (LIMA, 2016) concluíram que o modelo logístico é o que mais se aproxima da realidade. Ao final da pesquisa será possível concluir que a análise feita vai de acordo com os estudos previamente realizados por outras pessoas

¹ Thomas Robert Malthus foi um economista britânico. É considerado o pai da demografia por sua teoria para o controle do aumento populacional, conhecida como malthusianismo.

² Pierre François Verhulst foi matemático e doutor na teoria dos números da Universidade de Gante em 1825

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste tópico, apresenta-se uma breve explicação acerca de modelagem matemática e sobre cada modelo estudado, assim como suas demonstrações e/ou soluções com a ajuda das técnicas de resolução de EDO (Equação Diferencial Ordinária).

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática tem o intuito de solucionar problemas do dia a dia relacionando-os com a matemática.

Assim como afirma Bassanezi (2013, p. 24) “a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

Sua aplicação nesse estudo foi voltada para a dinâmica populacional, na qual permite prever as taxas de crescimento, assim como a população estimada em um determinado ano, o que colabora de forma expressiva, principalmente aos governantes, para que possam realizar estratégias para que não falem subsídios necessários à população, no caso de um crescimento excessivo e indesejável.

Sobre o uso da matemática em problemas reais, Scheffer (1999, p.15) declara que é adequado “mostrar a importância da Matemática não apenas como ciência voltada para si mesma, mas como instrumento para a compreensão e possível modificação da realidade “

Contudo, esse trabalho procurou comparar os resultados apresentados no emprego de dois modelos de crescimento populacional: Modelo de Malthus e o Modelo Logístico. Esses foram aplicados na dinâmica de crescimento populacional e foi feita uma análise para saber qual se aproxima do contexto real da cidade.

2.2 MODELO DE MALTHUS

Thomas Robert Malthus (1766-1834) foi um economista e demógrafo inglês, que ficou famoso pela sua teoria, considerada à época pessimista, sobre o crescimento populacional. A Teoria Malthusiana relacionava o crescimento da população com a produção de alimentos. Malthus (1996, p. 246) afirmou “que o poder de crescimento da população é indefinidamente maior do que o poder que tem a terra de produzir meios de subsistência para o homem”, ou seja, a produção de alimentos não acompanharia o crescimento da população.

Pela teoria, a humanidade passaria por diversos problemas para sobreviver. Malthus (1996, p.8) afirmou dizendo que “caso nenhuma providência fosse tomada para deter a explosão demográfica, e dada a suposição de que a taxa de variação na produção de alimentos não poderia sequer acompanhar a da população, o resultado natural seria: miséria, fome, morte.

A partir dos problemas previstos Malthus propôs o controle da natalidade e o casamento tardio como soluções que poderiam assegurar um futuro melhor (MALTHUS, 1996).

O modelo de Malthus estabelecia que a população cresce numa progressão geométrica e os meios de subsistência crescem apenas numa progressão aritmética (MALTHUS, 1996).

Porém, ocorreram diversas mudanças no setor agrícola, Malthus (1996, p. 8) afirma que: “alguns progressos científicos importantes, como as descobertas de adubos químicos e de grãos híbridos, além de técnicas mais refinadas de cultivo e tratamento do solo, permitiram notável aumento da produtividade agrícola”. Fato que se contrapõe com suas primeiras ideias.

Em 1798, Malthus propôs um modelo que, segundo Bassanezi (2013, p.327) “assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, e desta forma, a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição”. Ou seja, esse modelo não estabelece nenhuma limitação, o meio ambiente não causa influência sobre a população (SODRÉ, 2007), e propõe que os indivíduos se reproduzem a todo instante.

Partindo da ideia de que o crescimento populacional se refere da variação da população em função do tempo e que a razão entre a variação da população (P) e a variação do tempo (t) é diretamente proporcional à população atual (BERTOLDO, 2017), tem-se:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (2.2.1)$$

onde k representa uma constante de proporcionalidade, que será positiva em caso de crescimento e negativa em caso de decrescimento.

Esse modelo é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de primeira ordem homogênea e sua resolução pode ser feita a partir da técnica de equações separáveis. Resolvendo a EDO, temos:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

$$\ln|P| + c_1 = kt + c_2$$

c_1 e c_2 constantes arbitrárias, onde $c = c_2 - c_1$:

$$\ln|P| = kt + c_2 - c_1$$

$$\ln|P| = kt + c$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados, temos:

$$e^{\ln|P|} = e^{kt+c}$$

$$e^{\ln|P|} = e^{kt} \cdot e^c$$

$$P(t) = A \cdot e^{kt}$$

Substituindo $t=0$, encontre o valor da constante A: $P_0 = A \cdot 1$

$$A = P_0$$

Com isso, a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \quad (2.2.2)$$

Onde P_0 é a população inicial.

Ambos os lados por P_0 e aplicando a função logarítmica ($\ln$), temos:

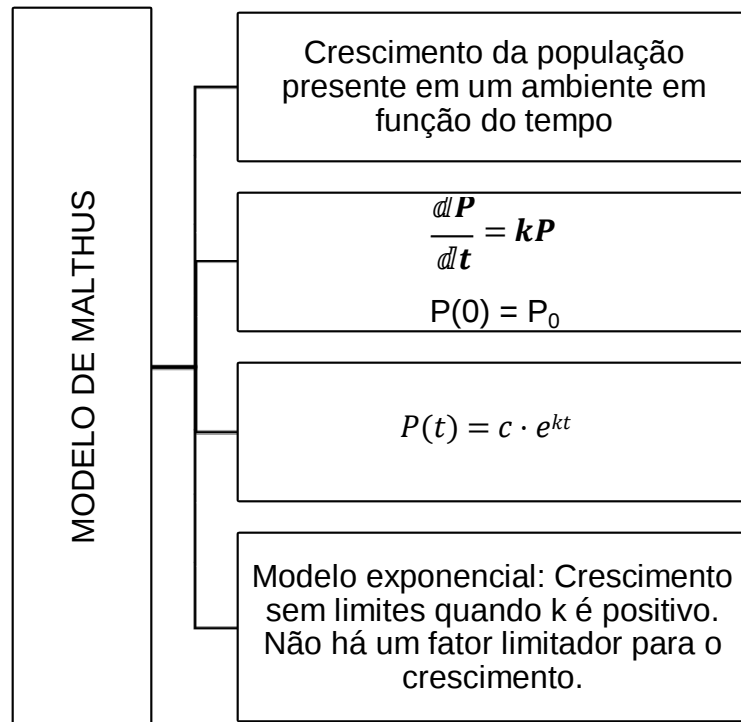
$$\ln \left| \frac{P(t)}{P_0} \right| = \ln |e^{kt}|$$

$$\ln \left| \frac{P(t)}{P_0} \right| = kt$$

Dividindo os dois lados por t obtém-se a equação da taxa de crescimento da população em um período:

$$k = \frac{\ln \left| \frac{P(t)}{P_0} \right|}{t} \quad (2.2.3)$$

Figura 1- Modelo de Malthus



Fonte: Elaborado pelo autor

2.3 MODELO LOGÍSTICO

Como foi visto anteriormente, não existem fatores limitantes no modelo de Malthus, ou seja, a população cresce sem parar. Mas é importante salientar que no crescimento populacional realístico isso não ocorre, sempre haverá fatores, físicos, biológicos ou ambientais, que interferem nesse crescimento.

Um modelo mais realístico é o Modelo de Verhulst ou Modelo Logístico. O matemático belga Pierre-François Verhulst (1838) supôs que a população é propensa a sofrer inibições naturais e que cresce até um limite máximo sustentável e depois tende a se estabilizar (BASSANEZI, 2013). Segundo Bassanezi (2013, p. 328) “é um modelo de crescimento mais significativo, do ponto de vista biológico e realístico”.

A proposta do modelo logístico tem a seguinte equação diferencial para a população em um determinado tempo, ou seja, para $P(t)$ no tempo t , de acordo com

Zill (2014, p.98) é:

$$\frac{dP}{dt} = P \left(r - \frac{r}{K} P \right) \quad (2.3.1)$$

Com K sendo o valor limite da população, chamado de capacidade de suporte do meio ambiente (ZILL, 2014).

Ao renomear as constantes, temos a equação:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \text{ com } P(0) = P_0 \quad (2.3.2)$$

As constantes **a** e **b** são, respectivamente, a taxa de crescimento sem nenhum fator limitante e um inibidor de crescimento, esse pode ser associado a fatores de meio ambiente, falta de alimentos, entre outros (ZIMMERMANN, 2016).

$$\frac{\frac{dP}{P(a-bP)}}{\frac{dP}{P(a-bP)}} = \frac{dt}{\frac{dP}{P(a-bP)}}$$

Decompondo o lado esquerdo pelo método de frações parciais, obtemos:

$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{a-bP} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{A(a-bP) + BP}{P(a-bP)}$$

$$A(a-bP) + BP = 1$$

$$Aa - AbP + BP = 1$$

$$Aa + (B - Ab) = 1$$

$$Aa = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{a}$$

$$B - ab = 0 \Rightarrow B - \frac{1}{a} b = 0 \Rightarrow B = \frac{b}{a}$$

Voltando para a equação (2.3.3), substituindo os valores de A e B e integrando, temos:

$$\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a-bP} \right) dP = dt$$

$$\int \left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a-bP} \right) dP = \int dt$$

$$\frac{1}{a} \ln|P| - \frac{1}{a} \ln|a-bP| = t + c$$

$$\ln \left| \frac{P}{a - bP} \right| = at + ac$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados:

$$e^{\ln \left| \frac{P}{a - bP} \right|} = e^{at + ac}$$

$$\frac{P}{a - bP} = e^{at} \cdot e^{ac}$$

$$\frac{P}{a - bP} = e^{at} \cdot c$$

$$\frac{a - bP}{P} = e^{-at} \cdot c$$

$$\frac{a}{P} - \frac{bP}{P} = e^{-at} \cdot c$$

$$\frac{a}{P} - b = e^{-at} \cdot c$$

$$\frac{a}{P} = e^{-at} \cdot c + b$$

$$P(t) = \frac{a}{c \cdot e^{-at} + b} \quad (2.3.4)$$

Fazendo $P(0) = P_0$, temos:

$$P(0) = \frac{a}{c \cdot e^{-0} + b}$$

$$P(0) = \frac{a}{c + b}$$

$$c + b = \frac{a}{P_0}$$

$$c = \frac{a}{P_0} - b \quad (2.3.5)$$

Substituindo (2.3.5) em (2.3.4) temos:

$$P(t) = \frac{a}{\left(\frac{a}{P_0} - b\right) \cdot e^{-at} + b}$$

$$P(t) = \frac{a}{\frac{ae^{-at}}{P_0} - be^{-at} + b}$$

$$P(t) = \frac{a}{\frac{ae^{-at} - P_0 be^{-at} + bP_0}{P_0}}$$

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$$

A função logística **(2.3.6)**, como é conhecida, é a solução da equação logística **(2.3.2)**.

Para encontrarmos as constantes a e b substituímos $P(t_1) = P_1$ e $P(t_2) = P_2$ na equação **(2.3.6)**, assim temos:

$$P_1 = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at_1}}$$

$$aP_0 = bP_0P_1 + ae^{-at_1}P_1 - bP_0P_1e^{-at_1} \quad (*)$$

Da mesma forma:

$$P_2 = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at_2}}$$

$$aP_0 = bP_0P_2 + ae^{-at_2}P_2 - bP_0P_2e^{-at_2} \quad (**)$$

Daí, igualando (*) e (**), temos:

$$bP_0P_1 + ae^{-at_1}P_1 - bP_0P_1e^{-at_1} = bP_0P_2 + ae^{-at_2}P_2 - bP_0P_2e^{-at_2}$$

$$bP_0P_1 - bP_0P_1e^{-at_1} - bP_0P_2 + bP_0P_2e^{-at_2} = -aP_1e^{-at_1} + aP_2e^{-at_2}$$

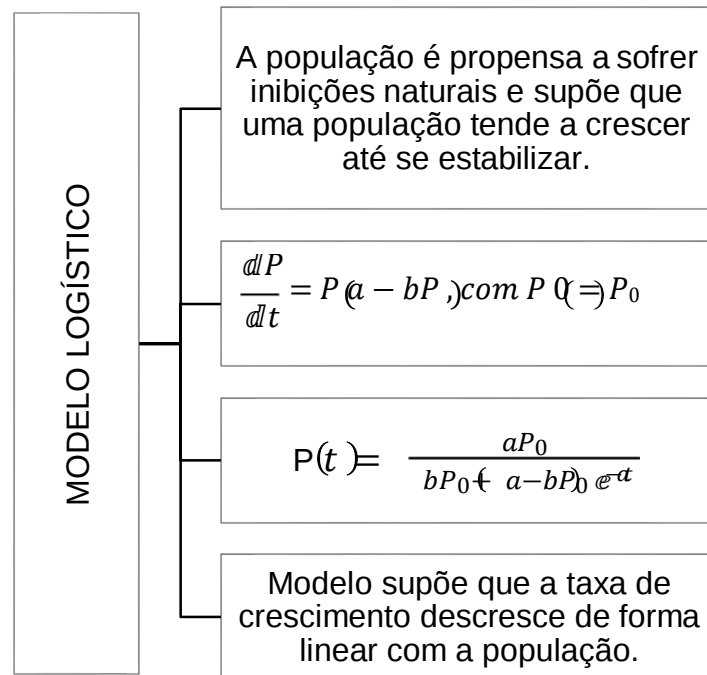
$$b[P_0P_1(1 - e^{-at_1}) - P_0P_2(1 - e^{-at_2})] = -aP_1e^{-at_1} + aP_2e^{-at_2}$$

$$b = \frac{-aP_1e^{-at_1} + aP_2e^{-at_2}}{P_0P_1(1 - e^{-at_1}) - P_0P_2(1 - e^{-at_2})} \quad (2.3.7)$$

Substituindo **(2.3.7)** em (*) e transformando a equação em uma função obtemos:

$$H(x) = bP_0P_1 + ae^{-at_1}P_1 - bP_0P_1e^{-at_1} - aP_0 \quad (2.3.8)$$

Os valores de a e b são encontrados de forma computacional utilizando a função **(2.3.8)** com base em alguns dados das populações obtidas pelo IBGE.

Figura 2 - Modelo logístico

Fonte: Elaborado pelo autor

3 MATERIAIS E MÉTODOS

O procedimento metodológico aplicado nesta pesquisa foi dividido em etapas: coleta de dados realizada no site do IBGE obtendo as populações da cidade de Corrente-PI, cálculos das previsões das populações de acordo com cada modelo estudado e análise dos resultados obtidos.

Os modelos utilizados foram o Modelo de Malthus, no qual sua teoria era que a população cresceria em progressão geométrica, enquanto que a produção de alimentos cresceria em progressão aritmética e que o meio ambiente não causa influência sobre a população calculada (SODRÉ, 2007); o Modelo Logístico criado por Verhulst que supõe que uma população tende a crescer até se estabilizar (BASSANEZI, 2013).

A partir desses dois modelos citados foram feitos os cálculos para determinar as previsões da população para a cidade de Corrente-PI, logo depois foi feita a análise dos resultados obtidos para detectar qual modelo se aproxima mais da realidade.

Os dados coletados no site do IBGE para a comparação são os citados na tabela abaixo:

Tabela 1- Dados do IBGE: população da cidade de Corrente-PI

Ano	População (IBGE)
2000	23226
2010	25407
2012	25737
2013	25927
2014	26011
2015	26084
2016	26149
2017	26205
2018	26575

Fonte: IBGE

Utilizando esses dados e as equações referentes a cada modelo foram calculados as constantes de proporcionalidade em cada caso. Vale ressaltar a utilização do aplicativo Geogebra³, foi necessário para encontrar os valores das constantes **a** e **b** no modelo logístico. E, dessa forma, foram obtidas as previsões para as populações da cidade de Corrente-PI.

4 RESULTADOS

Para a realização dos cálculos referentes as previsões populacionais da cidade de Corrente-PI, utilizando o **Modelo de Malthus**, foram utilizados os dois dados mais recentes do CENSO do IBGE, referentes aos anos de 2000 e 2010. Esses dados foram fundamentais para o cálculo da constante de proporcionalidade **k** e posteriormente para obter as previsões da população.

³ Software de geometria dinâmica, desenvolvido por Markus Hohenwarter, Disponível em: www.geogebra.org.

Para calcular a constante de proporcionalidade **k** utilizamos a equação (2.2.3) e os seguintes dados:

CENSO 2000 = 23226 habitantes;

CENSO 2010 = 25407 habitantes;

t = 10 anos.

Substituindo esses dados na equação (2.2.3), temos que:

$$k = \frac{\ln \left| \frac{25407}{23226} \right|}{10}$$

$$k = \frac{0,089752385}{10}$$

$$\mathbf{k = 0,0089752385}$$

Com o valor de **k** obtido podemos calcular as previsões da população pelo Modelo de Malthus. Substituindo $P_0 = P_{2000} = 23226$ e $k = 0,0089752385$ na equação (2.2.2), temos as seguintes projeções:

➤ 2012

$$P_{(2012)} = 23226 \cdot e^{0,0089752385 \cdot 12}$$

$$\mathbf{P_{(2012)} = 25867}$$

➤ 2013

$$P_{(2013)} = 23226 \cdot e^{0,0089752385 \cdot 13}$$

$$\mathbf{P_{(2013)} = 26100}$$

➤ 2014

$$P_{(2014)} = 23226 \cdot e^{0,0089752385 \cdot 14}$$

$$\mathbf{P_{(2014)} = 26335}$$

➤ 2015

$$P_{(2015)} = 23226 \cdot e^{0,0089752385 \cdot 15}$$

$$\mathbf{P_{(2015)} = 26573}$$

➤ 2016

$$P_{(2016)} = 23226 \cdot e^{0,0089752385 \cdot 16}$$

$$P_{(2016)} = 26812$$

➤ 2017

$$P_{(2017)} = 23226 \cdot e^{0,0089752385 \cdot 17}$$

$$P_{(2017)} = 27054$$

➤ 2018

$$P_{(2018)} = 23226 \cdot e^{0,0089752385 \cdot 18}$$

$$P_{(2018)} = 27298$$

Sintetizando os dados obtidos em uma tabela juntamente com os dados oficiais do IBGE, temos:

Tabela 2- Comparação entre dados do IBGE e do modelo de Malthus

Ano	População (IBGE)	População (Modelo de Malthus)
2012	25737	25867
2013	25927	26100
2014	26011	26335
2015	26084	26573
2016	26149	26812
2017	26205	27054
2018	26575	27298

Fonte: Elaborado pelo autor.

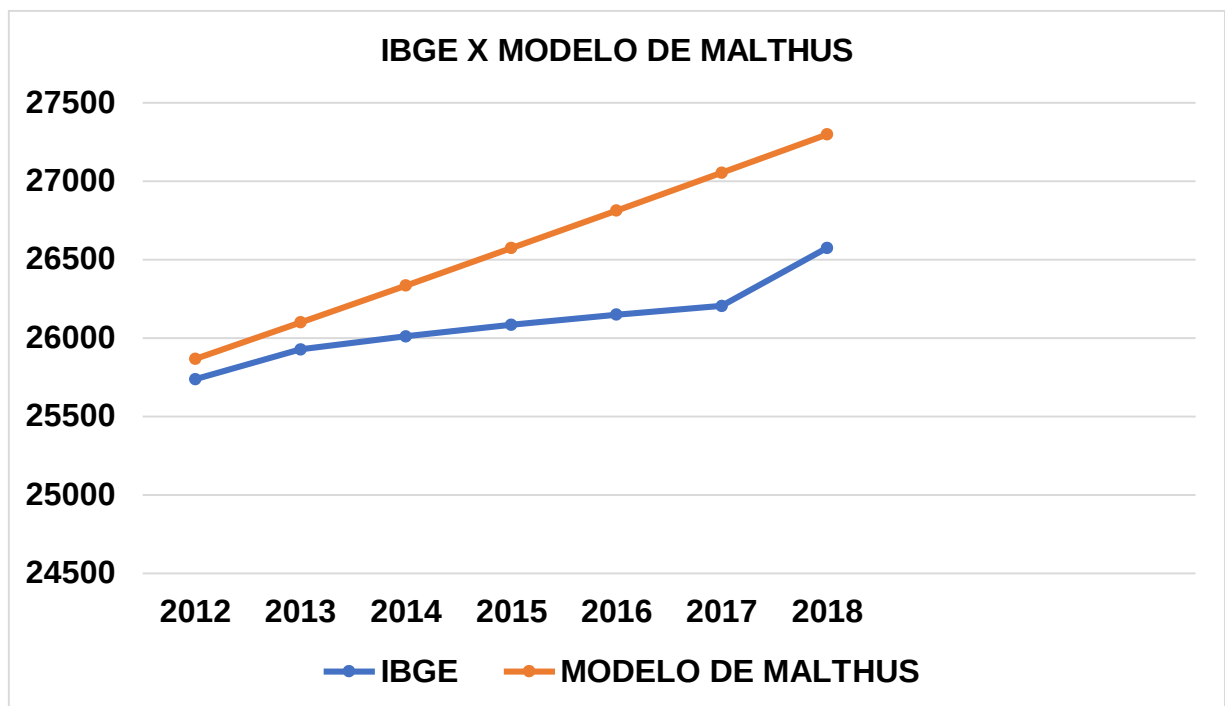
Ao calcular o erro relativo (Erro relativo = $\frac{|\text{valor aproximado} - \text{valor exato}|}{\text{valor exato}}$) das previsões pelo modelo de Malthus temos o seguinte resultado:

Tabela 3- Comparação entre dados do IBGE e do modelo de Malthus

Ano	População (IBGE)	População (Modelo de Malthus)	Diferença	Erro relativo (%)
2012	25737	25867	130	0,50%
2013	25927	26100	173	0,67%
2014	26011	26335	324	1,24%
2015	26084	26573	489	1,87%
2016	26149	26812	663	2,53%
2017	26205	27054	849	3,24%
2018	26575	27298	723	2,72%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 1 Comparação dos dados do IBGE x Modelo de Malthus



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já para os cálculos das previsões da população utilizando o **Modelo Logístico** usamos os dados do IBGE dos anos de 2012, 2014 e 2016 e substituímos, respectivamente, em P_0 , P_1 e P_2 na equação (2.3.7).

Temos os seguintes dados:

$$2012: P(0) = P_0 = 25737;$$

$$2014: P(2) = P_1 = 26011;$$

$$2016: P(4) = P_2 = 26149.$$

Substituindo em **(2.3.7)**, temos que:

$$b = \frac{-26011ae^{-2a} + 26149ae^{-4a}}{669445107(1 - e^{-2a}) - 672996813(1 - e^{-4a})} \quad (4.1)$$

Substituímos a expressão **(4.1)** na função **(2.3.8)**, assim segue:

$$\begin{aligned} H(x) = & \left(\frac{-26011ae^{-2a} + 26149ae^{-4a}}{669445107(1 - e^{-2a}) - 672996813(1 - e^{-4a})} \right) 669445107 + 26011ae^{-2a} \\ & - \left(\frac{-26011ae^{-2a} + 26149ae^{-4a}}{669445107(1 - e^{-2a}) - 672996813(1 - e^{-4a})} \right) 669445107e^{-2a} \\ & - 25737a \end{aligned} \quad (4.2)$$

Com a função **(4.2)** e com o auxílio do aplicativo Geogebra encontramos o valor de $a = 0,35087786$. Utilizando esse valor e substituindo em **(4.1)** temos que $b = 0,00001335$.

Voltando para a equação **(2.3.6)** e substituindo os valores de a e b conseguimos obter uma função que representa o crescimento populacional da cidade de Corrente-PI referente ao modelo logístico. Dessa forma, temos que:

$$P(t) = \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786t}} \quad (4.3)$$

A partir da função **(4.3)** calculamos as previsões para a população nos anos de 2012 a 2018:

➤ 2012, $t = 0$:

$$\begin{aligned} P_{2012} &= \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786 \cdot 0}} \\ P_{2012} &= 25737 \end{aligned}$$

➤ 2013, $t = 1$:

$$\begin{aligned} P_{2013} &= \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786 \cdot 1}} \\ P_{2013} &= 25514 \end{aligned}$$

➤ 2014, $t = 2$:

$$P_{2014} = \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786 \cdot 2}}$$

$$P_{2014} = 26009$$

➤ 2015, t = 3:

$$P_{2015} = \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786 \cdot 3}}$$

$$P_{2015} = 26089$$

➤ 2016, t = 4:

$$P_{2016} = \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786 \cdot 4}}$$

$$P_{2016} = 26146$$

➤ 2017, t = 5:

$$P_{2017} = \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786 \cdot 5}}$$

$$P_{2017} = 26186$$

➤ 2018, t = 6:

$$P_{2018} = \frac{9030,54348282}{0,34358895 + 0,00728891e^{-0,35087786 \cdot 6}}$$

$$P_{2018} = 26215$$

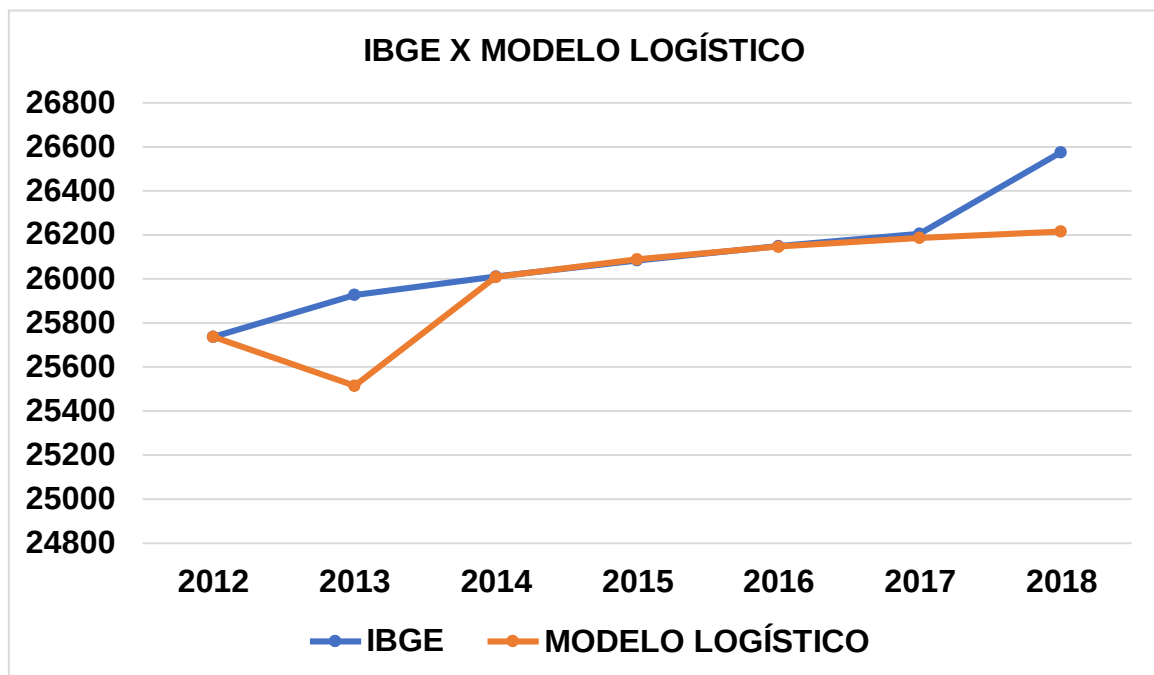
Reunindo todos esses valores obtidos e também com o erro relativo em relação aos dados oficiais do IBGE, temos o resultado na seguinte tabela:

Tabela 4 - Comparação entre dados do IBGE e do modelo logístico

Ano	População (IBGE)	População (Modelo Logístico)	Diferença	Erro relativo (%)
2012	25737	25737	0	0%
2013	25927	25514	413	1,59%
2014	26011	26009	2	0,007%
2015	26084	26089	5	0,019%
2016	26149	26146	3	0,011%
2017	26205	26186	19	0,07%
2018	26575	26215	360	1,35%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 2 Comparação dos dados do IBGE x Modelo Logístico



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÃO

Analisando esses dois modelos percebe-se que o modelo de Malthus cresce sem parar, é possível notar que as populações calculadas a partir do modelo de Malthus sempre se diferem com um valor acima dos dados oficiais, diferença chega a valores acima de 800 habitantes e um erro de mais de 3%. É importante lembrar que esse modelo é exponencial, ou seja, ele cresce sem que haja algo para interromper. Dessa forma, quando calculadas as projeções para longo prazo, mais elas se distanciarão dos dados reais.

É importante salientar que essa diferença dos dados não foi tão grande pelo fato da cidade analisada não ter um crescimento expressivo, repare que a cidade de Corrente-PI em 6 anos cresceu apenas 838 habitantes. Caso essa aplicação fosse realizada em uma cidade que cresce de forma muito rápida, os dados iriam se distorcer ainda mais. Dessa forma, esse primeiro modelo analisado ainda é usável em cidades com pouco crescimento, visto que os as populações calculadas tiveram um erro pequeno.

Ao realizar a mesma aplicação com o modelo logístico percebe-se que a população obtida pelo IBGE e a prevista pelo modelo são bem próximas, destacando que a maior diferença é apenas 413 habitantes e em outras quase se igualam com os dados reais. Da mesma forma analisando o erro relativo, em que o maior deu 1,6% e o menor praticamente 0%. Isso se deve pelo fato do modelo logístico de Verhulst ter um fator limitante, ou seja, a população cresce até se manter estável.

Portanto, como era esperado o melhor modelo, entre os dois analisados, para ter projeções populacionais mais próximas da realidade foi o modelo logístico de Verhulst, o que vai ao encontro com as ideias de (SODRÉ, 2007), (SETI et al., 1999), (LIMA, 2016).

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. Ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BERTOLDO, Graciela Elizabeth Bönmann et al. **MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE SANTA ROSA-RS**. Santo Ângelo - RS, 2017. Disponível em: <http://www.santoangelo.uri.br/anais/ciecitec/2017/resumos/comunicacao/trabalho_2923.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2019.

BEZERRA, Amanda Dias Miguel et al. **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS AO MODELO DE MALTHUS NA DINÂMICA DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO DE BATAGUASSU – MS**. Três Lagoas - MS, 2016. Disponível em: <http://www.aems.edu.br/conexao/edicaoanterior/Sumario/2016/downloads/2.%20Ci%C3%A2ncias%20Exatas%20e%20da%20Terra,%20Engenharias%20e%20Ci%C3%A2ncias%20Agr%C3%A1rias/008_Eng_Ambiental%20-%20Equa%C3%A7%C3%B5es%20Diferenciais...pdf>. Acesso em: 16 fev. 2019.

BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2003.

DIAS, V. M.; PESSOA, R. S. **Estudo da Dinâmica de Crescimento Populacional da Cidade de São José dos Campos – SP**. São José dos Campos-SP, 2016. Disponível em: <http://cronos.univap.br/cd/INIC_2016/anais/arquivos/RE_1006_0801_01.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2019.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/>>. Acesso em: 27 dez. 2018.

LIMA, Reneé Rodrigues. **Modelagem Matemática da População Teresinense e a Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)**. 2016. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016. Disponível em: <<http://repositorio.ufpi.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/154/Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 04 dez. 2018.

MALTHUS, T. R.; **Princípios de economia política e considerações sobre sua aplicação prática; Ensaio sobre a população**. São Paulo: Nova Cultural, 1996. 384p. (Os Economistas). Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3306652/mod_resource/content/1/malthus%20%281996%29%20principios%20de%20economia%20politica.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2019.

SCHEFFER, N. F. **Modelagem matemática: uma abordagem para o ensino aprendizagem da matemática**. Educação Matemática em Revista - RS, n.1, p.11-16, maio. 1999.

SETI, Betine Diehl et al. ESTUDO DA DINÂMICA POPULACIONAL USANDO OS MODELOS DE MALTHUS E VERHULST: UMA APLICAÇÃO À POPULAÇÃO DE PASSO FUNDO. **Revista Teoria e Evidência Econômica**, Passo Fundo, v. 12, n. 7, p.137-143, maio 1999. Disponível em: <<http://seer.upf.br/index.php/rtee/issue/view/481>>. Acesso em: 01 dez. 2018.

SODRÉ, Ulissys. **Modelos matemáticos**. Londrina PR, 2007. Disponível em: <<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>>. Acesso em: 04 dez. 2018.

SOUSA, Felipe dos Santos; SANCHES, Luiz Carlos Facundo. **Uso de EDO's no Crescimento Demográfico do Município de Santa Fé do Sul Através dos Modelos de Malthus e Verhulst**. In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2., 2011, Ilha Solteira. Anais. Bauru - SP: Sbmact, 2011. p. 483 - 485. Disponível em: <<http://www.sbmact.org.br/cmact/cmact-se/2011/trabalhos/PDF/317.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2019.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ZIMMERMANN, Samuel Sonogo. **ANÁLISE QUANTITATIVA E QUALITATIVA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES AUTÔNOMAS A UMA E DUAS VARIÁVEIS DEPENDENTES**. 2016. 40 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria Centro de Ciências Naturais e Exatas, Santa Maria, 2016. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/coordmat/images/TCC_1-2016/TCC_SamuelZimmermann.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2019.